Optimiser le deneigement de Montréal: une histoire de graphe

Lilian Schall, Theo Schandel, Quentin Kuttler, Noé Bigorre

Juin 2023

Abstract

Nous vous présentons une solution répondant a trois grands problemes afin de minimiser le coût des opérations de déneigement à Montréal. Notre solution implique l'utilisation de drones pour une analyse aérienne des niveaux de neige, ainsi que l'optimisation des trajets du drone et des véhicules de déneigement.

1 Introduction

La ville de Montréal fait annuellement face à des épisodes neigeux entre octobre et avril. Pour éviter une paralysie de l'activité économique, la municipalité se dote d'équipes de déneigement afin d'évacuer les chutes de neige des routes de la ville. Pour que les opérations de déneigement soient pérennes économiquement pour la ville de Montréal, il est intéressant d'étudier le problème dans l'objectif d'optimiser les coûts d'opération, en abordant au travers de la théorie des graphes le parcours de la ville par survol d'un drone, ainsi que l'établissement d'itinéraires pour la flotte de déneigeuses qui est modulaire en fonction du nombre de vehicule disponibles. Enfin, nous aborderons sous l'oeil de la programmation linéaire quelles seraient le nombre optimal de véhicules pour déneiger en une journée type la ville de Montréal en minimisant une fonction modélisant le coût d'une journée type de déneigement de Montréal. Dans notre approche, nous représentons ainsi l'ensemble du réseau routier de Montréal sous la forme d'un graphe, dont les sommets sont les intersections entre les différentes routes, et les aretes sont les routes.

2 Etat de l'art et formalisation des problemes

Durant notre étude, il nous faut premièrement établir quels sont les algorithmes et notions qui sont impliquées dans notre approche pour résoudre nos différents objectifs. Formalisons en premier lieu nos différents objectifs. Comme mentionné précédemment, nous représentons Montréal sous la forme d'un graphe. Le premier problème sous-jacent à nos deux premiers objectifs - respectivement parcourir Montréal avec un drone et déterminer des itinéraires de déneigeuses dans des quartiers - est le passage par toutes les routes de Montréal ou de l'un de ses quartiers. Sous l'oeil de la théorie des graphes, ce problème se formalise par l'établissement d'un chemin passant par toutes les aretes d'un graphe connexe. Pour que ce chemin soit le plus court possible, il est preferable que l'on passe uniquement une fois par chaque arete du graphe. Un circuit eulérien serait par exemple un tel chemin. Ainsi on dit qu'un graphe est eulérien s'il admet un circuit eulérien. Mais tous les graphes ne sont pas eulériens, il faut ainsi les rendre tels. Formellement, ce problème est semblable à un problème connu nommé "le problème du postier chinois". Le cas général de celui-ci permet par ailleurs de rendre notre graphe eulérien, afin d'y trouver un circuit eulérien.
Le second problème sous-jacent au troisième objectif - à savoir déterminer une fonction modélisant le coût de déneigement lors d'une journée type - est le problème d'optimisation linéaire d'une fonction linéaire afin de trouver un extremum de cette fonction de notre choix. Ce problème survient en programmation linéaire, où des algorithmes comme le simplexe permettent de résoudre ces problèmes d'optimisation linéaire.
Maintenant que nous avons pu établir un état de l'art formaliser nos deux problèmes, étudions ensemble l'approche technique de notre solution.

3 Expérience

Dans notre approche, nous avons formalisé et établi deux problèmes, respectivement déterminer un chemin minimal passant par toutes les aretes d'un graphe et déterminer une fonction linéaire de coût à minimiser. Il nous faut désormais établir un modèle pour chacun des problèmes que l'on souhaite résoudre:

- Nous modéliserons Montréal et les différents quartiers à traiter sous la forme d'un graphe, dont les sommets sont les intersections entre les différentes routes, et les aretes sont les routes. Les variables du problème sont ainsi la distance representée par les poids de chaque arête du graphe, le problème revenant à chercher le chemin le plus court, ainsi que le temps, puisque le drone doit parcourir Montréal dans un temps suffisamment court pour que les données soient encore valables.

- Nous modéliserons la fonction de coût sous la forme d'une fonction linéaire à minimiser. Nous étudierons ainsi le coût d'une journée type des opérations de déneigement en fonction du nombre et du type de véhicules disponibles, ces derniers étant les variables du problème qu'il nous faut trouver.

3.1 Mission 1: Cartographier le niveau de neige des rues de Montréal

L'objectif de cette mission est d'établir un itinéraire de vol pour un super drone équipé d'un Lidar permettant de détecter le niveau de neige d'une rue qu'il survole. Pour cartographier l'ensemble de Montréal, l'itinéraire doit passer par toutes les rues de Montréal, et ce, le plus rapidement possible afin d'engendrer le moins de frais possible. Il nous est ainsi stipulé dans le dossier que le Super Drone a un coût journalier de 100 euros et un coût kilométrique de 0.01 euros.

Première approche

Une première approche est d'obtenir le graphe de Montréal depuis Openstreetmaps en ne sélectionnant que le réseau routier. Dans ce graphe, on cherche à savoir si celui-ci admet un circuit eulérien. Comme le drone survole les routes, on considérera le graphe de Montréal comme un graphe non-orienté connexe. Ce dernier n'est cependant pas eulérien. Pour atteindre notre objectif, il nous faut alors eulériser notre graphe, c'est-à-dire ajouter aux sommets impairs une arête reliant ainsi les deux sommets impairs les plus proches (c'est un couplage parfait).
Comme mentionné précédemment, le cas général du problème du postier chinois permet d'effectuer pareille opération, on aurait alors obtenu un graphe admettant un circuit eulérien que l'on aurait pu retravailler en remplaçant toutes les aretes (u, v) inexistantes dans le graphe original par le chemin le plus court entre u et v en appliquant l'algorithme de Djisktra.
Le problème et principal goulot d'étranglement de cette approche sont que, du fait de sa densité en matière de nombre de sommets, le graphe de Montréal est difficile à euleriser en des temps convenables. En effet, au travers d'un estimateur de temps de processus, et sur une machine équipé d'un i7 6700K et de 16go de RAM, il est estimé qu'il faudrait 5 jours de calcul pour euleriser le graphe, ce qui est une contrainte de temps que nous n'avons pas pu faire entrer dans cette étude.

Deuxième approche

Une deuxième approche - et celle que nous avons mis en place pour cette mission - est de découper le graphe de Montréal en ses 19 arrondissements différents, d'euleriser chaque graphe de quartier pour y trouver un circuit eulérien et de connecter chaque circuit entre eux en cherchant le chemin le plus court reliant les deux sommets représentant les points de départ des circuits.
Ainsi, en utilisant djisktra comme algorithme de recherche du chemin et en utilisant le cas général du postier chinois comme algorithme pour euleriser chaque graphe de quartier, on obtient:

- Un temps de calcul de l'ordre d'une heure et trente minutes pour l'ensemble de Montréal.
- Une distance de parcours pour le drone de 6459 kilomètres.

Critique

En estimant que le Super Drone aille à une vitesse moyenne de 100km/h, on obtiendrait un temps de trajet moyen t tel que : $t = \frac{6459}{100} = 64,59h$ ce qui reviendrait à environ $2,69$ jours de trajet. Un tel temps de parcours n'est pas viable compte tenu du fait que les données collectées au debut ne seraient plus viables à la fin de l'operation de reconnaissance. Afin de palier cela, il conviendrait de deployer plus de drones afin de cartographier de manière parallèle les rues de Montréal.

3.2 Mission 2: Etablir des itineraires de deblaiement pour des deneigeuses

Après la réalisation d'un itinéraire pour cartographier les niveaux de neige à l'aide d'un drone, nous nous penchons maintenant sur le défi suivant : établir des itinéraires de déblaiement pour les déneigeuses.

Dans cette partie, nous considérons que les déneigeuses seront les seules à circuler sur le réseau routier de la ville. Par conséquent, elles ne seront pas tenues de suivre le code de la route, ce qui leur permettra d'emprunter des routes en sens inverse. Cette mesure vise à faciliter et accélérer la recherche d'itinéraires dans le quartier.

Dans l'établissement d'itinéraires de déblaiement pour les déneigeuses, l'objectif premier est de définir un chemin parcourant l'ensemble des routes du quartier concerné. Cela implique une série de transformations et d'opérations sur le graphe initial représentant le réseau routier.

Le point de départ de cette opération est l'eulérisation du graphe. Ce processus modifie le graphe afin de faciliter l'identification d'un circuit qui permette de traverser l'ensemble des arêtes du graphe. En d'autres termes, cela permet de tracer un itinéraire passant par chaque rue du quartier.

Une fois le graphe eulerisé, la recherche du circuit eulérien peut commencer. Ce circuit sera un tracé initial qui guidera l'itinéraire des déneigeuses à travers le quartier.

Ensuite, avec le graphe original non eulerisé en considération, une optimisation est mise en œuvre. Pour chaque arête du graphe, son index dans le circuit eulérien est recherché. Si l'arête est présente dans le circuit, son index est marqué sur le graphe. Si ce n'est pas le cas, un chemin le plus court entre les deux nœuds de l'arête est établi, et chaque arête de ce chemin est étiquetée.

Ce processus assure que toutes les rues du quartier sont incluses dans l'itinéraire des déneigeuses, même si cela peut nécessiter de passer plusieurs fois par certaines routes. Cela permet ainsi d'optimiser l'efficacité des opérations de déneigement.

Pour ce qui est du problème du partage des routes entre plusieurs déneigeuses, nous avons opté pour une stratégie de séparation du chemin total en sous chemin parcouru par chaque déneigeuse. Cette approche offre un temps de calcul linéaire, ce qui permet un temps de déploiement des déneigeuses beaucoup plus court.

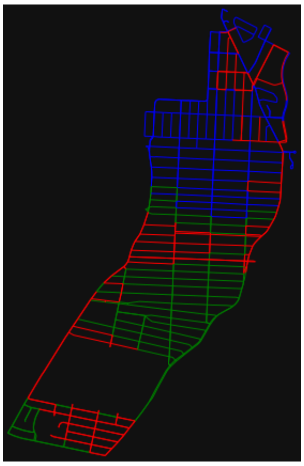

Figure 1: *graph du parcours du quartier verdun par trois vehicules*

		Déneigeuse T1		Déneigeuse T2	
Véhicules	Distance	Temps	Coûts	Temps	Coûts
1	84.43 km	8:26:34	592.87$	4:13:17	909.759$
2	42.31 km	4:13:53	1046.54$	2:06:56	1655$
3	28.29 km	2:49:47	1531.12$	1:24:53	2436.78$
4	21.33 km	2:07:59	2023.46$	1:03:59	3227.73$
5	17.16 km	1:42:57	2518.87$	0:51:28	4022.30$

Table 1: Comparaison de la variation de la distance, du temps et du coût en fonction du nombre de véhicule dans le quartier Verdun.

Il semblerait à première vue que le coût d'une déneigeuse T2 soit plus grand que celui des déneigeuses T1, cependant il ne faut pas oublier que cette comparaison est fait à nombre de véhicules égaux. Une comparaison plus intéressante serait de regarder les coûts à temps égaux. On voit alors que les déneigeuses t2 sont en moyenne 30% moins coûteuse que les déneigeuses T1 (excepté pour une unique déneigeuse T1 qui est le coût le plus bas).

Critique Malgré la robustesse de l'approche développée pour établir les itinéraires de déblaiement, plusieurs points peuvent être critiqués ou identifiés comme des opportunités d'amélioration.
Le premier point concerne le manque d'information quant à la localisation des entrepôts où sont stockés les véhicules de déneigement. En effet, la position de ces entrepôts peut grandement influencer l'efficacité des itinéraires tracés, car ils représentent les points de départ et d'arrivée des déneigeuses. Dans le contexte de notre étude, faute d'information précise à ce sujet, un point de départ aléatoire a été choisi pour chaque itinéraire. Cependant, cette approximation pourrait mener à des inefficacités et des dépenses inutiles, puisqu'il est possible que les véhicules parcourent de grandes distances avant même de commencer le déneigement.
Une autre préoccupation réside dans l'hypothèse sous-jacente que toutes les routes sont également prioritaires. Dans la réalité, certaines routes peuvent être plus critiques pour le bon fonctionnement de la ville et nécessiter un déneigement plus rapide. L'algorithme actuel ne tient pas compte de ces priorités potentielles, ce qui pourrait être une lacune dans certaines circonstances.

3.3 Mission 3: Elaborer une fonction de coût pour une journée type de déblaiement dans Montréal

Maintenant que nous avons établi la partie opérationnelle du déneigement de la ville de Montréal, il nous faut definir quelles seraient les coûts en jeu pour une journée type en fonction du nombre de véhicules disponibles. Nous souhaitons par la suite optimiser ce coût en fonction du nombre et du type de véhicules à utiliser. Pour cela, nous faisons appel à la programmation lineaire. Plus particulierement, le problème sous-jacent à cet objectif est un problème d'optimisation lineaire. Ainsi, on représente ce problème de la manière suivante:

Variable de decision

x le nombre de véhicules de type I

y le nombre de véhicules de type II

Constantes choisies

$d \in \mathbb{R}$ la distance de parcours

Fonction objectif

$$minZ = (500 + 1.1 \times d + 1.1 \times 8 + 1.3 \times 16) \times x + (800 + 1.3 \times d + 1.3 \times 1.5 \times 16) \times y$$

Sous les contraintes

$$10 \times 24 \times x + 20 \times 24 \times y \leq d$$

Ce programme permet ainsi de déterminer le nombre et le type de véhicules optimaux pour minimiser le coût de parcours. La constante de distance permet de mentionner combien de km l'on doit parcourir avec les véhicules disponibles. Cette constante sera utilisée par la suite dans les contraintes de la fonction objectif. Cette contrainte permet de vérifier que le coût prend bien en compte le parcours total de la distance.

En utilisant $d = 6349km$ la distance de Montréal à parcourir, et en ayant seulement des véhicules de type 1 disponible, il nous faudrait 27 véhicules pour pouvoir déneiger l'ensemble de Montréal en 24h, le tout pour un coût de 198787 euros/jour. De plus, nous avons estimé qu'il est plus avantageux d'utiliser une flotte de véhicule de type II. Il faudrait en effet 0 véhicules de type I et 14 véhicules de type II pour pouvoir déneiger l'ensemble de Montréal en 24h, pour un montant de 120223 euros/jour. Tout ceci est resumé dans la figure suivante:

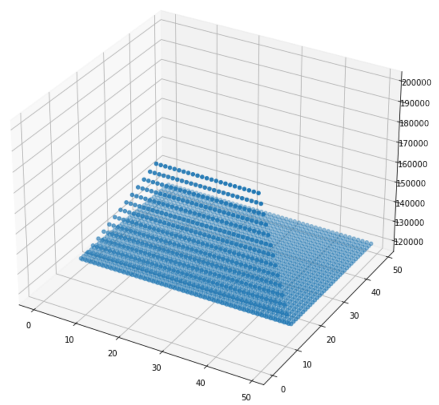

Figure 2: Plot de la fonction de coût en fonction du nombre de type I et de type II

Critique:

Bien que cette contrainte fut mentionné dans le sujet, nous aurions aussi pu étudier quel serait le coût de deblaiement sur un temps autre que 24h, et ainsi pouvoir étudier les fluctuations de prix.

4 Conclusion

Durant notre étude, nous avons ainsi pu décrire la méthode nous permettant de définir un itinéraire de manière optimisée pour notre drone ainsi que pour une flotte de véhicules. Cette étude ayant un aspect pratique, nous avons ainsi par la suite déterminé un coût à minimiser en fonction du nombre de véhicules que la ville de Montréal doit mettre à disposition pour déneiger Montréal en 24h. Une amélioration de cette étude résiderait dans l'étude de la prioritisation des routes à déblayer afin d'obtenir un flux de transport optimal tout au long du déblaiement.