Módulo 4 de Computación

¡¡¡Bienvenidos!!!

Ing. Mara Félix Fornés, MTI
mara.felix@tec.mx

Ing. Mara Félix Fornés, MTI
Profesora de cátedra para el depto. De Computacion

mara.felix@tec.mx

Semblanza

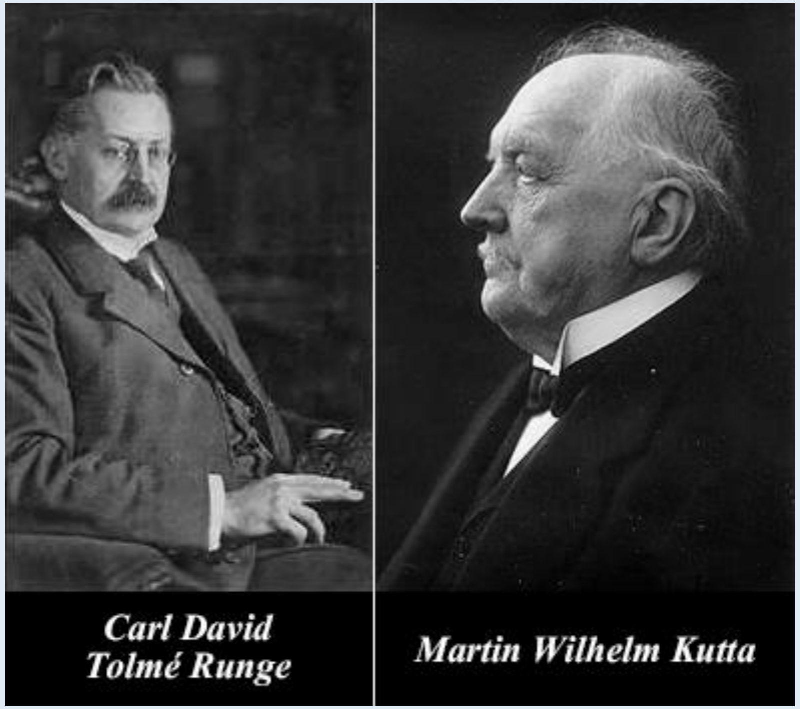
- Ingeniera en Sistemas Computacionales (ITESO 1991).
- Maestra en Tecnologías de Información (ITESM 2005).
- Profesora de cátedra campus Guadalajara desde 1999.

¿Qué voy a aprender con este módulo?

- El uso de herramientas computacionales o librerías de un lenguaje de programación para resolver ecuaciones diferenciales por los métodos de **Runge-Kutta de Segundo y Cuarto Orden**. Además de ajuste de curvas mediante métodos numéricos.

MATLAB® Online

Implementación de métodos numéricos iterativos.



¿Qué contenidos voy a aprender?

Conceptuales

- Solución numérica de ecuaciones diferenciales.
  - Método de Runge Kutta de 2do. orden.
  - Método de Runge Kutta de 4to. orden.
- Ajuste de curvas.
  - Regresión lineal por mínimos cuadrados.
  - Regresión no lineal y polinomial.

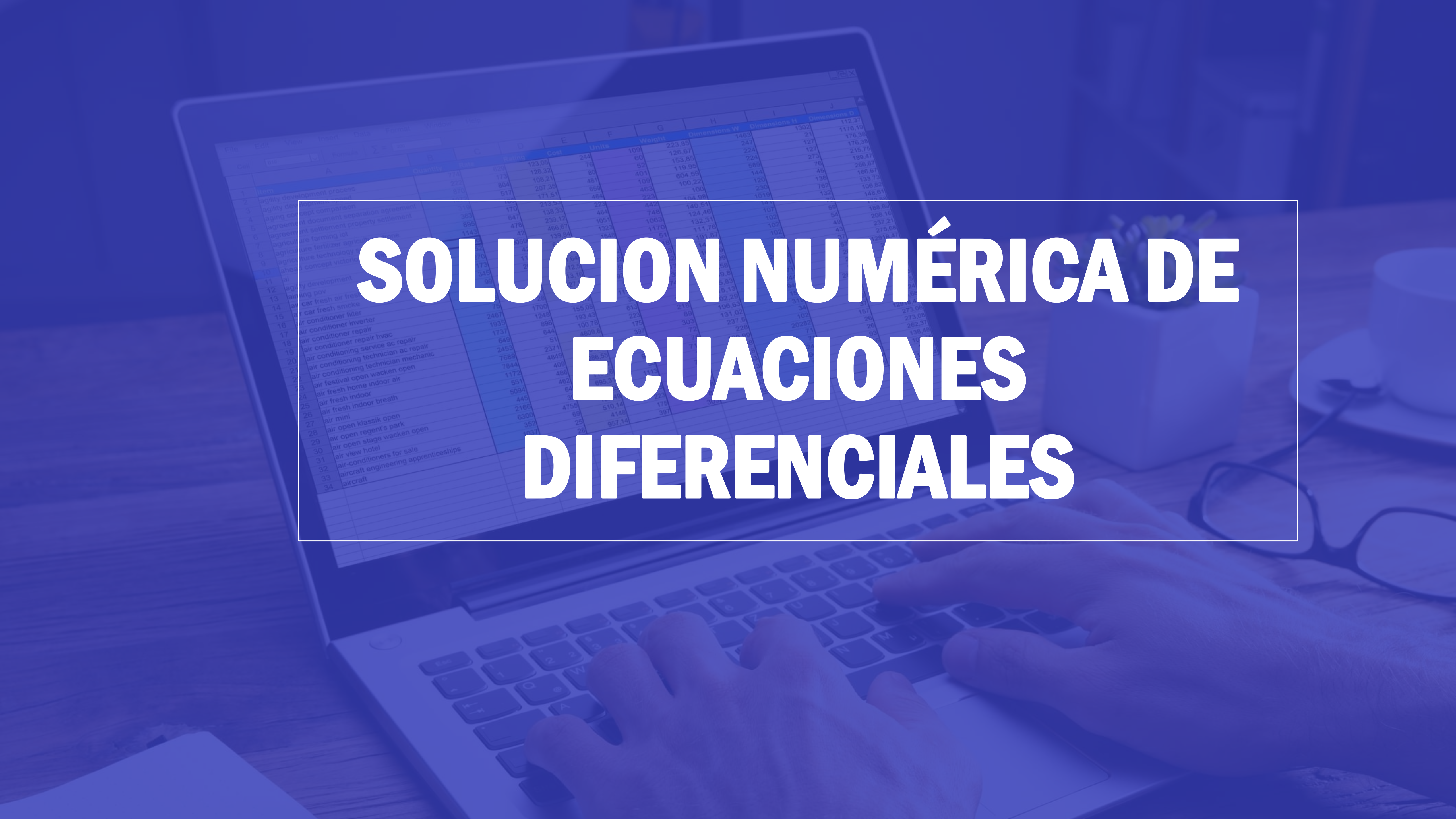
Procedimentales

- Diseñar programas/scripts para resolver ecuaciones diferenciales mediante métodos numéricos.
- Uso de Métodos numéricos para ajustar curvas a conjuntos de datos provenientes de experimentos.

Actitudinales

- Integridad.

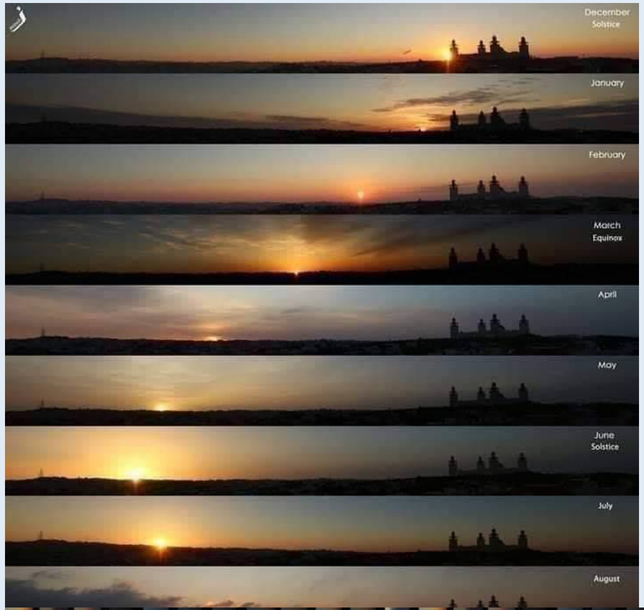
Una persona íntegra es aquella que siempre hace lo correcto; La integridad de una persona se observa en su honestidad y firmeza.

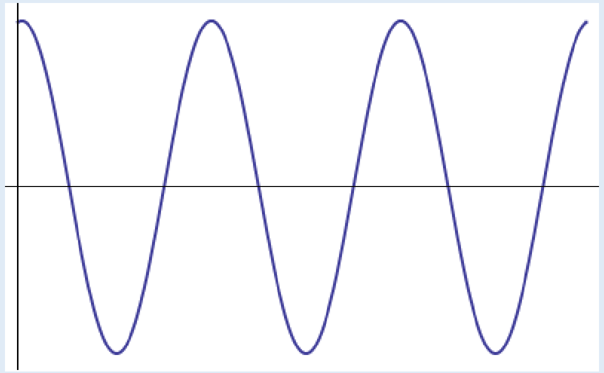


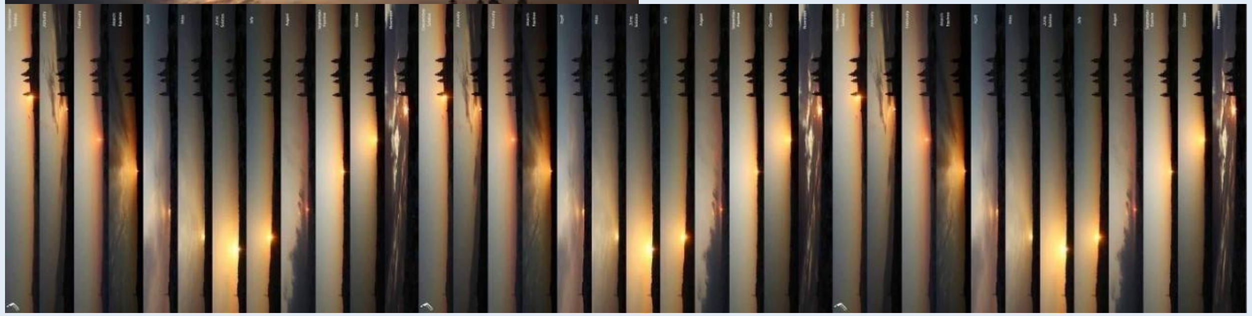
SOLUCION NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

¿Qué es una Ecuación Diferencial? ¿Qué representan las ecuaciones diferenciales?

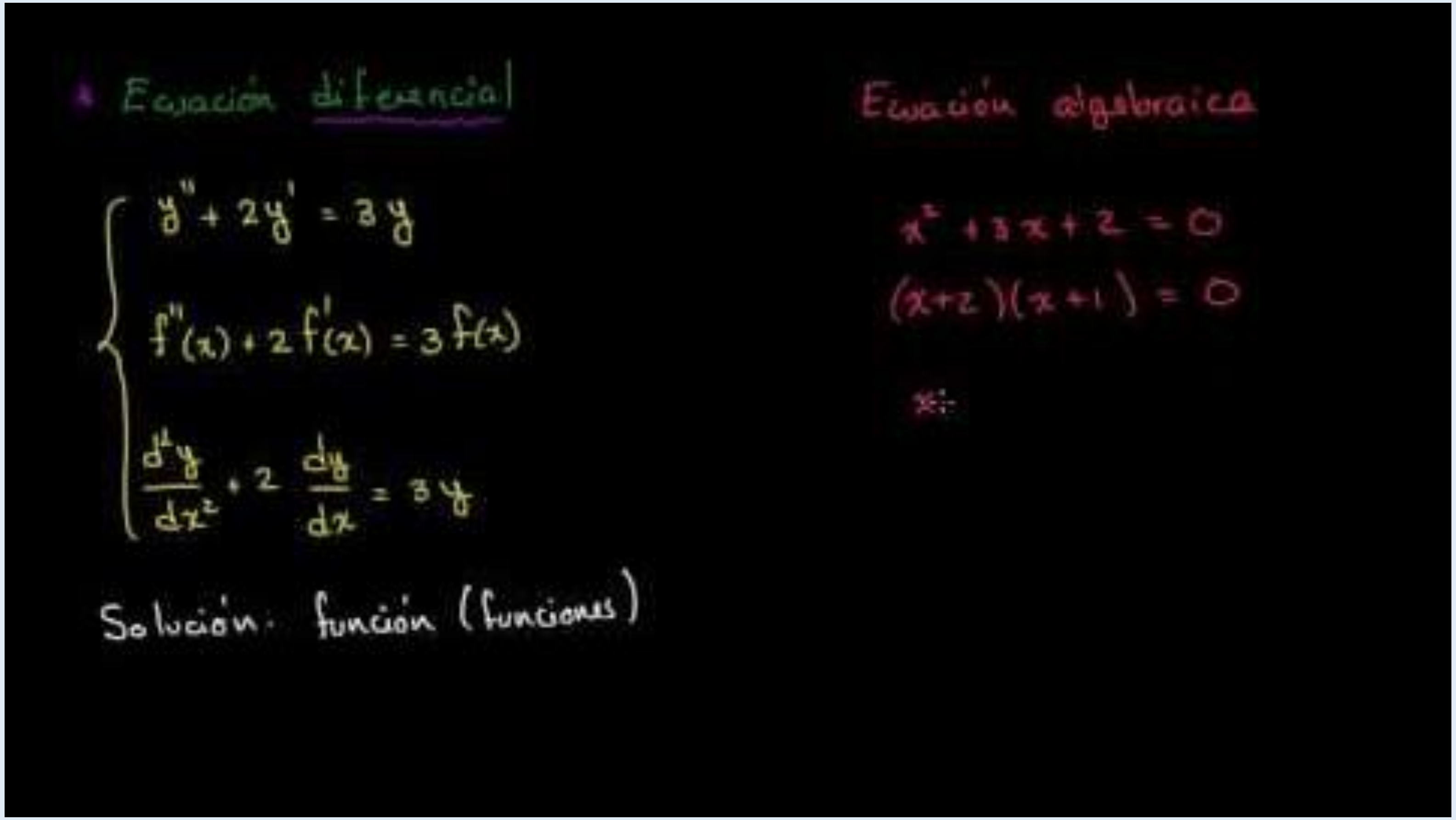
- Una ecuación diferencial (E.D.) nos permite simular o modelar un fenómeno de la realidad.
- Cómo el crecimiento de una población, o la velocidad de un tren en un riel magnético, o el punto del horizonte donde saldrá el Sol.
- Es diferencial porque dependiendo del incremento en el tiempo (dt) se detectan cambios en el resultado.







¿Qué es una ecuación diferencial?



Video de apoyo.
KhanAcademy Español duración: 7 minutos y 59 segundos
https://www.youtube.com/watch?v=1n8Rv2eEVR0&feature=emb_logo

Ecuaciones diferenciales

- Si una ecuación diferencial contiene derivadas respecto a una sola variable independiente se llama Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO, u ODE en inglés).

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \frac{dx}{dz} - \frac{dy}{dz} + 3y = 0$$

- Si contiene derivadas parciales respecto a dos o más variables independientes se conocen como **Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP, o PDE en inglés).**

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} = xyz^2 \qquad \nabla \cdot V = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

EJEMPLOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

$$-2y'' + 3y' - y = e^t$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

$$-2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

Otros conceptos

- **El orden de una ecuación diferencial** es el que corresponde a la derivada de mayor grado en la ecuación.

1. $\boxed{y' + t^2 y = te^t}$

   Ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden.

2. $\boxed{y''' + 4y'' - 5y' + 3y = \operatorname{sen} t}$

   Ecuación diferencial ordinaria lineal de tercer orden.

3. $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$

   Ecuación en derivadas parciales de segundo orden.

- **Forma general de las ecuaciones diferenciales ordinarias:**

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^n(x)) = 0$$

Solución de una ecuación diferencial

- Una solución en una ecuación diferencial en un intervalo I, es cualquier función definida en la que satisface la ecuación, es decir, la reduce a una identidad.

EJEMPLO 2. Comprobar que la función $f(x) = e^{-3x} + 5$ es solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

$$y' + 3y = 15.$$

Solución. Es claro $f(x)$ y $f'(x)$ se definen para todo x en $\mathbb{R}$. Sustituyendo sus expresiones en la ecuación diferencial resulta

$$\begin{aligned} -3e^{-3x} + 3(e^{-3x} + 5) &= 15 \\ -3e^{-3x} + 3e^{-3x} + 15 &= 15 \\ 15 &= 15. \end{aligned}$$

La última identidad establece que efectivamente la función f es una solución de la ecuación diferencial en $\mathbb{R}$.

LAS SOLUCIONES PUEDEN SER

Soluciones generales

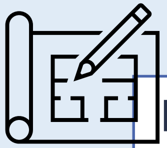
✗ Familia de ecuaciones que son solución de la ecuación diferencial.

Soluciones singulares

✗ Cuando tienen soluciones que no pueden obtenerse de la solución general.

Valores iniciales

✗ Solución particular evaluando con condiciones iniciales.



Encontrar las soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales, son tema de tu módulo de Matemáticas

¿Qué es un Método Numérico?

- Los métodos numéricos permiten analizar problemas complejos que son difíciles o imposibles de analizar mediante métodos análíticos.

Encontramos 2 tipos de soluciones:

1. Analíticas.
2. Numéricas.

Una forma de solucionar ecuaciones diferenciales es por medio de los métodos numéricos.

- ➢Ofrecen una solución numérica e iterativa.
- ➢Cuando una solución analítica, utilizando integrales y técnicas matemáticas, no es posible.

Método de Euler

Consiste en encontrar iterativamente la solución de una ecuación diferencial de primer orden, contando con valores iniciales conocidos. Partiendo de un valor inicial x_0 y avanzando con un paso ***h***, se pueden obtener los valores de la solución de la siguiente manera:

$$Y_{k+1} = Y_k + h * f(x_k, Y_k)$$

Donde ***Y*** es la solución de la ecuación diferencial y ***f*** es la ecuación diferencial en función de las variables independientes, es decir, su **derivada**. [2]

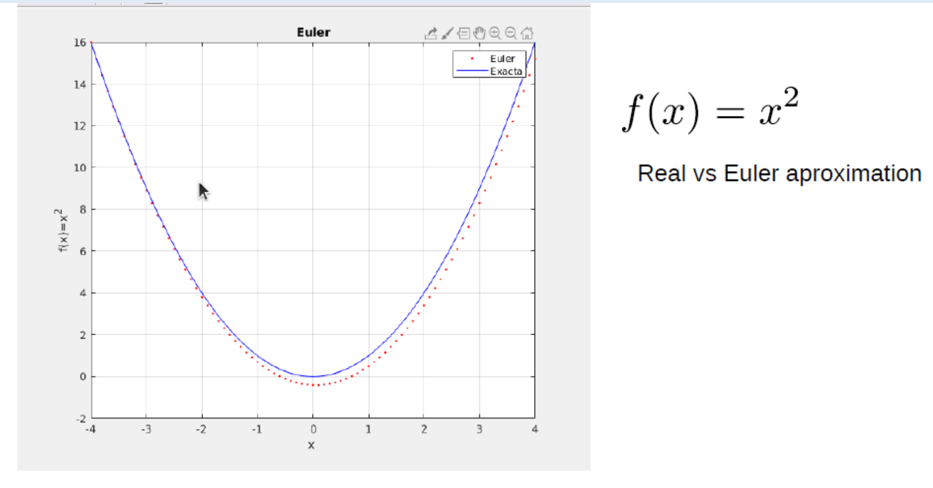
2. Definición obtenida desde http://www3.fi.mdp.edu.ar/metodos/apuntes/euler - Rodrigo.pdf

Métodos de Runge Kutta

- Son un conjunto de métodos/algoritmos genéricos iterativos, se utilizan en análisis numérico y permiten obtener de manera aproximada soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).
- Este conjunto de métodos fue inicialmente desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta.

Métodos Runge Kutta

La idea de estos métodos es básicamente la misma que el Método de Euler, aproximar el valor de yi+1 a través de un segmento de recta de pendiente dy/dx, sin embargo los Métodos de Runge-kutta hacen una corrección a la pendiente de la recta para que el valor de yi+1 se aproxime mejor al valor verdadero.



MÉTODOS RUNGE-KUTTA

Los métodos de Runge Kutta de cualquier orden se deducen mediante el desarrollo de la serie de Taylor de la función f(t,y). Existen muchas variaciones, las cuales tienen la forma:

$$y_{i+1} = y_i + h\,(a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n)\ ,$$

donde las $\mathbf{a}_i$ son constantes y las k son:

$k_1 = f(t_i, y_i)$
$k_2 = f(t_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$
$k_3 = f(t_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$
...
$k_n = f(t_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \ldots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$

- El método de Euler es Runge Kutta de primer orden, donde a1 = 1 y el resto de las constantes a son 0.

Métodos de Runge Kutta 2° Orden

Resolución Numérica de Ecuaciones Diferenciales

Hay muchas variantes de Runge Kutta de segundo orden.
Sin embargo todos siguen la misma fórmula:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

where

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Método de Euler

Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \le t \le b, \quad y(a) = \alpha$$

Del teorema de Taylor se sabe que:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)h + \dots\dots\dots, \quad h = (t_{i+1} - t_i)$$

donde $y'(t_i)$ es la ecuación diferencial evaluada en t_i y y_i. Esta estimación puede sustituirse en la ecuación:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)\, h}$$

Como se puede observar la expresión anterior es parecida a la que utiliza el Método de Euler, con la diferencia en los términos entre paréntesis, es una corrección a la pendiente que utiliza para aproximar yi+1

Runge Kutta orden 2

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

where

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$
$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

- Los valores para a_1, a_2, p_1 y $q_{1\,1}$ son evaluados estableciendo una igualdad a las series de Taylor de segundo orden.
- Haciendo lo anterior, quedan 3 ecuaciones que pueden ser utilizadas para evaluar las cuatro incógnitas. Estas tres ecuaciones son:

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_2 p_1 = 1/2$$
$$a_2 q_{11} = 1/2$$

- Entonces tenemos tres ecuaciones con cuatro incógnitas, es decir tenemos un sistema indeterminado. Para solucionarlo, es necesario suponer el valor de una de ellas para determinar las otras tres.

Supongamos un valor para a_2 y podremos resolver las ecuaciones anteriores:

$$a_1 = 1 - a_2$$

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

- a_2 puede tener infinidad de valores.
- Por tanto, pueden existir infinitos métodos RK de segundo orden.
- Cada versión produce los mismos resultados si la solución para la ODE(Ordinary Differential Equation) fuera cuadrática, lineal o constante.
- O pueden producir diferentes resultados cuando la solución es más complicada.

Los tres métodos RK de 2° orden, mas comúnmente utilizados:

$$a_1 = 1 - a_2$$
$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2a_2}$$

Método de Ralston	Método Heun	Punto Medio
Asume que a_2=2/3 a_1=1/3 p_1= q_{11}=3/4 **Sustituyendo:** $y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$ $k_1 = f(t_i, y_i)$ $k_2 = f\left(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$	Asume que a_2=1/2 a_1=1/2 p_1= q_{11}=1 **Sustituyendo:** $y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$ $k_1 = f(t_i, y_i)$ $k_2 = f(t_i + h, y_i + k_1 h)$	Asume que a_2=1 a_1=0 p_1= q_{11}=1/2 **Sustituyendo:** $y_{i+1} = y_i + k_2 h$ $k_1 = f(t_i, y_i)$ $k_2 = f(t_i + h/2, y_i + k_1 h/2)$

Actividad en clase:

- Trabajaremos en equipos de 3 personas.
- Sorteo de métodos.
- Ver y analizar el video que viene en Canvas: Ejemplo de Runge Kutta de orden 2. Duración 9 minutos y 10 segundos. https://www.youtube.com/watch?v=pOTwV3kCxdw&feature=emb_logo
- Utiliza el ejemplo del video. Generar el algoritmo del método correspondiente.

Problema

Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)(x+1)\cos\left(x^2+2x\right), \qquad y(0) = 4.$$

Solución Analítica

$$y(x) = 5\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(x^2+2x\right)\right) - 1.$$

- En un archivo .mlx generar el script del método. Utilicen una función para llamar al método (puede ser local).
- Graficar la solución analítica, y los puntos de generados por la aproximación a la solución de la ecuación principal del método.

No olvides calcular el error relativo porcentual.

Gracias!!!

Recuerden que me pueden contactar a mi correo: mara.felix@tec.mx

Tecnológico de Monterrey

Créditos y Referencias:

- Material elaborado por María Isabel Camacho González, complementado por Mara Félix Fornés, basado en:
  - Chapra, S. **Applied numerical methods with Matlab for engineers and scientists** (2018) NY: Mc.GrawHill.
  - Video 1 https://www.youtube.com/watch?v=1n8Rv2eEVR0&feature=emb_logo
  - Video 2 https://www.youtube.com/watch?v=pOTwV3kCxdw&feature=emb_logo