Technique de modélisation

Zakaria EJJED

Contents

Wednesday January 25 2023 Course

I - Equations differentielles

1. Définitions

Une équation differentielle est une équation qui relie une fonction à ses dérivées. La solution recherchée n'est donc pas un nombre mais une fonction.

Exemple: $u'(t) = u(t)$

- On distingue les équations différentielle ordinaires(EDO) des équations aux dérivées partielles (EDP). Les EDO concernent les fonctions à une variable et les dérivées par rapport à cette variable Les EDP concernent les fonctions à plusieurs variables et les dérivées partielles par rapport aux différentes variables.
- On appelle ordre d'une EDO ouu d'une EDP l'ordre de dérivation le plus elevé de l'équation. On dit qu'une équation est à coefficient constant si les coefficients devant la fonction et ses dérivées sont constants. Dans le cas contraire on parle d'EDO ou d'EDP à coefficients variables.
- On dit qu'une EDP ou une EDO est homogène si tous ses termes dépendent de la fonction inconuue. Dans le cas contraire on parle d'EDO ou d'EDP non homogène. * Une distinction importante est de savoir si une EDO ou EDP est linéaire ou non linéaire. Pour répondre à cette question on va transformer notre equation sous la forme: $L(u) = f$ On dira que l'équation est linéaire si l'opérateur associé L est linéaire. Dans le cas contraire, elle sera non linéaire.

2. Notion de problème bien posé

On dit qu'un problème (i.e. EDO+Condition initiale, ou EDP+Condition initale+Condition initiales/aux bords) est bien posé s'il vérifie les points suivants: - il existe une solution - cette solution est unique - La solution dépend continument des conditions initiales ou aux limites.

Exemple:

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \text{ et } v'(t) = -v(t) \\ u(0) = u_0 \qquad\quad v(0) = v_0 + \epsilon \end{cases}$$

$$(1) \quad \left.\begin{array}{lcl} u(t) & = & Ke^{-t} \\ u(0) & = & K = u_0 \end{array}\right\} \rightarrow u(t) = u_0 e^{-t}$$

$$(2) \quad \left.\begin{array}{lcl} v(t) & = & Ke^{-t} \\ v(0) & = & u_0 + \epsilon = K \end{array}\right\} \rightarrow v(t) = (u_0 + \epsilon)e^{-t}$$

$$|v(t) - u(t)| = |(u_0 + \epsilon)e^{-t} - v_0 e^{-t} = |\epsilon| e^{-t} \Rightarrow \text{"erreur controlée"}$$

Exemple 2:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u'(t) & = & tu(t)(u(t) - 2) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right.$$

Solution:

$$\begin{array}{lcl} u(t) & = & \frac{2u_0}{u_0 + (2-u_0)e^{t^2})} \\ u & = & 2 \\ u(t) & = & \frac{2(2+\epsilon)}{2+\epsilon e - \epsilon e^{t^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 2 + \epsilon - \epsilon e^{t^2} & = & 0 \\ e^{t^2} & = & \frac{2+\epsilon}{\epsilon} \\ t_0 & = & \sqrt{ln(\frac{2+\epsilon}{\epsilon}} \end{array}$$

- $v_0 = 2 - \epsilon$ pour $\epsilon << 1 \quad 2 - \epsilon + \epsilon e^{t^2} > 0$ $u(t) = \frac{2(2-\epsilon)}{2-\epsilon+\epsilon e^{t^2}}$

//INSERER COURBE

3 - Quelque solutions analytiques

a - Méthode des caractéristique

On appelle problème de Cauchy, une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ avec une condition initiale.

Considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + a(x,t)u_x(x,t) = 0 \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et a et Φ sont des fonctions régulières

Equation caractéristiques:

$$\begin{cases} \frac{\partial x^t}{\partial t} = a(x(t),t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

//INSERER COURBE 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x(t),t)}{\partial t} \quad &= u_x(x(t),t)\frac{\partial x}{\partial t} + u_t(x(t),t)\frac{\partial t}{\partial t} \\ &= u_x(x(t),t)a(x(t),t) + u_t(x(t),t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$u(x(t),t) = const = u(x_0,0) = \Phi(x_0)$$

Exemple:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \quad a = c^k \\ u(x,0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a & \rightarrow x(t) = at + c^k \\ x(0) = x_0 & \quad x(t) = at + x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x(t),t) \quad &= \quad \Phi(x_0) \\ x \quad &= \quad at + x_0 \rightarrow x_0 = x - at \\ u(x,t) \quad &= \quad \Phi(x - at) \end{aligned}$$

//encadrer

Le long d'une caractéristique analytique:

$$\frac{\partial u(x(t),t)}{\partial t} = u_t a(x,t) u_x = b(x(t),t)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial u_x(x(\tau),\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad &= \quad \int_0^t b(x(\tau),\tau)d\tau \\ u(x(\tau),\tau) - u(x(0),0) \quad &= \quad \int_0^t b(n(\tau),\tau) + \tau \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_e + u_x = xx \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial t} = 1 \\ &x(t=0) = x_0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x(t) = t + x_0 \Rightarrow x_0 = x - t$$

$$\begin{aligned} u(x(t),t) \quad &= \quad \Phi(x_0) + \int_0^t (x_0 + \tau)d\tau \\ &= \quad \Phi(x - t) + \int_0^t (x_0 + \tau)d\tau \\ &= \quad \Phi(x - t) + [x_0\tau + \frac{\tau^2}{2})_0^t \\ &= \quad \Phi(x - t) + (x_0 t + \frac{t^2}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &= \quad \Phi(x - t) + (x - t)t + \frac{t^2}{2} \\ &= \quad \Phi(x - t) + xt - \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Wednesday January 25 2023 Exercises

TD 1

Exercice 1

Une EDO (Equation Différentielle Ordianaire) possède **UNE variable**.

Une EDP (Equation aux Dérivées Partielles) possède **PLUSIEURS variable**.

Une équation est homogène si tout dépends de la fonction inconnue.

Espace vectoriel: stabilité par l'addition et la multiplication par une constante, càd l'addition de 2 valeurs $\in$ ensemble.

1. $u'(t) = e^t u(t)$

La seule variable est t, l'équation est donc une **EDO**.

2. $u''(t) = u(x)\sqrt{x}$

Les variables sont x et t, l'équation est donc une **EDP**.

3. $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)e^{\sin x} = 1$

Les variables sont x et y, l'équation est donc une **EDP**.

4. $u_t(x,t) + u_x(x,t) = u_{xx}(x,t) + u^2(x,t)$

Les variables sont x et t, l'équation est donc une **EDP**.

5. $(u(t))^{(2)} + u(t) = e^t$

La seule variable est t, l'équation est donc une **EDO**.

Tuesday February 21st 2023 Exercises

Exercise 2

- Correction manquante

Exercice 3

- 1.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) & = & e^{-x^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = 2x \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$

$$\begin{array}{rcl} & x(t) & = & Ke^{2t} \\ & x(t) & = & x_0 e^{2t} \\ \Rightarrow & x_0 & = & xe^{-2t} \end{array}$$

Sur la courbe caractéristique:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} \\ & = & 2x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{array}$$

$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t 0 = 0 = u(x,t) - u(x_0,0)$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow u(x,t) & = & u(x_0,0) \\ & = & \phi(x_0) \\ & = & e^{-x_0^2} \\ & = & e^{-(xe^{-2t})^2} \end{array}$$

- 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - x\frac{\partial u}{\partial x} & = & 0 \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) & = & sin(87x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = -x \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & Ke^{-t} \\ x(t) & = & x_0e^{-t} \\ \Rightarrow \quad x_0 & = & xe^t \end{array}$$

Sur la courbe caractéristique:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} \\ & = & -x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{array}$$

$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t 0 = 0 = u(x,t) - u(x_0,0)$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow u(x,t) & = & u(x_0,0) \\ & = & \phi(x_0) \\ & = & sin(87x_0) \\ & = & sin(87xe^t) \end{array}$$

- 3.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} & = & x \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = x_0 \end{cases}$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t)(\leftarrow a(x,t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$
Donc $x(t) = Ke^t$ avec $K \in \mathbb{R}$
Or, $x(0) = x_0 = Kxe^0$ donc $x(t) = x_0e^t$
Si u est solution alors:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u(x(t),t)}{\partial t} & = & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x(t)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} \\ & & (\frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t) \text{ car u est le long d'une courbe caractéristique}) \quad \& \quad (\frac{\partial t}{\partial t} = 1) \\ & = & \frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} \\ & = & x \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \int_0^t \frac{\partial u(x(\tau),\tau)}{\partial t}\partial\tau & = & \int_0^t x(\tau)\partial\tau \\ \text{donc } u(x(t),t) - u(x(0),0) & = & [x_0e^\tau]_0^t \\ \text{donc } u(x(t),t) & = & cos(90x_0) + x_0e^t - x_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} u(x,t) & = & cos(90xe^{-t} + x - xe^{-t} \\ u(x,t) & = & cos(90xe^{-t} + x(1-e^{-t}) \\ x_0 & = & xe^{-t} \end{array}$$

- 4.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} & = \quad x^2 \qquad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = sin(87x)cos(90x) \end{cases}$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t)(\leftarrow a(x,t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Donc $x(t) = Ke^t$ avec $K \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & Ke^t \\ x(t) & = & x_0e^t \\ \Rightarrow \ x_0 & = & xe^{-t} \end{array}$$

SUITE. . . .

Exercice 4

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} & = & u & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) & = & \phi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} = u$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = 1 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & t + cst \\ x(t) & = & t + x_0 \\ \Rightarrow \ x_0 & = & x(t) - t \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} u(x(t),t) & = & Ke^t \\ u(x(0),0) & = & K = \phi(x(0)) \end{array}$$

Tuesday February 21st 2023 Course

b - Changement de variables

Equations des ondes :

$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$
$u(x,0) = \phi(x)$
$u_t(x,0) = \psi(x)$
On pose
$\xi = x + t$
$\eta = x - t$
$u(x,t) = v(\xi,\eta)$
$u_x(x,t) = \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$
$= \partial_\xi v + \partial_\eta v$
$u_{xx}(x,t) = \partial x(\partial_\xi v) + \partial x(\partial_\eta v)$
$= \partial\xi(\partial xv) + \partial\eta(\partial xv)$
$= \partial\xi(\partial\xi v + \partial\eta v) + \partial\eta(\partial\xi v + \partial\eta v)$
$= \partial^2_{\xi\xi}v + \partial^2_{\eta\xi}v + \partial^2_{\xi\eta}v + \partial^2_{\eta\eta}v$
$u_{xx} = \partial^2_{\xi\xi}v + 2\partial^2_{\eta\xi}v + \partial^2_{\eta\eta}v$
$u_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \eta} = \partial_\xi v - \partial_\eta v$

$u_{tt} = \partial t(\partial_\xi v) - \partial t(\partial_\eta v)$
$= \partial\xi(\partial tv) - \partial\eta(\partial tv)$
$= \partial\xi(\partial\xi v - \partial\eta v) - \partial\eta(\partial\xi v - \partial\eta v)$

$= \partial^2_{\xi\xi}v - \partial^2_{\eta\xi}v - \partial^2_{\xi\eta}v + \partial^2_{\eta\eta}v$
$u_{tt} = \partial^2_{\xi\xi}v - 2\partial^2_{\eta\xi}v + \partial^2_{\eta\eta}v$
$4\partial^2_{\eta\xi}v = 0$
$\partial^2_{\eta\xi}v = 0$
$\partial_\eta v = f_1(\eta)$
$v = \int f1(\eta) + c^k$ peut dÃ©pendre de ξ
$v(\xi,\eta) = f(\eta) + g(\xi)$
$u(x,t) = v(x+t, n-t) = f(x-t) + g(x+t)$
$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \phi(x)$$

$$u_t(x,0) = -f'(x) + g'(x) = \psi(x)$$

$g'(x) = \frac{\phi'(x)+\psi(x)}{2}$
$f'(x) = \frac{\phi'(x)-\psi(x)}{2}$
$g(x) = c_1 + \frac{\phi(x)}{2} + \frac{1}{2}\int \psi x$
$f(x) = c_2 + \frac{\phi(x)}{2} - \frac{1}{2}\int \psi x$
$f + g = c_1 + c_2 + \phi(x)$
$u(x,t) = \frac{\phi(x-t)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{x-t}\psi(z)\partial z + \frac{\phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{x+t}\psi(z)\partial z$ $u(x,t) = \frac{\phi(x-t)+\phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0}\psi(z)\partial z + \frac{1}{2}\int_0^{x+t}\psi(z)\partial z$
$u(x,t) = \frac{\phi(x-t)+\phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\psi(z)\partial z$

Tuesday February 21st Exercises (suite)

Exercice 1

- 1.
  $\partial_x f - \partial_y f = a$, avec $u = x+y$ et $v = x-y$

$$\begin{cases} \partial_x f - \partial_y f & = & a, \quad a \quad cst \in \mathbb{R} \\ u & = & x+y \\ v & = & x-y \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & W(u,v) \\ \\ f_x(x,y) & = & \frac{\partial W(u,v)}{\partial x} \\ & = & \frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ & = & \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v} \\ \\ f_y(x,y) & = & \frac{\partial W(u,v)}{\partial y} \\ & = & \frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ & = & \frac{\partial W}{\partial u} - \frac{\partial W}{\partial v} \end{array}$$

$$f_x(x,y) - f_y(x,y) = a$$

$\Rightarrow (\frac{\partial W}{\partial v} - (-\frac{\partial W}{\partial v}) = a \Rightarrow 2\frac{\partial W}{\partial v} = a \Rightarrow \int \frac{2\partial W}{\partial v} = \int a \Rightarrow 2W = av + cst(u) \Rightarrow W = \frac{av+cst(u)}{2} = \frac{a}{2}v + g(u)$

- 2.
  $x\partial_x f = y\partial_y f$, avec $u = xy$ et $v = \frac{x}{y}$

$$\begin{cases} x\partial_x f &= y\partial_y f \\ u &= xy \\ v &= \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= W(u,v) \\ f_x(x,y) &= \frac{\partial W(u,v)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{y\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{y\partial v} \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial W(u,v)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{x\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{-x}{y^2} \end{aligned}$$

$$xf_x(x,y) = yf_y(x,y)$$

$\Rightarrow xy\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{x}{y}\frac{\partial W}{\partial v} = xy\frac{\partial W}{\partial u} + \frac{-x}{y}\frac{\partial W}{\partial v}$
$\Rightarrow u\frac{\partial W}{\partial u} + v\frac{\partial W}{\partial v} = u\frac{\partial W}{\partial u} - v\frac{\partial W}{\partial v}$
$\Rightarrow 2v\frac{\partial W}{\partial v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial v} = 0$ $v = 0$ ou $\frac{\partial W}{\partial v} = 0$
$\hookrightarrow W_v = 0$
$\exists g \in C^1$ tq $W(u,v) = g(u)$
$\exists g \in C^1 / f(x,y) = g(xy)$

Thursday February 23rd 2023 Cours

c - Méthode de séparation de variables

- Considérons l'équation de la chaleur:

$$(Y)\begin{cases} \forall (x,t) \in]0,L[\times \mathbb{R}^{t\alpha} & u_t(x,t) = \beta u_{xx}(x,t) \quad \beta > 0 \\ u(0,t) = u(t,t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

On suppose que la solution de cette équation peut s'écrire sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$ (séparation de variable) pour tout (x,t) $\in]0,L[\times \mathbb{R}^{t\alpha}$
En injectant dans (Y) on obtient:

$$\partial_t(X(x)T(t)) = \beta\partial_{xx}(X(x)T(t)$$

$$X.T' = \beta T.X''$$

$$\frac{X}{X''} = \frac{\beta T}{T'} \text{ ou } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{\beta T}$$

$$\frac{X''}{X} \rightarrow \text{ ne dépend que de "x" } \rightarrow \text{ forcément constant } \leftarrow \text{ ne dépends que de "t" } \leftarrow \frac{T'}{\beta T}$$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\beta T} = -\lambda$
soit $X'' = -\lambda X$ et $T' = -\lambda\beta T$

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \left| \begin{array}{lll} u(0,t) = & X(0)T(t) & = 0 \\ u(L,t) = & X(L)T(t) & = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{array}$$

Si on veut autre chose que la solution triviale $u = 0$
On doit donc résoudre:

$$\begin{cases} X'' & + & \lambda X & = & 0 \\ X(0) & = & X(L) & = & 0 \end{cases}$$

Polynôme caractéristique associé à $X'' + \lambda X = 0$ est

$$r^2 + \lambda = 0$$

$$r^2 = -\lambda$$

Remarque:

$$\begin{array}{rll} & ay'' + by' + cy & = & 0 \\ \hookrightarrow & ar^2 + br + c & = & 0 \end{array}$$

cas 1: 2 solutions réelles r_1, r_2

$$y(z) = \alpha_1 e^{r_1 Z} + \alpha_2 e^{r_2 z} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

cas 2: 2 solutions complexes c_1, c_2

$$y(z) = \alpha_1 e^{c_1 Z} + \alpha_2 e^{c_2 z} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$
$$= \gamma_1 cos(\omega z) + \gamma_2 sin(\omega z)$$
$$\omega = \sqrt{|b^2 - 4ac|}$$

cas 3: 1 solutions double d_1

$$y(z) = \delta_1 z e^{d_1 z} + \delta_2 z e^{d_2 z}$$

$$= \delta_1 z + \delta_2 = e^{d_1 z}$$

$$r^2 = -\lambda$$

cas 1 :$-\lambda > 0$
$r_1 = \sqrt{-\lambda} \quad r_2 = -\sqrt{-\lambda}$
$X(x) = \alpha_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + \alpha_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$X(0) = 0 = \alpha_1 + \alpha_2$$
$$X(L) = 0 = \alpha_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} + \alpha_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\alpha_2 = -\alpha_1$$
$$\alpha_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} - \alpha_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0$$
$$\alpha_1 (e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L})$$
$$\alpha_1 = 0 \quad e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0$$
$$\alpha_1 = 0 \implies \alpha_2 = 0$$
$$\implies X = 0 \implies u = 0$$

cas 3: $-\lambda < 0$

$$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$\left.\begin{array}{rcl} X(0) & = & c_1cos(0)+c_2sin(0) \\ & = & c_1 \\ & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X(L) = c_1cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

$$c_2sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ ou } sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

si $c_2 = 0, c_2 = c_1 = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$$sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

$$\begin{array}{lcll} \sqrt{\lambda}L & = & k\pi & k \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda & = & (\frac{k\pi}{L})^2 & k \in \mathbb{Z}^* \end{array}$$

Si l'on veut une solution non-triviale il faut que

$$\lambda = (\frac{k\pi}{L})^2 \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

Principe de superposition

Pour des EDP linéaire homogènes, si u et v sont solution de cette EDP alors toute combinaison linéaire de ces solutions est encore solution de l'EDP.

On introduit X_k qui va être la solution de

$$X_k'' + (\frac{2\pi}{L})^2 X_k = 0$$

$$X_k = a_k sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

On introduit T_k solution de l'équation:

$$\begin{array}{ll} T_k' = & -\beta(\frac{k\pi}{L})^2 T_k \\ T(t) = & b_k e^{-\beta(\frac{k\pi}{L})^2 t} \end{array}$$

$$u_k(x,t) = T_k(t)X_k(x) = a_k b_k e^{-\beta(\frac{k\pi}{L})^2 t} sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

$$u_k(x,t) = x_k e^{-\beta(\frac{k\pi}{L})^2 t} sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-\beta(\frac{k\pi}{L})^2 t} sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

$$\begin{array}{rcl} u(x,0) & = & f(x) \\ & = & \sum_{k=1}^{+\infty} c_k sin(\frac{k\pi}{L}x) \end{array}$$

On calcule la série de fourrier de de "f" et par unicité de ce développement on identifie les coefficients "c_k" ou coefficients "α_k" de f.
Si $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k sin(\frac{k\pi}{L}x)$ alors
$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad c_k = \alpha_k$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{-\beta(\frac{k\pi}{L})^2 t} sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

Calcul des α_k:
Le père de Fourier en "*sinus*" sur $]0, L[$ de f est:
$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k sin(\frac{k\pi}{L}$ avec
$\alpha_k \frac{2}{L} \int_0^L f(x) sin(\frac{k\pi}{L}x)dx$
De même la série de Fourier en "*cosinus*" sur $[0, L]$ de f est: $f(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k cos(\frac{k\pi}{L}x)$
avec $\gamma_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) cos(\frac{k\pi}{L}x)dx$

Exemple: On considère (Y) avec $L = \pi \quad \beta = 7$ et
$f(x) = 3sin(2x) - 6sin(5x)$

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) & = & \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{-7(\frac{k\pi}{\pi})^2 t} sin(\frac{k\pi}{\pi}x) \\ & = & \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{-7k^2 t} sin(kx) \\ \\ u(x,0) & = & \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k sin(k,x) \end{array}$$

on a $f(x) = 3sin(2x) - 6sin(5x) \rightarrow$ (c'est déjà le développement en série de Fourier.

on a donc:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_2 & = & 3 \\ \alpha_5 & = & -6 \end{array}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \{2,5\} \quad \alpha_k = 0$
$u(x,t) = 3e^{-7\times 2^2 \times t} sin(2x) - 6e^{-7\times 2^2 \times t} sin(5x)$
$u(x,t) = 3e^{-28t} sin(2x) - 6e^{-175t} sin(5x)$

Monday 27th March 2023 Exercises

TD1 suite

Exercice 2

Posons $u(x,t) = X(x)T(t)$
$u_{tt} = X(x)T''(t) = c_0^2 u_{xx} = c_0^2 X''(x)T(t)$ donc $c_0^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Considérons

$$\begin{cases} c_0^2 X''(x) & +\lambda X(x) & = 0 \\ X(0) & = X(L) & = 0 \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée est $c_0^2 r^2 + \lambda = 0$ (e)
On cherche les racines de (e).

- **cas 1:** "solution réelles" $\lambda < 0$
  $c_0^2 r^2 = -\lambda \Leftrightarrow r^2 = \frac{-\lambda}{c_0^2}$
  On a comme solutions $X(x) = \alpha_0 e^{r_1 x} + \alpha_1 e^{r_2 x}$

  $$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \text{ donc } \alpha_1 = -\alpha_0 \\ X(L) = 0 \Rightarrow \alpha_0(e^{r_1 L} - e^{r_2 L} = 0 \text{ donc } \alpha_0 = 0 oue^{r_1 L} - e^{r_2 L} = 0 \end{cases}$$

  On retombe sur la solution triviale

  $$u(x,t) = X(x)T(t) = 0 \text{ car } X(x) = 0)$$

- **cas 2:* "solution double" $\lambda = 0$
  $c_0^2 r^2 = 0 \qquad r^2 = 0 doncr = 0$
  $c_0^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$ donc $c_0^2 = 0$ ou $X''(x) = 0$

- $X''(x) = 0 \Rightarrow X'(x) = c_0 \Rightarrow X(x) = c_0 x + c_1$

  $$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow X'(x) = c_0 \Rightarrow X(x) = c_0 x + c_1 \\ X(L) = 0 \Rightarrow c_0 L = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \end{cases}$$

- $c_0 = 0 \Rightarrow$ même chose. On retombe sur la solution triviale.

- **cas 3:** "solution imaginaires" $\lambda > 0$ $c_0^2 r^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow c_0^2 r^2 = -\lambda$
  donc $r = \pm i\sqrt{\frac{\lambda}{c_0^2}} = \pm i\omega$
  $X_n) = \alpha_0 cos(\omega x) + \alpha_1 sin(\omega x)$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow X'(x) = c_0 & \Rightarrow \alpha_0 & = 0 \\ X(L) = 0 \Rightarrow c_0 L = 0 & \Rightarrow \alpha_1 sin(\omega L) & = \alpha_1 sin(\frac{sqrt\lambda}{c_0} L = 0 \\ & \Rightarrow \frac{sqrt\lambda L}{c_0} & = k\pi \\ & \Rightarrow \lambda & = (\frac{k\pi c_0}{L})^2 \end{cases}$$

On introduit pour $k \in \mathbb{N}$
$X_k(x) solution de c_0^2 X_k''(x) + \lambda_k X(k) = 0$ avec $\lambda_k = (\frac{k\pi c_0}{L})^2$
$X_k(x) = a_k sin(x\frac{\sqrt{\lambda k}}{c_0})$ $\qquad \sqrt{\lambda k} = kc_0$
$T_k(t) solution de T_k''(t) + \lambda_k T_k(t) = 0$
l'équation caractéristique associée est $r^2 + \lambda_k = 0$ comme $\lambda_k = (\frac{k\pi c_0}{L})^2 > 0$
les racones sont $r = \pm i\sqrt{\lambda_k}$

$$T_k(t) = b_k cos(\sqrt{\lambda_k} t) + c_k sin(\sqrt{\lambda_k t})$$

Par le théorème de superposition:

$$\begin{aligned} u(x,t) & = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} a_k sin(x\frac{\sqrt{\lambda_k}}{c_0})[b_k cos(\sqrt{\lambda_k t}) + c_k sin(\sqrt{\lambda_k t})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,0) & = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k sin(\frac{sqrt\lambda_k}{c_0} x) \\ & = sin(3x) - 4sin(10x) \end{aligned}$$

$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{sqrt\lambda_k}{c_0}$
$cos(\frac{x\sqrt{\lambda k}}{c_0})[b_k cos\sqrt{\lambda_k} t) + c_k sin(\sqrt{\lambda_k t})]$

$$\begin{aligned} u(x,0) & = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k cos(\frac{x\sqrt{k}}{c_0}) \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k cos(kx) \\ & = 2sin(4x) + sin(6x) \end{aligned}$$

Par identification: $-k = 3$,

$$a_3 b_3 = 1$$

$$a_1 0 b_1 0 = -4$$

$$\forall k \notin 3, 10, a_k b_k = 0$$

Course

4 - Solution numérique

Considérons le problème suivant:

$$(PC) \begin{cases} u'(t) = & f(u(v)) \quad \forall t \in]0, +\infty[\\ u(0) = & u_0 \end{cases}$$

Supposons que u soit de class C^2, alors son développement de taylor à l'ordre 2 s'écrit:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + u'(t)\Delta t + u''(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + o(\Delta t^2)$$

$$u'(t) = \frac{(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Nous allons utiliser cette relation pour construire une solution numérique approchée.
Pour cela on va discrétiser l'intervalle sur lequel on cherche la solution ($[0, T_0]$) en $(n+1)$ points $t_i, i = 0, \dots, n$ avec $t_0 = 0$ et $t_n = T_0$.
$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ est le pas de discrétisation. On le considère constant ici $\Delta t = \frac{T-0}{n} = \frac{T}{n}$
On parle alors de discrétisation régulière.
En appliquant l'approximation de la dérivée première entre t_i et t_{i+1} on peut écrire:

$$u'(_i) \simeq \frac{u(t_{i+1} - u(t_i)}{\Delta t}$$

Si on note $u_i = u(t_i) \quad \forall i \in [\![0, n]\!]$

Le problème numérique approchée obtenu est:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta t} = f(u_i) \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!] \\ u_0 \end{cases}$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t f(u_i)$$

$$\rightarrow \text{ schéma d'Euler explicite (E-E)}$$

Exp:

$$f(u) = u$$

$$u(0) = 1$$

$$PC \begin{cases} u' = & u \\ u(0) = & 1 \end{cases} \rightarrow \text{solution analytique: } t \rightarrow e^t$$

Schéma d'E-E:

$$PC \begin{cases} u_{i+1} = & u_i + \Delta t u_i = (1+\Delta t)u_i \\ u_0 = & 1 \end{cases}$$

$$u_{i+1} = (1+\Delta t)^{i+1} u_0 = (1+\Delta t)^{i+1}$$

Exercise

TD1

Exercice 7 - Mini-Projet

1. $$\begin{cases} u'(t) = & -u(t) \\ u(0) = & 1 \end{cases} \quad u(t) = e^{-t}$$

2. En partant du schéma E-E
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Delta t f(u_n) \\ u_{n+1} &= u_n - \Delta t u_n \\ &= (1-\Delta t)u_n \\ &= (1-\Delta t) \times (1-\Delta t)u_{n-1} \\ &\dots \\ &= (1-\Delta t)^{n+1} u_0 \\ \Rightarrow u_n &= (1-\Delta t)^n \end{aligned}$$

3. $u_n = (1-\Delta t)^n$