Examen Techniques de Modélisation (durée 1h30)

Exercice 1

Soit $c \neq 0$, chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2} = \frac{\partial f}{\partial t^2}$$

On utilisera le changement de variables $u = x + at$ et $v = x + bt$ avec un choix adéquat de a et b que l'on justifiera.

Exercice 2

Considérons le problème suivant :

$$-u''(x) = f(x), \quad \text{pour } x \in]0,1[\quad \text{avec } u'(0) = 0 \quad \text{et } u'(1) = 0$$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.
2. Proposer un schéma d'ordre 2 pour l'équation principale. (Vous démontrerez qu'il est d'ordre 2).
3. Proposer une discrétisation d'ordre 1 pour les conditions aux limites.
4. Mettre sous forme matricielle ce schéma (équation principale et conditions aux limites).

Exercice 3

1. Soit u une fonction définie sur $[O,\pi] \times \mathbb{R}^+$ vérifiant l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \cos(3x) - 2 \end{cases}$$

   Résoudre cette équation en appliquant la méthode de séparation de variables.

2. Soit une fonction v dépendant de x et de y vérifiant l'EDP suivante :

$$x^2 \frac{\partial v}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial y} + v = 0$$

   Résoudre cette équation en appliquant la méthode de séparation de variables.