Technique de modélisation

Contents

//pandoc user guide pour la doc

Wednesday January 25 2023 Course

I - Equations differentielles

1. Définitions

Une équation differentielle est une équation qui relie une fonction à ses dérivées. La solution recherchée n'est donc pas un nombre mais une fonction.

Exemple: $u'(t) = u(t)$

- On distingue les équations différentielle ordinaires(EDO) des équations aux dérivées partielles (EDP). Les EDO concernent les fonctions à une variable et les dérivées par rapport à cette variable Les EDP concernent les fonctions à plusieurs variables et les dérivées partielles par rapport aux différentes variables.
- On appelle ordre d'une EDO ouu d'une EDP l'ordre de dérivation le plus elevé de l'équation. On dit qu'une équation est à coefficient constant si les coefficients devant la fonction et ses dérivées sont constants. Dans le cas contraire on parle d'EDO ou d'EDP à coefficients variables.
- On dit qu'une EDP ou une EDO est homogène si tous ses termes dépendent de la fonction inconuue. Dans le cas contraire on parle d'EDO ou d'EDP

non homogène.

- Une distinction importante est de savoir si une EDO ou EDP est linéaire ou non linéaire. Pour répondre à cette question on va transformer notre equation sous la forme: $L(u) = f$ On dira que l'équation est linéaire si l'opérateur associé L est linéaire. Dans le cas contraire, elle sera non linéaire.

2. Notion de problème bien posé

On dit qu'un problème (i.e. EDO+Condition initiale, ou EDP+Condition initale+Condition initiales/aux bords) est bien posé s'il vérifie les points suivants: - il existe une solution - cette solution est unique - La solution dépend continument des conditions initiales ou aux limites.

Exemple:

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \text{ et } v'(t) = -v(t) \\ u(0) = u_0 \qquad\quad v(0) = v_0 + \epsilon \end{cases}$$

$$(1) \quad \left.\begin{array}{rcl} u(t) & = & Ke^{-t} \\ u(0) & = & K = u_0 \end{array}\right\} \to u(t) = u_0 e^{-t}$$

$$(2) \quad \left.\begin{array}{rcl} v(t) & = & Ke^{-t} \\ v(0) & = & u_0 + \epsilon = K \end{array}\right\} \to v(t) = (u_0 + \epsilon)e^{-t}$$

$$|v(t) - u(t)| = |(u_0 + \epsilon)e^{-t} - v_0 e^{-t} = |\epsilon|e^{-t} \Rightarrow \text{"erreur controlée"}$$

Exemple 2:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & tu(t)(u(t) - 2) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right.$$

Solution:

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & \frac{2u_0}{u_0 + (2-u_0)e^{t^2})} \\ u & = & 2 \\ u(t) & = & \frac{2(2+\epsilon)}{2+\epsilon e - \epsilon e^{t^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2 + \epsilon - \epsilon e^{t^2} & = & 0 \\ e^{t^2} & = & \frac{2+\epsilon}{\epsilon} \\ t_0 & = & \sqrt{ln(\frac{2+\epsilon}{\epsilon}} \end{array}$$

- $v_0 = 2 - \epsilon$ pour $\epsilon << 1 \quad 2 - \epsilon + \epsilon e^{t^2} > 0$ $u(t) = \frac{2(2-\epsilon)}{2-\epsilon+\epsilon e^{t^2}}$

//INSERER COURBE

3 - Quelque solutions analytiques

a - Méthode des caractéristique

On appelle problème de Cauchy, une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ avec une condition initiale.

Considéroons le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + a(x,t)u_x(x,t) = 0 \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et a et Φ sont des fonctions régulières

Equation caractéristiques:

$$\begin{cases} \frac{\partial x^t}{\partial t} = a(x(t),t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

//INSERER COURBE 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x(t),t)}{\partial t} &= u_x(x(t),t)\frac{\partial x}{\partial t} + u_t(x(t),t)\frac{\partial t}{\partial t} \\ &= u_x(x(t),t)a(x(t),t) + u_t(x(t),t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$u(x(t),t) = const = u(x_0,0) = \Phi(x_0)$$

Exemple:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \quad a = c^k \\ u(x,0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a & \rightarrow x(t) = at + c^k \\ x(0) = x_0 & \quad x(t) = at + x_0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} u(x(t),t) & = & \Phi(x_0) \\ x & = & at + x_0 \rightarrow x_0 = x - at \\ u(x,t) & = & \Phi(x - at) \end{array}$$

//encadrer

Le long d'une caractéristique analytique:

$$\frac{\partial u(x(t),t)}{\partial t} = u_t a(x,t) u_x = b(x(t),t)$$

$$\begin{array}{lcl} \int_0^t \frac{\partial u_x(x(\tau),\tau)}{\partial \tau} d\tau & = & \int_0^t b(x(\tau),\tau) d\tau \\ u(x(\tau),\tau) - u(x(0),0) & = & \int_0^t b(n(\tau),\tau) + \tau \end{array}$$

$$\begin{cases} u_e + u_x = xx \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = 1 \\ x(t=0) = x_0 \end{array}\right\} \rightarrow x(t) = t + x_0 \Rightarrow x_0 = x - t$$

$$\begin{array}{rcl} u(x(t),t) & = & \Phi(x_0) + \int_0^t (x_0 + \tau) d\tau \\ & = & \Phi(x-t) + \int_0^t (x_0 + \tau) d\tau \\ & = & \Phi(x-t) + [x_0 \tau + \frac{\tau^2}{2})_0^t \\ & = & \Phi(x-t) + (x_0 t + \frac{t^2}{2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} u(x,t) & = & \Phi(x-t) + (x-t)t + \frac{t^2}{2} \\ & = & \Phi(x-t) + xt - \frac{t^2}{2} \end{array}$$

Wednesday January 25 2023 Exercises

TD 1

Exercice 1

Une EDO (Equation Différentielle Ordianaire) possède **UNE variable**.

Une EDP (Equation aux Dérivées Partielles) possède **PLUSIEURS variable**.

Une équation est homogène si tout dépends de la fonction inconnue.

Espace vectoriel: stabilité par l'addition et la multiplication par une constante, càd l'addition de 2 valeurs $\in$ ensemble.

1. $u'(t) = e^t u(t)$

La seule variable est t, l'équation est donc une **EDO**.

2. $u''(t) = u(x)\sqrt{x}$

Les variables sont x et t, l'équation est donc une **EDP**.

3. $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)e^{\sin x} = 1$

Les variables sont x et y, l'équation est donc une **EDP**.

4. $u_t(x, t) + u_x(x, t) = u_{xx}(x, t) + u^2(x, t)$

Les variables sont x et t, l'équation est donc une **EDP**.

5. $(u(t))^{(2)} + u(t) = e^t$

La seule variable est t, l'équation est donc une **EDO**.