

Technique de modélisation

Zakaria EJJED

Contents

Wednesday January 25 2023 Course	2
I - Equations differentielles	2
1. Définitions	2
2. Notion de problème bien posé	2
3 - Quelques solutions analytiques	3
a - Méthode des caractéristiques	3
Wednesday January 25 2023 Exercises	5
TD 1	5
Exercice 1	5
Tuesday February 21st 2023 Exercises	5
Exercice 2	5
Exercice 3	5
Exercice 4	7
Tuesday February 21st 2023 Course	7
b - Changement de variables	7
Equations des ondes :	7
Tuesday February 21st Exercises (suite)	8
Exercice 1	8
Thursday February 23rd 2023 Cours	10
c - Méthode de séparation de variables	10
Principe de superposition	11
Monday 27th March 2023 Exercises	13
TD1 suite	13
Exercice 2	13
Course	14
4 - Solution numérique	14
Exercice	15
TD1	15
Exercice 7 - Mini-Projet	15
Monday April 3rd 2023 Cours	16
Méthode de différences finies	16
1 - Approximations des dérivées successives	16
différences divisées progressives d'ordre 1	16
différences divisées régressives d'ordre 1	16
différences divisées progressives d'ordre 2	16
différences divisées régressives d'ordre 2	16
différences divisées centrées d'ordre 2	17

Schéma explicite pour l'équation de la chaleur	17
Analyse de la stabilité de Von Neuman	19

Wednesday January 25 2023 Course

I - Equations différentielles

1. Définitions

Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction à ses dérivées. La solution recherchée n'est donc pas un nombre mais une fonction.

Exemple: $u'(t) = u(t)$

- On distingue les équations différentielle ordinaires(EDO) des équations aux dérivées partielles (EDP). Les EDO concernent les fonctions à une variable et les dérivées par rapport à cette variable Les EDP concernent les fonctions à plusieurs variables et les dérivées partielles par rapport aux différentes variables.
- On appelle ordre d'une EDO ou d'une EDP l'ordre de dérivation le plus élevé de l'équation. On dit qu'une équation est à coefficient constant si les coefficients devant la fonction et ses dérivées sont constants. Dans le cas contraire on parle d'EDO ou d'EDP à coefficients variables.
- On dit qu'une EDP ou une EDO est homogène si tous ses termes dépendent de la fonction inconnue. Dans le cas contraire on parle d'EDO ou d'EDP non homogène. * Une distinction importante est de savoir si une EDO ou EDP est linéaire ou non linéaire. Pour répondre à cette question on va transformer notre equation sous la forme: $L(u) = f$ On dira que l'équation est linéaire si l'opérateur associé L est linéaire. Dans le cas contraire, elle sera non linéaire.

2. Notion de problème bien posé

On dit qu'un problème (i.e. EDO+Condition initiale, ou EDP+Condition initiale+Condition initiales/aux bords) est bien posé s'il vérifie les points suivants: - il existe une solution - cette solution est unique - La solution dépend continument des conditions initiales ou aux limites.

Exemple:

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \text{ et } v'(t) = -v(t) \\ u(0) = u_0 \quad \quad v(0) = v_0 + \epsilon \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} u(t) = Ke^{-t} \\ u(0) = K = u_0 \end{cases} \rightarrow u(t) = u_0 e^{-t}$$

$$(2) \quad \begin{cases} v(t) = Ke^{-t} \\ v(0) = u_0 + \epsilon = K \end{cases} \rightarrow v(t) = (u_0 + \epsilon)e^{-t}$$

$$|v(t) - u(t)| = |(u_0 + \epsilon)e^{-t} - u_0 e^{-t}| = |\epsilon|e^{-t} \Rightarrow \text{"erreur contrôlée"}$$

Exemple 2:

$$\begin{cases} u'(t) = tu(t)(u(t) - 2) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Solution:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{2u_0}{u_0 + (2 - u_0)e^{t^2}} \\ u &= 2 \\ u(t) &= \frac{2(2 + \epsilon)}{2 + \epsilon e - \epsilon e^{t^2}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2 + \epsilon - \epsilon e^{t^2} &= 0 \\ e^{t^2} &= \frac{2 + \epsilon}{\epsilon} \\ t_0 &= \sqrt{\ln\left(\frac{2 + \epsilon}{\epsilon}\right)} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad v_0 = 2 - \epsilon \text{ pour } \epsilon \ll 1 \quad 2 - \epsilon + \epsilon e^{t^2} > 0 \quad u(t) = \frac{2(2 - \epsilon)}{2 - \epsilon + \epsilon e^{t^2}}$$

//INSERER COURBE

3 - Quelques solutions analytiques**a - Méthode des caractéristiques**

On appelle problème de Cauchy, une équation différentielle sur \mathbb{R} avec une condition initiale.

Considérons le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + a(x, t)u_x(x, t) = 0 \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et a et Φ sont des fonctions régulières

Equation caractéristiques:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

//INSERER COURBE 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} &= u_x(x(t), t) \frac{\partial x}{\partial t} + u_t(x(t), t) \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= u_x(x(t), t) a(x(t), t) + u_t(x(t), t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$u(x(t), t) = \text{const} = u(x_0, 0) = \Phi(x_0)$$

Exemple:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 & a = c^k \\ u(x, 0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a & \rightarrow x(t) = at + c^k \\ x(0) = x_0 & x(t) = at + x_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(x(t), t) &= \Phi(x_0) \\ x &= at + x_0 \rightarrow x_0 = x - at \\ u(x, t) &= \Phi(x - at) \end{aligned}$$

//encadrer

Le long d'une caractéristique analytique:

$$\frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} = u_t a(x, t) u_x = b(x(t), t)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial u_x(x(\tau), \tau)}{\partial \tau} d\tau &= \int_0^t b(x(\tau), \tau) d\tau \\ u(x(\tau), \tau) - u(x(0), 0) &= \int_0^t b(x(\tau), \tau) + \tau \end{aligned}$$



$$\begin{cases} u_e + u_x = x, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = 1 \\ x(t=0) = x_0 \end{array} \right\} \rightarrow x(t) = t + x_0 \Rightarrow x_0 = x - t$$

$$\begin{aligned} u(x(t), t) &= \Phi(x_0) + \int_0^t (x_0 + \tau) d\tau \\ &= \Phi(x - t) + \int_0^t (x_0 + \tau) d\tau \\ &= \Phi(x - t) + [x_0\tau + \frac{\tau^2}{2}]_0^t \\ &= \Phi(x - t) + (x_0t + \frac{t^2}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \Phi(x - t) + (x - t)t + \frac{t^2}{2} \\ &= \Phi(x - t) + xt - \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$



Wednesday January 25 2023 Exercises

TD 1

Exercice 1

Une EDO (Equation Différentielle Ordinaire) possède **UNE variable**.

Une EDP (Equation aux Dérivées Partielles) possède **PLUSIEURS variable**.

Une équation est homogène si tout dépend de la fonction inconnue.

Espace vectoriel: stabilité par l'addition et la multiplication par une constante, c-à-d l'addition de 2 valeurs \in ensemble.

1. $u'(t) = e^t u(t)$

La seule variable est t , l'équation est donc une **EDO**.

2. $u''(t) = u(x)\sqrt{x}$

Les variables sont x et t , l'équation est donc une **EDP**.

3. $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y)e^{\sin x} = 1$

Les variables sont x et y , l'équation est donc une **EDP**.

4. $u_t(x, t) + u_x(x, t) = u_{xx}(x, t) + u^2(x, t)$

Les variables sont x et t , l'équation est donc une **EDP**.

5. $(u(t))^{(2)} + u(t) = e^t$

La seule variable est t , l'équation est donc une **EDO**.

Tuesday February 21st 2023 Exercises

Exercice 2

- Correction manquante

Exercice 3

- 1.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= e^{-x^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = 2x \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x(t) &= Ke^{2t} \\ x(t) &= x_0 e^{2t} \\ \Rightarrow x_0 &= x e^{-2t} \end{aligned}$$

Sur la courbe caractéristique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= 2x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$



$$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t 0 = 0 = u(x, t) - u(x_0, 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x, t) &= u(x_0, 0) \\ &= \phi(x_0) \\ &= e^{-x_0^2} \\ &= e^{-(xe^{-2t})^2} \end{aligned}$$

• 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin(87x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = -x \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x(t) &= Ke^{-t} \\ x(t) &= x_0 e^{-t} \\ \Rightarrow x_0 &= xe^t \end{aligned}$$

Sur la courbe caractéristique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= -x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t 0 = 0 = u(x, t) - u(x_0, 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x, t) &= u(x_0, 0) \\ &= \phi(x_0) \\ &= \sin(87x_0) \\ &= \sin(87xe^t) \end{aligned}$$

• 3.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = x & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = x_0 \end{cases}$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t) (\leftarrow a(x, t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Donc $x(t) = Ke^t$ avec $K \in \mathbb{R}$

Or, $x(0) = x_0 = Ke^0$ donc $x(t) = x_0 e^t$

Si u est solution alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t) \text{ car } u \text{ est le long d'une courbe caractéristique} \right) \quad \& \quad \left(\frac{\partial t}{\partial t} = 1 \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= x \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial u(x(\tau), \tau)}{\partial t} \partial \tau &= \int_0^t x(\tau) \partial \tau \\ \text{donc } u(x(t), t) - u(x(0), 0) &= [x_0 e^\tau]_0^t \\ \text{donc } u(x(t), t) &= \cos(90x_0) + x_0 e^t - x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \cos(90x e^{-t}) + x - x e^{-t} \\ u(x, t) &= \cos(90x e^{-t}) + x(1 - e^{-t}) \\ x_0 &= x e^{-t} \end{aligned}$$

• 4.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} &= x^2 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin(87x) \cos(90x) \end{cases}$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t) (\leftarrow a(x, t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Donc $x(t) = K e^t$ avec $K \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x(t) &= K e^t \\ x(t) &= x_0 e^t \\ \Rightarrow x_0 &= x e^{-t} \end{aligned}$$

SUITE...

Exercice 4

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= u & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) &= \phi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = u$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = 1 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x(t) &= t + cst \\ x(t) &= t + x_0 \\ \Rightarrow x_0 &= x(t) - t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x(t), t) &= K e^t \\ u(x(0), 0) &= K = \phi(x(0)) \end{aligned}$$

Tuesday February 21st 2023 Course

b - Changement de variables

Equations des ondes :

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

$$u(x, 0) = \phi(x)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x)$$

On pose

$$\xi = x + t$$

$$\eta = x - t$$



$$\begin{aligned}
u(x, t) &= v(\xi, \eta) \\
u_x(x, t) &= \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\
&= \partial_\xi v + \partial_\eta v \\
u_{xx}(x, t) &= \partial_x(\partial_\xi v) + \partial_x(\partial_\eta v) \\
&= \partial_\xi(\partial_x v) + \partial_\eta(\partial_x v) \\
&= \partial_\xi(\partial_\xi v + \partial_\eta v) + \partial_\eta(\partial_\xi v + \partial_\eta v) \\
&= \partial_{\xi\xi}^2 v + \partial_{\eta\xi}^2 v + \partial_{\xi\eta}^2 v + \partial_{\eta\eta}^2 v \\
u_{xx} &= \partial_{\xi\xi}^2 v + 2\partial_{\eta\xi}^2 v + \partial_{\eta\eta}^2 v \\
u_t &= \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \eta} = \partial_\xi v - \partial_\eta v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= \partial_t(\partial_\xi v) - \partial_t(\partial_\eta v) \\
&= \partial_\xi(\partial_t v) - \partial_\eta(\partial_t v) \\
&= \partial_\xi(\partial_\xi v - \partial_\eta v) - \partial_\eta(\partial_\xi v - \partial_\eta v) \\
&= \partial_{\xi\xi}^2 v - \partial_{\eta\xi}^2 v - \partial_{\xi\eta}^2 v + \partial_{\eta\eta}^2 v \\
u_{tt} &= \partial_{\xi\xi}^2 v - 2\partial_{\eta\xi}^2 v + \partial_{\eta\eta}^2 v \\
4\partial_{\eta\xi}^2 v &= 0 \\
\partial_{\eta\xi}^2 v &= 0 \\
\partial_\eta v &= f_1(\eta)
\end{aligned}$$

$$v = \int f_1(\eta) + c^k \text{ peut d'ailleurs dépendre de } \xi$$

$$\begin{aligned}
v(\xi, \eta) &= f(\eta) + g(\xi) \\
u(x, t) &= v(x+t, x-t) = f(x-t) + g(x+t) \\
u(x, t) &= f(x-t) + g(x+t)
\end{aligned}$$

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \phi(x)$$

$$u_t(x, 0) = -f'(x) + g'(x) = \psi(x)$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\phi'(x) + \psi(x)}{2} \\
f'(x) &= \frac{\phi'(x) - \psi(x)}{2} \\
g(x) &= c_1 + \frac{\phi(x)}{2} + \frac{1}{2} \int \psi(x) \\
f(x) &= c_2 + \frac{\phi(x)}{2} - \frac{1}{2} \int \psi(x) \\
f + g &= c_1 + c_2 + \phi(x) \\
u(x, t) &= \frac{\phi(x-t)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{x-t} \psi(z) \partial z + \frac{\phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \psi(z) \partial z \\
u(x, t) &= \frac{\phi(x-t) + \phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^0 \psi(z) \partial z + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \psi(z) \partial z \\
u(x, t) &= \frac{\phi(x-t) + \phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(z) \partial z
\end{aligned}$$

Tuesday February 21st Exercises (suite)

Exercice 1

- 1. $\partial_x f - \partial_y f = a$, avec $u = x + y$ et $v = x - y$

$$\begin{cases} \partial_x f - \partial_y f &= a, \quad a \text{ cst} \in \mathbb{R} \\ u &= x + y \\ v &= x - y \end{cases}$$



$$f(x, y) = W(u, v)$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial W(u, v)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{\partial W(u, v)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{\partial W}{\partial u} - \frac{\partial W}{\partial v} \end{aligned}$$

$$f_x(x, y) - f_y(x, y) = a$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial W}{\partial v} - \left(-\frac{\partial W}{\partial v} \right) \right) = a \Rightarrow 2 \frac{\partial W}{\partial v} = a \Rightarrow \int \frac{2 \partial W}{\partial v} = \int a \Rightarrow 2W = av + \text{cst}(u) \Rightarrow W = \frac{av + \text{cst}(u)}{2} = \frac{a}{2}v + g(u)$$

• 2.

$$x \partial_x f = y \partial_y f, \text{ avec } u = xy \text{ et } v = \frac{x}{y}$$

$$\begin{cases} x \partial_x f &= y \partial_y f \\ u &= xy \\ v &= \frac{x}{y} \end{cases}$$

$$f(x, y) = W(u, v)$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \frac{\partial W(u, v)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{y \partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{y \partial v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{\partial W(u, v)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &= \frac{x \partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v} \frac{-x}{y^2} \end{aligned}$$

$$x f_x(x, y) = y f_y(x, y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow xy \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{x}{y} \frac{\partial W}{\partial v} &= xy \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{-x}{y} \frac{\partial W}{\partial v} \\ \Rightarrow u \frac{\partial W}{\partial u} + v \frac{\partial W}{\partial v} &= u \frac{\partial W}{\partial u} - v \frac{\partial W}{\partial v} \\ \Rightarrow 2v \frac{\partial W}{\partial v} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial W}{\partial v} = 0 \quad v = 0 \text{ ou } \frac{\partial W}{\partial v} = 0 \\ \hookrightarrow W_v &= 0 \end{aligned}$$

$$\exists g \in C^1 \text{ tq } W(u, v) = g(u)$$

$$\exists g \in C^1 / f(x, y) = g(xy)$$



Thursday February 23rd 2023 Cours

c - Méthode de séparation de variables

- Considérons l'équation de la chaleur:

$$(Y) \begin{cases} \forall (x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^{t\alpha} & u_t(x, t) = \beta u_{xx}(x, t) \quad \beta > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

On suppose que la solution de cette équation peut s'écrire sous la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$ (séparation de variable) pour tout $(x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^{t\alpha}$

En injectant dans (Y) on obtient:

$$\partial_t(X(x)T(t)) = \beta \partial_{xx}(X(x)T(t))$$

$$X.T' = \beta T.X''$$

$$\frac{X}{X''} = \frac{\beta T}{T'} \text{ ou } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{\beta T}$$

$$\frac{X''}{X} \rightarrow \text{ne dépend que de "x"} \rightarrow \text{forcément constant} \leftarrow \text{ne dépend que de "t"} \leftarrow \frac{T'}{\beta T}$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{\beta T} = -\lambda$$

$$\text{soit } X'' = -\lambda X \text{ et } T' = -\lambda \beta T$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \\ u(L, t) = X(L)T(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{array}$$

Si on veut autre chose que la solution triviale $u = 0$

On doit donc résoudre:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

Polynôme caractéristique associé à $X'' + \lambda X = 0$ est

$$r^2 + \lambda = 0$$

$$r^2 = -\lambda$$

Remarque:

$$\begin{array}{rcl} ay'' + by' + cy & = & 0 \\ \hookrightarrow ar^2 + br + c & = & 0 \end{array}$$

cas 1: 2 solutions réelles r_1, r_2

$$y(z) = \alpha_1 e^{r_1 z} + \alpha_2 e^{r_2 z} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

cas 2: 2 solutions complexes c_1, c_2

$$\begin{aligned} y(z) &= \alpha_1 e^{c_1 z} + \alpha_2 e^{c_2 z} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \gamma_1 \cos(\omega z) + \gamma_2 \sin(\omega z) \\ \omega &= \sqrt{|b^2 - 4ac|} \end{aligned}$$



cas 3: 1 solutions double d_1

$$y(z) = \delta_1 z e^{d_1 z} + \delta_2 z e^{d_2 z}$$

$$= \delta_1 z + \delta_2 = e^{d_1 z}$$

$$r^2 = -\lambda$$

cas 1 $:-\lambda > 0$

$$r_1 = \sqrt{-\lambda} \quad r_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

$$X(x) = \alpha_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + \alpha_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$\begin{aligned} X(0) = 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ X(L) = 0 &= \alpha_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} + \alpha_2 e^{-\sqrt{-\lambda}L} \\ \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\alpha_1 \\ \alpha_1 e^{\sqrt{-\lambda}L} - \alpha_1 e^{-\sqrt{-\lambda}L} &= 0 \\ \alpha_1 (e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L}) &= 0 \\ \alpha_1 = 0 \quad e^{\sqrt{-\lambda}L} - e^{-\sqrt{-\lambda}L} &= 0 \\ \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 &= 0 \\ \Rightarrow X = 0 \Rightarrow u &= 0 \end{aligned}$$

cas 3: $-\lambda < 0$

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ \left. \begin{aligned} X(0) &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \\ &= c_1 \\ &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c_1 = 0 \\ X(L) &= c_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) &= 0 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ ou } \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \end{aligned}$$

si $c_2 = 0, c_2 = c_1 = 0 \Rightarrow X = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda}L &= k\pi & k \in \mathbb{Z}^* \\ \lambda &= \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 & k \in \mathbb{Z}^* \end{aligned}$$

Si l'on veut une solution non-triviale il faut que

$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

Principe de superposition

Pour des EDP linéaire homogènes, si u et v sont solution de cette EDP alors toute combinaison linéaire de ces solutions est encore solution de l'EDP.

On introduit X_k qui va être la solution de

$$X_k'' + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 X_k = 0$$

$$X_k = a_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$



On introduit T_k solution de l'équation:

$$\begin{aligned} T'_k &= -\beta\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 T_k \\ T(t) &= b_k e^{-\beta\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \end{aligned}$$

$$u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x) = a_k b_k e^{-\beta\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$u_k(x, t) = x_k e^{-\beta\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-\beta\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \end{aligned}$$

On calcule la série de fourier de de “ f ” et par unicité de ce développement on identifie les coefficients “ c_k ” ou coefficients “ α_k ” de f .

Si $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$ alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad c_k = \alpha_k$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{-\beta\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Calcul des α_k :

Le père de Fourier en “*sinus*” sur $]0, L[$ de f est:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right) \text{ avec} \\ &\alpha_k \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \end{aligned}$$

De même la série de Fourier en “*cosinus*” sur $[0, L]$ de f est: $f(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$

$$\text{avec } \gamma_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx$$

Exemple: On considère (Y) avec $L = \pi$ $\beta = 7$ et $f(x) = 3\sin(2x) - 6\sin(5x)$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{-7\left(\frac{k\pi}{\pi}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{\pi}x\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e^{-7k^2 t} \sin(kx) \end{aligned}$$

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \sin(k, x)$$

on a $f(x) = 3\sin(2x) - 6\sin(5x) \rightarrow$ (c'est déjà le développement en série de Fourier.



on a donc:

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= 3 \\ \alpha_5 &= -6\end{aligned}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{2, 5\} \quad \alpha_k = 0$$

$$u(x, t) = 3e^{-7 \times 2^2 \times t} \sin(2x) - 6e^{-7 \times 2^2 \times t} \sin(5x)$$

$$u(x, t) = 3e^{-28t} \sin(2x) - 6e^{-175t} \sin(5x)$$

Monday 27th March 2023 Exercises

TD1 suite

Exercice 2

Posons $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$u_{tt} = X(x)T''(t) = c_0^2 u_{xx} = c_0^2 X''(x)T(t) \text{ donc } c_0^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Considérons

$$\begin{cases} c_0^2 X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

L'équation caractéristique associée est $c_0^2 r^2 + \lambda = 0$ (e)

On cherche les racines de (e).

- **cas 1:** "solution réelles" $\lambda < 0$

$$c_0^2 r^2 = -\lambda \Leftrightarrow r^2 = \frac{-\lambda}{c_0^2}$$

On a comme solutions $X(x) = \alpha_0 e^{r_1 x} + \alpha_1 e^{r_2 x}$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 = 0 \text{ donc } \alpha_1 = -\alpha_0 \\ X(L) = 0 \Rightarrow \alpha_0 (e^{r_1 L} - e^{r_2 L}) = 0 \text{ donc } \alpha_0 = 0 \text{ ou } e^{r_1 L} - e^{r_2 L} = 0 \end{cases}$$

On retombe sur la solution triviale

$$u(x, t) = X(x)T(t) = 0 \text{ car } X(x) = 0$$

- ****cas 2:*** "solution double" $\lambda = 0$

$$c_0^2 r^2 = 0 \quad r^2 = 0 \text{ donc } r = 0$$

$$c_0^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \text{ donc } c_0^2 = 0 \text{ ou } X''(x) = 0$$

- $X''(x) = 0 \Rightarrow X'(x) = c_0 \Rightarrow X(x) = c_0 x + c_1$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow X'(x) = c_0 \Rightarrow X(x) = c_0 x + c_1 \\ X(L) = 0 \Rightarrow c_0 L = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \end{cases}$$

- $c_0 = 0 \Rightarrow$ même chose. On retombe sur la solution triviale.

- **cas 3:** "solution imaginaires" $\lambda > 0$ $c_0^2 r^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow c_0^2 r^2 = -\lambda$

$$\text{donc } r = \pm i \sqrt{\frac{\lambda}{c_0^2}} = \pm i \omega$$

$$X_n(x) = \alpha_0 \cos(\omega x) + \alpha_1 \sin(\omega x)$$

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Rightarrow X'(x) = c_0 \Rightarrow \alpha_0 = 0 \\ X(L) = 0 \Rightarrow c_0 L = 0 \Rightarrow \alpha_1 \sin(\omega L) = \alpha_1 \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda} L}{c_0}\right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{\lambda} L}{c_0} = k\pi \\ \Rightarrow \lambda = \left(\frac{k\pi c_0}{L}\right)^2 \end{cases}$$



On introduit pour $k \in \mathbb{N}$

$$X_k(x) \text{ solution de } c_0^2 X_k''(x) + \lambda_k X_k(x) = 0 \text{ avec } \lambda_k = \left(\frac{k\pi c_0}{L}\right)^2$$

$$X_k(x) = a_k \sin\left(x \frac{\sqrt{\lambda_k}}{c_0}\right) \quad \sqrt{\lambda_k} = kc_0$$

$$T_k(t) \text{ solution de } T_k''(t) + \lambda_k T_k(t) = 0$$

l'équation caractéristique associée est $r^2 + \lambda_k = 0$ comme $\lambda_k = \left(\frac{k\pi c_0}{L}\right)^2 > 0$

les racines sont $r = \pm i\sqrt{\lambda_k}$

$$T_k(t) = b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + c_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t)$$

Par le théorème de superposition:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(x \frac{\sqrt{\lambda_k}}{c_0}\right) [b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + c_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{c_0} x\right) \\ &= \sin(3x) - 4\sin(10x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sqrt{\lambda_k}}{c_0} \sin\left(x \frac{\sqrt{\lambda_k}}{c_0}\right) \\ &\quad \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{c_0} t\right) [b_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + c_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \cos\left(\frac{x\sqrt{k}}{c_0}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \cos(kx) \\ &= 2\sin(4x) + \sin(6x) \end{aligned}$$

Par identification: $-k = 3$,

$$a_3 b_3 = 1$$

$$a_1 b_1 = -4$$

$$\forall k \neq 3, 10, a_k b_k = 0$$

Course

4 - Solution numérique

Considérons le problème suivant:

$$(PC) \begin{cases} u'(t) = f(u(t)) & \forall t \in]0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Supposons que u soit de class C^2 , alors son développement de Taylor à l'ordre 2 s'écrit:

$$u(t + \Delta t) = u(t) + u'(t)\Delta t + \frac{u''(t)}{2!} \Delta t^2 + o(\Delta t^2)$$



$$u'(t) = \frac{(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Nous allons utiliser cette relation pour construire une solution numérique approchée.

Pour cela on va discrétiser l'intervalle sur lequel on cherche la solution $([0, T_0])$ en $(n + 1)$ points $t_i, i = 0, \dots, n$ avec $t_0 = 0$ et $t_n = T_0$.

$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ est le pas de discrétisation. On le considère constant ici $\Delta t = \frac{T - 0}{n} = \frac{T}{n}$

On parle alors de discrétisation régulière.

En appliquant l'approximation de la dérivée première entre t_i et t_{i+1} on peut écrire:

$$u'(i) \simeq \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\Delta t}$$

Si on note $u_i = u(t_i) \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

Le problème numérique approchée obtenu est:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} = f(u_i) & \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ u_0 \end{cases}$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t f(u_i)$$

→ schéma d'Euler explicite (E-E)

Exp:

$$f(u) = u$$

$$u(0) = 1$$

$$PC \begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{solution analytique: } t \rightarrow e^t$$

Schéma d'E-E:

$$PC \begin{cases} u_{i+1} = u_i + \Delta t u_i = (1 + \Delta t)u_i \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

$$u_{i+1} = (1 + \Delta t)^{i+1} u_0 = (1 + \Delta t)^{i+1}$$

Exercise

TD1

Exercice 7 - Mini-Projet

1.

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad u(t) = e^{-t}$$

2. En partant du schéma E-E

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \Delta t f(u_n) \\ u_{n+1} &= u_n - \Delta t u_n \\ &= (1 - \Delta t)u_n \\ &= (1 - \Delta t) \times (1 - \Delta t)u_{n-1} \\ &\dots \\ &= (1 - \Delta t)^{n+1}u_0 \\ \Rightarrow u_n &= (1 - \Delta t)^n \end{aligned}$$

3. $u_n = (1 - \Delta t)^n$



Monday April 3rd 2023 Cours

Méthode de différences finies

On va s'intéresser dans ce qui suit à l'équation de la chaleur

$$\mathcal{EC} \begin{cases} U_t(x, t) = U_{xx}(x, t) & \forall x \in]0, 1[\quad \forall t > 0 \\ U(0, t) = U(1, t) = 0 \\ U(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

1 - Approximations des dérivées successives

Considérons une subdivision régulière de $[a, b]$.

$$\begin{array}{ccccccc} | & & | & & | & & | \\ a & \cdots & x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & \cdots & b \end{array}$$

$$x_{i+1} - x_i = h \forall i$$

L'idée est d'utiliser la formule de Taylor pour des fonctions régulières

différences divisées progressives d'ordre 1

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} + O(h) \rightarrow u'(x_i) \simeq \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}$$

différences divisées régressives d'ordre 1

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + O(h) \rightarrow u'(x_i) \simeq \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}$$

différences divisées progressives d'ordre 2

$$u'(x_i) = \frac{-u(x_i + 2h) + 4u(x_i + h) - 3u(x_i)}{2h} + O(h^2) \rightarrow u'(x_i) \simeq \frac{-u(x_{i+2}) + 4u(x_{i+1}) - 3u(x_i)}{2h}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad u(x_i + h) &= u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^3) \\ (2) \quad u(x_i + 2h) &= u(x_i) + 2hu'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x_i) + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^3) \\ 4 \times (1) + (2) \quad 4u(x_i + h) - u(x_i + 2h) &= 3u(x_i) + 2hu'(x_i) + O(h^3) \\ u'(x_i) &= \frac{-u(x_i + 2h) + 4u(x_i + h) - 3u(x_i)}{2h} - u'(x_i) < Mh^2 \end{aligned}$$

différences divisées régressives d'ordre 2

$$u'(x_i) = \frac{3u(x_i) - 4u(x_i - h) + u(x_i - 2h)}{2h} + O(h^2) \rightarrow u'(x_i) \simeq \frac{3u(x_i) - 4u(x_{i-1}) + u(x_{i-2})}{2h}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad u(x_i - h) &= u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^3) \\ (2) \quad u(x_i - 2h) &= u(x_i) - 2hu'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x_i) - \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^3) \\ 4 \times (1) - (2) \quad 4u(x_i - h) - u(x_i - 2h) &= 3u(x_i) - 2hu'(x_i) + \frac{4h^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^3) \end{aligned}$$



différences divisées centrées d'ordre 2

$$u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} + O(h^2) \rightarrow u'(x_i) \simeq \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h}$$

$$\begin{aligned} u(x_i + h) &= u(x_i) + hu'(x_i) + O(h^2) \\ &= u(x_i) + hu'(x_i) + \epsilon(h) \end{aligned}$$

$$O(h) \rightarrow \exists M > 0 \quad \text{tq} \quad |\epsilon(h)| < Mh$$

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} &= hu'(x_i) + O(h^2) \\ \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} &= u'(x_i) + O\left(\frac{h^2}{h}\right) \\ \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - u'(x_i) &= O\left(\frac{h^2}{h}\right) \end{aligned}$$

$$(1) \quad u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^3)$$

$$(2) \quad u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^3)$$

$$(1) - (2) \quad u(x_i + h) - u(x_i - h) = 2hu'(x_i) + \frac{2h^3}{3!}u'''(x_i) + O(h^3)$$

$$(1) + (2) \quad u(x_i + h) + u(x_i - h) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + \frac{2h^4}{4!}u^{(4)}(x_i) + O(h^4)$$

$$\frac{u(x_i + h) + u(x_i - h) - 2u(x_i)}{h^2} - u''(x_i) = O(h^2)$$

Pour les dérivées d'ordre supérieurs on procède de la façon suivante:

$$\begin{aligned} u''(x_i) &= \frac{u'(x_i + \frac{h}{2}) - u'(x_i - \frac{h}{2})}{h} + O(h^2) \\ &= \frac{\frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h}}{h} + O(h^2) \\ &= \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} + O(h) + \cancel{O(h^2)} \end{aligned}$$

Schéma explicite pour l'équation de la chaleur

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ u_{xx}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

où Δt est la pas de discrétisation en temps et Δx celui en espace.

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \\ \frac{(x, t + \Delta t) - u - x, t)}{\Delta t} &\simeq \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

Si on note: $u_j^m \simeq u(j\Delta x, m\Delta t)$ pour tout $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}$$

$$u_j^{m+1} = u_j^m + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m]$$



$$u^m + 1_j = u_j^m + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} [u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m]$$

$$u^m + 1_j = ru_{j+1}^m + (1 - 2r)u_j^m + ru_{j-1}^m$$

Ce que je veux faire $u^{m+1} = Au^m$

$$u^{m+1} = \begin{pmatrix} u_0^{m+1} \\ \vdots \\ u_1^{m+1} \\ \vdots \\ u_N^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^{m+1} \\ \vdots \\ u_j^{m+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{m+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad u^m = \begin{pmatrix} u_0^m \\ \vdots \\ u_1^m \\ \vdots \\ u_N^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^m \\ \vdots \\ u_j^m \\ \vdots \\ u_{N-1}^m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F = (f(x_j)) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_j) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1^{m-1} \\ \vdots \\ u_j^{m+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & - & 2r & r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ r & 1 & - & 2r & r & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & r & 1 & - & 2r & r & 0 \\ \vdots & & \ddots & r & 1 & - & 2r & r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & r & 1 & - & 2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^m \\ \vdots \\ u_{j-1}^m \\ u_j^m \\ u_{j+1}^m \\ \vdots \\ u_{N-1}^m \end{pmatrix}$$

Pour les schémas implicites il existe souvent une condition de stabilité qui lie les différents pas de discrétisation simultanément “petits” ce qui induit une puissance de calcul plus importante. On aimerait se passer de cette contrainte. Les schémas implicites peuvent répondre à cette contrainte.

En utilisant la même approche que pour le schéma explicite on obtient:

$$u(x, t + \Delta t) \simeq \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

$$u_{xx}(x, t + \Delta t) \simeq \frac{u(x + \Delta x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + \Delta t + u(x - \Delta x, t + \Delta t)}{\Delta x^2}$$

- On obtient le schéma suivant: $\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{\Delta x^2} u_j^{m+1} (1 + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}) - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{j+1}^{m+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^{m+1} = u_j^m - ru_{j-1}^{m+1} + (1 + 2r)u_j^{m+1} - ru_{j+1}^{m+1} = u_j^r$

$$\begin{pmatrix} 1 & + & 2r & -r & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -r & 1 & + & 2r & -r & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -r & 1 & + & 2r & -r & 0 \\ \vdots & & \ddots & -r & 1 & + & 2r & -r \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -r & 1 & + & 2r \end{pmatrix}$$



Analyse de la stabilité de Von Neuman

On introduit la notation suivant:

$$u_j^m = (a_k)^m e^{ik\pi x_j} \text{ avec } i^2 = -1.$$

$$u_{j+j_0}^{m+m_0} = (a_k)^{m+m_0} e^{ik\pi x_{j+j_0}}$$

On introduit cette notation dans le schéma numérique dont on veut étudier la stabilité. Par exemple, pour le schéma explicite de l'équation de la chaleur on obtient.

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{\Delta x^2}$$

$$\frac{(a_k)^{m+1} e^{ik\pi x_j} - (a_k)^m e^{ik\pi x_j}}{\Delta t} = \frac{(a_k)^m e^{ik\pi x_{j+1}} - 2(a_k)^m e^{ik\pi x_j} + (a_k)^m e^{ik\pi x_{j-1}}}{\Delta x^2}$$

$$e^{ik\pi x_{j+1}} = e^{ik\pi(x_j + \Delta x)} = ??? \text{ (voir photo 03/04/23 15:12)}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_k - 1}{\Delta t} &= \frac{e^{ik\pi\Delta x} - 2 + e^{-ik\pi\Delta x}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{e^{\frac{ik\pi\Delta x}{2}} - e^{-\frac{ik\pi\Delta x}{2}}}{\frac{\Delta x^2}{2}} \\ &= \frac{2i \sin(\frac{k\pi\Delta x}{2})}{\frac{\Delta x^2}{2}} \\ a_k &= 1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k\pi\Delta x}{2}) \end{aligned}$$

Pour que le schéma soit stable, il faut que $|a_k| \leq 1$

$$\begin{aligned} |1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k\pi\Delta x}{2})| &\leq 1 \\ -1 &\leq 1 - 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k\pi\Delta x}{2}) \leq 1 \\ -2 &\leq -4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k\pi\Delta x}{2}) \leq 0 \\ 4 \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k\pi\Delta x}{2}) &\leq 2 \\ \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(\frac{k\pi\Delta x}{2}) &\leq \frac{1}{2} \\ \frac{\Delta t}{\Delta x^2} &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

