Algorithmique et programmation distribuée

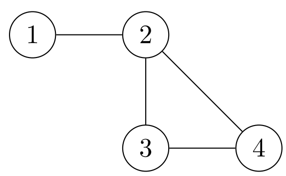
Zakaria EJJED

Contents

Wednesday February 1st 2023

Un graphe: G(V,E) $\rightarrow$ (ensemble sommet, ensembles arêtes)

V=1,2,3,4 | E=[(1,2),(2,3),(3,4)(2,4)}



degré d'un sommet $x \in V$

d(x)=nombre de ses voisins dans le graphe

exemple: d(2)=3

soit un graphe à n sommets

G=(V,E), |V|=4 (ordre du graphe), max:n-1 min:0

Exercice: Modelisation d'un problème

Montrer que dans un groupe de personnes (***n noeuds***), il y a toujours 2 personnes qui connaissent (***arêtes***) le même nombre de membres d'un groupe.

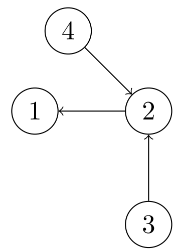
Par l'absurde, opposons que les n noeuds ont tous un degré différent

$\rightarrow$ contradiction: un noeuds doit avoir un degré n-1

$\rightarrow$ Un noeud doit avoir un degré 0 ou il y a n noeuds et n degrés différents possibles or ces 2 noeuds sont pas connecté.

Graphe orienté: Un graphe dans lequel les arêtes (*arc*) ont une direction.

G=(V,A) $\rightarrow$ (sommets,arcs)



V=1,2,3,4 | A =(2,1) (3,2) (4,2) $\rightarrow$ (*origine*,*extremité*)

Pour le somemt x

degré entrant: nombre d'arcs dans lequel x extremité

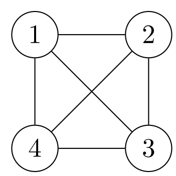
degré sortant: nombre d'arcs dans lequel x origine

$\mathrm{d}^{+}(\mathrm{x})$ | $\mathrm{d}^{-}(\mathrm{x})$

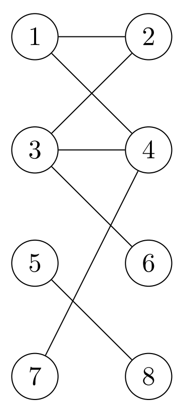
Exemple de graphes:

- ***graphe complet***: toutes les arêtes sont presentes

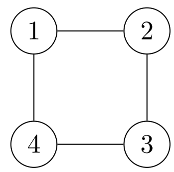
$$\text{nombres d'arête } = \frac{n(n-1}{2}$$



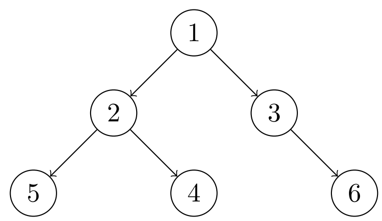
- ***graphe biparti***:



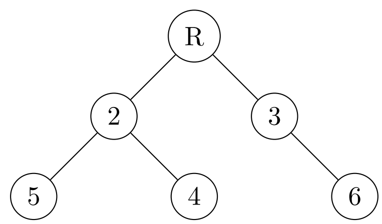
- ***Arbres***: graphe qui n'a pas de cycles.
  cycle:



Nombre d'arêtes dans un arbre, sans sommet de degré 0: n-1



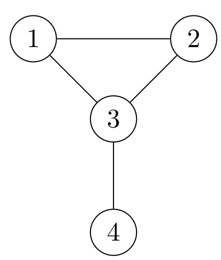
- ***arbres enracinés***: Arbres don orienté dans lequel on distingue un noeud racine.



Feuille d'un arbre: sommets de degré 1 qui n'est pas la racine.

Chemin: ensemble de sommets $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$

tel que $(x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n)$ sont des arêtes



longueur chemin: nombre de ses arêtes

père d'un noeud x: soit h(x) sa hauteur, Son père est son voisin dont la hauteur vaut h(x)-1

fils d'un noeuf: comme le père mais h(x)+1

mini exo:

Soit un arbre à n noeuds
$\rightarrow$hauteur max $\Rightarrow$ n-1 (arbre chemin)
$\rightarrow$hauteur min $\Rightarrow$ 1 (n feuilles)
$\rightarrow$hauteur quand un noeud a exactement 2 fils $\Rightarrow 2^{h-1} \leq n \leq 2^h$

Soit un graphe avec n sommets, $s_1, s_2, ..., s_n$

Montrer que $\sum_{i=1}^{n} d(s_i)$ est paire.

Dans la $\sum$ des degrés: chaque arête est compté 2 fois, une fois pour chaque extremité.

Exercice: Montrer que le nombre de sommets de degré impaire est paire.

On sait que la somme des degrés est paire, donc pour chaque sommet de degré impaire, il doit y avoir un second sommet de degrés impaire.

Dans le cas où on aurait un nombre impaire de sommet de degré impaire, la somme des degrés serait elle aussi impaire.

Montrer que dans un arbre avec + de 2 sommet, il y a au moins deux sommets de degré 1.

$\rightarrow$ En supposant n $\geq$ 2 et un noeud de degré 1.

$$\sum_{i=1}^{n} d(s_i) \geq 2 \times (n-1) + 1$$

- ***Complexité - notion :***
  Notation de Landeau: $O(f(x)) = g(x)$
- ***informel:***
  à partir d'un certain x, la valeur $g(x)$ sera inférieur à $f(x)$

//COURBE

- ***formellement:***
  on écrit
  $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & O(g(x)) \\ f(x) & \in & O(g(x)) \end{array}$$

$$\text{Ssi: } \forall x \geq x_0, \exists k \in N \text{ tel que } |f(x)| \leq k|g(x)|$$

Exemple:
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x \\ g(x) & = & x^x \end{array}$$

//COURBE 4

$$x_0 = 1 \quad k = 1 \quad f(x) = O(g(x))$$

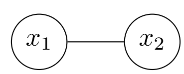
Lors d'une compétition il y a 13 joueurs, est-ce qu'il est possible que chaque joueur participe à exactement 3 matchs.

- ***système distribué:*** un ensemble de noeuds de calculs, autonomes interconnecté et pouvant communiquer
- ***représenté par un graphe:***

$$1 \text{ noeud de calcul} = 1 \text{ sommet}$$
$$1 \text{ lien de com} = 1 \text{ arête}$$

- 1 noeud n'a accès en lecture/écriture qu'à sa propre mémoire. Tout le reste lui est envoyé sous forme de message. Un noeud a une vision locale du réseau. Il faut souvent résoudre des problèmes globaux.
- ***objectif:*** résoudre problèmes globaux à l'aide d'algos locaux
  → Les noeuds vont devoir communiquer entre eux par passage de message.
  ↪ 1 noeud peut recevoir 1 message (on sait qui nous l'a envoyé). ↪ 1 noeud peut envoyer 1 message à son voisin/

mini exemple:



On veut un algo: à la fin de l'execution chaque noeud connait la valeur var max dans le réseau.

chaque noeud e*nvoie son* var à son voisin

calcul: sur réception de var faire le calcul de max (var x_1, var x_2)