OBHPC - maths
CM1

William JALBY *

20 septembre 2022

- Jumeau numerique

Un Jumeau numerique reproduit au format numerique un phenomene physique
$\rightarrow$Physique : Equation : contient erreur et approximation
$\rightarrow$Math : Equation Continu : erreur
$\rightarrow$Info : Discretisation $\rightarrow$ Algebre Lineaire $\rightarrow$ resolution $Ax = b$ $\rightarrow$ valeur propres $Ax = \lambda x$

Calul differentiel

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
def 1: f est derivable au point a $\Leftrightarrow$ existe $f'(a)$ tq $lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
def 2:
f est de classe C^0 $\Leftrightarrow$ f est continue. f sur I.
f est de classe C^1 $\Leftrightarrow$ f' existe et est continue.
f est de classe C^2 $\Leftrightarrow$ f'' existe et est continue.
f est de classe C^k $\Leftrightarrow$ $f^(k)$ existe et est continue.
def 3:
dérivabilité à droite: $lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_D(a)$
dérivabilité à gauche: $lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_G(a)$
Différenciabilité générale: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$f(x_1, ..., x_n)$
$\exists(\alpha_1, ...\alpha_n)$
$lim_{||h|| \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)-\alpha_1 h_1 - ... - \alpha_n h_n}{||h||}$
$\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$
$\vec{h} = (h_1, ..., h_n)$

Derivé partielle par rapport à la variable i

$\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$
$\vec{h} = (0, ...h_i, ..., 0)$
$\alpha_i = \frac{\partial f}{\partial_{xi}}(a)$
$\lim_[h_i \rightarrow 0] \frac{f(a+h)-f(a)-\alpha_i h_i}{h_i} \rightarrow 0$

*william.jalby@uvsq.fr

f: Differenciable généralement au point a
$\Downarrow \not\Uparrow$
f a des dérivées partielles au point a
Gradient de f:

(nabla)$\rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x n} \end{pmatrix}$ $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_1} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

$\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
$\vec{f} : (f_1, ..., f_p)$ $\lim_{||h|| \rightarrow 0} \frac{||\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}-\vec{f}(a)-\nabla \vec{f}.\vec{h}||)}{||\vec{h}||} \rightarrow 0$
Dérivée partielle de la composante j par rapport à la variable i
$\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \beta_{ji}$ $\lim_{hi \rightarrow 0} \frac{f_j(a+h)-f(a)-\beta_{ji}h_i}{h_i} \rightarrow 0$
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{x_1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) \\ \vec{\nabla}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) \end{array}$$

<u>Théoreme:</u> Si f est de classe C^2
$\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}$ $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \exists ? f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} tq \nabla f = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = g$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2} = h$
$\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) = \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1})$
$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial x_2}$
$\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
$\nabla \vec{f}$

Jacobien$(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Pour $i \neq j$, on appelle $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ une dérivée croisée.
$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
Laplacien: $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_N}$
$\Delta f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
$\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
Divergence: $\mathrm{div}(\vec{g}) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}$
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
f inconnue

f tq $G(f, f', f'', ..., f^{(h)}, x) = 0$ Equation Differentiel Ordinaire (ODE ou EDO)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$f \in C^{(k)}$
$\frac{\partial \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$
$(f) = \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial_x}(f)$
$H(b, \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial \vec{x}}(f), \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{x}}(f), ..., \vec{x})$
$H : \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}$
Equation aux dérivées partielles (PDE ou EDP)
ordre: $\max(d1 + d2 = ... + dn)$

- Complément de cours:
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$grad(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$
$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$div(g) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}$
$gradf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$div(grad(f)) = \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_n})$
$= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}$
$= \Delta f$
divergence: $\boxed{\nabla . g}$
gradient: $\boxed{\nabla g}$