Techniques de modélisation

Exercice 1
Considérons les équations différentielles suivantes :

1. $u'(t) = e^t u(t)$,
2. $u''(t) = u(x)\sqrt{x}$,
3. $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)e^{\sin(x)} = 1$,
4. $u_t(x,t) + u_x(x,t) = u_{xx}(x,t) + u^2(x,t)$,
5. $(u(t))^{(2)} + u(t) = e^t$

Pour chacune de ces équations dites s'ils s'agit d'EDO ou d'EDP, si elles sont linéaires ou non linéaires et enfin si elles sont homogènes ou non homogènes.

Exercice 2
Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$u'(t) = -\alpha u(t) \qquad \text{avec } u(0) = u_0 \quad \text{et } \alpha > 0$$

1. Montrer que ce problème est stable si l'on perturbe u_0 uniquement.
2. Que se passe-t-il si l'on perturbe α uniquement ?
3. Que se passe-t-il si l'on perturbe les deux ?

Exercice 3
Trouver les solutions exactes aux problèmes de Cauchy suivants :

1. $$u_t + 2xu_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$ $$u(x,0) = e^{-x^2}$$

2. $$u_t - xu_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$ $$u(x,0) = \sin(87x)$$

3. $$u_t + xu_x = x \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$ $$u(x,0) = \cos(90x)$$

4. $$u_t + xu_x = x^2 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$ $$u(x,0) = \sin(87x)\cos(90x)$$

Exercice 4
Calculer la solution exacte du problème de Cauchy suivant :

$$
\begin{aligned}
u_t + u_x &= u \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\
u(x,0) &= \phi(x) \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

où ϕ est une fonction régulière donnée.

Exercice 5
Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$
\begin{aligned}
u_t + au_x &= b(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\
u(x,0) &= \phi(x) \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

où a est constante et ϕ et b sont des fonctions régulières données.
Considérons également le problème de Cauchy suivant :

$$
\begin{aligned}
v_t + av_x &= b(x,t) \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\
v(x,0) &= \phi(x) + \varepsilon(x) \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

où ε est une fonction régulière.

1. Montrer que :

$$
\sup_{x \in \mathbb{R}, t \geq 0} |u(x,t) - v(x,t)| = \sup_{\in \mathbb{R}} |\varepsilon(x)|
$$

2. Conclure

Exercice 6
Considérons l'équation des ondes :

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\
u(x,0) &= \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\
u_t(x,0) &= \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

pour un $c > o$.

1. Montrer que la solution de ce problème s'écrit :

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+ct) \pm \phi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\theta)d\theta
$$

2. En utilisant le résultat précédent trouver la solution du problème suivant :

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= 16u_{xx} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\
u(x,0) &= 6\sin^2(x) \quad x \in \mathbb{R}, \\
u_t(x,0) &= \cos(6x) \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

3. Posons $v = u_t + cu_x$ où u est la solution de l'équation des ondes initiales.
   (a) Montrer que :

   $$
   v_t - cv_x = 0
   $$

   (b) Exprimer v en fonction de ϕ et ψ

(c) Monter que :

$$u(x,t) = \phi(x-ct) + \int_0^t v[x - c(t-\tau), \tau] d\tau$$

(d) En déduire la forme de u donnée en 6.1

Exercice 7
Mini-projet
Considérons le problème suivant :

$$u'(t) = -u(t),$$
$$u(0) = 1$$

1. Quelle est la solution exacte de ce problème ?
2. Montrer que la méthode d'Euler explicite mène à la solution numérique suivante :
$$u_m = (1 - \Delta t)^m, \quad m = 0, 1, \ldots$$
3. Montrer que la solution converge en $t = 1$ quand Δt tend vers 0.
4. Monter que que :
$$\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} \approx u'(t_{m+1}) = f\left(u(t_{m+1})\right)$$
5. Donner le schéma d'Euler implicite qui se base sur la formulation précédente
6. En déduire que :
$$u_m = \frac{1}{(1+\Delta t)^m}, \quad m = 0, 1, \ldots$$
7. Montrer que :
$$\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} \approx \frac{f\left(u(t_{m+1})\right) + f\left(u(t_m)\right)}{2}$$
8. En déduire le schéma numérique suivant :
$$u_{m+1} - \frac{1}{2}\Delta t f\left(u(t_{m+1})\right) = u_m + \frac{1}{2}\Delta t f\left(u(t_m)\right), \quad m = 0, 1, \ldots$$
9. Montrer alors que la solution numérique vaut :
$$u_m = \left(\frac{2 - \Delta t}{2 + \Delta t}\right)^m, \quad m = 0, 1, \ldots$$
10. Comparer la précision des trois méthodes en calculant par exemple la solution à t=1. Montrer que les erreurs respectives sont de l'ordre de $k\Delta t$ pour les 2 premières et de l'ordre de $k\Delta t^2$ pour le dernier schéma.
11. Refaire l'étude avec le problème suivant :
$$u'(t) = -u^2(t),$$
$$u(0) = 1$$
12. Les conclusions sont-elles les mêmes que dans le cas linéaire initiale ?