Optimisation et Recherche Operationnelle

Zakaria EJJED

Contents

Thursday January 26 2023 Course

Optimisation:

→ on cherhce le point $x*$ où l'optimisation (minimum ou maximum selon le cas) de la fonction f est réalisé.

Recherche opérationnelle: → on se trouve dans un contexte industriel dans lequel on cherche à résoudre un problème concret, problèmes que l'on peut représenter comme des problème d'optimisation.

⇒ modélisation: travail de représentation mathématique/informatique d'un problème concret qui est posé. → abstraction/simplification.

Exemple: Gestion de stocks.

- **Entrepot:** Chaque jour, q=100 unités sortant; une unité en stock coûte a=0,16€/jour; le coût d'une passation de commande est b=50€, et le réapprovisionnement à lui automatiquement dès que le stock est vide; une commande ne peux axcéder c=400 unités.
  On cherche le volume optimal O^{R} d'une commande.
  → modélisation: on cherche à minimiser le coût de gestion de l'entrepôt.
- **Coût de gestion:**

$$\begin{array}{rlcl} & \text{coût de stock} & = & 0,16€/\text{jour/unité} \\ + & \text{coût de commande} & = & 50€ \end{array}$$

→ On expime tout en euros par jour.

- **Coût de stock:**
  On cherche le nombre moyen d'unités dans le stock: on suppose que le stock se vide à un rythme régulier, et de façon continue.
  //1 Le stock moyen est le stock moyen sur un période $\frac{Q}{2}$.

$$\int_0^T Q(1 - \frac{t}{T})dT = \frac{Q}{2}$$

Le coût quotidien de gestion de stock est a.$\frac{Q}{2}$€/j.
coût de commande:
$\frac{Q}{100}$ est le temps (en jour) entre deux commandes: on fait une commande, coûte b=50€, tous les $\frac{Q}{100}$ jours, et le coût quotidient moyen de commande est des:

$$\frac{b}{a/q} = \frac{50}{Q/100} = \frac{5000}{Q}$$

Le coût quotidien moyen de gestion de l'entrepôt est de:

$$\begin{array}{l} f(Q) = 0,08Q + \frac{5000}{Q} \\ D = [0,400] \quad Q \leq 400 \quad Q \geq 0 \\ \min \{f(Q)/Q \in D\} \\ \min \{0,08Q + \frac{5000}{Q}/0 \leq 400\} \end{array}$$

On détermine le table de variation de f:

$$\begin{array}{lcl} \forall Q \in]O,400], & & \\ f'(Q) & = & 0,08 - \frac{5000}{Q^2} \\ f'(Q) & = & 0 \\ & & \\ \Leftrightarrow 0,08 - \frac{5000}{Q^2} & = & 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5000}{Q^2} & = & 0,08 \\ \Leftrightarrow \frac{Q^2}{5000} & = & \frac{1}{0,08} \\ \Leftrightarrow Q^2 & = & \frac{5000}{0,08} = \frac{500000}{8} = 62500 \\ \Leftrightarrow Q & = & \sqrt{62500} \simeq 250\text{car Q>0} \end{array}$$

$$\text{si } \sqrt{\frac{2bq}{Q}}$$

...

//TABLEAU DE VARIATION

La minimisation de f est atteinte à 250: le volume optimal de commande est Q=*250, pour un coût quotidien de f(Q)*=40.

Si on généralise à des a, b, c, q, quelconques:

$$
\begin{aligned}
&\forall Q \in]O, 0], \\
f(Q) &= a \times \frac{Q}{Q^2} + \frac{bq}{Q} \\
f'(Q) &= \frac{a}{2} - \frac{bq}{Q^2} \\
\\
f'(Q) &= 0 \\
\\
\Leftrightarrow \frac{a}{2} - \frac{bq}{Q^2} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{bq}{Q^2} &= \frac{a}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{Q^2}{5000} &= \frac{1}{0{,}08} \\
\Leftrightarrow Q &= sqrt\frac{2bq}{a} \text{ car } Q > 0
\end{aligned}
$$

//TABLEAU DE VARIATIONS

Algorithm 1 Algo Stock opti (a,b,c,q:réels > 0)$\rightarrow$Q*:réel>0

if $\sqrt{\frac{2bq}{a}} \leq c$ **then**
 $Q^* \leftarrow \frac{2bq}{a}$
else
 $Q^* \leftarrow c$
end if

I - Problème d'ordonnancement

On cherche à déterminer l'ordre dans le quel effectuer des tâches, définies par leurs durées, et par des relations de précedence: certaines tâches ne peuvent être effectuées qu'après que d'autres aient été accomplies.

On cherche à déterminer le planning permettant de terminer au plus vite le projet.

On a une série de tâche $\{t_i / i = 1, ..., u\}$, A chaque tâche est associée une durée, ainsi qu'une liste de tâches $\{p_{ij} / j = 1, ..., k_i\}$ qui doivent être terminée avant que la tâche t_i ne puisse commencer.

La fonction objective est la durée du projet, que l'on cherche à minimiser; les contraintes sont les contraintes de précendence; les variables de décision décrivent l'ordre dans lequel on effectue les tâches: c'est le planning de ces tâches, c'est à dire la date de début de chacune des tâches.

La durée totale du projet, fonction objective, est la durée entre le début de la premiète tâche ($\rightarrow t = 0$) et la fin de la dernière.

$t_f =$

la tâche t_i se termine au temps a_i(date de début de la tâche) $+ d_i$(durée de la tâche)

Le projet se termine en même temps que la dernière tâche, au temps:
$\max\{\ a_i + d_i / i = 1, ..., u\ \}$.

On cherche donc à minimiser $\max\{\ a_i + d_i / i = 1, ..., u\ \}$.

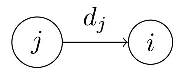
On a de plus les contraintes suivantes:

$$
\begin{aligned}
&\forall i = 1, ..., u \\
a_i &\geq 0 \\
\forall i = 1, ..., u & \quad \forall k \in P_i, \\
a_k + d_k a &\leq a a_i
\end{aligned}
$$

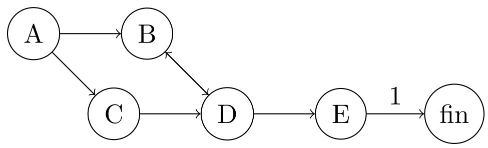
Au final, le problème consiste à trouver des a_i réalisant:

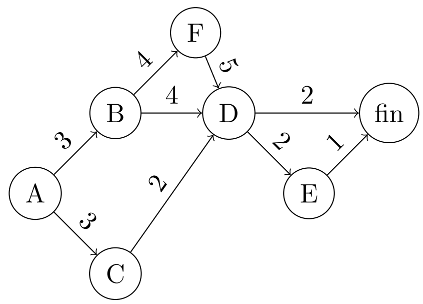
$\min\{\max\{a_i + d_i / i = 1, ..., u\} /\ \forall i, a_i \geq 0; \quad \forall k \in P_i,\ a_i \geq a_k + d_k\}$ contraintes

On peut également modéliser ce problème sous la forme de graphes. Dans la méthode des **potentiels**, chaque tâche est représentée par un sommet et les relations de précédences par des arcs. Un arc joint j à i si $j \in P_i$



A chaque arc, on associe la durée de la tâche dont il est issu. La longueur d'un chemin représente la durée de tâches qui doivent être executés consécutivement: la durée du projet est donc plus grande que la longueure et n'importe quel chemin dans ce graphe.





Recherche d'un plus long chemin dans un graphe (problème de maximisation): max$\{f\}$ = -min$\{-f\}$

//COURBE

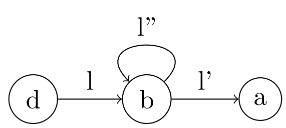
L'algo de Dijkstra ne peut s'appliquer car il nécessite des valuations positives. $\Rightarrow$ algo de **Bellman-Ford**.

La durée totale du projet est donc minorée par la longueure du plus long chemin dans ce graphe; en fait, on peut la rendre égale à cette longueuer.

$\rightarrow$ recherche d'un plus long chemin dans un graphe.

$\hookrightarrow$ revient à chercher le plus court chemin dans ce graphe dans lequel on a remplacé chaque valuation par son opposé.

Le problème du plus court chemin n'a pas de solution en présence d'un cycle de poids <0;



$$l + l' > l + l' + l'' > l + l' + 2l'' > ... > l + l' + kl'' \quad \forall k$$

$\rightarrow$ pas de plus court chemin, parce qu'une fois qu'on en a un, on peut toujours en construire un encore plus court.

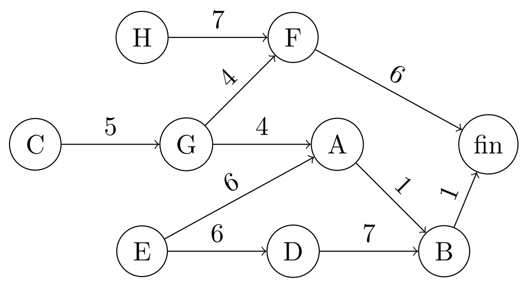
DAG: directed acyclic graph, graphe orienté acyclique.

$\Rightarrow$ algo de **Ford**
On prend les noeuds dans un ordre garantissant qu'in noeud est traité après tous ses prédécesseurs (cet ordre existe sinon le graphe contiendrait un cycle) traiter les noeud i consiste à fixer sa date à $max\{a_j + d_j / j \in P\}$

Par exemple:

Tâche	Description	Durée	Précédence
A	teinture	1	E,G
B	confection	1	A,D
C	étude de marché	5	-
D	commande fermeture éclaire	7	E
E	commande tissu	6	-
F	impression catalogue	6	G,H

Tâche	Description	Durée	Précédence
G	choix coloris	4	C
H	contact imprimeur	7	-



Graphe des potentiels

$\max\{a_j + d_j / j\ inP\}$

$\searrow$

Tâche	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marge totale	Marge libre
C	0	min{5-5}=0	0	0
E	0	min{13-6,7-6}=1	1	0
H	0	min{5-7}=2	2	2
D	max{0+6}=6	min{14-7}=7	1	0
G	max{0+5}=5	min{13-4,9-4}=5	0	0
A	max{5+4,0+6}=9	min{14-1}=13	4	3
F	max{5+4,0+7}=9	min{15-6}=9	0	0
B	max{9+1,6+7}=13	min{15-1}=14	1	1
fin	max{5+6,13+2}=15	=15	0	0

$\downarrow$

Planning optimal

Les tâches C,G et F doivent être exécutées consécutivement, et elles prennent à elles 3 15j: le projet ne peut pas durer moins, et comme le planning trouvé prend 15j, il est optimal.

On appelle date au plus tard la date avant laquelle une tâche doit commencer au risque de mettre tout le projet en retard.

Une tâche ayant une marge totale de 0 est dite critique: il existe un chemin partant d'un sommet sans prédécesseur et allant au noeud "***fin***" en ne passant que par des tâches critiques.

La marge libre est le retard que peut prendre une tâche tout en permettant aux tâches suivantes de commencer à leur date au plus tôt (=conserver leur marge).

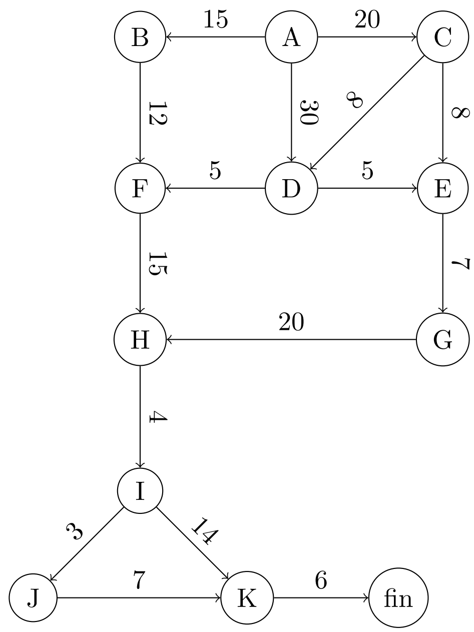
Quelques formules:

$$
\begin{aligned}
\text{tôt}_i &= \max\{\text{tôt}_j + d_j / j \in P_i\} \\
& \quad (\text{avec } \max \varnothing = 0) \\
\text{tard}_i &= \min\{\text{tard}_j - d_i / i \in P_j\} \\
\text{marge}_i &= \text{tard}_i - \text{tôt}_i \\
\text{libre}_i &= \min\{\text{tôt}_j - d_i - \text{tôt}_i / i \in P_j\}
\end{aligned}
$$

Thursday January 26 2023 Exercises

Exercice 1

Tâche	Durée	Antériorité
A	30	-
B	12	A+15j
C	8	A+20j
D	5	A et C
E	7	C et D
F	15	B et D
G	20	E
H	4	F et G
I	14	H
J	7	I+3j
K	6	I et J

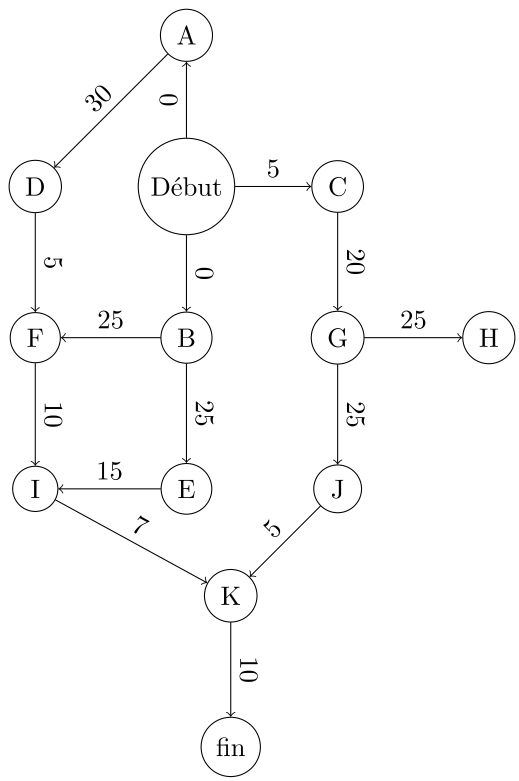


Tâche	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marge totale	Marge libre
A	0	0	0	0
B	15	35	20	8
C	20	22	2	2
D	30	30	0	0
E	35	35	0	0
F	35	47	12	12
G	42	42	0	0
H	62	62	0	0
I	66	66	0	0
J	69	73	4	0
K	80	80	0	0
fin	86	86	0	0

Exercice 2

Tâche	Durée	Antériorité
A	30	-
B	25	-
C	20	5j après début

Tâche	Durée	Antériorité
D	5	A
E	15	B
F	10	B,D
G	25	C
H	12	G
I	7	E,F
J	5	G
K	10	I,J



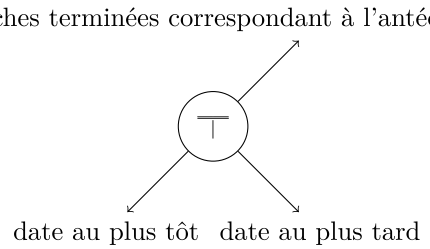
Tâche	Date au plus tôt	Date au plus tard	Marge totale	Marge libre
Début	0	0	0	0
A	0	0	0	0
B	0	0	0	0
C	5	5	0	0
D	30	33	3	0
E	25	33	8	5
F	35	38	3	0
G	25	25	0	0
H	50	50	0	0
I	45	48	3	3
J	50	50	0	0
K	55	55	0	0
fin	65	65	0	0

Thursday February 2nd 2023 Course

La méthode ***PERT*** est une autre méthode pour calculer un ordonnancement optimal. Dans cette méthode, on dessine un graphe dont les arcs (et non plus les noeuds) représentent les tâches du problème d'ordonnancement.

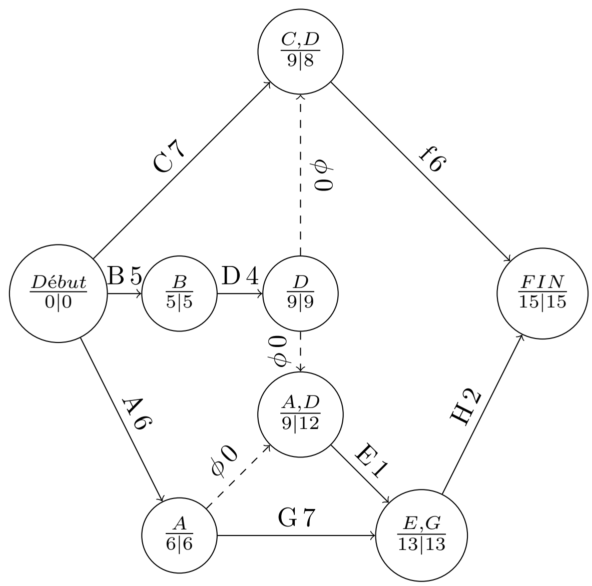
Les noeuds représentent alors des "étapes" de la réalisation du projet, étapes auxquelles un certain nombre de tâches ont été réalisées, permettant de démarrer de nouvelles tâches.

Dans des situations où deux tâches n'ont pas les mêmes antécédents, mais en partagent certains, pour placer leur étape de départ, on peut être obligé de recourir à des tâches fictives, de durées nulles, et allant d'une étape correspondant à la réalisation d'un ensemble de ses tâches vers une étape correspondant à un ensemble de tâches.



1.

Tâche	durée	antécédant
A	6	-
B	5	-
C	7	-
D	4	B
E	1	A,D
F	6	C,D
G	7	A
H	2	E,G

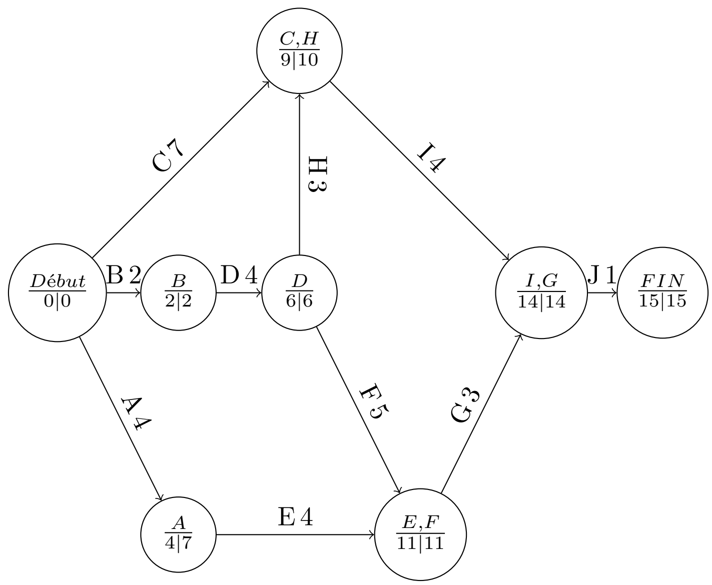


Tâche	date au plus tôt	date au plus tard	marge totale	marge libre
A	0	0	0	0
B	0	0	0	0
C	0	2	2	2
D	5	5	0	0
E	9	9	0	0
F	9	9	0	0
G	6	6	0	0
H	13	13	0	0

2.

Tâche	durée	antécédant
A	4	-
B	2	-
C	7	-
D	4	B
E	4	A
F	5	D
G	3	E,F
H	3	D
I	4	C,H
J	1	I,G

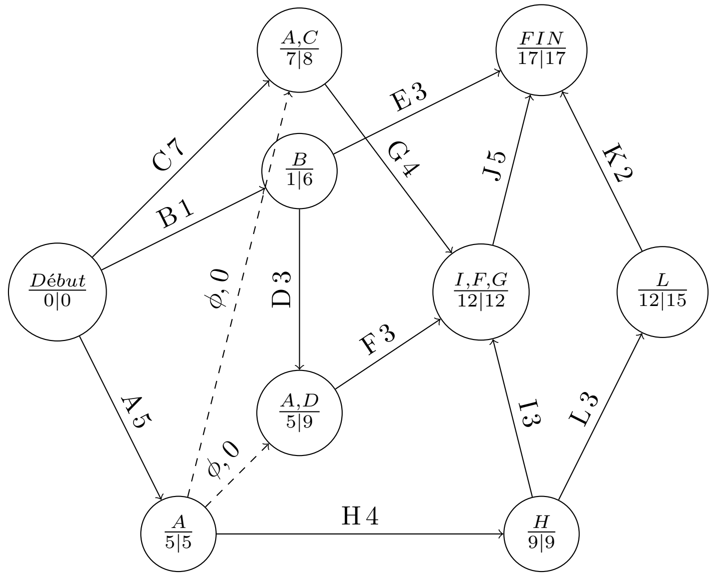
Tâche	durée	antécédant



Tâche	date au plus tôt	date au plus tard	marge totale	marge libre
A	0	3	3	0
B	0	0	0	0
C	0	3	3	2
D	2	2	0	0
E	4	7	3	3
F	6	6	0	0
G	11	11	0	0
H	6	7	1	0
I	9	10	1	1
J	14	14	0	0

3.

Tâche	durée	antécédant
A	5	-
B	1	-
C	7	-
D	3	B
E	3	B
F	3	A,D
G	4	A,C
H	4	A
I	3	H
J	5	I,F,G
K	2	L
L	3	H



Tâche	date au plus tôt	date au plus tard	marge totale	marge libre
A	0	0	0	0
B	0	5	5	0
C	0	1	1	0
D	1	6	5	1
E	1	14	13	13
F	5	9	4	4
G	7	8	1	1
H	5	5	0	0
I	9	9	0	0
J	12	12	0	0
K	12	15	3	3
L	9	12	3	0

II - Programmation linéaire

Un programme linéaire est un problème d'optimisation dans lequel la fonction objective est linéaire et les contraintes sont affines.

max/min $\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i / \forall j, \sum_{j=}^{n} a_{ij} x_i \{\leq, \geq, \text{ ou } =\} b_j\}$

C'est une catégorie particulière, mais importante de problèmes d'optimisation.

- Imaginer une entreprise fabriquant des compotes.
  →compote pommes/fraises PF
  →compote pommes P
  →compote pommes F
- Pour produire 1kg de compotes
  PF→ 2kg pommes, 1kg fraises
  P → 3kg pommes
  F → 1kg pommes, 2kg fraises

Chaque jour, l'usine reçoit, 3t de pommes et 5t de fraises.

- La préparation d'une tonne de compote nécessite:
  → 40h pour PF
  → 30h pour F
  → 40h pour P
  L'entreprise dispose de 80h de travail/j.

L'entreprise ne peut pas produire plus de 4t de compote par jour (limite de stockage est expédition).

- Le bénéfice de l'entreprise est de:
  → 60€ par tonne de PF
  → 70€ par tonne de F
  → 20€ par tonne de P
- Les variables de décision sont ici les nombres de tonne de chaque compote produits chaque jour:
  → x_1 est le nombre de tonnes de PF produit chaque jour.
  → x_2 est le nombre de tonnes de F produit chaque jour.
  → x_3 est le nombre de tonnes de P produit chaque jour.
  (x_1, x_2, x_3) représente un plan de production.
- Ce plan de production doit vérifier des contraintes:
  - stockage:
    $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$
  - travail:
    $40x_1 + 30x_2 + 40x_3 \leq 80$
  - approvisionnement:
    $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3$
    ↑
    quantité de pommes (en t) nécessaire pour produire la quantité de PF du plan de produit.

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

  - positivité:
    $x_1 \geq 0$
    $x_2 \geq 0$
    $x_3 \geq 0$

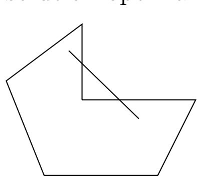
On cherche à maximiser les bénéfices quotidiens:

$$60x_1 + 70x_2 + 20x_3$$

Au final, le problème peut s'écrire:

$$\max\{60x_1 + 70x_2 + 20x_3\}\ s.c \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 4 \\ 40x_1 + 30x_2 + 40x_3 & \leq & 80 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 3 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 5 \\ x_1, x_2, x_3 & \leq & 0 \end{cases}$$

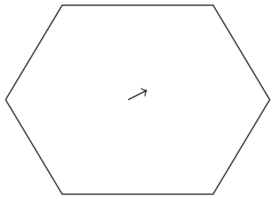
On appelle solution (réalisable) d'un problème d'optimisation un plan de production x véridiant les contraintes. La solution optimale x^* est la solution réalisable optimisant la fonction objective.



pas convexe

- L'ensemble des contraintes définit polyèdre:
  → c'est l'intersection des sous-espaces définis par chaque contrainte,
  → chaque contrainte $\sum a_{ij}x_i \leq b_j$ définit un demi-espace limité par l'hyperplan $\sum a_{ij}x_i = b_j$

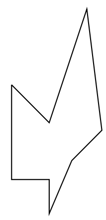
La fonction objective est linéaire. Donc son gradient est constant.
Donc son gradient est constant. De plus les lignes de niveau associée à cette fonction sont des hyperplans.



Si on prend un point à l'intérieur du polyèdre, le gradient en ce point est non-nul, et on peut prendre un point $x_0 + \epsilon \nabla f(x_0)$ avec $\epsilon > 0$ suffisement petit, point qui sera meilleur que x_0 et toujours dans le polyèdre.
La solution optimale est forcément sur la frontière ("au bord") de polyèdre.

//COURBE ORO 1

Une solution optimale est donc nécessairement un sommet du ployèdre. Il suffit donc de parcourir les sommets du polyèdre. De plus le polyèdre est convexe.



La convexité garantit que si un sommet a une valeur meilleur que celle des sommets adjacents, il est un optimum global.

On peut donc parcourir les sommets de façon à examiner des sommets avec une valeur toujours meilleure, jusqu'à trouver l'optimum.

gradient:

$$\nabla f(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(y) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(y) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(y) \end{pmatrix}$$

courbe de niveau:

$$\{x : f(x) = \alpha\}$$

En tout point x_0 , le gradient $\vec{\nabla} f(x_0)$ est normale à la courbe de niveau

$$\{x / f(x) = f(x_0)\}$$

Thursday February 2nd 2023 Exercises

Exercice 1

max { $15x_1 + 8x_2 - 6HS - 1,5MP - PUB_1 - PUB_2$ }

$$\text{sc} \begin{cases} MP & \leq 400 \\ 2x_1 + x_2 & \leq MP \\ 0,75x_1 + 0,5x_2 & \leq 160 + HS \\ x_1 & \leq 50 + 10PUB_1 \\ x_2 & \leq 60 + 15PUB_2 \\ PUB_1 + PUB_2 & \leq 100 \\ x_1, x_2, MP, HS, PUB_1, PUB_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Exercice 2 (annule et remplace !)

On considère un problème d'ordonnancement,

tâche	durée	antécédents
i	d_i	P_i

Modéliser le sous forme de PL.

Notons x_i la date de début de la tâche i (en u.t.) contraintes:

$$\begin{aligned} \forall i, \forall j \in P_i, x_i &\geq x_j + d_j \\ \forall i, x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

fonction objective:

$$\min\{\max\{x_i + d_i\}\}$$

Cette fonction objective n'est pas linéaire.

On ajoute une variable de décision, x_f, représentant la date de fin du projet.

$$\forall, x_f \geq x_i + d_i$$

$$\min\{x_f\}$$

$$\text{sc}\begin{cases} \forall i, \forall j \in P_i, x_i \geq x_j + d_j \\ \forall i, x_i \geq 0 \\ \forall i, x_f \geq x_i + d_i \end{cases}$$

x_f représente une date plus grande que le max{$x_i+d_i}, mais que les contraintes autorisent à lui être égale; puisqu'on cherche à le minimiser, on a la garanti que, dans la solution optimale, il vaudra ce max.

Thursday February 9th 2023

Exercice 3

Notons x_1 la quantité de brut n°1, en Mt, traité par la raffinerie.

Notons x_2 la quantité de brut n°2, en Mt, traité par la raffinerie.

Notons x_3 la quantité de brut n°3, en Mt, traité par la raffinerie.

On cherche à minimiser le bénéfice:

$$4x_1 + 5x_2 + 5x_3$$

A cause de la capacité d'entreposage et de livraison des gaz et gaz liquéfiés, le plan de production(x_1, x_2, x_3) doit respecter:

$$0,02x_1 + 0,06x_3 \leq 0,3 \Leftrightarrow 2x_1 + 6x_3 \leq 30$$

- Pour l'essence:

$$20x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 105 \Leftrightarrow 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 21$$

- Pour le pétrole:

$$8x_1 + 4x_3 \leq 18$$

- Pour le gasoil:

$$40x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 135$$

Exercice 4

Notons x_1 la fraction d'orge contenu dans l'aliment produit, en t. Notons x_2 la fraction d'arachide contenu dans l'aliment produit, en t. Notons x_3 la fraction de sésame contenu dans l'aliment produit, en t.

On cherche à minimiser le coût d'une tonne d'aliment produit:

$$25x_1 + 41x_2 + 39x_3$$

Un aliment de composition (x_1, x_2, x_3) contient $0,12x_1 + 0,52x_2 + 0,42x_3$, qui doit être ***au moins*** égale à 0,22:

$$12x_1 + 52x_2 + 42x_3^* \geq 22$$

*comme taux de protéines

- Pour la graisse, on a:

$$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 3,6$$

  De plus:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

- Au final:

$$min\{25x_1 + 41x_2 + 39x_3\}$$

$$\text{sc} \begin{cases} 12x_1 + 52x_2 + 42x_3 & \geq & 22 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 & \geq & 3,6 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Puisque $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, ou substitue à x_3 $1 - x_1 - x_2$ partout. Le plan de production , de la composition de l'aliment, est $(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2)$.

- La première contrainte devient:

$$\begin{array}{llll} & 12x_1 + 52x_2 + 42(1 - x_1 - x_2) & \geq & 22 \\ \Leftrightarrow & -30x_1 + 10x_2 + 42 & \geq & 22 \\ \Leftrightarrow & -30x_1 + 10x_2 & \geq & -20 \\ \Leftrightarrow & 3x_1 - x_2 & \geq & 2 \end{array}$$

- La deuxieme contrainte devient:

$$\begin{array}{llll} & 8x_1 + 8x_2 & \leq & 6,4 \\ \Leftrightarrow & x_1 + x_2 & \leq & 0,8 \\ \Leftrightarrow & 5x_1 + 5x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

- La troisème contrainte devient:

$$0 = 0$$

  On a de plus:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\begin{array}{rll} & 1-x_1-x_2 & \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x_1+x_2 & \leq 1 \end{array}$$

- La fonction objective devient:

$$\begin{array}{rl} & min\{25x_1+41x_2+39(1-x_1-x_2)\} \\ = & min\{-14x_1+2x_2+39\} \\ = & min\{-14x_1+2x_2\}+39 \end{array}$$

- On cherche:

$$min\{-14x_1+2x_2\}+39$$

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2 & \leq & 2 \\ 5x_1+5x_2 & \leq & 4 \\ x_1+x_2 & \leq & 1 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Cette contrainte est redondante avec la précédente: $4 \leq 5$, donc

$$5x_1+5x_2 \leq 4 \Rightarrow 5x_1+5x_2 \leq 5 \Rightarrow x_1+x_2 \leq 1$$

Exercice 5

Notons x_1 le nombre d'objets A_1 produit chaque mois. Notons x_2 le nombre d'objets A_2 produit chaque mois. Notons x_3 le nombre d'objets A_3 produit chaque mois.

- On cherche à maximiser le bénéfic mensuel:

$$60x_1+40x_2+80x_3$$

- On a:

$$\begin{array}{lll} x_1 & \leq & 4800 \\ x_2 & \leq & 5400 \\ x_3 & \leq & 2000 \end{array}$$

à cause des contraintes du marché.

- La disponibilité de la machine-outil impose:

$$\text{obj/(obj/h)=h}$$

$$\frac{x_1}{35}+\frac{x_2}{45}+\frac{x_3}{20} \leq 200$$

- Celle de la main d'oeuvre:

$$\text{min} \rightarrow 4x_1+3x_2+2x_3 \leq \text{h} \rightarrow (170*3)*60$$

De plus:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$max\{60x_1 + 40x_2 + 80x_3\}$$

$$\text{sc}\begin{cases} x_1 & \leq & 4900 \\ x_2 & \leq & 5400 \\ x_3 & \leq & 2000 \\ \frac{x_1}{35} + \frac{x_2}{45} + \frac{x_3}{20} & \leq & 200 \Leftrightarrow 36x_1 + 28x_2 + 63x_3 \leq 252000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Comme $x_1, x_2, x_3 \geq 0$,

$$36x_1 + 27x_2 + 18x_3 \leq 36x_1 + 28x_2 + 63x_3$$

Donc si la 2e est $\leq$ 252 000, la 1ere est $\leq 252000 \leq 275$ 400.

Algo du simplexe

III - Séparation et Evaluation

$$max\{x_1 + 3x_2\}$$

$$sc\begin{cases} x_1 + x_2 & \leq & 14 \\ -2x_1 + 3x_2 & \leq & 12 \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$max\{2x_1 + x_2\}$$

$$sc\begin{cases} x_1 - x_2 & \leq & 3 \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 2 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$min\{x_2 - x_1\}$$

$$sc\begin{cases} 2x_1 - x_2 & \geq & -2 \\ x_1 - x_2 & \leq & 2 \\ x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$max\{x_1 + 2x_2\}$$

$$sc\begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 & \leq & 1 \\ x_1 + x_2 & \geq & 6 \\ -x_1 + x_2 & = & 3 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$max(min)\{x_1 + 2x_2\}$$

$$sc\begin{cases} -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 5 \\ x_1 - 3x_2 & \leq & 4 \end{cases}$$

Thursday February 23rd 2023 Cours

L'algorithme de simplexe

On considère un problème de programmation linéaire sous la forme:
$max\{c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n\}\$$
On impose de plus que $\forall j, b_j \geq 0$, ou de façon équivalente, que 0 soit solution réalisable. Le fait que 0 soit réalisable et que l'on ait des contraintes de signe sur les x_i permet que 0 soit un sommet du polygone, qui donnera un point de départ à l'algo.
On transforme les contraintes en équations en posant pour tout $1 \leq j \leq k$.

$$y_j = b_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$$

Ainsi on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + y_j = b_j \text{ (c'est la définition de } y_j\text{)}$$
$$y_j \geq 0 \text{ (c'est la contrainte que l'on transforme)}$$

On appelle y_j la variable d'écart associée à la ressource j: y_j représente la quantité de la ressource j qui n'est pas utilisée dans le plan de production.

Exemple: $max\{x_1 + 3x_2\}$

$$sc \begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 & = & 14 \\ -2x_1 + 3x_2 + y_2 & = & 12 \\ 2x_1 - x_2 + y_3 & = & 12 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

Le problème défini par les contraintes:

$$\forall j, \sum a_{ji}x_i + y_j = b_j$$

admet une solution évidente: on pose $y_j = b_j$ pour chacune des contraintes (on a le droit car $b_j \geq$); on pose x_i=0 pour tout i.

Exemple: $x_1 = x_2 = 0; y_1 = 14, y_2 = 12, y_3 = 12$
Le but de l'algorithme du simplexe est de transformer ce système d'équations en un système équivalent, ayant toujours la même structure (à chaque ligne est associée une colonne rempli de 0, sauf sur 1 à l'intersection avec cette ligne), garantissant qu'on a toujours une solution évidente avec cette fois-ci une meilleur solution.
On choisit une variable ayant un coefficient superieur à 0 dans la fonction objective (en général celle ayant le coefficient le plus élevé; règle du pivot de Dantzig. On calcule alors jusqu'à combien on peut augmenter cette variable sans violer les contraintes, et en laissant à zéro les autres variables déjà à zéro dans la solution évidente.