Examen Techniques de Modélisation (durée 2 heures)

Exercice 1

Soit u une fonction régulière. Considérons le schéma aux différences finies suivants :

$$\frac{au_n + bu_{n+1} + cu_{n+2}}{h}$$

où u_n, u_{n+1} et u_{n+2} sont les approximations de $u(x_n)$, $u(x_{n+1})$ et de $u(x_{n+2})$ et h le pas de discrétisation.
Déterminer les réels a, b et c pour que ce schéma soit une approximation d'ordre 2 de $u'(x_n)$.

Exercice 2

Considérons le problème suivant :

$$-u''(x) = f(x), \quad \text{pour } x \in]0,1[\quad \text{avec } u'(0) = 0 \quad \text{et } u'(1) = 0$$

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.
2. Proposer un schéma d'ordre 2 pour l'équation principale. (Vous démontrerez qu'il est d'ordre 2).
3. Proposer une discrétisation d'ordre 1 pour les conditions aux limites.
4. Mettre sous forme matricielle ce schéma (équation principale et conditions aux limites).

Exercice 3

Considérons le problème (P_1) suivant :

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ &u(x,0) = 0 \text{ si } x \leq 0, \quad 1 \text{ sinon} \end{aligned}$$

1. En faisant le changement de variable $u(x,t) = w(y)$ avec $y = x/\sqrt{t}$, montrer que (P_1) est équivalent à :

$$\begin{aligned} &w''(y) + \frac{y}{2}w'(y) = 0 \\ &w(-\infty) = 0 \quad \text{et } w(+\infty) = 1 \end{aligned}$$

2. Quelle équation est vérifiée par $v(y) = \exp(y^2/4)w'(y)$?
3. En admettant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} d\theta = \sqrt{\pi}$$

montrer que :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x/(2\sqrt{t})} e^{-\theta^2} d\theta$$

Exercice 4

Considérons le problème (E_1) suivant :

$$\begin{aligned}
&(1+t)\partial_t u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = 0 \quad t \geq 0, \quad x \in [0,1] \\
&u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0 \\
&u(0,x) = f(x)
\end{aligned}$$

1. Résoudre (E_1) en utilisant la méthode de séparation de variables avec :
   (a) $f(x) = \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)$
   (b) $f(x) = x$
2. Considérons à présent le problème (E_2) suivant :

$$\begin{aligned}
&(1+t)\partial_t u(t,x) - \partial^2_{xx} u(t,x) = 0 \quad t \geq 0, \quad x \in [0,1] \\
&u(t,0) = t, \quad u(t,1) = 0 \\
&u(0,x) = \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)
\end{aligned}$$

   On pose $v(t,x) = -t + xt + u(t,x)$.
   (a) Quel est le problème (E_3) vérifié par v.
   (b) Résoudre le problème homogène associé.
   (c) Comme pourrait-on trouver les solutions de (E_3) ?
   (d) En déduire la solution de (E_2).