Technique de modélisation

Zakaria EJJED

Contents

Wednesday January 25 2023 Course **1**
I - Equations differentielles . . . 1
1. Définitions . . . 1
2. Notion de problème bien posé . . . 2
3 - Quelque solutions analytiques . . . 2
a - Méthode des caractéristique . . . 2

Wednesday January 25 2023 Exercises **4**
TD 1 . . . 4
Exercice 1 . . . 4

Tuesday February 21st 2023 Exercises **4**
Exercise 2 . . . 4
Exercice 3 . . . 4
Exercice 4 . . . 6

Tuesday February 21st 2023 Course **6**
b - Changement de variables . . . 6
Equations des ondes : . . . 6

Wednesday January 25 2023 Course

I - Equations differentielles

1. Définitions

Une équation differentielle est une équation qui relie une fonction à ses dérivées. La solution recherchée n'est donc pas un nombre mais une fonction.

Exemple: $u'(t) = u(t)$

- On distingue les équations différentielle ordinaires(EDO) des équations aux dérivées partielles (EDP). Les EDO concernent les fonctions à une variable et les dérivées par rapport à cette variable Les EDP concernent les fonctions à plusieurs variables et les dérivées partielles par rapport aux différentes variables.
- On appelle ordre d'une EDO ouu d'une EDP l'ordre de dérivation le plus elevé de l'équation. On dit qu'une équation est à coefficient constant si les coefficients devant la fonction et ses dérivées sont constants. Dans le cas contraire on parle d'EDO ou d'EDP à coefficients variables.
- On dit qu'une EDP ou une EDO est homogène si tous ses termes dépendent de la fonction inconuue. Dans le cas contraire on parle d'EDO ou d'EDP non homogène. * Une distinction importante est de savoir si une EDO ou EDP est linéaire ou non linéaire. Pour répondre à cette question on va transformer notre equation sous la forme: $L(u) = f$ On dira que l'équation est linéaire si l'opérateur associé L est linéaire. Dans le cas contraire, elle sera non linéaire.

2. Notion de problème bien posé

On dit qu'un problème (i.e. EDO+Condition initiale, ou EDP+Condition initale+Condition initiales/aux bords) est bien posé s'il vérifie les points suivants: - il existe une solution - cette solution est unique - La solution dépend continument des conditions initiales ou aux limites.

Exemple:

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \text{ et } v'(t) = -v(t) \\ u(0) = u_0 \qquad\qquad v(0) = v_0 + \epsilon \end{cases}$$

$$(1) \quad \left.\begin{array}{rcl} u(t) & = & Ke^{-t} \\ u(0) & = & K = u_0 \end{array}\right\} \rightarrow u(t) = u_0 e^{-t}$$

$$(2) \quad \left.\begin{array}{rcl} v(t) & = & Ke^{-t} \\ v(0) & = & u_0 + \epsilon = K \end{array}\right\} \rightarrow v(t) = (u_0 + \epsilon)e^{-t}$$

$$|v(t) - u(t)| = |(u_0 + \epsilon)e^{-t} - v_0 e^{-t} = |\epsilon| e^{-t} \Rightarrow \text{"erreur controlée"}$$

Exemple 2:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & tu(t)(u(t) - 2) \\ u(0) & = & u_0 \end{array}\right.$$

Solution:

$$\begin{array}{rcl} u(t) & = & \frac{2u_0}{u_0 + (2 - u_0)e^{t^2})} \\ u & = & 2 \\ u(t) & = & \frac{2(2+\epsilon)}{2+\epsilon e - \epsilon e^{t^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2 + \epsilon - \epsilon e^{t^2} & = & 0 \\ e^{t^2} & = & \frac{2+\epsilon}{\epsilon} \\ t_0 & = & \sqrt{ln(\frac{2+\epsilon}{\epsilon}} \end{array}$$

- $v_0 = 2 - \epsilon$ pour $\epsilon << 1 \quad 2 - \epsilon + \epsilon e^{t^2} > 0$ $u(t) = \frac{2(2-\epsilon)}{2-\epsilon+\epsilon e^{t^2}}$

//INSERER COURBE

3 - Quelque solutions analytiques

a - Méthode des caractéristique

On appelle problème de Cauchy, une équation différentielle sur $\mathbb{R}$ avec une condition initiale.

Considéroons le problème suivant:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + a(x,t)u_x(x,t) = 0 \forall x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x) \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et a et Φ sont des fonctions régulières

Equation caractéristiques:

$$\begin{cases} \frac{\partial x^t}{\partial t} = a(x(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

//INSERER COURBE 2

$$\begin{array}{rl} \frac{\partial u(x(t),t)}{\partial t} & = u_x(x(t),t)\frac{\partial x}{\partial t} + u_t(x(t),t)\frac{\partial t}{\partial t} \\ & = u_x(x(t),t)a(x(t),t) + u_t(x(t),t) \\ & = 0 \end{array}$$

$$u(x(t),t) = const = u(x_0,0) = \Phi(x_0)$$

Exemple:

$$\begin{cases} u_t + au_x = 0 \quad a = c^k \\ u(x,0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a & \rightarrow x(t) = at + c^k \\ x(0) = x_0 & \quad x(t) = at + x_0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lcl} u(x(t),t) & = & \Phi(x_0) \\ x & = & at + x_0 \rightarrow x_0 = x - at \\ u(x,t) & = & \Phi(x - at) \end{array}$$

//encadrer

Le long d'une caractéristique analytique:

$$\frac{\partial u(x(t),t)}{\partial t} = u_t a(x,t) u_x = b(x(t),t)$$

$$\begin{array}{lcl} \int_0^t \frac{\partial u_x(x(\tau),\tau)}{\partial \tau} d\tau & = & \int_0^t b(x(\tau),\tau) d\tau \\ u(x(\tau),\tau) - u(x(0),0) & = & \int_0^t b(n(\tau),\tau) + \tau \end{array}$$

$$\begin{cases} u_e + u_x = x x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = 1 \\ x(t=0) = x_0 \end{array}\right\} \rightarrow x(t) = t + x_0 \Rightarrow x_0 = x - t$$

$$\begin{array}{lcl} u(x(t),t) & = & \Phi(x_0) + \int_0^t (x_0 + \tau) d\tau \\ & = & \Phi(x - t) + \int_0^t (x_0 + \tau) d\tau \\ & = & \Phi(x - t) + [x_0 \tau + \frac{\tau^2}{2})_0^t \\ & = & \Phi(x - t) + (x_0 t + \frac{t^2}{2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} u(x,t) & = & \Phi(x - t) + (x - t)t + \frac{t^2}{2} \\ & = & \Phi(x - t) + xt - \frac{t^2}{2} \end{array}$$

Wednesday January 25 2023 Exercises

TD 1

Exercice 1

Une EDO (Equation Différentielle Ordianaire) possède **UNE variable**.

Une EDP (Equation aux Dérivées Partielles) possède **PLUSIEURS variable**.

Une équation est homogène si tout dépends de la fonction inconnue.

Espace vectoriel: stabilité par l'addition et la multiplication par une constante, càd l'addition de 2 valeurs $\in$ ensemble.

1. $u'(t) = e^t u(t)$

La seule variable est t, l'équation est donc une **EDO**.

2. $u''(t) = u(x)\sqrt{x}$

Les variables sont x et t, l'équation est donc une **EDP**.

3. $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)e^{\sin x} = 1$

Les variables sont x et y, l'équation est donc une **EDP**.

4. $u_t(x,t) + u_x(x,t) = u_{xx}(x,t) + u^2(x,t)$

Les variables sont x et t, l'équation est donc une **EDP**.

5. $(u(t))^{(2)} + u(t) = e^t$

La seule variable est t, l'équation est donc une **EDO**.

Tuesday February 21st 2023 Exercises

Exercise 2

- Correction manquante

Exercice 3

- 1.

$$\left\{\begin{array}{lcll} \frac{\partial u}{\partial t} + 2x\frac{\partial u}{\partial x} & = & 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) & = & e^{-x^2} & \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Courbe caractéristique: $\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = 2x \\ x(t=0) = x_0 \end{array}\right.$

$$\begin{array}{rrcl} & x(t) & = & Ke^{2t} \\ & x(t) & = & x_0 e^{2t} \\ \Rightarrow & x_0 & = & xe^{-2t} \end{array}$$

Sur la courbe caractéristique:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} \\ & = & 2x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{array}$$

$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t 0 = 0 = u(x,t) - u(x_0,0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x,t) &= u(x_0,0) \\ &= \phi(x_0) \\ &= e^{-x_0^2} \\ &= e^{-(xe^{-2t})^2} \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - x\frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = sin(87x) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = -x \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x(t) &= Ke^{-t} \\ x(t) &= x_0 e^{-t} \\ \Rightarrow x_0 &= xe^{t} \end{aligned}$$

Sur la courbe caractéristique:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} \\ &= -x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} = \int_0^t 0 = 0 = u(x,t) - u(x_0,0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u(x,t) &= u(x_0,0) \\ &= \phi(x_0) \\ &= sin(87x_0) \\ &= sin(87xe^{t}) \end{aligned}$$

- 3.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = x & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = x_0 \end{cases}$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t)(\leftarrow a(x,t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$
Donc $x(t) = Ke^{t}$ avec $K \in \mathbb{R}$
Or, $x(0) = x_0 = Kxe^0$ donc $x(t) = x_0 e^{t}$
Si u est solution alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x(t),t)}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x(t)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} \\ & \quad \left(\frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t) \text{ car u est le long d'une courbe caractéristique}\right) \quad \& \quad \left(\frac{\partial t}{\partial t} = 1\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial u(x(\tau),\tau)}{\partial t}\partial\tau &= \int_0^t x(\tau)\partial\tau \\ \text{donc } u(x(t),t) - u(x(0),0) &= [x_0 e^{\tau}]_0^t \\ \text{donc } u(x(t),t) &= cos(90x_0) + x_0 e^{t} - x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= cos(90xe^{-t} + x - xe^{-t} \\ u(x,t) &= cos(90xe^{-t} + x(1 - e^{-t}) \\ x_0 &= xe^{-t} \end{aligned}$$

- 4.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} & = & x^2 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = sin(87x)cos(90x) \end{cases}$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = x(t)(\leftarrow a(x,t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Donc $x(t) = Ke^t$ avec $K \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rrcl} & x(t) & = & Ke^t \\ & x(t) & = & x_0 e^t \\ \Rightarrow & x_0 & = & xe^{-t} \end{array}$$

SUITE. . . .

Exercice 4

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} & = & u & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) & = & \phi(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x(t)}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} = u$$

Courbe caractéristique: $\begin{cases} \frac{\partial x(t)}{\partial t} = 1 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$

$$\begin{array}{rrcl} & x(t) & = & t + cst \\ & x(t) & = & t + x_0 \\ \Rightarrow & x_0 & = & x(t) - t \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} u(x(t),t) & = & Ke^t \\ u(x(0),0) & = & K = \phi(x(0)) \end{array}$$

Tuesday February 21st 2023 Course

b - Changement de variables

Equations des ondes :

$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t)$
$u(x,0) = \phi(x)$
$u_t(x,0) = \psi(x)$
On pose
$\xi = x + t$
$\eta = x - t$
$u(x,t) = v(\xi,\eta)$
$u_x(x,t) = \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$
$= \partial_\xi v + \partial_\eta v$
$u_{xx}(x,t) = \partial x(\partial_\xi v) + \partial x(\partial_\eta v)$
$= \partial\xi(\partial xv) + \partial\eta(\partial xv)$
$= \partial\xi(\partial\xi v + \partial\eta v) + \partial\eta(\partial\xi v + \partial\eta v)$
$= \partial^2_{\xi\xi}v + \partial^2_{\eta\xi}v + \partial^2_{\xi\eta}v + \partial^2_{\eta\eta}v$
$u_{xx} = \partial^2_{\xi\xi}v + 2\partial^2_{\eta\xi}v + \partial^2_{\eta\eta}v$
$u_t = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \eta} = \partial_\xi v - \partial_\eta v$

$u_{tt} = \partial t(\partial_\xi v) - \partial t(\partial_\eta v)$
$= \partial\xi(\partial tv) - \partial\eta(\partial tv)$
$= \partial\xi(\partial\xi v - \partial\eta v) - \partial\eta(\partial\xi v - \partial\eta v)$

$= \partial^2_{\xi\xi} v - \partial^2_{\eta\xi} v - \partial^2_{\xi\eta} v + \partial^2_{\eta\eta} v$
$u_{tt} = \partial^2_{\xi\xi} v - 2\partial^2_{\eta\xi} v + \partial^2_{\eta\eta} v$
$4\partial^2_{\eta\xi} v = 0$
$\partial^2_{\eta\xi} v = 0$
$\partial_\eta v = f_1(\eta)$
$v = \int f1(\eta) + c^k$ peut dÃ©pendre de ξ
$v(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi)$
$u(x,t) = v(x+t, n-t) = f(x-t) + g(x+t)$
$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t)$

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = \phi(x)$$

$$u_t(x,0) = -f'(x) + g'(x) = \psi(x)$$

$g'(x) = \frac{\phi'(x)+\psi(x)}{2}$
$f'(x) = \frac{\phi'(x)-\psi(x)}{2}$
$g(x) = c_1 + \frac{\phi(x)}{2} + \frac{1}{2}\int \psi x$
$f(x) = c_2 + \frac{\phi(x)}{2} - \frac{1}{2}\int \psi x$
$f + g = c_1 + c_2 + \phi(x)$
$u(x,t) = \frac{\phi(x-t)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{x-t} \psi(z)\partial z + \frac{\phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} \psi(z)\partial z$ $u(x,t) = \frac{\phi(x-t)+\phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} \psi(z)\partial z + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} \psi(z)\partial z$
$u(x,t) = \frac{\phi(x-t)+\phi(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \psi(z)\partial z$