

OBHPC - maths

CM3

William JALBY *

xx xxxxxx 2022

Physique→Maths→Problème Discret→Problème Algèbre Linéaire
IMAGE IMAGE IMAGE IMAGE IMAGE
Continu→Discret
→Résolution de système linéaire
→Recherche valeurs/vecteurs propres

- Espace vectoriel k^n

$k = \mathbb{R}$ (90%) $k = \mathbb{C}$ (10%)

vecteur \mathbb{R}^n vecteurs: lettres majuscules

$$V = \vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

- Application linéaire

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad i \leq i \leq n \quad j \leq j \leq m$$

$A \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$

- Transposition

$U = {}^t V \quad V \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad V \in \mathbb{R}^{1 \times m}$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad U = (v_1, \dots, v_n)$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow {}^t A \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$B = {}^t A \quad b_{ij} = a_{ji}$

- Addition

$W = U + V \quad W, U, V \in \mathbb{R}^n$

$w_i = u_i + v_i$

$C = A + B \quad C, A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

- Produit scalaire

*william.jalby@uvsq.fr

$U \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ $V \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
 $(V.U) = \sum_{i=1}^n v_i u_i$ **INNER/DOT PRODUCT**

- Operations

→Espace mémoire
 →Nombre opération arithmétique+mémoire
 →Structure de mes objets

$U \rightarrow U(1 : N)$

$V \rightarrow V(1 : N)$

$S = 0$

DO I=1,N

S=S+U(I)*V(I)

ENDDO

espace mémoire: 1

N mul

N add

2N read

- Produit extérieur

$U \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ $V \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

$$U \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ c_{ij} = u_i v_j \\ \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ | \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} n \\ \text{---} \\ m \end{matrix} \text{--- } \mathbf{OUTER PRODUCT}$$

$C = U \cdot^t V$

Espace mémoire: $n \times m$

$n \times m$ mul

$n \times m$ read

$n \times m$ write

DO I=1,N

DO J=1,M

C(I,J)=U(I)*V(J)

ENDDO

ENDDO

- Combinaison Linéaire AXPY

$U \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ $V \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$\alpha \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$

$W = U + \alpha V$

$W_i = U_i + \alpha V_i$

DO I=1,N

$W(I) = U(I) + \alpha V(I)$

ENDDO

Y+AX

DAXPY→Double Précision

SAXPY→Single Précision

Espace mémoire: N

2N read

N write

N add

N mul

- Produit matrice vecteur

$Y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $X \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

DO I=1,N Y(I)=0

 DO J = 1, M

$Y(I) = Y(I) + A(I, J) * X(J)$ } Produit scalaire

 ENDDO

ENDDO

Espace mémoire: n

read: $\underbrace{n \times m}_A + \underbrace{n \times m}_X + n$

mul: $n \times m$

add: $n \times m$

write: n

DO I=1,N Y(I)=0

ENDDO

DO J=1,M

 DOI = 1, N

$Y(I) = Y(I) + A(I, J) * X(J)$ } AXPY

 ENDDO

ENDDO

Espace mémoire: n

read: $(2n + 1) + m$ mul: $n \times m$

add: $n \times m$

write: $m \times n$

- Produit matrice

$C \in \mathbb{R}^{m \times l}$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$ $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

DOI = 1, M

 DOJ = 1, L

$C(I, J) = 0$

 ENDDO

ENDDO

DOI = 1, M

 DOJ = 1, L

 DOK = 1, N

$C(I, J) = C(I, J) + A(I, K) * B(K, J)$ } DOT PRODUCT

 ENDDO

 ENDDO

ENDDO

```

DOJ = 1, L
  DOK = 1, N
    DOI = 1, M
      C(I, J) = C(I, J) + A(I, K) * B(K, J)
      col C      col A
    }
  ENDDO
ENDDO
ENDDO
DOK = 1, N
  DOI = 1, M
    DOJ = 1, L
      C(I, J) = C(I, J) + A(I, K) * B(K, J)
      col A      ligne B
    }
  ENDDO
ENDDO
ENDDO

```

PRODUIT EXTERIEUR