Задача 1

Чтобы понять, выполняется ли ЗБЧ, найдем математическое ожидание и дисперсию.

$$\mathbb{E}X_k = (-2^k)\cdot 2^{-2k-1} + (-1)\cdot\left(1-\frac{2^{-2k}}{2}\right) + 1\cdot\left(1-\frac{2^{-2k}}{2}\right) + (2^k)\cdot 2^{-2k-1} = 0$$

$$\mathbb{D}X_k = \mathbb{E}X_k^2 - (\mathbb{E}X_k)^2$$

Найдем $\mathbb{E}X_k^2$

$$\mathbb{E}X_k^2 = 2^{2k}\cdot 2^{-2k-1} + (-1)^2\cdot\frac{1-2^{-2k}}{2} + 1^2\cdot\frac{1-2^{-2k}}{2} + 2^{2k}\cdot 2^{-2k-1}$$

$$\mathbb{E}X_k^2 = 2^{-1} + \frac{1-2^{-2k}}{2} + \frac{1-2^{-2k}}{2} + 2^{-1}$$

$$\mathbb{E}X_k^2 = 1 + 1 - 2^{-2k} = 2 - \frac{1}{2^{2k}}$$

$$\mathbb{D}X_k = \mathbb{E}X_k^2 - (\mathbb{E}X_k)^2 = \mathbb{E}X_k^2 = 2 - \frac{1}{2^{2k}}$$

Для выполнения ЗБЧ Чебышева должно выполняться: $\exists M : \forall i : \mathbb{D}X_k \leq M < +$
$2 - \frac{1}{2^{2k}} \leq 2$ для любого натурального k (т.е. $\exists M = 2$)

Таким образом, ЗБЧ для $\{X_n\}$ будет выполняться.

Задача 3 Будем использовать центральную предельную теорему. Для начала найдем мат. ожидание и дисперсию:

$$1)\mathbb{E}X = 10\cdot 0.35 + 9\cdot 0.3 + 8\cdot 0.2 + 7\cdot 0.1 + 6\cdot 0.05 = 8.8$$

$$2)\mathbb{E}X^2 = 100\cdot 0.35 + 81\cdot 0.3 + 64\cdot 0.2 + 49\cdot 0.1 + 36\cdot 0.05 = 78.8$$

$$3)\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = 1.36$$

$$P(S_{100} \geq 900) = 1 - P(S_{100} < 900)$$

тогда

$$P(S_{100} \geq 900) = 1 - P(\frac{S_{100} - 100 * \mathbb{E}X}{\sqrt{100\mathbb{D}X}} < \frac{900 - 100\cdot\mathbb{E}X}{\sqrt{100\mathbb{D}X}})$$

$$P(S_{100} \geq 900) = 1 - P(\frac{S_{100} - 880}{11.66} < \frac{20}{11.66})$$

$$P(S_{100} \geq 900) = 1 - F(\frac{20}{11.66}) = 1 - F(1.71) = 1 - 0.9564 = 0.0436$$

$$P(Z \geq 1.715) \approx 1 - 0.9573 = 0.0427$$

Таким образом наш ответ: 0.0427

Задача 2

Будем использовать центральную предельную теорему. Для начала найдем мат.ожидание и дисперсию:

$$\mathbb{E}X = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

$$\mathbb{E}X = \frac{91}{6} - (\frac{21}{6})^2 = \frac{35}{12}$$

А) Фактически мы хотим найти вероятность того, что сумма 210 бросков не больше 700, то есть : $P(S_{210} \leq 700)$

$$P(S_{210} \leq 700) = P(\frac{S_{210} - 210 \cdot \mathbb{E}X}{\sqrt{210 \mathbb{D}X}} \leq \frac{700 - 210 \cdot 3.5}{\sqrt{210 \cdot \frac{35}{12}}}) = P(\frac{S_{210} - 210 \cdot \mathbb{E}X}{\sqrt{210 \mathbb{D}X}} \leq \frac{-35}{24.74})$$

$$P(\frac{S_{210} - 210 \cdot \mathbb{E}X}{\sqrt{210 \mathbb{D}X}} \leq \frac{-35}{24.74}) = F(\frac{-35}{24.74}) = 1 - F(1.41) = 1 - 0.9207 = 0.0793$$

т.е можем оценить нашу вероятность так: $P < 0.08$

Б) найдем $P(S_{180} \leq 700)$ аналогично пунтку А

$$P(S_{180} \leq 700) = P(\frac{S_{180} - 180 \cdot \mathbb{E}X}{\sqrt{180 \mathbb{D}X}} \leq \frac{700 - 180 \cdot 3.5}{\sqrt{180 \cdot \frac{35}{12}}}) = P(\frac{S_{180} - 180 \cdot \mathbb{E}X}{\sqrt{180 \mathbb{D}X}} \leq \frac{70}{22.91})$$

$$P(\frac{S_{180} - 180 \cdot \mathbb{E}X}{\sqrt{180 \mathbb{D}X}} \leq \frac{70}{22.91}) = F(\frac{70}{22.91}) = F(3.05) \approx 0.9981$$

Тогда вероятность того что понадобится меньше 180 бросков: $1 - 0.9981 \approx 0.0019$
$P \leq 0.002$