Отчёт по лабораторной работе №3

дисциплина: Математическое моделирование

Пономарева Лилия Михайловна

Содержание

Цель работы

Рассмотреть построение простейших моделей боевых действий – моделей Ланчестера.

Теоретическое введение

Рассмотри три случая ведения боевых действий:

1. Боевые действия между регулярными войсками
2. Боевые действия с участием регулярных войск и партизанских отрядов
3. Боевые действия между партизанскими отрядами

В первом случае численность регулярных войск определяется тремя факторами:

1. скорость уменьшения численности войск из-за причин, не связанных с боевыми действиями (болезни, травмы, дезертирство);
2. скорость потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон (что связанно с качеством стратегии, уровнем вооружения, профессионализмом солдат и т.п.);
3. скорость поступления подкрепления (задаётся некоторой функцией от времени).

В этом случае модель боевых действий между регулярными войсками описывается следующим образом

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -c(t)x(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

Потери, не связанные с боевыми действиями, описывают члены – $a(t)x(t)$ и – $h(t)y(t)$, члены – $b(t)y(t)$ и – $c(t)x(t)$ отражают потери на поле боя. Коэффициенты $b(t)$, $c(t)$ указывают на эффективность боевых действий со стороны y и x соответственно, $a(t)$,$h(t)$ - величины, характеризующие степень влияния различных факторов на потери. Функции $P(t)$,$Q(t)$ учитывают возможность подхода подкрепления к войскам X и Y в течение одного дня.

Во втором случае в борьбу добавляются партизанские отряды. Нерегулярные войска в отличии от постоянной армии менее уязвимы, так как действуют скрытно, в этом случае сопернику приходится действовать неизбирательно, по площадям, занимаемым партизанами. Поэтому считается, что темп потерь партизан, проводящих свои операции в разных местах на некоторой известной территории, пропорционален не только численности армейских соединений, но и численности самих партизан. В результате модель принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)y(t) + P(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -c(t)x(t)y(t) - h(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

Модель ведение боевых действий между партизанскими отрядами с учетом предположений, сделанном в предыдущем случаем, имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -a(t)x(t) - b(t)x(t)y(t) + P(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -h(t)y(t) - c(t)x(t)y(t) + Q(t) \end{cases}$$

В простейшей модели борьбы двух противников коэффициенты $b(t)$ и $c(t)$ являются постоянными. Попросту говоря, предполагается, что каждый солдат армии x убивает за единицу времени c солдат армии y (и, соответственно, каждый солдат армии y убивает b солдат армии x). Также не учитываются потери, не связанные с боевыми действиями, и возможность подхода подкрепления. Состояние системы описывается точкой (x, y) положительного квадранта плоскости. Координаты этой точки, x и y - это численности противостоящих армий. Тогда модель принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -by \\ \dfrac{dy}{dt} = -ax \end{cases}$$

Это - жесткая модель, которая допускает точное решение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{by}{cx}$$

$$cxdx = bydy, cx^2 - by^2 = C$$

Эволюция численностей армий x и y происходит вдоль гиперболы, заданной этим уравнением (рис. -@fig:001). По какой именно гиперболе пойдет война, зависит от начальной точки.

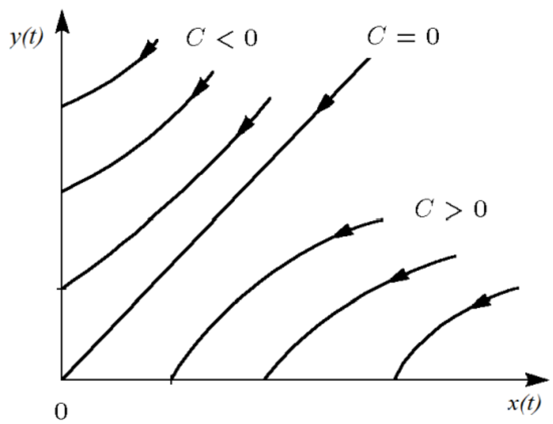

Рисунок.1. Жесткая модель войны

Эти гиперболы разделены прямой $\sqrt{cx} = \sqrt{by}$. Если начальная точка лежит выше этой прямой, то гипербола выходит на ось y. Это значит, что в ходе войны численность армии x уменьшается до нуля (за конечное время). Армия y выигрывает, противник уничтожен. Если начальная точка лежит ниже, то выигрывает армия x. В разделяющем эти случаи состоянии (на прямой) война заканчивается истреблением обеих армий. Но на это требуется бесконечно большое время: конфликт продолжает тлеть, когда оба противника уже обессилены. Вывод модели таков: для борьбы с вдвое более многочисленным противником нужно в четыре раза более мощное оружие, с втрое более многочисленным - в девять раз и т. д. (на это указывают квадратные корни в уравнении прямой). Стоит помнить, что эта модель сильно идеализирована и неприменима к реальной ситуации. Но может использоваться для начального анализа. Если рассматривать второй случай (война между регулярными войсками и партизанскими отрядами) с теми же упрощениями, то модель принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -by(t) \\ \frac{dy}{dt} = -cx(t)y(t) \end{cases}$$

Эта система приводится к уравнению $\frac{d}{dt}=\left(\frac{b}{2}x^2(t)-cy(t)\right)=0$, которое при заданных начальных условиях имеет единственное решение: $\frac{b}{2}x^2(t)-cy(t)=\frac{b}{2}x^2(0)-cy(0)=C_1$

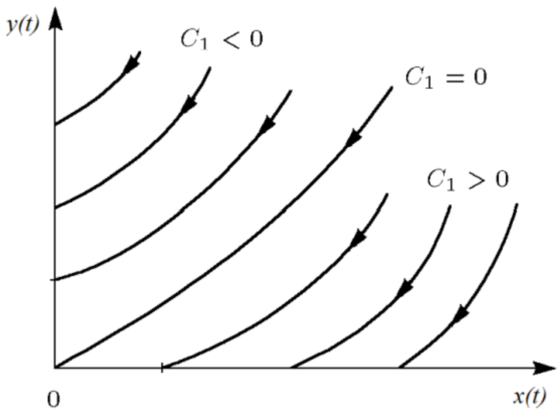

Рисунок.2. Фазовые траектории для второго случая

Из Рисунка @fig:002 видно, что при $C_1 > 0$ побеждает регулярная армия, при $C_1 < 0$ побеждают партизаны. Аналогично противоборству регулярных войск, победа обеспечивается не только начальной численностью, но и боевой выручкой и качеством вооружения. При $C_1 > 0$ получаем соотношение $\frac{b}{2}x^2(0) > cy(0)$ Чтобы одержать победу партизанам необходимо увеличить коэффициент c и повысить свою начальную численность на соответствующую величину. Причем это увеличение, с ростом начальной численности регулярных войск $x(0)$ должно расти не линейно, а пропорционально второй степени $x(0)$. Таким образом, можно сделать вывод, что регулярные войска находятся в более выгодном положении, так как неравенство для них выполняется при меньшем росте начальной численности войск.[1]

Задание

[Вариант 44]

Между страной Х и страной У идет война. Численность состава войск исчисляется от начала войны, и являются временными функциями x(t) и y(t). В начальный момент времени страна Х имеет армию численностью 38 000 человек, а в распоряжении страны У армия численностью в 29 000 человек. Для упрощения модели считаем, что коэффициенты a, b, c, h постоянны. Также считаем P(t) и Q(t)непрерывные функции. Постройте графики изменения численности войск армии Х и армии У для следующих случаев: 1. Модель боевых действий между регулярными войсками

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.41x(t) - 0.76y(t) + |sin(t+3)| \\ \dfrac{dy}{dt} = -0.59x(t) - 0.63y(t) + |cos(t+2)| \end{cases}$$

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.37x(t) - 0.76y(t) + |sin(6t)| \\ \dfrac{dy}{dt} = -0.32x(t)y(t) - 0.61y(t) + |cos(7t)| \end{cases}$$

Выполнение лабораторной работы

Код программы

1. Модель боевых действий между регулярными войсками

```
model Lab03
  parameter Real x0 = 38000;
  parameter Real y0 = 29000;

  parameter Real a = 0.41;
  parameter Real b = 0.76;
  parameter Real c = 0.59;
  parameter Real h = 0.63;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);

equation
  der(x) = -a*x - b*y + abs(sin(time + 3));
  der(y) = -c*x - h*y + abs(cos(time + 2));

end Lab03;
```

2. Модель ведение боевых действий с участием регулярных войск и партизанских отрядов

```
model Lab03_2
  parameter Real x0 = 38000;
  parameter Real y0 = 29000;

  parameter Real a = 0.37;
  parameter Real b = 0.76;
  parameter Real c = 0.32;
  parameter Real h = 0.61;

  Real x(start=x0);
```

```
  Real y(start=y0);

equation
  der(x) = -a*x - b*y + abs(sin(6*time));
  der(y) = -c*x - h*y + abs(cos(7*time));

end Lab03_2;
```

Полученные графики

После запуска кода программы получили следующие графики для первого и второго случая соответственно (см. рис. -@fig:003 и -@fig:004).

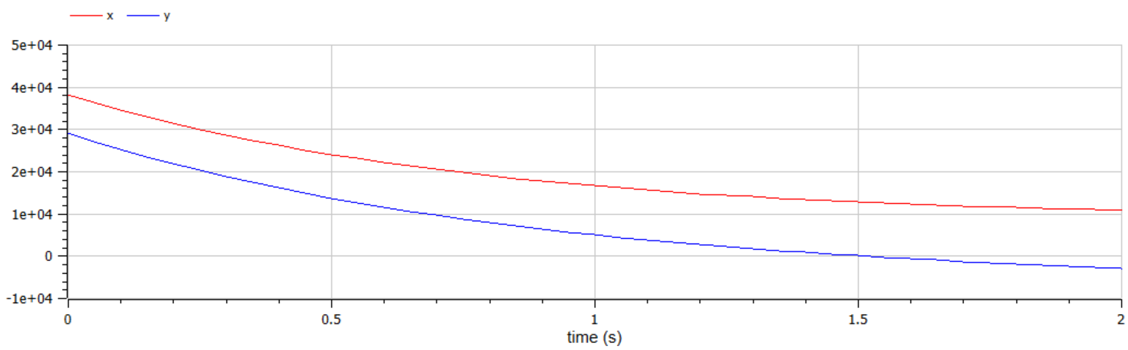

Рисунок 3. Модель боевых действий между регулярными войсками

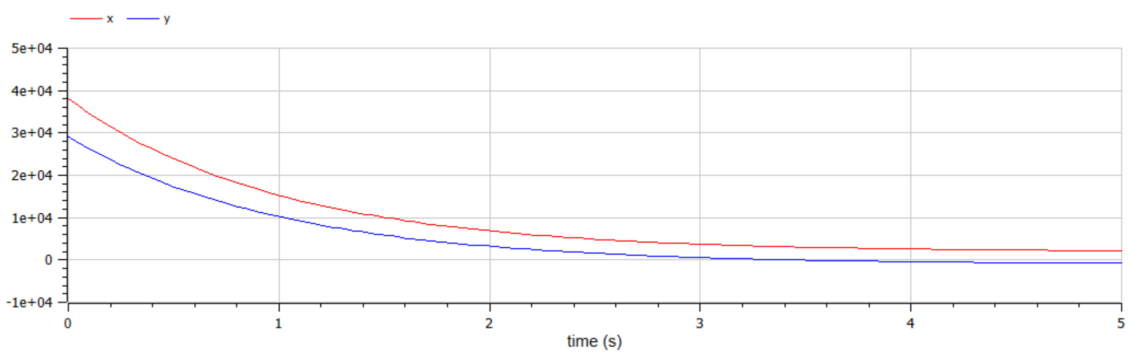

Рисунок 4. Модель ведение боевых действий с участием регулярных война и партизанских отрядов

В обоих случаях победу одерживает армия X: в первом случае за время 1.5 секунд, во втором за 3.3 секунды.

Вывод

В результате проделанной работы мы познакомились с моделями Ланчестера, а также научись пользоваться программными средствами OpenModelica.

Список литературы

1. Зенкин В.И. Курс математического и компьютерного моделирования
2. Документация по системе Modelica