

Отчёт по лабораторной работе №4

дисциплина: Математическое моделирование

Пономарева Лилия Михайловна

Содержание

Цель работы.....	1
Теоретическое введение.....	1
Задание.....	2
Ход работы	3
1 случай	3
2 случай	4
3 случай	5
Вывод.....	7
Список литературы	7

Цель работы

Рассмотреть построение фазового портрета и решения уравнения гармонического осциллятора.

Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

где x - переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ - параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 - собственная частота колебаний. Это уравнение есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка и оно является примером линейной динамической системы.

При отсутствии потерь в системе ($\gamma = 0$) получаем уравнение консервативного осциллятора энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}$$

Начальные условия для системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы, поскольку оно двумерно будем называть его фазовой плоскостью. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом.

Задание

[Вариант 44]

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 6.6x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 9\dot{x} + 2x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 2.4\dot{x} + 6x = 0.2\cos 3t$

На интервале $t \in [0; 52]$, шаг 0.05, $x_0 = 1, y_0 = -1.5$

Ход работы

1 случай

Уравнение

$$\ddot{x} + 6.6x = 0$$

Это уравнение второго порядка представим в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -6.6x \end{cases}$$

Перейдем к построению решения уравнения и фазового портрета гармонических колебаний.

Код Modelica

```
model lab04_1
  parameter Real w = 6.6;
  Real x(start=1);
  Real y(start=-1.5);

equation
  der(x)= y;
  der(y)= -w*x;

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=52, Tolerance=1e06,
Interval=0.05));
end lab04_1;
```

Полученные графики

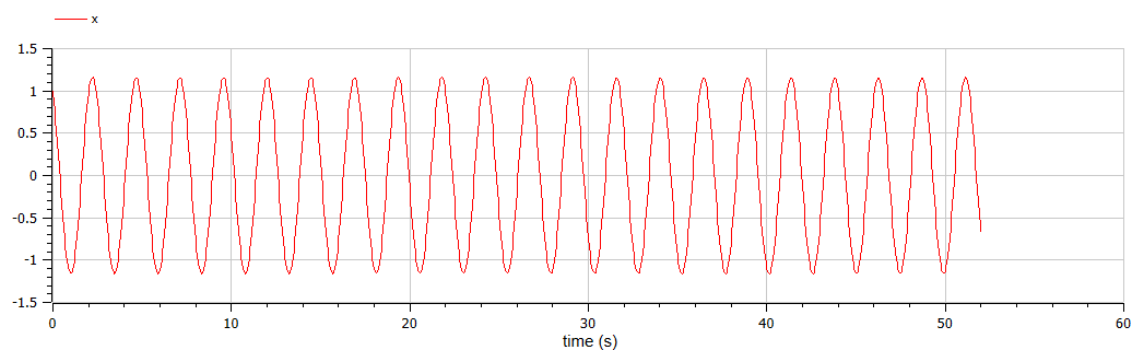


Рисунок 1.1 График решения уравнения гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы

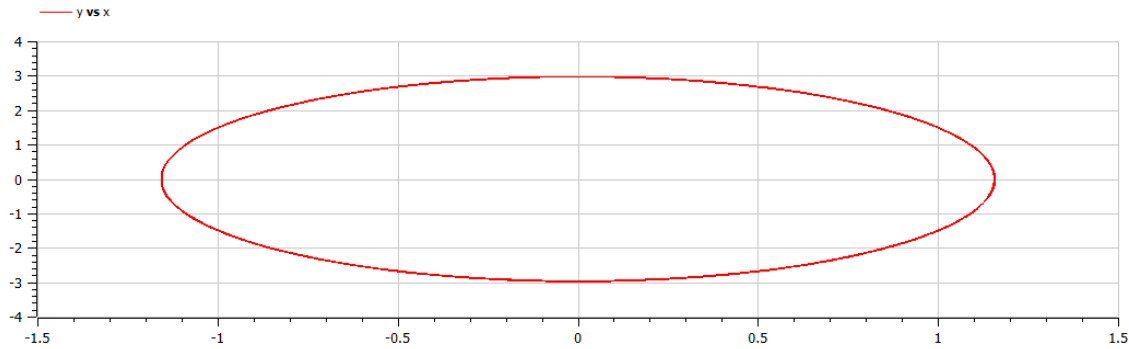


Рисунок 1.2 Фазовый портрет гармонического осциллятора без затуханий, без действия внешней силы по горизонтальной оси значения x , по вертикальной оси значения x'

Вывод по 1 случаю

По графикам видно, что значения скорости и координаты меняются циклическим образом, то есть периодически повторяются без изменений. Делаем вывод, что данное колебание имеет бесконечный характер.

2 случай

Уравнение

$$\ddot{x} + 9\dot{x} + 2x = 0$$

Это уравнение второго порядка представим в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -9y - 2x \end{cases}$$

Перейдем к построению решения уравнения и фазового портрета гармонических колебаний.

Код Modelica

```
model lab04_2
  parameter Real w = 2;
  parameter Real g = 9;
  Real x(start=1);
  Real y(start=-1.5);

equation
  der(x)= y;
  der(y)= -g*y-w*x;

annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=52, Tolerance=1e-
06,Interval=0.05));
```

end lab04_2;

Полученные графики

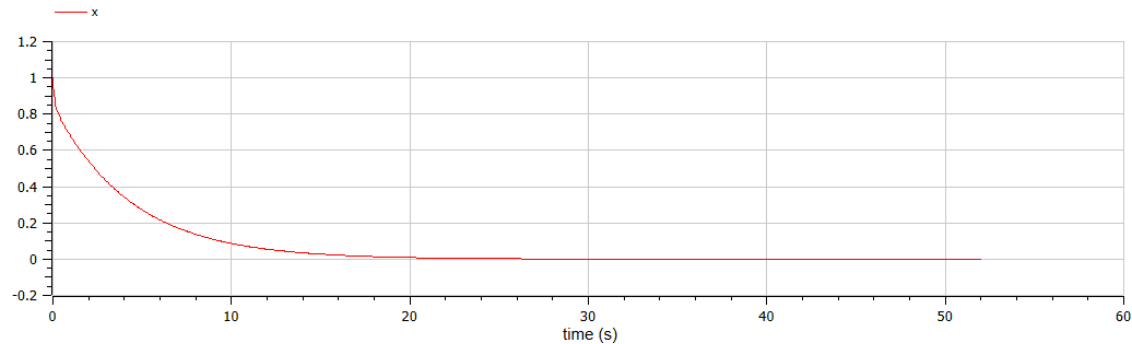


Рисунок 2.1 График решения уравнения гармонического осциллятора с затуханием, без действия внешней силы

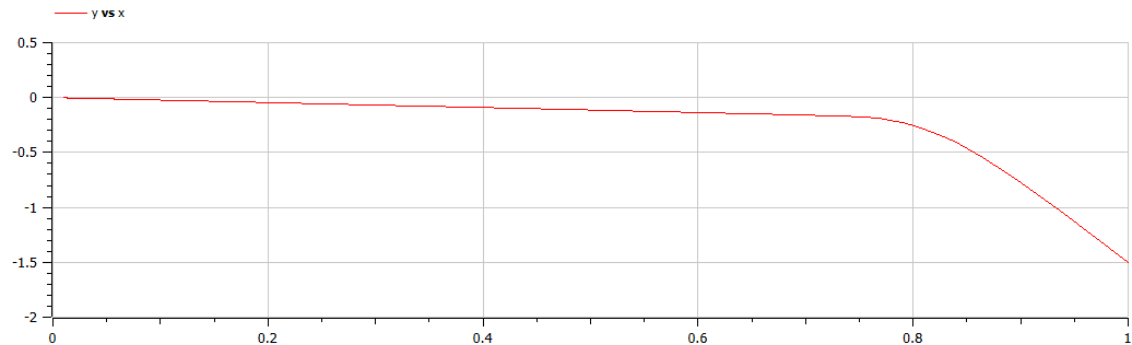


Рисунок 2.2 Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханием, без действия внешней силы по горизонтальной оси значения x , по вертикальной оси значения x'

Вывод по 2 случаю

По графикам видно, что значения скорости и координаты не меняются циклически, колебания не происходит. Можно сделать вывод, что потери энергии в нашей модели превосходят потенциальную энергию системы.

3 случай

Уравнение

$$\ddot{x} + 2.4\dot{x} + 6x = 0.2\cos 3t$$

Это уравнение второго порядка представим в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 0.2\cos 3t - 2.4y - 6x \end{cases}$$

Перейдем к построению решения уравнения и фазового портрета гармонических колебаний.

Код Modelica

```
model lab04_3
  parameter Real w = 6;
  parameter Real g = 2.4;
  Real x(start=1);
  Real y(start=-1.5);

  equation
    der(x)= y;
    der(y)= 0.2*cos(3*time)-g*y-w*x;

  annotation(experiment(StartTime=0, StopTime=52, Tolerance=1e-
06,Interval=0.05));

end lab04_3;
```

Полученные графики

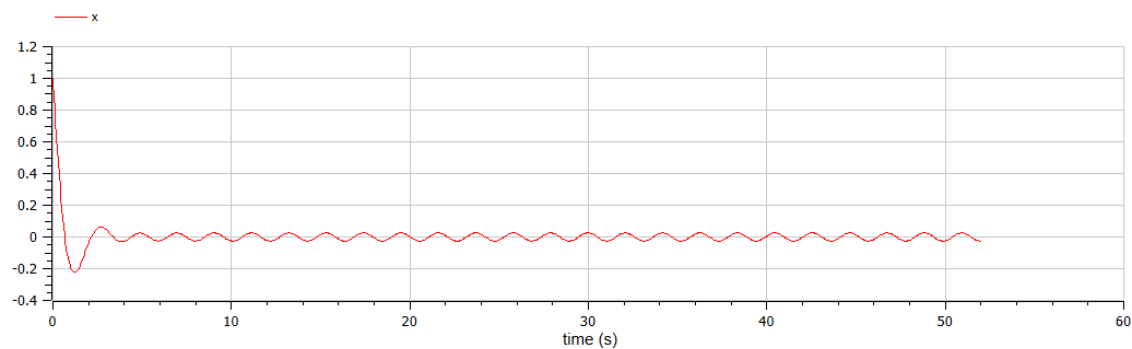


Рисунок 3.1 График решения уравнения гармонического осциллятора с затуханием, под действием внешней силы

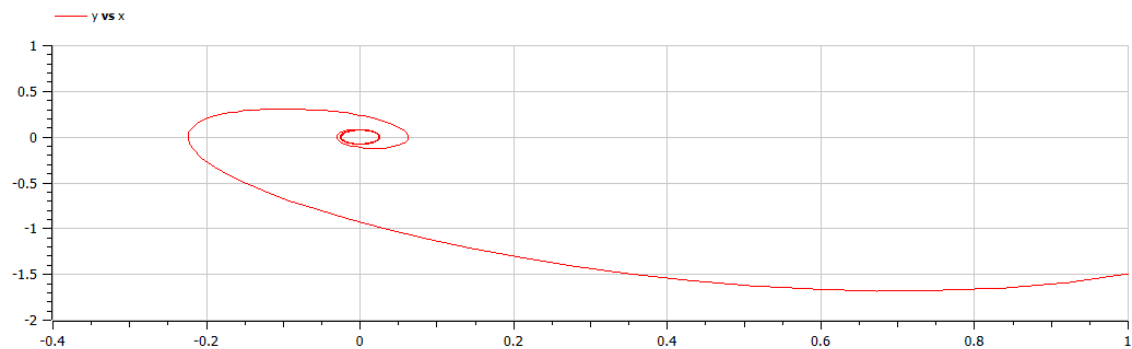


Рисунок 3.2 Фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханием, под действием внешней силы по горизонтальной оси значения x , по вертикальной оси значения x'

Вывод по 3 случаю

По графикам видно, что колебания сначала постепенно затихают из-за потерь энергии, а потом становятся гармоническими под действием внешней силы.

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были построены решения уравнения гармонического осциллятора и фазовые портреты гармонических колебаний без затухания, с затуханием и под действием внешней силы.

Список литературы

1. И. Ю. Щеглова, А. А. Богуславский моделирование колебательных процессов (на примере физических задач) Компьютерная поддержка курса “Колебания и волны”, Коломна, 2009
2. Документация по системе Modelica