華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

数据科学与工程算法基础
Algorithm Foundations of Data Science and Engineering

第三章 尾概率不等式及其应用

课程提纲

Content

1 算法引入

2 尾概率不等式

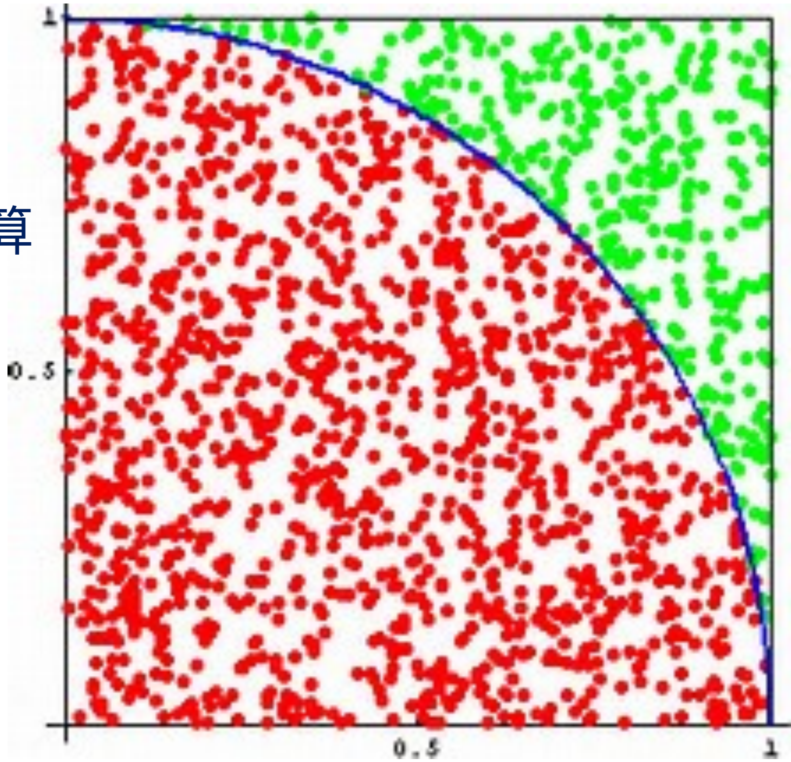
3 Morris 算法

课程提纲

Content

蒙特卡洛方法近似计算 π

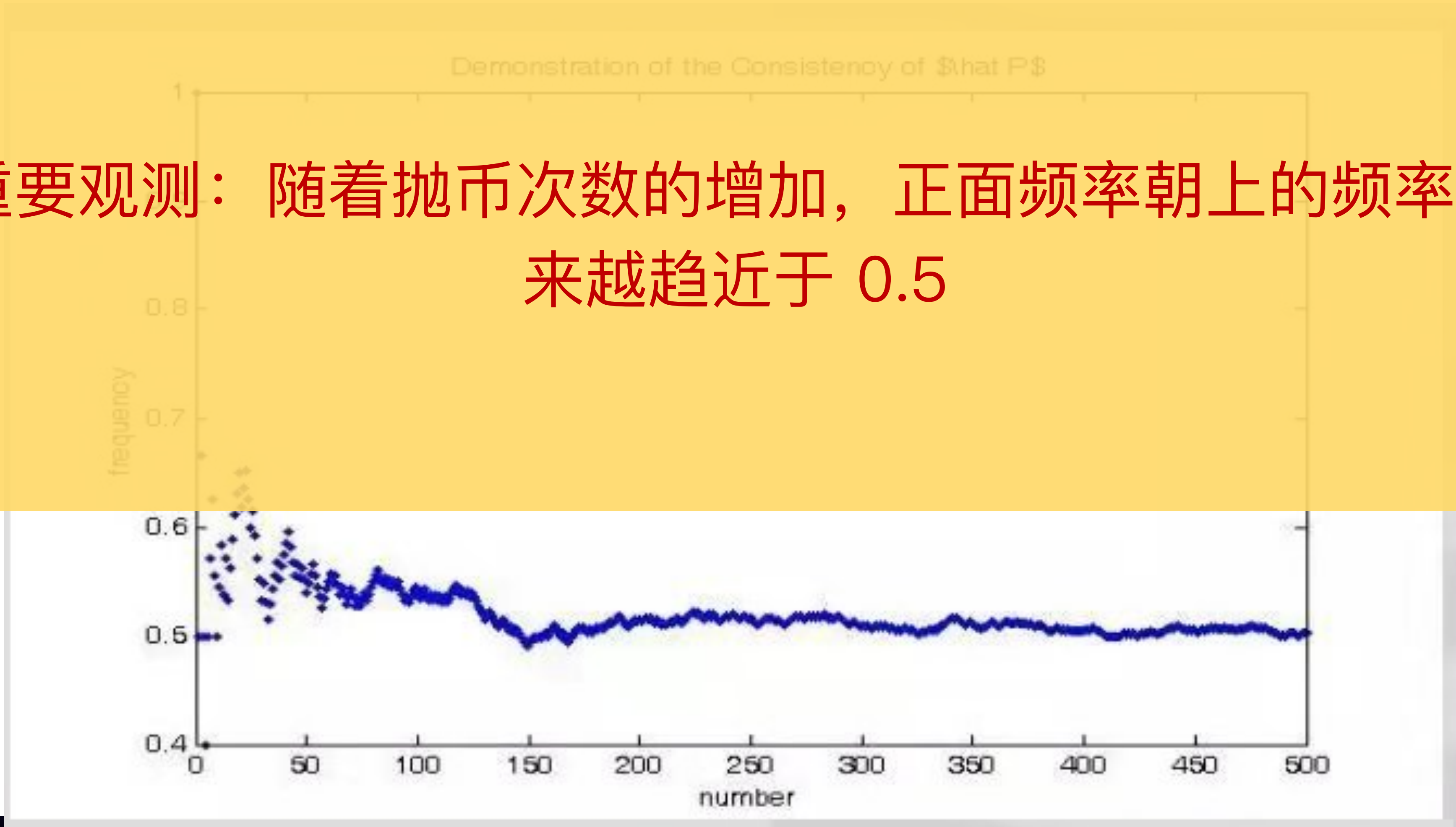
- 蒙特卡洛(Monte Carlo)方法，又称随机抽样或统计试验方法
  - 它是利用随机试验求解问题的方法
  - 广泛应用在计算机科学、金融工程、计算物理学等领域
- 蒙特卡洛方法近似计算 π
  - 在正方形区域内随机打点
  - 随机点落在红色区域的概率为 $\frac{\pi}{4}$
- 为什么这种方法是可行的?
  - 随机打点 1000 次，能精确到什么程度?
  - 精确到小数点后 10 位，至少需要打多少个点?



抛币实验

- 抛掷一枚均匀的硬币，正面朝上的频率

重要观测：随着抛币次数的增加，正面频率朝上的频率越来越趋近于 0.5



尾概率问题

- **问题描述：**抛掷一枚均匀硬币，当抛掷 N 次后，正面朝上的次数大于 $\frac{3}{4}N$ 的概率为多少?
- 尾概率计算
  - 随机变量尾概率与它偏离其期望 $E(X)$ 的程度息息相关
  - 精确计算尾概率往往涉及繁琐的计算
  - 能否给出尾概率的一个合理上界?
- 尾概率不等式
  - Markov 不等式
  - Chebyshev 不等式
  - Chernoff 不等式

课程提纲

Content

Markov 不等式

- **Markov 不等式：** 给定样本空间 Ω 上的非负随机变量 X，对 $\forall a > 0$，有

$$P(X > a) \le \frac{E(X)}{a} \text{ 或者 } P\big(X > aE(X)\big) \le \frac{1}{a}$$

- **证明（连续随机变量）：**

因为 $X \ge 0$，我们得到

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty xp(x)dx = \int_0^a xp(x)dx + \int_a^\infty xp(x)dx \\ &\ge \int_a^\infty xp(x)dx \ge a\int_a^\infty p(x)dx = aP(X > a) \end{aligned}$$

所以，我们得到 $P(X > a) \le \dfrac{E(X)}{a}$。

Markov 不等式

- **Markov 不等式：** 给定样本空间 Ω 上的非负随机变量 X，对 $\forall a > 0$，有

$$P(X > a) \le \frac{E(X)}{a} \text{ 或者 } P\big(X > aE(X)\big) \le \frac{1}{a}$$

- 例如，均匀硬币抛掷 n 次后，正面朝上次数 X 大于 $\frac{3}{4}n$ 的概率 $P(X > \frac{3}{4}n) \le \frac{n/2}{3n/4} = \frac{2}{3}$
- 从这个例子来看，Markov不等式给出的尾概率上界可能非常宽松

例题：Markov 不等式

- 抛掷一枚正面朝上概率为$\frac{1}{3}$的不均匀硬币，当抛掷N次后，正面朝上的次数大于$\frac{N}{2}$的概率为多少?

Chebyshev 不等式

- **Chebyshev 不等式**：假定随机变量 X 的期望与方差分别为 μ 和 σ^2，则

$$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

- **证明**：令随机变量 $Y=(X-\mu)^2$，根据 Markov 不等式 $P(Y > a^2) \leq \frac{E(Y)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$
- 上例 $P(X > \frac{3}{4}n) < P(|X-\frac{n}{2}| > \frac{n}{4}) \leq \frac{Var(X)}{(n/4)^2} = \frac{16np(1-p)}{n^2} = \frac{4}{n}$
- 如果抛掷均匀硬币 1000 次，这一尾概率小于 0.004

例题：Chebyshev不等式

- 抛掷一枚正面朝上概率为$\frac{1}{3}$的不均匀硬币，当抛掷N次后，正面朝上的次数大于$\frac{N}{2}$的概率为多少?

Chernoff 不等式

- **Chernoff 不等式（下界）**：设 X_i 是独立的伯努利随机向量序列，其中 $P(X_i=1)=p_i$，令 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 和 $\mu=\sum_{i=1}^{n} p_i$，对任意 $\delta \in (0,1)$，则

  1） $P(X<(1-\delta)\mu)<\left(\dfrac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu}$

  2） $P(X<(1-\delta)\mu)<\exp\left(-\dfrac{\mu\delta^2}{2}\right)$

- **证明（结论 1）**：对任意 $t>0$，我们有

$$X<(1-\delta)\mu \Rightarrow tX<t(1-\delta)\mu \Rightarrow e^{tX}<e^{t(1-\delta)\mu} \Rightarrow e^{-tX}>e^{-t(1-\delta)\mu}$$

因此，我们得到 $P(X<(1-\delta)\mu)=P\big(\exp(-tX)>\exp(-t(1-\delta)\mu)\big)$

进一步的，因为 $\exp(-tX)=\exp\left(-t\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\exp(-tX_i)$，

我们得到 $P(X<(1-\delta)\mu)<\dfrac{\prod_{i=1}^{n} E\big(\exp(-tX_i)\big)}{\exp(-t(1-\delta)\mu)}$ (由Markov不等式)

Chernoff 不等式 (证明续)

由于 $1-x<e^{-x}$，所以

$$E\left(\exp(-tX_i)\right)=p_ie^{-t}+(1-p_i)e^0=1-p_i(1-e^{-t})<\exp\left(p_i(e^{-t}-1)\right)$$

进一步计算，我们得到

$$\prod_{i=1}^{n}E\left(\exp(-tX_i)\right)<\prod_{i=1}^{n}\exp\left(p_i(e^{-t}-1)\right)=\exp\left(\mu(e^{-t}-1)\right)$$

因此，$P(X<(1-\delta)\mu)\leq\dfrac{\exp(\mu(e^{-t}-1))}{\exp(-t(1-\delta)\mu)}=\exp\left(\mu(e^{-t}+t-t\delta-1)\right)$

选择 t 值得到更为紧致的上界，对上式指数求导并令其为零，即令 $-e^{-t}+1-\delta=0$，就得到 $t=\ln\left(1/(1-\delta)\right)$，将其代入得

$$P(X<(1-\delta)\mu)<\left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu}$$

Chernoff 不等式 (证明续)

- 为得到一个更简洁的上界，需要丢掉冗杂的 $(1-\delta)^{1-\delta}$
- 基于泰勒展示式，易知

$$(1-\delta)\ln(1-\delta) = (1-\delta)\cdot\sum_{i=1}^{\infty}(-\frac{\delta^i}{i}) > -\delta + \frac{\delta^2}{2}$$

- 因此，

$$P(X < (1-\delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} < \left(\frac{e^{-\delta}}{\exp(-\delta + \frac{\delta^2}{2})}\right)^{\mu} = \exp\left(-\frac{\mu\delta^2}{2}\right)$$

Chernoff 不等式 (续)

- **Chernoff 不等式（上界）：** 设 X_i 是独立的伯努利随机向量序列且 $P(X_i=1)=p_i$，令 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 和 $\mu=\sum_{i=1}^{n}p_i$，对任意 $\delta\in(0,1)$，则

  1) $P(X>(1+\delta)\mu)<\left(\dfrac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$

  2) $P(X>(1+\delta)\mu)<\exp\left(-\dfrac{\mu\delta^2}{2+\delta}\right)$

  3) $P(X>(1+\delta)\mu)<\exp\left(-\dfrac{\mu\delta^2}{3}\right)$

- **证明：** 公式 1 的证明和下界类似，留作课后练习题。公式 2 的证明需要对公式 1 右侧取对数，得到 $\mu(\delta-(1+\delta)\ln(1+\delta))$。当 $\delta>0$，我们有 $\ln(1+\delta)\geq\dfrac{\delta}{1+\delta/2}$ (留作课后练习题)，由此得到公式 2。最后，公式 3 是公式 2 在 $\delta\in(0,1)$ 时的简化形式。

Chernoff 不等式 (续)

- **Chernoff 不等式（上界）：** 设 X_i 是独立的伯努利随机向量序列且 $P(X_i=1)=p_i$，令 $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 和 $\mu=\sum_{i=1}^{n} p_i$，对任意 $\delta\in(0,1)$，则

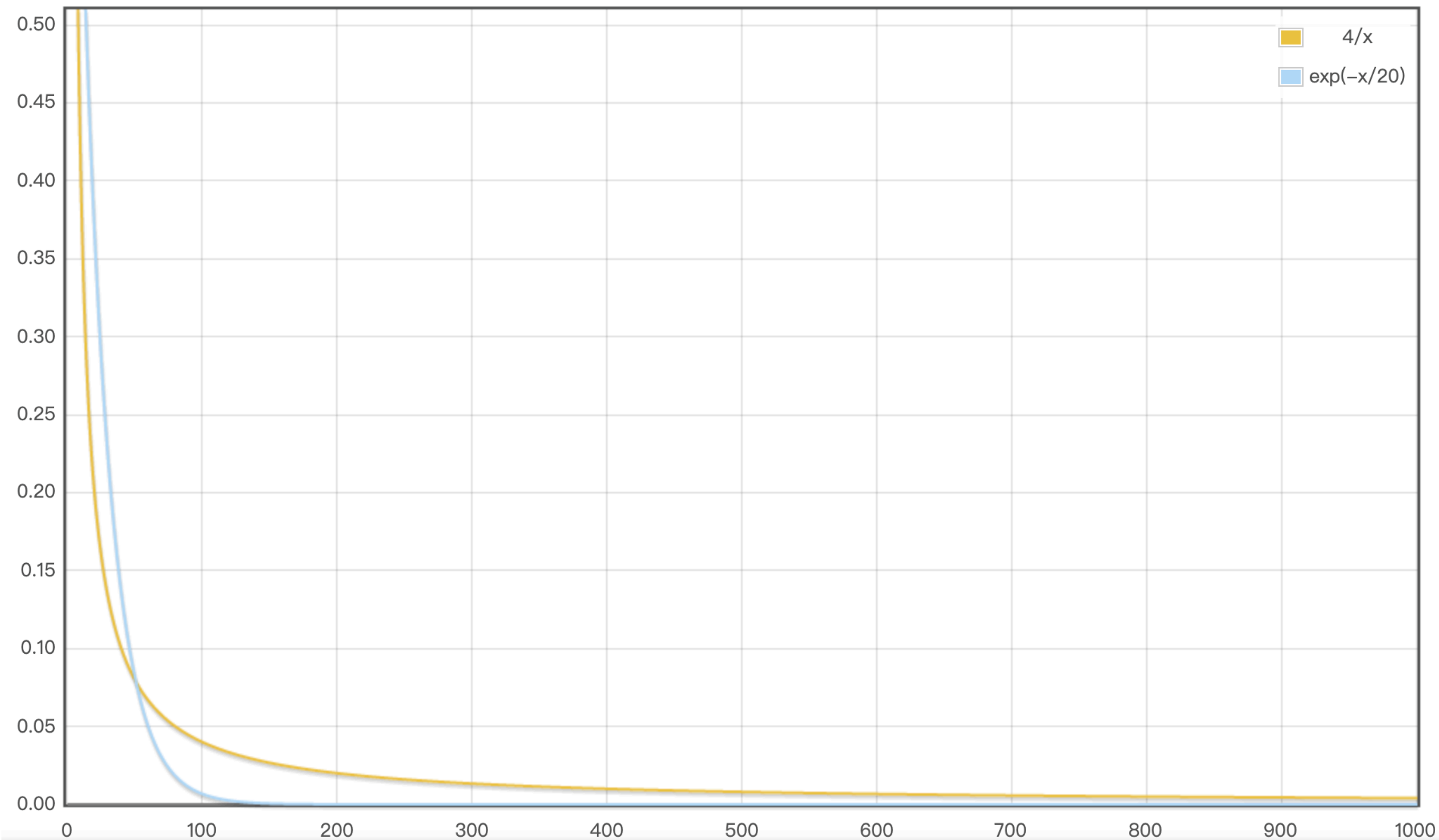
  1) $P(X>(1+\delta)\mu)<\left(\dfrac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$

  2) $P(X>(1+\delta)\mu)<\exp\left(-\dfrac{\mu\delta^2}{2+\delta}\right)$

  3) $P(X>(1+\delta)\mu)<\exp\left(-\dfrac{\mu\delta^2}{3}\right)$

- 上例 $P(X>\frac{3n}{4})=P(X>(1+\frac{1}{2})\frac{n}{2})<\exp(-\frac{n}{2}(\frac{1}{2})^2/3)=\exp(-\frac{n}{24})$
- 如果抛掷均匀硬币 1000 次，这一尾概率小于 $\exp(-1000/24)\approx 8^{-19}$

Chebyshev和Chernoff的上界比较



例题：Chernoff 不等式

- 抛掷一枚正面朝上概率为$\frac{1}{3}$的不均匀硬币，当抛掷N次后，正面朝上的次数大于$\frac{N}{2}$的概率为多少?

扩展阅读：Hoeffding不等式

Let $X_1, ..., X_n$ be independent random variables such that $a_i \leq X_i \leq b_i$ almost surely. Consider the sum of these random variables,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Then Hoeffding's theorem states that, for all $t > 0$,[3]

$$\mathrm{P}(S_n - \mathrm{E}[S_n] \geq t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

$$\mathrm{P}(|S_n - \mathrm{E}[S_n]| \geq t) \leq 2\exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

Here $\mathrm{E}[S_n]$ is the expected value of S_n.

其他经典概率不等式

- Azuma不等式
- Bennett不等式
- Bernstein不等式
- ……

课程提纲

Content

计数问题

- 假设有一台路由器，主要负责转发网络流量包
  - 其中包括源地址 IP 和目标地址 IP 等信息
- 统计指向某个 IP 地址的请求数量
  - 可能请求数量很多
  - 但是路由器的存储容量有限
- 因此，精确计数空间消耗过大
  - 可以给出近似计数
  - 但是空间消耗更小
- 近似计数方法
  - Morris 算法
  - Morris+ 算法
  - Morris++ 算法

Morris 算法

- Morris 算法
  - 初始化 $X \leftarrow 0$
  - 对每一次事件发生
    - 变量 X 的值以 $\frac{1}{2^X}$ 的概率增 1
  - 对每次查询，输出 $\hat{n} = 2^X - 1$
- 算法特点
  - 监视某个事件是否发生
  - 实时返回当前的计数值大小
  - 不直接估计计数值的大小，而是估计保存二进制计数值所需位数
  - 因此，空间复杂度为 $O(\log_2 n)$，其中 n 为真实计数值

Morris 算法示例

input	True	Sampling probability	X	Estimator
	0	1	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$	1	1
1	3	$\frac{1}{4}$	2	3
1	4	$\frac{1}{4}$	2	3
1	5	$\frac{1}{4}$	2	3
1	6	$\frac{1}{4}$	2	3
1	7	$\frac{1}{8}$	3	7
1	8	$\frac{1}{8}$	3	7

通过这个例子，你能发现 Morris 算法的缺点吗?

Table 1: Running example of Morris

Morris 算法的无偏性

- **定理：** 假定 n 次更新后，X_n 表示 Morris 算法的计数器 X，则 $E\left(2^{X_n}-1\right)=n$
- **证明：**

当 $X_n=j$ 时，$X_{n+1}=j+1$ 的概率为 2^{-j}，而 $X_{n+1}=j$ 的概率为 $1-2^{-j}$。根据条件概率的性质得到 $E(2^{X_{n+1}})=\sum_{j=1}^{\infty}P(X_n=j)E(2^{X_{n+1}}|X_n=j)$，其中 $E(2^{X_{n+1}}|X_n=j)=2^{j+1}2^{-j}+2^j(1-2^{-j})=2^j+1$。最后，我们使用数学归纳法得到结论。

Morris 算法的无偏性

- **定理：** 假定 n 次更新后，X_n 表示 Morris 算法的计数器 X，则 $E\left(2^{X_n}-1\right)=n$
- **证明（续）：**

当 $n=1$ 时，$X_1=1$ 的概率为 1。因此，$E(2^{X_1}-1)=2^1-1=1$ 结论成立。

假设当 $n=k$ 时，$E(2^{X_k}-1)=k$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
E(2^{X_{k+1}}) &= \sum_{j=1}^{\infty} P(X_k=j)E(2^{X_{k+1}} \mid X_k=j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_k=j)(2^j+1) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P(X_k=j)(2^j-1) + \sum_{j=1}^{\infty} P(X_k=j)2 \\
&= E(2^{X_k}-1)+2 = k+2
\end{aligned}
$$

结论 $E\left(2^{X_n}-1\right)=n$ 得证。

Morris 算法的方差

- X_n 表示 n 次更新后 Morris 算法中的计数器 X，则 $\mathrm{Var}\left(2^{X_n}\right) = O(n^2)$。
- **证明：** 首先，我们有

$$\mathrm{Var}(2^{X_n}) = E(2^{2X_n}) - E^2(2^{X_n}) = E(2^{2X_n}) - (n+1)^2$$

$$E(2^{2X_n}) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{2i} P(X_n = i) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{2i} \left(\frac{1}{2^{i-1}} P(X_{n-1} = i-1) + (1 - \frac{1}{2^{i-1}}) P(X_{n-1} = i) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i+1} P(X_{n-1} = i-1) + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{2i} P(X_{n-1} = i) - \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i} P(X_{n-1} = i)$$

$$= E(2^{2X_{n-1}}) + 3\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i} P(X_{n-1} = i) = E(2^{2X_{n-1}}) + 3E(2^{X_{n-1}})$$

已知 $E(2^{2X_0}) = 1$，因此 $E(2^{2X_n}) = 3\sum_{i=0}^{n-1} E(2^{X_i}) + 1 = \dfrac{3n(n+1)}{2} + 1$

所以，$\mathrm{Var}(2^{X_n}) \approx \dfrac{n^2}{2} = O(n^2)$

Morris 算法分析

- 令输出 $\hat{n} = 2^X - 1$，根据 Chebyshev 不等式，

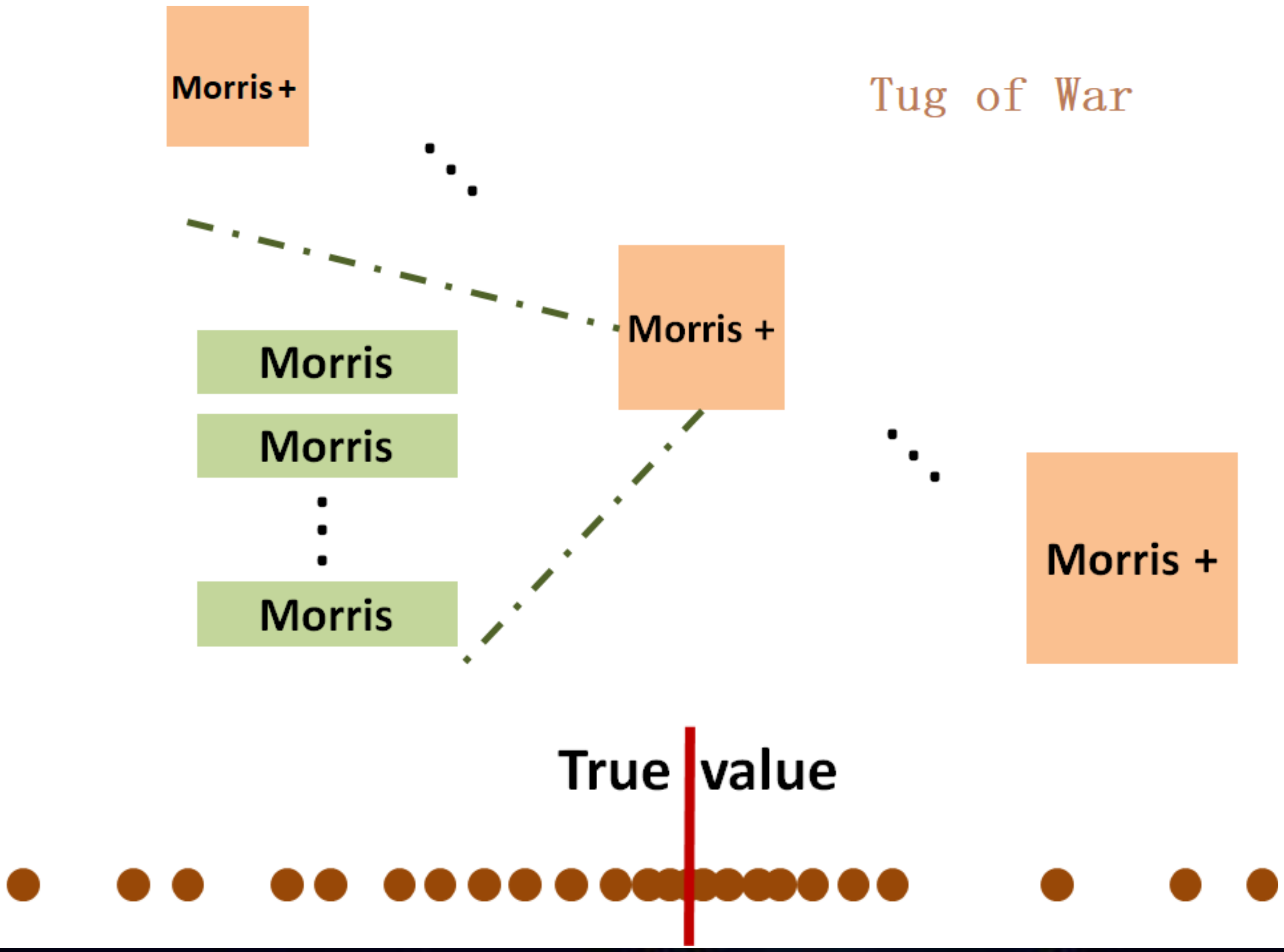
$$P(|\hat{n} - n| > \epsilon n) < \frac{n^2}{2\epsilon^2 n^2} = \frac{1}{2\epsilon^2}$$

- 结果表明，仅当 $\epsilon \geq 1$ 时，尾概率上界不大于 $1/2$
- Morris 算法优缺点
  - 输出结果是真实值的无偏估计
  - 但是可能偏离真实值过大
  - 需要进一步降低算法输出结果的误差
- 如果对于一个很小的 ϵ，输出结果满足 $|\hat{n} - n| \leq \epsilon n$ 视为成功，那么如何才能大概率保证算法输出成功输出理想的结果呢?

Morris+ 算法

- 为降低 Morris 算法输出结果的方差，Morris+ 算法
  - 运行 k 个独立的 Morris 算法得到 k 个不同的计数值 $X_1, \ldots, X_k$
  - 对每次查询，输出平均值 $\hat{n} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} 2^{X_i} - 1$
- Morris+算法
  - k 个独立的 Morris 算法结果分别为 $\widehat{n_1}, \ldots, \widehat{n_k}$，输出 $\hat{n} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\widehat{n_i}$
  - 根据 Chebyshev 不等式，$P(|\hat{n} - n| > \epsilon n) < \frac{O(n^2/k)}{\epsilon^2 n^2} \approx \frac{1}{k\epsilon^2} < \delta$
  - 当 $k > \frac{1}{\delta\epsilon^2}$，$P(|\hat{n} - n| > \epsilon n) < \delta$
  - 因此，Morris+ 算法复杂度为 $O(\frac{1}{\delta\epsilon^2})$

Morris++ 算法


Morris+
Tug of War
Morris +
Morris
Morris
Morris
Morris +
True value

算法细节

- 运行 t 个 Morris+ 实例，每一个都有 1/3 的失败概率，即

$$P(|\hat{n}-n|>\epsilon n)<\frac{1}{k\epsilon^2}=\frac{1}{3}, \text{其中 } k=O(\frac{1}{\epsilon^2})$$

- 输出所有 t 个 Morris+ 实例输出值的中位数
  - t 个 Morris+ 算法运行失败的期望不超过 $\frac{t}{3}$
  - 如果 Morris++ 算法的输出是一个糟糕的估计，则意味着 t 个 Morris+ 算法至少有一半失败了
- 这种方法被称之为 Tug of War
  - 可以将算法复杂度降为 $O(\frac{\ln(1/\delta)}{\epsilon^2})$
  - 比 Morris+ 算法更为高效

Morris++ 算法分析

- 定义随机变量 $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{if } |\widehat{n_i} - n| > \epsilon n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
  - 随机变量 Y_i 表示第 i 次 Morris+ 算法失败与否
  - 令 $k = O(\frac{1}{\epsilon^2})$，每次 Morris+ 算法运行失败的概率不超过 $1/3$
- 注意到，$\mu = E(\sum_i Y_i) \leq \frac{t}{3}$，则根据 Chernoff 不等式可得

$$P\Big(\sum_i Y_i > \frac{t}{2}\Big) \leq P\Big(\sum_i Y_i > (1+\frac{1}{2})\mu\Big) \leq \exp\Big(-\mu(\frac{1}{2})^2/3\Big) < \delta$$

也就是说，$\mu < 12\ln(1/\delta)$

- 因此，需要运行 $t = O(\ln(1/\delta))$ 次 Morris+ 算法，其结果的中位数是符合精度要求的近似估计
- Morris++ 算法复杂度为 $O(\frac{\ln(1/\delta)}{\epsilon^2})$

本章小结

- 尾概率不等式
  - Markov 不等式
  - Chebyshev 不等式
  - Chernoff 不等式
  - ……
- 尾概率不等式的应用
  - 流数据分析
  - 近似算法分析
  - 大偏差理论
  - ……

课后作业

课本第45–46页习题3

- 第1，2，3，4，5，6题
- 第7题难度较大，仅供大家课后思考不做考察