4. 装箱问题是要选择集合的最大成本子集合, 其中没有两个集合具有相同的元素。输入: 全集 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 子集族 $S = \{s_i \mid s_i \subset U, 1 \leq i \leq m\}$ 成本 $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ 试将装箱问题用整数规划问题的形式表达出来。

决策变量: $x_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq m$，其中 $x_i = 1$ 表示子集 s_i 被选中，$x_i = 0$ 表示子集 s_i 没有被选中。

目标函数: 最大化选中子集的总成本，即 $\max \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$。

约束条件: 使用指示函数 $I(s_i, u_j)$ 来表示元素 u_j 是否在子集 s_i 中。对于全集 U 中的每个元素 u_j，它最多只能在一个选中的子集 s_i 中出现。约束条件如下:

$$\sum_{i=1}^{m} I(s_i, u_j) x_i \leq 1, \quad \forall u_j \in U, 1 \leq j \leq n$$

将目标函数和约束条件结合起来，我们可以得到装箱问题的整数规划表示:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} I(s_i, u_j) x_i \leq 1, \quad \forall u_j \in U, 1 \leq j \leq n \\
& x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq m
\end{aligned}$$

5. 集合最大覆盖问题旨在找到 k 个子集, 使得这 k 个子集的并集包含全集中最多的元素个数。集合最大覆盖问题可以描述为: 输入: 全集 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 子集族 $S_1, S_2, \cdots, S_m \subseteq U$ 目标: 找到 k 个子集, 使得这 k 个子集的并集包含全集中最多的元素个数请将集合最大覆盖问题用整数规划问题的形式表达出来。

集合最大覆盖问题可以转换为整数线性规划问题 (ILP)。我们可以利用如下方式表达整数规划问题:

1. 决策变量: 定义一个二进制变量 x_i，其中 $x_i = 1$ 表示子集 S_i 被选中，$x_i = 0$ 表示子集 S_i 没有被选中。$x = (x_1, x_2, ..., x_m)$。定义一个二进制

变量 y_j，其中 $y_j = 1$ 表示元素 u_j 被覆盖，$y_j = 0$ 表示元素 u_j 没有被覆盖。$y = (y_1, y_2, ..., y_n)$。

2. 目标函数：我们希望最大化被覆盖元素的数量。目标函数可以表示为：

$$\max \sum_{j=1}^{n} y_j$$

3. 约束条件：

子集数量约束：我们只能选择 k 个子集。这可以通过以下约束条件表示：

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = k$$

元素覆盖约束：如果元素 u_j 被选中的子集覆盖，那么 $y_j = 1$。这可以通过以下约束条件表示：

$$\sum_{i|u_j \in S_i} x_i \geq y_j, \quad \forall u_j \in U$$

其中，$1 \leq j \leq n$。

整数规划问题的形式可以表示为：

$$\begin{aligned}
&\max \sum_{j=1}^{n} y_j \\
&s.t. \\
&\sum_{i=1}^{m} x_i = k \\
&\sum_{i|u_j \in S_i} x_i \geq y_j, \quad \forall u_j \in U \\
&x_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq i \leq m \\
&y_j \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq j \leq n
\end{aligned}$$

6. 给定下面的整数规划问题

IP(1)

Maximize: $10x_1 + 4x_2 + 9x_3$

Subject to: $5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 9$

$0 \le x_i \le 1$ and $x_i \in Z$ for i = 1 to 3

a. 写出关于 $IP(1)$ 的线性规划松弛。

b. 如果 $x_1 = 1$, 请找出对应整数规划问题的上界。

c. 请使用分支定界方法求解 $IP(1)$ 。

a. 要将整数规划问题 IP(1) 转化为线性规划松弛问题，我们需要将整数约束条件放宽为实数约束条件。线性规划松弛问题如下：

LP(1)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 10x_1 + 4x_2 + 9x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 9 \\
& 0 \le x_i \le 1, \quad i = 1,2,3 \\
& x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

b. 如果 $x_1 = 1$，那么我们可以将 IP(1) 问题简化为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 10 + 4x_2 + 9x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_2 + 3x_3 \le 4 \\
& 0 \le x_2 \le 1 \\
& 0 \le x_3 \le 1 \\
& x_2, x_3 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

对应的线性规划松弛问题为：

$$\begin{aligned}
\max \quad & 10 + 4x_2 + 9x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 4x_2 + 3x_3 \leq 4 \\
& 0 \leq x_2 \leq 1 \\
& 0 \leq x_3 \leq 1 \\
& x_2, x_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

解线性规划松弛问题，可以得到 $x_2 = \frac{1}{4}$ 和 $x_3 = 1$。此时目标函数为 $10 + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times 1 = 20$。整数规划问题的上界为 20。

c. 分支定界方法求解：$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$, 目标函数值为 19。

7. 给定下面的整数规划问题：

$$\begin{aligned}
\text{Maximize:} \quad & z = 3x_1 + x_2 \\
\text{Subject to:} \quad & 2x_1 - x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& 0 \leq x_i \text{ and } x_i \in Z \text{ for i = 1 to 2}
\end{aligned}$$

a. 请找出该整数规划问题的两个有效的不等式约束。

b. 找出整数规划问题的可行域。

c. 找出整数规划问题的凸包

d. 使用线性规划方法解决该整数规划问题。

a.

$x_1 \leq 3, 2x_1 + x_2 \leq 7$, 答案不唯一。

b.

(0,0)(0,1)(0,2)(0,3)(0,4) (1,0)(1,1)(1,2)(1,3) (2,0)(2,1)(2,2) (3,0)(3,1)

c.

$0 \leq x_1 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 4, x_2 \geq 0$

d.

$x_1 = 3, x_2 = 1, z_{max} = 10$