Date

DaSE 算法 第8章

2. $A=\begin{pmatrix}2&1\\4&5\end{pmatrix}$ $\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2&-1\\-4&\lambda-5\end{pmatrix}$

(1) $\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\4&5-\lambda\end{vmatrix}=0=(2-\lambda)(5-\lambda)-4$

$10-7\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-7\lambda+6=0=(\lambda-6)(\lambda-1)=0$

$\therefore \lambda_1=6$ $\lambda_2=1$，特征矩阵 $\begin{pmatrix}4&-1\\-4&1\end{pmatrix}$

$\lambda_1=6$时 $\begin{pmatrix}-4&1\\4&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4&1\\0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $P_1=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$\therefore$ $kP_1(k\neq0)$ 是对应 $\lambda_1=6$ 的特征向量

$\lambda_2=1$时 $\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ 得基础解系 $P_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\therefore$ $kP_2(k\neq0)$ 是对应 $\lambda_2=1$ 的特征向量，特征矩阵 $\begin{pmatrix}-1&-1\\-4&-4\end{pmatrix}$

(2) $V=(1,1)^T$

k			
1	$(3,9)$	9	$(\frac{1}{3},1)$
2	$(\frac{5}{3},\frac{19}{3})$	$\frac{19}{3}$	$(\frac{5}{19},1)$
⋮			
	$(1.500,6.000)$	6.000	$(\frac{1}{4},1)$

$\therefore$ 主特征值为6，对应的特征向量为$(\frac{1}{4},1)$

3、 $\because$ $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 是矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 的特征值

(1)

$\therefore$ $AX = \lambda_1 X$ $AX = \lambda_2 X$ $AX = \lambda_i X$

$$AX - \sigma I X = \lambda_i X - \sigma I X = \lambda_i X - \sigma X = (\lambda_i - \sigma) X$$

$$(A - \sigma I) X = (\lambda_i - \sigma) X \quad , i = 1, 2, 3, \cdots n$$

$\therefore$ 矩阵 $A - \sigma I$ 的特征值为 $\lambda_i - \sigma$; $i = 1, 2, 3 \cdots n$

(2) $AX = \lambda_i X$

$$(A - \sigma I) X = AX - \sigma I X = \lambda_i X - \sigma X = (\lambda_i - \sigma) X$$

左右同左乘 $\frac{(A-\sigma I)^{-1}}{\lambda_i - \sigma}$

$$\therefore \frac{1}{\lambda_i - \sigma} X = (A - \sigma I)^{-1} X$$

$\therefore$ 该矩阵 $(A - \sigma I)^{-1}$ 的特征值为 $(\lambda_i - \sigma)^{-1}$, $i = 1, 2, \cdots m$

4、 (1) 取初始向量 $(1, 0)$

$$\lambda_1 = \frac{X_0^T A X_0}{X_0^T X_0} = \frac{5}{2}$$

$$\vec{x}_1 = (A - \lambda_1 I)^{-1} \vec{x}_0 = (-\tfrac{1}{10}, -\tfrac{3}{10})^{-1}$$

写代码多次迭代后可得最大特征值 5.9 ,

对应的特征向量为 $(0.53, 0.85)$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A' = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ 用反幂法求解 A' 的主特征值及特征向量， $(A - I)^{-1}$ 的主特征值和特征向量稳定于 -0.54 ， $(-0.85, 0.53)$ ， $\therefore$ A 第二大特征值为 $\frac{1}{1-0.54} = -0.85$

对应的特征向量为 $(-0.85, 0.53)$

6. $$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -3 \\ -1 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-6) - 3 - 3 - (\lambda-2) - (\lambda-6) - 9(\lambda-1) = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-6) \cancel{-6} - \cancel{\lambda} + 2 - \cancel{\lambda} + \cancel{6} - \cancel{9\lambda} + 9 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-6) - 11\lambda + 11 = 0$$

$$\cancel{(\lambda-1)}(\lambda-2)(\lambda-6) = 11\lambda - 11 = 11\cancel{(\lambda-1)}$$

$\lambda_1 = 1$ $\qquad$ $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 11$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64-4}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

$\therefore$ $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4+\sqrt{15}$, $\lambda_3 = 4-\sqrt{15}$

$$P_1 = (2, 1, -1)^T$$

$$P_2 = \left(\frac{6+2\sqrt{15}}{(3+\sqrt{15})(5+\sqrt{15})}, \frac{\sqrt{15}+1}{5+\sqrt{15}}, 1 \right)^T$$

$$P_3 = \left(\frac{6}{(3-\sqrt{15})(5+\sqrt{15})}, \frac{1-\sqrt{15}}{5+\sqrt{15}}, 1 \right)^T$$

7、 $(AA^T)^T = AA^T \qquad (A^TA)^T = A^TA$

$\therefore$ AA^T 和 A^TA 是对称的

对任意长度为 n 的向量 x

$$x^T A A^T x = (A^T x)^T A^T x \geq 0 \text{ 恒成立}$$
$$x^T A^T A x = (Ax)^T A x \geq 0 \text{ 恒成立}$$

$\therefore$ AA^T 和 A^TA 是半正定的

9、 使用代码进行计算

取 $u_0 = [1, 0, 0]^T$，计算 $u_i = \dfrac{Au_{i-1}}{\|Au_{i-1}\|_2}$

多次迭代后，可得

主特征值为 2.53，特征向量为 (0.75, 0.65, 1)

10、 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

取 $\mu = 1$

$$A - \mu I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

选定 $u = (1, 1, 1)^T$

经过多次迭代后可得 特征值 $3-\sqrt{3}$ 的特征向量为

(−0.3090, −0.5878, 0.5010)