1. 证明：集合函数 $f: 2^V \to R$ 是一个子模函数，当且仅当对于所有的 $S \subseteq T \subseteq V$，$C \subseteq V \setminus T$，

$$f(S \cup C) - f(S) \geq f(T \cup C) - f(T).$$

必要性

考虑 $S \cup T$ 和 T，$c \subset V \setminus T$

$f(S \cup C \cup T) + f((S \cup C) \cap T) \leq f(S \cup C) + f(T)$

又 $f(S \cup C \cup T) = f(T \cup C)$ $f((S \cup C) \cap T) = f(S)$

有 $f(T \cup C) + f(S) \leq f(S \cup C) + f(T)$

$f(S \cup C) - f(S) \leq f(T \cup C) - f(T)$

充分性

取 C 集合为单元素集合 $v \in V \setminus T$

给定任意两个集合 S 和 T 令 $T \setminus S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$

$T_j = \{v_1, v_2, ..., v_j\}$ $A_j = (S \cap T) \cup T_j$ $B_j = S \cup T_j$

易知 $f(A_j \cup \{v_{j+1}\}) - f(A_j) \geq f(B_j \cup \{v_{j+1}\}) - f(B_j)$ $j = 0, 1, 2, ..., k-1$

相加

$f(A_{k-1} \cup \{v_k\}) - f(A_0) \geq f(B_{k-1} \cup \{v_k\}) - f(B_0)$

$f(T) - f(S \cap T) \geq f(S \cup T) - f(S)$

有 $f(S \cap T) + f(S \cup T) \geq f(S) + f(T)$

3. 给定一个集合 V，当 $A \subseteq V$ 时，$f(A)$ 是一个子模函数。

a. 证明：$\overline{f}(A) = f(A^c)$ 是一个子模函数。

b. 证明：当 $S \subset V$，$g(A) = f(A \cap S)$ 是一个子模函数。

证

a. 因为 $f(A)$ 是子模函数，$A \subseteq V$

所以 $S, T \subseteq V$

有 $f(S) + f(T) \geq f(S \cap T) + f(S \cup T)$

所以有

$f(S^c) + f(T^c) \geq f(S^c \cap T^c) + f(S^c \cup T^c) = f((S \cap T)^c) + f((S \cup T)^c)$

所以 $\overline{f}(S) + \overline{f}(T) \geq \overline{f}(S \cup T) + \overline{f}(S \cap T)$ 证毕

b. $f(A \cap S) + f(B \cap S) \geq f(A \cap S \cap B \cap S) + f((A \cap S) \cup (B \cap S))$

则 $f(A \cap S) + f(B \cap S) \geq f(A \cap B \cap S) + f((A \cup B) \cap S$

则 $g(A) + g(B) \geq g(A \cap B) + g(A \cup B)$ 证毕

5. 令 $w:\Omega\to R$，以及任意 $A\subset\Omega$，验证

$$F(A)=\begin{cases}\max_{a\in A} w_a, & A\neq\emptyset,\\ c, & \text{否则}.\end{cases}$$

是一个集合函数。如果 $c\le\max_{a\in\Omega} w_a$，请证明集合函数 F 是一个子模函数。

证

不存在空集的情况下

对 $S\subset\Omega, T\subset\Omega$ 且 $S\neq\emptyset, T\neq\emptyset$

不妨设 $\max_{c\in S} w_c\le\max_{c\in T} w_c$

$F(s\cup T)=\max_{c\in S\cup T} w_c=\max\{\max_{c\in S} w_c,\max_{c\in T} w_c\}=\max_{c\in T} w_c$

所以 $F(S)+F(T)-F(s\cup T)-F(s\cap T)$

$=\max_{a\in S} w_a+\max_{b\in T} w_b-\max_{c\in T} w_c-\max_{d\in S\cap T} w_d$

$=\max_{a\in S} w_a-\max_{d\in S\cap T} w_d$

≥ 0 证毕

存在空集的情况下

不妨设 $S\subset\Omega, T\subset\Omega$ 且 $S=\emptyset$

$F(S)+F(T)-F(S\cup T)+F(S\cap T)$

$=c+F(T)-F(T)-c$

$=0$

综上有 $F(S)+F(T)\ge F(s\cup T)+F(s\cap T)$ 证毕

12. 假设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$ 和子集族

$$S=\{\{1,2\},\{1,2,4\},\{2,3\},\{4,5\},\{3\},\{1,5\}\}.$$

当 $k=2$ 时，运用登山算法求解最大覆盖问题，可能的解有哪些?

第一轮算法迭代结果为 $S_2=\{1,2,4\}$.

第二轮迭代结果过程如下:

子集	$f(s')$	$f(s\cup\{s_i\})$	$\Delta(s_i)$
s_1	3	3	0
s_3	3	4	1
s_4	3	4	1
s_5	3	4	1
s_6	3	4	1

S_3,S_4,S_5,S_6 边际贡献最大。

k=2，可能的解有 $\{s_2,s_3\}$，$\{s_2,s_4\}$，$\{s_2,s_5\}$，$\{s_2,s_6\}$.