数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 3 次作业

教师：黄定江
助教：陈诺、刘文辉

2022 年 10 月 13 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档**。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为：“**学号 _ 姓名**”。命名示例：52200000000_ 刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：**第 3 次作业提交传送门**，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 3 次作业

提交截至时间：**2022/10/21 周五 12:00（中午）**

理论部分 (范数与二次型)

习题 1. 证明：（**关联矩阵的四个子空间性质**）设图 $G=<\mathbb{V},\mathbb{E}>$ 是一个具有 m 个顶点和 n 条边的连通图，其对应的关联矩阵为 $\boldsymbol{B}$，则关于 $\boldsymbol{B}$ 的四个基本子空间具有以下性质：

- $\boldsymbol{B}$ 的左零空间维数为 1，即 $Null\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)=1$，且 $Null\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)=\mathbf{span}\{\mathbf{1}\}$。
- $\boldsymbol{B}$ 的行空间维数为 $m-1$，即 $Col\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)=m-1$，且 $Col\left(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right)$ 可由 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 任意 $m-1$ 个列向量生成。
- $\boldsymbol{B}$ 的列空间维数为 $m-1$，即 $Col\left(\boldsymbol{B}\right)=m-1$，且若 T 是图 G 的一棵生成树，那么 $Col\left(\boldsymbol{B}\right)$ 可由 T 的关联矩阵的 $m-1$ 个列向量生成。
- $\boldsymbol{B}$ 的零空间维数为 $n-m+1$，即 $Null\left(\boldsymbol{B}\right)=n-m+1$，这个数等于图 G 中小圈的个数。

习题 2. 求向量 $(1,1,1)^T$ 投影到一维子空间 $span\{(1,-1,1)^T\}$ 的正交投影。

习题 3. 完成以下阅读材料即可。

- **为什么需要 *LU* 分解？**

  为什么不直接求解方程组 $Ax=b$？如果了解 LU 分解所需要的计算量与高斯消去法解方程组所需的计算量，便可知计算复杂度均为 $O(n^3)$。似乎 LU 分解并没有任何优势。然而，在实际的工程问题中，我们经常会遇到的是这样的问题，需要求解这样一系列的方程组（例如时序的）：

  $$Ax=b_1,\ Ax=b_2,\ \cdots,\ Ax=b_r.$$

  其中的系数矩阵是不变的，只是右边的常数项在改变。这时，如果直接使用高斯消去法求解各个方程组的话，则对应的计算复杂度为 $O(rn^3)$。若使用 LU 分解，则只需要的运算量级为 $O(n^3+rn^2)$，这是因为 LU 分解在解方程组时只需要 $O(n^2)$。

  或许，你会提出直接计算出 A^{-1}，然后再利用它去求解各个方程组。这时所需要的计算量的效果似乎与 LU 分解是相似的。事实上，在实际计算中往往不会直接计算矩阵的逆。这里给出其中一个原因：通常实际工程中矩阵 A 的维度很大，但有一个优点是它是稀疏的，例如一个“带状的”矩阵。使用 LU 分解，可以保持矩阵的稀疏性（因此，还可以提高运算速度）。然而，直接求解矩阵的逆，则会丢失矩阵的稀疏性。因此，在数据的存储上直接求逆存在明显的劣势。

- ***Gauss* 消去与 *LU* 分解**

  还记得初中学过的求解二元一次方程组的消元法吗？这就是 LU 分解与 Cholesky 分解的全部。假设我们有如下二元一次方程组

  $$\begin{cases}2x_1+4x_2=5\\4x_1+5x_2=3\end{cases}$$

  现在我们考虑方程组的求解。在中学时，我们会通过将第一个等式乘以 -2 加到第二个等式，则得到

  $$\begin{cases}2x_1+4x_2=5\\0x_1-3x_2=-7\end{cases}$$

这个行变换对应的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$，它的逆矩阵就是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$。另外，变换后的系数矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$。

如果我们使用 LU 分解，则可得到

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

从上可以看出，高斯消去的变换矩阵的逆恰好对应 LU 分解的 L 矩阵，变换后的系数矩阵恰好对应 U 矩阵。

习题 4. 对矩阵 $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 进行 LU 分解。

习题 5. 设 A 对称且 $a_{11} \neq 0$, 并假经过一步 *Gauss* 消去之后, A 具有如下形式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix}$$

证明 A_2 仍是对称阵.

习题 6. 证明上三角矩阵与上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵。

习题 7. 用 *Householder* 方法求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的 QR 分解。