数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 9 次作业

教师：黄定江
助教：陈诺、刘文辉

2022 年 5 月 8 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本或笔记本**（建议统一使用一般的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。
2. 作业书写说明：
    (a) 可以讨论，禁止抄袭！
    (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名**和**学号**
    (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如“第 9 次作业”；
    (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
    (e) 题与题之间**请空一行**；
    (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 9 次作业

提交截至时间：**暂定 2022/04/01 下周五 20:00（晚上）**

理论部分 (矩阵分解)

习题 1. 对矩阵 $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 进行 LU 分解。

解. (具体计算过程可参考教材或课件中的例题。)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{LU}$$

习题 2. 利用 LU 分解来求解方程

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解. 令 $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，则先求解

$$\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$$

得到 $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，再求解

$$\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$$

得到 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -13/30 \\ 7/6 \\ -1/6 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

习题 3. 证明上三角矩阵与上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵。

解. 假设 A, B 为上三角矩阵，且其乘积为 C。下证 C 为上三角矩阵，只需证 $C_{ij}, (i > j)$ 时为 0。易知，

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{j} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=j+1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

因为 A, B 为上三角矩阵，所以右边第一项为中 $A_{ik} = 0$，右边第二项中 $B_{kj} = 0$。故得证。

习题 4. 用 *Householder* 方法求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 的 *QR* 分解。

解. 令 $\alpha_1 = (1, 2, 2)^T$，$a_1 = \|\alpha_1\|_2 = 3$，则

$$w_1 = \frac{\alpha_1 - a_1\boldsymbol{e}_1}{\|\alpha_1 - a_1\boldsymbol{e}_1\|_2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-2, 2, 2)^T$$

故有

$$H_1 = I - 2w_1w_1^T = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

此时，

$$H_1A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

再令 $\beta_1 = (0, 1)^T$，$b_1 = \|\beta_1\|_2 = 1$，则

$$w_2 = \frac{\beta_1 - b_1\boldsymbol{e}_1}{\|\beta_1 - b_1\boldsymbol{e}_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T$$

故有

$$\hat{H}_2 = I - 2w_2w_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

记

$$H_2 = I - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

此时

$$H_2H_1A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq R$$

因此，$A = QR$，其中 $Q = H_1^TH_2^T$。