一、

$$\|A\|_{m\infty} := \max_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}|$$

证明：

(1) $\|A\|_{m\infty} = \max\limits_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}|$ 显然 $\|A\|_{m\infty} \ge 0$

且 $(\|A\|_{m\infty} = 0 \Leftrightarrow A = 0)$

(2) $\|cA\|_{m\infty} = \max\limits_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |c\, a_{ij}| = |c| \max\limits_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}| = |c|\,\|A\|_{m\infty}$

c 为实数

(3) $\|A+B\|_{m\infty} = \max\limits_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} (|a_{ij}+b_{ij}|) \le \max\limits_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} (|a_{ij}|+|b_{ij}|) = \|A\|_{m\infty} + \|B\|_{m\infty}$

∴ 因此，实函数 $\|A\|_{m\infty} = \max\limits_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n} |a_{ij}|$ 是一种矩阵范数

取 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　$A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\|A\cdot A\|_{m\infty} = \|2A\|_{m\infty} = 2\|A\|_{m\infty} = 2$

$\|A\|_{m\infty}^2 = 1$

∴ $\|A^2\|_{m\infty} \ne \|A\|_{m\infty}^2$ 不满足相容性条件 ∴ 称其为广义矩阵范数

二、

$$\|A_1\|_1 = \max_{1\le j\le 2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{2, 2\} = 2$$

$$A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4)-4=0$$

$$\lambda^2-6\lambda+8-4=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+4=0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{6\pm\sqrt{36-4\times4}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{6\pm2\sqrt{5}}{2} = 3\pm\sqrt{5}$$

$$\|A_1\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

$$\|A_1\|_\infty = \max_{1\le i\le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{1+2, 1+0\} = 3$$

$$\|A_2\|_1 = \max_{1\le j\le 2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{1+1, 2\} = 2$$

$$A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\|A_2\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$$

$$\|A_2\|_\infty = \max_{1\le i\le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{1, 1+2\} = 3$$

扫描全能王 创建

(1) 当 $A=0$ 时

$\|A\|_1 = \max\{\|AX\|_1 : X\in R^n, \|X\|_1=1\}=0$ 显然成立

$\|A\|_\infty = \max\{\|AX\|_\infty : X\in R^n, \|X\|_\infty=1\}=0$ 显然成立

假定 $A\neq 0$，对 1 范数和无穷范数进行证明

1 范数证明:

对于 1 范数，将给定的 $A\in C^{n\times n}$ 按列分块 $A=[a_1 \cdots a_n]$，并

记 $\delta = \|a_{j_0}\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\|a_j\|$，则对任意满足 $\|X\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|=1$ 的 $X\in R^n$，

有 $\|AX\|_1 = \|\sum\limits_{j=1}^{n} a_j X_j\|_1 \le \sum\limits_{j=1}^{n}|X_j|\,\|a_j\|_1 \le \sum\limits_{j=1}^{n}|X_j| \max\limits_{1\le j\le n}\|a_j\|_1 = \|a_{j_0}\|$
$= \delta$

此处证明:

$\therefore \|A\|_1 = \sup\limits_{\|X\|_1=1}\|AX\|_1 \le \delta$

$=\|X\|$

令 X 的第 j_0 个元素为 1，其余分量为 0 的向量 e_{j_0}，则有 $\|e_{j_0}\|=1$，而且

$\|Ae_{j_0}\|_1 = \|a_{j_0}\|_1 = \delta$

$\therefore$ 存在满足 $\|X\|_1=1$ 的 X，使得 $\|AX\|_1=\delta$

因此有

$\|A\|_1 = \delta = \max\limits_{1\le j\le n}\|a_j\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

扫描全能王 创建

无穷范数证明：

对于无穷范数，记 $\eta = \max\limits_{1\le i\le m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

则对任意满足 $\|x\|_\infty = 1$ 的 $x\in R^n$，有

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right| \le \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j| \le \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = \eta$$

$$\therefore \|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty \le \eta$$

设 A 的第 k 行元素的绝对值之和最大，即 $\eta = \sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}|$

$\because A\ne 0$ 蕴含 $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$

$$\tilde{x} = (\operatorname{sgn}(a_{k1}), \operatorname{sgn}(a_{k2}), \cdots, \operatorname{sgn}(a_{kn}))^T$$

有 $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$，有 $\|A\tilde{x}\|_\infty = \sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}| = \eta$

$\therefore$ 存在满足 $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$ 的 $\tilde{x}$ 使得 $\|A\tilde{x}\|_\infty = \eta$

则 $\|A\|_\infty = \eta = \max\limits_{1\le i\le m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

(2)

$l_1 \le 1$ 范数

$l_1 \le$ 无穷范数