数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 11 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2023 年 1 月 7 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档**。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号 _ 姓名**"。命名示例：50000000000_ 刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：**第 11 次作业提交传送门（最后一次作业）**，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 11 次作业

提交截至时间：**2023/02/15 周三 12:00（中午）**

理论部分

习题 1. 写出下述非线性规划的 *KKT* 条件并求解

$$\begin{aligned}(1)\quad & \mathtt{maximize} \quad f(x)=(x-3)^2 \\ & \mathtt{suject\ to} \quad 1\le x\le 5 \\ (2)\quad & \mathtt{minimize} \quad f(x)=(x-3)^2 \\ & \mathtt{suject\ to} \quad 1\le x\le 5\end{aligned}$$

习题 2. 考虑等式约束的最小二乘问题

$$\begin{aligned}\mathtt{minimize} \quad & \|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2^2 \\ \mathtt{suject\ to} \quad & \mathbf{Gx}=\mathbf{h}\end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}, \mathrm{rank}(\mathbf{A})=n, \mathbf{G}\in\mathbb{R}^{p\times n}, \mathrm{rank}(\mathbf{G})=p$. 给出 *KKT* 条件, 推导原问题最优解 x^* 以及对偶问题最优解 v^* 的表达式.

习题 3. 用 *Lagrange* 乘子法证明：矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 的 *2* 范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\|\boldsymbol{Ax}\|_2$$

的平方是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的最大特征值。

习题 4. 用 *Lagrange* 乘子法求欠定方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的最小二范数解，其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}, m\le n, \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=m$

习题 5. 用最速下降法和精确线搜索计算 $\min f(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ ，初始点 $x^{(0)}=(2,2,1)^T$. 当 $(f(x^{(n+1)})-f(x^{(n)}))<0.001$ 时迭代终止.

习题 6. 使用梯度下降法和固定步长 $\lambda=0.01$ 计算 $\min f(x)=(x_1-1)^2+16(x_2-2)^2$ ，初始点 $x^{(0)}=(2,3)^T$，迭代两步后终止.

习题 7. 考虑问题

$$\min f(x)=3x_1^2+3x_2^2-x_1^2x_2.$$

从初始点 $x^{(0)}=(1.5,1.5)^{\mathrm{T}}$ 出发, 用 *Newton* 方法求迭代两步后该问题的解（可编写程序辅助计算）.

习题 8. 试用 *DFP* 法计算下述二次函数的极小点

$$\min f(x)=3x_1^2+x_2^2-2x_1^2x_2-4x_1.$$

习题 9. 试用二次罚函数法求解如下优化问题：

$$\min f_0(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2$$
$$s.t.\ f_1(\boldsymbol{x}) = 1 - x_1 \le 0$$
$$f_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 \le 0$$

从初始点 $x^{(0)} = (2,0)^{\mathrm{T}}$ 开始，计算迭代两步后的解。

习题 10. 试用内点法求解如下优化问题：

$$\min f_0(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2$$
$$s.t.\ f_1(\boldsymbol{x}) = 1 - x_1 \le 0$$
$$f_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 \le 0$$