数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 20 次作业

教师：黄定江
助教：陈诺、刘文辉

2022 年 8 月 2 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本或笔记本**（建议统一使用一般的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。
2. 作业书写说明：
   (a) 可以讨论，禁止抄袭！
   (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名**和**学号**
   (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如"第 20 次作业"；
   (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
   (e) 题与题之间**请空一行**；
   (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 20 次作业

提交截至时间：**暂定 2022/06/** 周五 20:00（晚上）**

理论部分

习题 1. 假设总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ (σ^2 已知), $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样本, 由过去的经验和知识, 我们可以确定 μ 的取值比较集中在 μ_0 附近, 离 μ_0 越远, μ 取值的可能性越小, 于是我们假定 μ 的先验分布为正态分布

$$\pi(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu^2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}\left(\mu-\mu_0\right)^2\right] \quad (\mu_0, \sigma_\mu \text{已知})$$

求 μ 的后验概率分布。

解. 样本分布密度为

$$q(\mathbf{x}\mid\mu)=\frac{1}{\sigma^n(2\pi)^{n/2}}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right]$$

于是后验密度函数为

$$\begin{aligned} h(\mu\mid\mathbf{x}) &= \frac{g(\mathbf{x}\mid\mu)\cdot\pi(\mu)}{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}=\frac{q(\mathbf{x}\mid\mu)\cdot\pi(\mu)}{\int_{-\infty}^{+\infty}q(\mathbf{x}\mid\mu)\cdot\pi(\mu)d\mu} \\ &\propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2\right]\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}\left(\mu-\mu_0\right)^2\right] \end{aligned}$$

化简得

$$h(\mu\mid\mathbf{x})\propto\exp\left[-\frac{(\mu-t)^2}{2\eta^2}\right]$$

其中 $t=\frac{\frac{n}{\sigma^2}\bar{x}+\frac{1}{\sigma_\mu^2}\mu_0}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_\mu^2}}$, $\eta^2=\frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_\mu^2}}$, 于是

$$\mu\mid\mathbf{x}\sim N\left(\frac{\frac{n}{\sigma^2}\bar{x}+\frac{1}{\sigma_\mu^2}\mu_0}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_\mu^2}}, \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_\mu^2}}\right).$$

习题 2. 假设总体 $X \sim P(\lambda), X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的样木, 假定 λ 的先验分布为伽玛分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$, 求 λ 的后验期望估计 (平方损失下的贝叶斯估计)。

解. 因为 λ 的先验密度函数 $\pi(\lambda)$ 为伽玛分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$, 即

$$\pi(\lambda)\propto\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$$

样木分布密度函数为:

$$q(\mathbf{x}\mid\lambda)=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!x_2!\ldots,x_n!}e^{-n\lambda}\propto\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-n\lambda}$$

所以

$$h(\lambda\mid\mathbf{x})\propto\lambda^{\alpha+\sum_{i=1}^{n}x_i-1}e^{-(\beta+n)\lambda}$$

即

$$\lambda\mid\mathbf{x}\sim\Gamma\left(\alpha+\sum_{i=1}^{n}x_i, \beta+n\right)$$

故 λ 的后验期望估计为

$$\hat{\lambda} = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^n x_i}{\beta + n} = \frac{n}{\beta + n}\bar{x} + \frac{\beta}{\beta + n}\frac{\alpha}{\beta}$$

它是样本均值 $\bar{x}$ 和先验分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 的均值 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的加权平均。

习题 3. 下面的集合哪些是凸集?

(a) 平板，即形如 $\left\{x \in \mathbf{R}^n | \alpha \leqslant a^T x \leqslant \beta\right\}$ 的集合.

(b) 矩形，即形如 $\{x \in \mathbf{R}^n | \alpha_i \leqslant x_i \leqslant \beta_i, i = 1, \cdots, n\}$ 的集合。当 $n > 2$ 时，矩形有时也称为超矩形.

(c) 楔形，即 $\left\{x \in \mathbf{R}^n | a_1^T x \leqslant b_1, a_2^T x \leqslant b_2\right\}$。

(d) 距离给定点比距离给定集合近的点构成的集合，即

$$\{x| \left\|x - x_0\right\|_2 \leqslant \|x - y\|_2, \forall y \in S\}$$

其中 $S \subseteq \mathbf{R}^n$。

解. *(a)* 平板是两个半空间的交集，因此是一个凸集。

(b) 矩形是有限个半空间的交集，因此是一个凸集。

(c) 楔形是两个半空间的交集，因此是一个凸集。

(d) 该集合可以写为:

$$\bigcap_{y \in S} \{x| \left\|x - x_0\right\|_2 \leq \|x - y\|_2\}$$

由于它是半空间的交集，因此是一个凸集。