数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 5 次作业

教师：黄定江
助教：陈诺、刘文辉

2022 年 11 月 20 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档**。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号_姓名**"。命名示例：52200000000_刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：**第 5 次作业提交传送门**，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 5 次作业

提交截至时间：**2022/11/07 周一 12:00（中午）**

理论部分 (范数与二次型)

习题 1. 前面已经介绍过矩阵的 LU 分解，于是我们可以对线性方程组的系数矩阵线进行 LU 分解，再解方程组。例如下二元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases},$$

如果我们对 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ 使用 LU 分解，则可得到

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

利用该结果表示线性方程组的解。

解.

$$A = LU$$

$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

$$x = U^{-1}L^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/6 \\ 7/3 \end{pmatrix}$$

习题 2. 写出一种 LU 分解不能分解的矩阵 A，并分析该矩阵在线性方程组 $Ax = b$ 中时方程解集不可能出现的情况。对于这种情况，应该做怎样的处理才能使用 LU 分解。

解.

定理 0.0.1.

矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 能够进行LU 分解的充分必要条件是 A 的前 n 阶顺序主子式不为 0。

A 能进行 LU 分解需满足 A 的前 n 阶顺序主子式不为 0，即 A 可逆。

一个不能进行 LU 分解的矩阵如

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

如果我们对其使用 LU 分解，能得到

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21}u_{12} + u_{22} \end{bmatrix}$$

求解该方程我们需要同时满足

$$u_{11} = 0$$

$$\ell_{21}u_{11} = 2$$

该方程无解，所以 A 无法进行 LU 分解。实际上，A 的一阶顺序主子式为 0。（当然，对于存在顺序主子式为 0 的矩阵 A，也可以进行 LUP 分解）。

习题 3. 利用 QR 分解求解下述线性方程组的解（最终结果可只需写出具体矩阵与向量的乘积形式即可）：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

解.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = QR$$

因此，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$