第十章 优化基础

第 31 讲 凸优化问题

黄定江

DaSE @ ECNU

djhuang@dase.ecnu.edu.cn

1. 31.1 凸优化概念和性质
2. 31.2 典型凸优化问题

31.1.1 凸优化问题

标准形式的凸优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, \cdots, m \\ & \boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x} = b_j, \quad j = 1, \cdots, p \end{aligned}$$

- $f_0, \cdots, f_m$ 为凸函数；等式约束是仿射的。

凸优化问题

标准形式的凸优化问题也经常等价地表达为:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, \cdots, m \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

有时原凸优化问题并非上述形式，但可以进行转化成标准形式。如下例题：

例 1

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad & f_1(\boldsymbol{x}) = x_1/(1+x_2^2) \le 0 \\ & h_1(\boldsymbol{x}) = (x_1 + x_2)^2 = 0 \end{aligned}$$

可转化成：

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 \\ s.t. \quad & f_1(\boldsymbol{x}) = x_1 \le 0 \\ & h_1(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

31.1.2 凸问题的其他等价转换

如果从一个问题的解，容易得到另一个问题的解，且反之亦然，称两问题 (非正式定义)等价。

- **消除等式约束**

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, \cdots, m \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

等价于

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(\boldsymbol{F}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}_0) \\
\text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{F}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}_0) \leq 0,
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{x}_0$ 满足：

$$
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}_0
$$

- 引入等式约束

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_0) \\
\text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i) \le 0, \quad i=1,\cdots,m
\end{aligned}
$$

等价于

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(\boldsymbol{y}_0) \\
\text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{y}_i) \le 0, \quad i=1,\cdots,m \\
& \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i, \quad i=0,\cdots,m
\end{aligned}
$$

- 引入松弛变量

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \le b_i, \quad i = 1, \cdots, m
\end{aligned}
$$

等价于

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} + s_i = b_i, \quad i = 1, \cdots, m \\
& s_i \ge 0, \quad i = 1, \cdots, m
\end{aligned}
$$

- 转化为上镜图形式

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i = 1, \cdots, m \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

等价于

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & f_0(\boldsymbol{x}) - t \leqslant 0 \\ & f_i(\boldsymbol{x}) \leqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

目标函数是线性的 (因而也是凸的) 并且新的约束函数 $f_0(\boldsymbol{x}) - t$ 也是 $(\boldsymbol{x}, t)$ 上的凸函数, 所以上境图问题也是凸的。

- **转化为极小化部分变量的优化问题**

  极小化凸函数的部分变量将保持凸性不变。因此，对于问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\
\text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{x}_1) \leqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m_1 \\
& \tilde{f}_i(\boldsymbol{x}_2) \leqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m_2,
\end{aligned}
$$

这里假定变量 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 被分为 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$，其中 $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{R}^{n_1}, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{R}^{n_2}$，并且 $n_1 + n_2 = n$ 。我们首先优化 $\boldsymbol{x}_2$ ：定义 $\boldsymbol{x}_1$ 的函数 $\tilde{f}_0$ 为

$$
\tilde{f}_0(\boldsymbol{x}_1) = \inf \left\{ f_0(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{z}) \mid \tilde{f}_i(\boldsymbol{z}) \leqslant 0, i = 1, \cdots, m_2 \right\}.
$$

则原问题等价于

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \tilde{f}_0(\boldsymbol{x}_1) \\
\text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{x}_1) \leqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m_1
\end{aligned}
$$

31.1.3 凸优化的全局最优性

定理 1

凸优化问题中，局部最优点就是 (全局) 最优点。

Proof.

设 $\boldsymbol{x}$ 是凸优化问题的局部最优解，即存在 $R>0$，对任意可行的 $\boldsymbol{z}$ 且 $\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}\|_2 \leq R$，则 $f_0(\boldsymbol{z}) \geq f_0(\boldsymbol{x})$。设 $\boldsymbol{y}$ 是最优点使得 $f_0(\boldsymbol{y}) < f_0(\boldsymbol{x})$。

考虑 $\boldsymbol{z}=(1-\theta)\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{y}$，其中 $\theta = R/2\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2$

- $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|_2 > R$，因此 $0<\theta<1/2$
- $\boldsymbol{z}$ 是两个可行点的凸组合，因此也是可行的
- $\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}\|_2 = R/2 < R$ 又 $f_0(\boldsymbol{z}) \leq (1-\theta)f_0(\boldsymbol{x})+\theta f_0(\boldsymbol{y}) < f_0(\boldsymbol{x})$。这与 $\boldsymbol{x}$ 是局部最优解矛盾。

31.2.1 线性规划（LP）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

- 目标函数和约束函数都是仿射的凸优化问题
- 可行集是一个多面体

例 2

分片线性极小化

$$\min_{\boldsymbol{x}} \max_{i=1,\cdots,m} (\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} + b_i)$$

等价于如下线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \textit{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} + b_i \le t, \quad i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

例 3

马尔科夫决策过程

在马尔科夫决策过程中，考虑终止时间 $T=\infty$ 的情形。假设奖励有界，为求出最优动作以及最优期望奖励，将 *Bellman* 方程转化为如下线性规划问题：

$$\max_{V\in\mathbb{R}^{|S|}} \quad \sum_i V(i)$$

$$s.t. \quad V(i) \geq \sum_j P_a(i,j)(r(i,a)+\gamma V(j)), \forall i \in S, \forall a \in A,$$

其中 $V(i)$ 是向量 V 的第 i 个分量，表示从状态 i 出发得到的累积奖励，$P_a(i,j)$ 是转移概率，$r(i,a)$ 是单步奖励，γ 为折现因子。

例 4

多面体的 *Chebyshev* 中心

多面体 $\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq b_i, \quad i = 1, \cdots, m\}$ 的 *Chebyshev* 中心是最大的内切球球心

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}_c + \boldsymbol{u} | \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq r\}$$

- 对于所有的 $\boldsymbol{x} \in B$，有 $\quad \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq b_i$。这等价于

$$\sup\{\boldsymbol{a}_i^T(\boldsymbol{x}_c + \boldsymbol{u}) | \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq r\} = \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}_c + r\|\boldsymbol{a}_i\|_2 \leq b_i$$

- 因此 $\boldsymbol{x}_c, r$ 可以通过解决一个 *LP* 问题被确定下来

$$\begin{aligned} \max \quad & r \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}_c + r\|\boldsymbol{a}_i\|_2 \leq b_i, \quad i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

例 5

压缩感知中的基追踪问题

基追踪问题是压缩感知中的一个基本问题，可以写为

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\boldsymbol{x}\|_1, \\ s.t. \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

对每个 $|x_i|$ 引入一个新的变量 z_i，可以将问题 (11) 转化为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n z_i \\ s.t. \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & -z_i \leq x_i \leq z_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned}$$

这是一个线性规划问题.

例 6

分式线性问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{h} \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

其中

$$f_0(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d}{\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} + f}, \quad \mathbf{dom}\, f_0 = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{x} + f \ge 0\}$$

可以转换为等价的线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} + dz \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{G}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{h}z \le \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}z = \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{y} + fz = 1 \\ & z \ge 0 \end{aligned}$$

31.2.2 二次规划（QP）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (1/2)\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{x} + r \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{h} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{P} \in S_+^n$ ，因此，目标函数是凸二次型。
- 在多面体上极小化一个凸二次函数，显然是凸优化问题。

例 7

最小二乘问题是经典的二次规划问题：

$$\min \quad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2^2$$

- 解析解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$，其中，$\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伪逆。
- 可以增加线性约束，$\boldsymbol{l} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u}$

例 8

随机线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \bar{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{x} + \gamma \boldsymbol{x}^T \Sigma \boldsymbol{x} = \mathbf{E}(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}) + \gamma \mathbf{var}(\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}) \\
s.t. \quad & \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{h} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{c}$ 是随机向量，均值为 $\bar{\boldsymbol{c}}$，协方差 Σ
- 因此，$\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ 是随机变量，均值 $\bar{\boldsymbol{c}}^T \boldsymbol{x}$，方差 $\boldsymbol{x}^T \Sigma \boldsymbol{x}$
- $\gamma > 0$ 为风险厌恶参数；权衡期望损失和方差 (风险)

31.2.3 二次约束二次规划（QCQP）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (1/2)\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}_0^T\boldsymbol{x} + r_0 \\
\text{s.t.} \quad & (1/2)\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}_i^T\boldsymbol{x} + r_i \le 0, \quad i = 1, \cdots, m \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{P}_i \in S_+^n$, $i = 0, \cdots, m$，目标和限制函数都是凸二次型
- 如果 $\boldsymbol{P}_i \in S_{++}^n$，可行域是 m 个椭球和一个仿射集合的交集

31.2.4 二阶锥规划（SOCP）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \|\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \le \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i, \qquad i = 1, \cdots, m \\
& \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$ 以及 $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{p \times n}$。

- 不等式约束称为二阶锥（SOC）约束:

$$(\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x}_i + d_i) \in R^{n_i+1} \text{的二阶锥中}$$

- $\boldsymbol{c}_i = 0, i = 1, \cdots, m$ 时，SOCP 等同于 QCQP。
- $\boldsymbol{A}_i = 0, i = 1, \cdots, m$ 时，SOCP 退化为 LP。

例 9

鲁棒线性规划

优化问题中的参数经常是不确定的，例如，在线性规划中

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
s.t. \quad & \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq b_i, \qquad i = 1, \cdots, m
\end{aligned}
$$

其中的参数 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_i, b_i$ 含有一些不确定性或变化。

两种通用方式处理不确定性 (简化起见，这里只考虑 $\boldsymbol{a}_i$)

例 10

- 一种为**确定性方法**：必须满足约束所有的 $\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{E}_i$，即

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ s.t. \quad & \boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq b_i, \quad \forall \boldsymbol{a}_i \in \mathcal{E}_i, \ i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

31.2.5 SOCP 确定性方法

- 给定椭球 $\mathcal{E}_i$:

$$\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{E}_i = \{\bar{\boldsymbol{a}}_i + \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{u} | \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq 1\}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{a}}_i \in \mathbb{R}^n$ 是椭球中心，半轴由 $\boldsymbol{P}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的奇异值/奇异向量决定。

SOCP 确定性方法

- 由此得到鲁棒线性规划

$$\begin{aligned}\min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \le b_i, \quad \forall \boldsymbol{a}_i \in \mathcal{E}_i, \qquad i=1,\cdots,m\end{aligned}$$

等价于 SOCP

$$\begin{aligned}\min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.} \quad & \bar{\boldsymbol{a}}_i^T\boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{P}_i^T\boldsymbol{x}\|_2 \le b_i, \qquad i=1,\cdots,m\end{aligned}$$

由 $\sup_{\|\boldsymbol{u}\|_2}(\bar{\boldsymbol{a}}_i + \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{a}}_i^T\boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{P}_i^T\boldsymbol{x}\|_2$ 得到。

例 11

- 另一种为**随机性方法**：$\boldsymbol{a}_i$ 是随机变量；以概率 η 满足约束

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ s.t. \quad & \textbf{\textit{prob}}(\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \le b_i) \ge \eta, \qquad i = 1, \cdots, m \end{aligned}$$

31.2.6 SOCP 随机性方法

- 假设 $\boldsymbol{a}_i$ 是服从高斯分布，均值为 $\bar{\boldsymbol{a}}_i$，协方差阵 Σ_i ，即 $\boldsymbol{a}_i \sim \mathcal{N}(\bar{\boldsymbol{a}}_i, \Sigma_i)$
- $\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}$ 服从高斯分布，均值为 $\bar{\boldsymbol{a}}_i^T \boldsymbol{x}$，方差为 $\boldsymbol{x}^T \Sigma_i \boldsymbol{x}$；因此

$$\textbf{prob}(\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x} \leq b_i) = \phi\left(\frac{b_i - \bar{\boldsymbol{a}}_i^T \boldsymbol{x}}{\| \sum_i^{1/2} \boldsymbol{x}\|_2}\right)$$

其中 $\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-t^2/2} dt$。

SOCP 随机性方法

- 鲁棒线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \textbf{prob}(\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \le b_i) \ge \eta, \quad i = 1, \cdots, m, \end{aligned}$$

其中 $\eta \ge 1/2$，等价于 SOCP

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \bar{\boldsymbol{a}}_i^T\boldsymbol{x} + \phi^{-1}(\eta)\|\Sigma_i^{1/2}\boldsymbol{x}\|_2 \le b_i, \quad i = 1, \cdots, m, \end{aligned}$$

31.2.7 半定规化（SDP）

半定规划（semidefinite programming, SDP）是线性规划在矩阵空间中的一种推广，它与线性规划不同的地方是其自变量取值于半正定矩阵空间。并具有如下一般形式

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & x_1 \boldsymbol{F}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{G} \preceq 0 \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{G}$，$\boldsymbol{F}_1, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 都是对称矩阵。如果这些矩阵为对角阵，那么上式中的线性矩阵不等式 (LMI) 等价于 n 个线性不等式，此时，SDP 便退化为线性规划。

仿照线性规划的分析，SDP 同样具有标准形式。**标准形式**的 SDP 具有对变量 $X \in S^n$ 的线性等式约束和（矩阵）非负定约束：

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{Tr}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{b}_i, i = 1, \cdots, p \\ & \boldsymbol{X} \succeq 0 \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_p \in S^n$，$\mathrm{Tr}(\cdot)$ 是迹函数。

如同不等式形式的 LP，**不等式形式**的 SDP 不含有等式的约束，但是具有一个 LMI：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & x_1 \boldsymbol{A}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{A}_n \preceq \boldsymbol{B}
\end{aligned}
$$

其优化变量为 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，参数为 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_n \in \mathcal{S}^k$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$。

例 12

最大割问题的半定规划松弛 令 $G=<V,E>$ 是一个无向图，其中 V 是含有 n 个顶点的顶点集，E 表示边的集合。假定对于边 $(i,j)\in E$ 的权重为 w_{ij}。最大割问题是找到节点集合 V 的一个子集 U，使得 U 与它的补集 $\bar{U}$ 之间相连边的权重之和最大化。若令 $x_i=1$，$i\in U$ 和 $x_i=-1$，$i\in\bar{U}$，则可得如下整数规划

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \frac{1}{2}\sum_{i<j}(1-x_ix_j)w_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & x_i\in\{-1,1\},\ i=1,2,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

显然，只有 x_i 与 x_j 不相等时，即分别在集合 U 和 $\bar{U}$ 中，目标函数中 w_{ij} 的系数非零。该问题很难在多项式时间内找到它的最优解。接下来探讨如何将其松弛成一个半定规划问题。

（续）令 $\boldsymbol{W}$ 表示无向图的邻接矩阵，$\boldsymbol{D}$ 表示该图的度矩阵，并定义 $\boldsymbol{A}=-\frac{1}{4}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})$ 为图的拉普拉斯矩阵的 $-\frac{1}{4}$ 倍，则问题(1)可以等价地写为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & x_i^2=1,\ i=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

（续）现在令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$，注意到约束条件 $x_i^2=1$。利用矩阵形式，我们可将最大割问题化为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \rangle \\
\text{s.t.} \quad & X_{ii}=1,\ i=1,2,\cdots,n, \\
& \boldsymbol{X} \succeq 0, \\
& \operatorname{rank}(\boldsymbol{X})=1.
\end{aligned} \tag{3}
$$

（续）容易验证问题(2)与(3)是等价的。现在将问题(3)的约束 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{X})=1$ 去掉，那么便得到最大割的半定规划松弛形式

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{X} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & X_{ii} = 1,\ \ i = 1, 2, \cdots, n, \\ & \boldsymbol{X} \succeq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

需要声明的是问题(4)与原问题并不等价，但确实能得到一个较好的近似解。

本讲小结

凸优化

- 凸优化的概念
- 凸优化的一些等价转换
- 凸优化的全局最优性

典型的凸优化问题

- 线性规划
- 二次规划
- 二次约束二次规划
- $\cdots$

我们已经了解凸优化相关的许多概念。在实际问题中，也经常遇到凸优化问题。那么怎么去求解凸优化问题呢？这就是接下来要介绍的内容。