第二章 向量和矩阵基础

第 5 讲 矩阵的基本特征

黄定江

DaSE @ ECNU

djhuang@dase.ecnu.edu.cn

1. 5.1 行列式
2. 5.2 迹和二次型
3. 5.3 特征值与特征向量

5.1.1 二阶行列式

考虑一个二阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

我们将其作用在

$\boldsymbol{x}^{(1)} = (0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}^{(2)} = (0,0)^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{x}^{(3)} = (1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}^{(4)} = (1,0)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(1)} = (a_{12}, a_{22})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}^{(2)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(2)} = (0,0)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}^{(3)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(3)} = (a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{y}^{(4)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(4)} = (a_{11}, a_{21})^{\mathrm{T}}$$

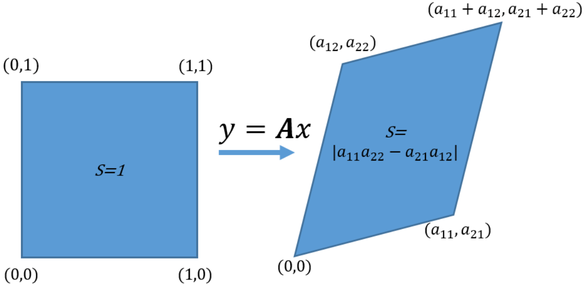


图 1: 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对正方形的作用效果。可以看到作用后的区域的面积为 $|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}|$

5.1.1 二阶行列式

定义 1

对于二阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，定义其**二阶行列式**为主对角元素乘积与副对角元素乘积的差，记为 $\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$，或者记为 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

例 1

给定一个方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

利用行列式重新表述，当二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，该方程组有唯一解，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

排列

定义 2

n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的**全排列**。一个排列中，如果一个大元素在小元素前，则称这两个数构成一个**逆序**。一个排列中存在的所有逆序的数目称为排列的**逆序数**。排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 如果逆序数为奇数，称这个排列为**奇排列**；如果逆序数为偶数，称这个排列为**偶排列**。

例 2

- $\tau(3,2,1,4)=3$，*3,2,1,4* 为奇排列
- $\tau(1,3,2,4)=1$，*1,3,2,4* 为奇排列
- $\tau(3,1,2,4)=2$，*3,1,2,4* 为偶排列

5.1.2 行列式

定义 3

n 阶行列式

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \qquad (2)$$

的代数和，其中 $j_1, \cdots, j_n$ 是 $1, \cdots, n$ 的一个排列，当 $j_1, \cdots, j_n$ 是偶排列时，项(2)前面带正号；当 $j_1, \cdots, j_n$ 是奇排列时，项(2)前面带负号，

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, \cdots, j_n} (-1)^{\tau(j_1, \cdots, j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} \qquad (3)$$

其中 $\sum_{j_1, j_2, \cdots, j_n}$ 表示对 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列求和。n 阶行列式由 $n!$ 项组成。常把行列式(1)简记为 $D = |\boldsymbol{A}| = |a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$。

行列式的函数和几何意义

- 一个 $n \times n$ 的方阵 A 的行列式是一个函数，将矩阵空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的矩阵 A 映射为 $\mathbb{R}$ 中的一个实数，记作 $\det(A)$ 或 $|A|$
- 3 维空间中，3 阶方阵的行列式对应于一个平行六面体的体积
- n 阶行列式实际上对应 n 维空间中图形的有向体积

行列式的性质

定义 4

n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在第 i 行和第 j 列元素，剩余的元素按原来的次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记成 M_{ij}。令 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

行列式的按行 (列) 展开

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{A}) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(M_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}\end{aligned}$$

n 阶行列式等于其任一行 (列) 元素与对应的代数余子式两两乘积之和。

例 3

计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

我们将这个行列式按列展开可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

再分别按行展开

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 - 2 - 2 + 2 = 4$$

克莱姆法则

定理 1

设线性方程组为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

我们记 $\boldsymbol{b}$ 为常数列，$|\boldsymbol{A}|_j$ 为用常数列 $\boldsymbol{b}$ 代替 $\boldsymbol{A}$ 中的第 j 列，其余列不变所得矩阵的行列式。则若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则线性方程组有唯一解，且

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{|\boldsymbol{A}|_1}{|\boldsymbol{A}|}, \boldsymbol{x}_2 = \frac{|\boldsymbol{A}|_2}{|\boldsymbol{A}|}, \ldots, \boldsymbol{x}_n = \frac{|\boldsymbol{A}|_n}{|\boldsymbol{A}|}$$

这一结论，我们称为**克莱姆法则**。

行列式的性质

性质 1

交换矩阵相邻两行（或两列）改变矩阵行列式的符号。

性质 2

交换矩阵两行（或两列）改变矩阵行列式的符号。

性质 3

行列式关于矩阵的每行 (或每列) 是线性的。

对于列的情况是

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & k_1 a_{1k} + k_2 b_{1k} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & k_1 a_{2k} + k_2 b_{2k} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \dots & k_1 a_{nk} + k_2 b_{1k} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= k_1 \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+ k_2 \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & b_{1k} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & b_{2k} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \dots & b_{1k} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

性质 4

如果某一行 (列) 元素全为零，行列式为零.

推论 1

- 如果行列式有两行 (列) 相等，则行列式为零；
- 如果行列式中有一行 (列) 是另一行 (列)k 倍，则行列式为零；
- 如果将行列式的某一行 (列)k 倍加到另一行 (列)，则行列式的值不变。

定理 2

n 阶行列式任意一行 (列) 元素与另一行 (列) 相应元素的代数余子式的两两乘积之和等于零，即当 $i \neq k$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

行列式的性质

性质 5

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

- $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$
- $\det(a\boldsymbol{A}) = a^n \det(\boldsymbol{A})$
- $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$
- $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵当且仅当 $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$
- 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则 $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$

伴随矩阵

定义 5

矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，其中伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的第i行第j列元素是矩阵的第j行第i 列元素的代数余子式。

伴随矩阵

由定理2和伴随矩阵的定义：

定理 3

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}, \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$$

5.2.1 迹

定义 6

方阵 $A_{n\times n}$ 对角元素的和称为**迹**，记作 $\mathit{Tr}(A)=\sum_{i=0}^{n}a_{ii}$.

性质 6

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 的迹满足以下性质：

- $\mathit{Tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\mathit{Tr}(\boldsymbol{A})+\mathit{Tr}(\boldsymbol{B})$
- $\mathit{Tr}(\alpha\boldsymbol{A})=\alpha\mathit{Tr}(\boldsymbol{A}),\alpha\in\mathbb{R}$
- $\mathit{Tr}(\boldsymbol{I}_n)=n$
- $\mathit{Tr}(\boldsymbol{AB})=\mathit{Tr}(\boldsymbol{BA})$

性质 7

- 迹的循环置换不变性，即

$$Tr(\boldsymbol{ABC}) = Tr(\boldsymbol{CAB}) = Tr(\boldsymbol{BCA})$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{k\times l}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{l\times m}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$。

- 这个性质可以扩展到任意多矩阵的乘积即

$$Tr(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n) = Tr(\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{A}_1\cdots\boldsymbol{A}_{n-1}) = \cdots = Tr(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\cdots\boldsymbol{A}_1) \tag{4}$$

- 作为(4)的特例，对于两个非方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$：

$$Tr(\boldsymbol{AB}) = Tr(\boldsymbol{BA})$$

推论 2

相似矩阵的迹是相等的，因为

$$Tr(\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}) = Tr(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}) = Tr(\boldsymbol{A})$$

5.2.2 二次型

定义 7

一个系数在数域 $\mathbb{K}$ 上的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{5}$$

称为数域 $\mathbb{K}$ 上的n **元二次型**，简称**二次型**，当 $\mathbb{K}$ 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 时，分别称为**实二次型**或**复二次型**。

5.2.2 二次型

定义 8

对称矩阵是转置和自己相等的矩阵，即

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

二次型（5）的系数排成的对称矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为所给**二次型的矩阵**，其中 $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, 2, \cdots, n$，若令 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，则所给的二次型可表示为：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = Tr(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$$

二次型之间的变换

如果对 $\boldsymbol{x}$ 做可逆的线性变换，即 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$，那么 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$。通过线性变换，我们把二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为新的二次型 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，显然，新的二次型矩阵为 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，仍然是对称矩阵。

定义 9

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是合同矩阵），记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$。

合同矩阵的性质

性质 8

合同矩阵的性质：

- 反身性：$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{A}$
- 对称性：$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{A}$
- 传递性：$\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \simeq \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{C}$

同时满足反身性、对称性和传递性的关系叫做等价关系。等价矩阵、相似矩阵、合同矩阵都是矩阵的一种等价关系。

引理 1

对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的下列变换都是合同变换:

- 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 行，再交换其第 i 列和第 j 列;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以非零常数 k，再将其第 i 列乘以 k;
- 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行乘以 k 加到第 j 行，再将其第 i 列乘以 k 加到第 j 列。

引理 2

设 $\boldsymbol{A}$ 是属于 $\mathbb{K}$ 上的非零对称矩阵，则必存在非奇异矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 的第 1 行第 1 个元素不为零。

二次型合同于对角矩阵

定理 4

设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶对称阵，则必然存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵。即对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必然合同于对角矩阵。

证明.

当 $\boldsymbol{A}$ 为 1 阶矩阵时，结论显然成立。假设对 k 阶矩阵，结论成立。对 $k+1$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，

$$\boldsymbol{A} \overset{\text{由引理 2}}{\simeq} \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{k+1,1} & \cdots & a'_{k+1,k+1} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}\text{ 合同于左上角元 } a'_{11}\neq 0 \text{ 的矩阵}} \overset{\text{由引理 1}}{\simeq} \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{第 2 行减去第 1 行的 } a'_{12}/a'_{11} \text{ 倍，} \\ \text{第 2 列减去第 1 列的 } a'_{12}/a'_{11} \text{ 倍 } \cdots}} \overset{\text{由假设}}{\simeq} \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{11} & \mathbf{0}_{1\times k} \\ \mathbf{0}_{k\times 1} & \boldsymbol{\Lambda}_{k\times k} \end{pmatrix}}_{k\text{ 阶子矩阵合同于对角矩阵}}$$

标准型

定理 5

数域 $\mathbb{K}$ 上任意一个二次型都可经过非退化的线性替换化为平方和

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$$

的形式，它称为所给二次型的**标准形**。

用初等变换法可以将二次型化为标准形。设二次型 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，作初等变换

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{对 }\boldsymbol{I}\text{ 只作其中的初等列变换}]{\text{对 }\boldsymbol{A}\text{ 作成对的初等行、列变换}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵 $\boldsymbol{D}=[d_1,d_2,\cdots,d_n]$，$\boldsymbol{C}$ 是非退化的线性替换矩阵，此时，$f=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$。

标准型

例 4

用初等变换法化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 - 3x_2x_3$ 为标准形。

解

$f(x_1, x_2, x_3)$ 的二次型矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1/2 & 3 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

标准型

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 3 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + 3y_3, \\ x_2 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 - y_3, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

由此得 $f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 + 3y_3^2$

二次型分类

定义 10

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为 n 元实二次型，若对任一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 都有

- $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0 (< 0)$，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**正定二次型（负定二次型）**，此时称 $\boldsymbol{A}$ 为**正定矩阵（负定矩阵）**。
- $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \geq 0 (\leq 0)$，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**正半定二次型（负半定二次型）**，此时称 $\boldsymbol{A}$ 为**正半定矩阵（负半定矩阵）**。
- 若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 既不是正半定的，又不是负半定的，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**不定二次型**。

正定二次型（负定二次型）必是正半定二次型（负半定二次型）。

例 5

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

是正定型，

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$$

是负定型。正定型最小值为 0，负定型最大值为 0。

利用合同矩阵判断正定性

由于一个二次型矩阵合同于对角矩阵，存在线性变换使得：

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全部为正，那么对任意不为零向量的 $\boldsymbol{x}$，$f(\boldsymbol{x}) > 0$ 恒成立；
如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 全部为负，那么对任意不为零向量的 $\boldsymbol{x}$，$f(\boldsymbol{x}) < 0$ 恒成立。

5.3.1 矩阵的特征系

- 任何一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 代表一个线性映射。如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，则它是一个线性变换
- 线性变换包含了旋转和拉伸变换等，对于拉伸变换：假设有向量 $\boldsymbol{\mu}$ 作为线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的输入时，所产生的输出与输入只相差一个比例因子 λ，即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} = \lambda\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0} \tag{7}$$

- 意味着输入向量在线性变换下能够保持方向不变，所以 $\boldsymbol{\mu}$ 刻画了在线性变换中固定方向的向量特征，而 λ 则可视为线性变换对向量 $\boldsymbol{\mu}$ 方向上的固定增益

5.3.1 矩阵的特征系

定义 11

给定 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果存在数 λ 和非零向量 $\boldsymbol{x}$，满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，那么 λ 称为矩阵的**特征值**，$\boldsymbol{x}$ 称为 λ 对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征向量**。

若 $\boldsymbol{x}$ 是特征向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则对 $k\neq 0$，$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})=\lambda(k\boldsymbol{x})$，$k\boldsymbol{x}$ 也是特征向量。因此方程：

$$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

有无穷多解。需满足 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$。

定义 12

$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 称为**特征矩阵**；行列式 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ 为 λ 的 n 次多项式，称为**特征多项式**；称方程 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$ 为**特征方程**；特征方程的解为**特征根**，特征根也就是所求的特征值。

5.3.1 矩阵的特征系

定义 13

线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的同一个特征值 λ_i 对应的特征向量构成的线性子空间，称为特征子空间 (*eigenspace*)，记为 $V_\lambda(\boldsymbol{A})$。

定义 14

上述定义的概念：特征值、特征向量、特征多项式、特征方程、特征根、特征子空间统称为**矩阵的特征系**。

定义 15

特征值的集合称为**矩阵的谱**，记为 $\lambda(\boldsymbol{A})$；矩阵的谱的绝对值的最大值 $r = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\}$ 叫做**矩阵谱半径**。

5.3.1 矩阵的特征系

例 6

根据定义求矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征值和特征向量。

注记 1：例 6 要重新组织重新录。按照 MML 书的 Example4.4 的形式来组织。这个例子主要要讲特征值、特征向量和特征空间的计算。例子结尾再加一段 MML102 页的两个 Remark（特征值和特征空间）

注记 2：在这个例子结尾后面再加一句：一个矩阵 A 和它的转置 A^T 拥有相同的特征值，但不一定拥有相同的特征向量。

5.3.1 矩阵的特征系

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$（二重特征值），$\lambda_3 = 5$。

5.3.1 矩阵的特征系

对 $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，由 $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，得到方程

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

它有无穷多个解。

- 设 $x_2 = 1, x_3 = 0$，求出解为 $\boldsymbol{x} = [-1, 1, 0]^{\mathrm{T}}$，记为 $\boldsymbol{x}_1$，
- 设 $x_2 = 0, x_3 = 1$，求出解为 $\boldsymbol{x} = [-1, 0, 1]^{\mathrm{T}}$，记为 $\boldsymbol{x}_2$，
    - 则 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 是属于特征值 -1 的两个线性无关的特征向量，属于 -1 的全部特征向量为 $k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$。

同理，$\lambda_3 = 5$ 的一个特征向量为 $\boldsymbol{x}_3 = [1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$，属于 5 的全部特征向量为 $k\boldsymbol{x}_3, k \in \mathbb{R}$。

接下来两页为补录内容，可以从上面例 6 中有二重特征值 -1，来说明，我们需要引入概念来刻画重数。

定义 16

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有 m 个（$m \leq n$）不同的特征值为 $\tilde{\lambda}_1, \cdots, \tilde{\lambda}_m$，若 $\tilde{\lambda}_j$ 是特征方程的 n_j 重根，则称 n_j 为 $\tilde{\lambda}_j$ 的代数重数。

定义 17

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有 m 个（$m \leq n$）不同的特征值为 $\tilde{\lambda}_1, \cdots, \tilde{\lambda}_m$，称 $\tilde{\lambda}_j$ 对应的特征子空间的维数为 $\tilde{\lambda}_j$ 的几何重数。

注

一个矩阵的特征值的几何重数至少为 1，因为根据定义，每个特征值都至少具有一个关联的特征向量。特征值的几何重数不能超过其代数重数。

例 7

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ 有两重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$。所以他的代数重数为 *2*。但是他对应的线性无关的特征向量只有一个 $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，所以他的几何重数为 *1*.

5.3.2 矩阵特征值与特征向量的性质

性质 9

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量，则 $c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量。

性质 10

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量，则

- $k\lambda$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值 (k 为任意常数);
- λ^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值 (m 为正整数);
- 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 λ^{-1} 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值。

5.3.2 矩阵特征值与特征向量的性质

性质 11

设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量，则 $f(\lambda)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值，其中 f 是一多项式。

证明.

设 $f(\boldsymbol{A}) = c_n\boldsymbol{A}^n + c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + c_1\boldsymbol{A} + c_0\boldsymbol{I}$。$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$，得

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} &= (c_n\boldsymbol{A}^n + c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + c_1\boldsymbol{A} + c_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x} \\
&= c_n\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x} + c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x} + \cdots + c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + c_0\boldsymbol{I}\boldsymbol{x} \\
&= c_n\lambda^n\boldsymbol{x} + c_{n-1}\lambda^{n-1}\boldsymbol{x} + \cdots + c_1\lambda\boldsymbol{x} + c_0\boldsymbol{x} \\
&= (c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0)\boldsymbol{x} = f(\lambda)\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

证毕 $\square$

5.3.2 矩阵特征值与特征向量的性质

性质 12

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的和为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的积为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式。

证明.

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则有

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$$

根据行列式展开规则和根与系数关系：

$$c_{n-1} = -(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}) = -(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

$$c_0 = (-1)^n \det(\boldsymbol{A}) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

证毕 □

5.3.2 矩阵特征值与特征向量的性质

性质 13

若 $\boldsymbol{A}$ 相似 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$

- 相似变换不改变矩阵的特征值，即若 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，λ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值，
- 相似变换改变矩阵的特征向量，若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量，
- 相似矩阵有相同的特征方程，反之不成立。

注记：这一页要补录。

定理 6

如果矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 与对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$。则 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ 线性无关。

该定理表明，属于不同特征值的特征向量构成一个线性无关的集合。

5.3.3 矩阵的对角化和特征分解

下面我们将关注如何将一个矩阵变成对角的形式，这是第 4 讲基变换和特征值的一个应用。对角矩阵具有如下形式

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$$

对角矩阵的行列式、幂和逆：

- 行列式是他对角元素的乘积
- 幂矩阵 $\boldsymbol{D}^k$ 就是将每一个对角元素变成 k 的幂次
- 逆 $\boldsymbol{D}^{-1}$ 就是将对角元素变成倒数

我们知道如果两个矩阵 $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{A}$ 相似，则存在一个可逆矩阵使得 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成立。更具体地，我们可以让 $\boldsymbol{A}$ 相似于一个对角矩阵 $\boldsymbol{D}$，而且 $\boldsymbol{D}$ 的对角线上包含了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则有如下对角化的定义：

定义 18

一个矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是可对角化的，如果它相似于一个对角矩阵，即存在一个可逆矩阵 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 成立。

接下来，我们将看到将一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化是一种在不同基底下表达相同线性映射的方式。特别地，我们将通过找到由 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量构成的一个新基底把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化。

我们首先考虑如何计算 $\boldsymbol{P}$ 来对角化矩阵 $\boldsymbol{A}$。令 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是标量，$\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组向量；我们接着令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$，$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对角矩阵，并且其对角元为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$；然后我们将证明

$$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PD}$$

当且仅当 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值而 $\boldsymbol{p}_i$ 是对应的特征向量。

- 根据上面的假设，有下面等式成立

$$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n)$$

以及

$$\boldsymbol{PD} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \ldots, \lambda_n\boldsymbol{p}_n)$$

- 因为要使 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PD}$ 成立，这就意味着有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 &= \lambda_1 \boldsymbol{p}_1 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n &= \lambda_n \boldsymbol{p}_n \end{aligned},$$

  反之亦成立。
- 由此可知，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 必须由特征列构成。但是这并不足以让我们知道我们是否可以对角化 $\boldsymbol{A}$，因为在我们的定义之中 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的。我们知道对于方阵，当且仅当 $\boldsymbol{P}$ 是满秩的，则它是可逆的。这意味着特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ 线性无关的时候，$\boldsymbol{P}$ 才是可逆的。
- 另外我们根据结论：方程 $\boldsymbol{A}$ 若有 n 个不同的特征值及其对应的 n 个特征向量，则这 n 个特征向量线性无关。

我们有如下矩阵特征分解/对角化定理：

定理 7

一个矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 可以分解为

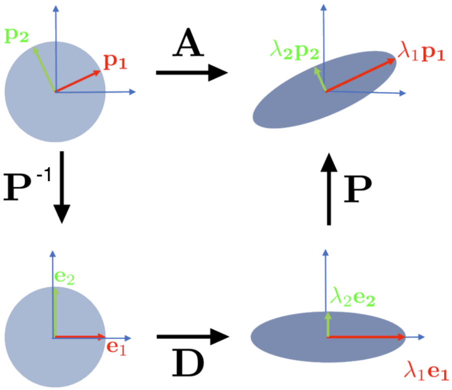
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 是由特征向量构成的可逆矩阵，$\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵且对角元是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量。

特征分解的几何意义

我们可以如下解释矩阵的特征分解：

- 令 $\boldsymbol{A}$ 为标准基下的线性映射的变换矩阵。
- $\boldsymbol{P}^{-1}$ 将标准基变换到到特征基下。
- 这特征向量 $\boldsymbol{p}_i$（右图红色和绿色箭头）映射到坐标轴轴 $\boldsymbol{e}_i$ 上。
- 然后对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 通过特征值沿这些轴缩放特征向量，$\lambda_i \boldsymbol{e}_i$。
- 最后，$\boldsymbol{P}$ 将这些缩放后的矢量变换回标准基下。



求解方阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的特征分解步骤

- 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$。即求特征方程
$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$$
的 n 个根，并根据这些根是否都是不同的来判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化。
- 求特征值对应的 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$。即求解方程组
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i, i = 1, \ldots, n$$
若不能找到 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$，则说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不能进行特征分解。
- 记矩阵 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$ 并计算 $\boldsymbol{P}^{-1}$。
- 最终得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征分解为
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}$$

例 8

计算 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 4\end{pmatrix}$ 的特征分解

解

首先计算特征值

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=(\lambda-4)(\lambda-2)=0$$

所以特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=2$ 对应的特征向量通过

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=4\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2=2\boldsymbol{p}_2,$$

得到，所以有

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 有 2 个不同的特征值，所以一定可以进行对角化。

然后将特征向量合并起来得到 $\boldsymbol{P}$，并计算 $\boldsymbol{P}^{-1}$，有

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以我们得到了

$$\boldsymbol{AP} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{PD}$$

因此

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$$

即

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的特征值分解具有许多便利的属性：

- 我们可以通过对角矩阵良好的性质来计算矩阵的幂 $\boldsymbol{A}^k$，即
$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^k\boldsymbol{P}^{-1}$$
- 对角矩阵的另一个特性是，它们可以用于解耦变量。这在概率论中解释随机变量非常重要，例如我们在降维中碰到的高斯分布等。
- 特征分解需要具有 n 个不同特征值的方阵才能做，对于不具有 n 个不同特征值的方阵则不存在特征分解。

定义 19

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，如果他没有 n 个线性无关的特征向量或特征子空间的维数之和小于 n，则我们则称其为**秩亏矩阵**。

注

- 秩亏矩阵一定少于 n 个不同的特征值，因为不同特征值对应的特征向量是线性无关的。具体而言，秩亏矩阵至少有一个代数重数为 $m > 1$ 的特征值 λ，其有少于 m 个对应的线性无关的特征向量。
- 秩亏矩阵是不可对角化的，也即不存在特征分解，但是可以通过若当标准型 (Jordan Noraml Form) 来对其做若当分解。

注

- 对于一些更特殊的方阵，例如对称矩阵的特征分解，则会输出更强的分解结果，也即 $\boldsymbol{P}$ 还是正交矩阵，我们将在第 4 章对称矩阵特征分解部分会进一步介绍。
- 对于非对称方阵，我们则不能保证可以将它们转换为对角线形式。但是如果能够对一般矩阵执行分解将很有用，我们将在第 4 章介绍一种更通用的矩阵分解技术，即奇异值分解，来实现一般长方形矩阵的分解。

矩阵的基本特征小结

以矩阵作为变量的函数

- 秩
- 行列式
- 迹
- $\cdots$

矩阵的基本特征

- 特征值
- 特征向量
- 特征空间
- 谱半径
- $\cdots$

如何利用以矩阵作为变量的函数来建模？如何计算大规模矩阵的特征值等？