数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 10 次作业

教师：黄定江
助教：陈诺、刘文辉

2022 年 12 月 10 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档**。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号 _ 姓名**"。命名示例：10175501112_ 陈诺。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：**第 10 次作业提交传送门**，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 10 次作业

提交截至时间：**2022/12/19 周一 12:00（中午）**

理论部分

习题 1. 考虑以下概率图模型

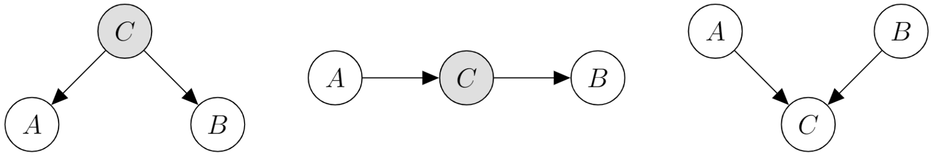

图 1: 概率图模型

i) 对左图, 证明 $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$;（即 A 和 B 在 C 的条件下独立）
ii) 对中图, 证明 $A \perp\!\!\!\perp B \mid C$;
iii) 对右图, 证明 $A \perp\!\!\!\perp B \mid \emptyset$.

解. *i)*

$$p(A, B \mid C) = \frac{p(A, B, C)}{p(C)} = \frac{p(A \mid C)p(B \mid C)p(C)}{p(C)} = p(A \mid C)p(B \mid C)$$

ii)

$$\begin{aligned} p(A, B \mid C) &= \frac{p(A, B, C)}{p(C)} = \frac{1}{p(C)} p(B \mid C)p(C \mid A)p(A) \\ &= p(B \mid C)\frac{p(C \mid A)p(A)}{p(C)} = p(B \mid C)p(A \mid C), \end{aligned}$$

iii)

$$p(A, B) = \sum_C p(A, B, C) = \sum_C p(C \mid A, B)p(A)p(B) = p(A)p(B),$$

习题 2. 下面的函数哪些是凸函数? 请说明理由。

1. $f(x) = e^x + 1 \,, x \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \max(\|Ax + b\|_2, \|x^T x\|_1), A \in \mathbb{R}^{m \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$
3. $f(x) = -\cos x, x \in [-\pi/2, \pi/2]$

解. 1. $f''(x) = e^x > 0$ 所以是凸函数
2. 因为 $\|\|_2, \|\|_1$ 是凸函数，所以 $\|Ax + b\|_2, \|x^T x\|_1$ 是凸函数，max 是保凸运算，所以 $f(x)$ 是凸函数。
3. $f''(x) = \cos x > 0 x \in [-\pi/2, \pi/2]$ 所以是凸函数

习题 3. 证明: *Gauss* 概率密度函数的累积分布函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$ 是对数-凹函数. 即 $\log(\Phi(x))$ 是凹函数。

解. 由题意得,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

$$\Phi^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\Phi^{''}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(-x)$$

$$(\Phi^{'}(x))^2 = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2}$$

$$\Phi(x) \log \Phi^{''}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \cdot e^{-x^2/2}(-x)$$

当 $x \geq 0$ 时, $(\Phi^{'}(x))^2 \geq 0 \geq \Phi(x)\Phi^{''}(x)$.
当 $x < 0$ 时, 由于 $\frac{u^2}{2}$ 是凸函数, 则

$$\frac{u^2}{2} \geq \frac{x^2}{2} + (u-x)x \geq xu - \frac{x^2}{2}$$

所以,

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \leq \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{x^2}{2} - xu} du$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{e^{-xu}}{-x} \Big|_{u=-\infty}^{x}$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{e^{-x^2}}{-x}$$

因此 $\Phi(x)\Phi^{''}(x) \leq \frac{1}{2\pi} e^{-x^2} = (\Phi^{'}(x))^2$, $\Phi(x)$ 是对数凹函数.

习题 4. 计算函数 $f(x)$ 的共轭函数，以及共轭函数的定义域。

(1) $f(x) = -\log x$

(2) $f(x) = e^x$

解. *(1)* $f(x) = -\log x$，定义域为 $dom f = x|x > 0$。当 $y < 0$ 时，函数 $xy + \log x$ 无上界，当 $y \leq 0$ 时，在 $x = -1/y$ 处函数达到最大值。因此，定义域为 $dom f^* = \{y|y < 0\}$，共轭函数为 $f^*(y) = -\log(-y) - 1(y < 0)$

(2) $f(x) = e^x$。当 $y < 0$ 时，函数 $xy - e^x$ 无界。当 $y > 0$ 时，函数 $xy - e^x$ 在 $x = \log y$ 处达到最大值。因此，$f^*(y) = y \log y - y$。当 $y = 0$ 时，$f^*(y) = \sup_x -e^x = 0$，综上，$dom f^* = \{y|y \geq 0\}$，$f^*(y) = y \log y - y$。*(*规定 $0 \log 0 = 0$*)* 。