数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 5 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 5 月 8 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本或笔记本**（建议统一使用一般的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。另外，若作业包含代码部分，**请将代码文件压缩后**上传到**第 5 次作业代码传送门**。代码压缩文件命名格式："**hw5_ 代码 _ 学号 _ 姓名**"，命名示例：hw5_ 代码 _52215903014_ 刘文辉。其中，"hw5_ 代码" 表示第 5 次作业代码。
2. 作业书写说明：
   (a) 可以讨论，禁止抄袭！
   (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名**和**学号**
   (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如"第 5 次作业"；
   (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
   (e) 题与题之间**请空一行**；
   (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 5 次作业

提交截至时间：**2022/03/18 下周五 20:00（晚上）**

理论部分 (范数与二次型补充题)

习题 1. 请证明：对任意 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，由

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty} := \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} |a_{ij}|$$

定义的 $\|\cdot\|_{m_\infty}$ 是 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 上的（广义）矩阵范数。

解. 非负性：显然

$$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty} := \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} |a_{ij}| \ge 0,$$

而且仅当 $\boldsymbol{A} = 0$ 时，$\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty} = 0$. 齐次性：

$$\|c\cdot \boldsymbol{A}\|_{m_\infty} := \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} |c\cdot a_{ij}| = c \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} |a_{ij}| = c\,\|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty}$$

三角不等式：考虑 $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_{m_\infty}$，因为

$$|a_{ij}+b_{ij}| \le |a_{ij}| + |b_{ij}| \le \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} |a_{ij}| + \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} |b_{ij}|$$

所以

$$\max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} |a_{ij}+b_{ij}| \le \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} |a_{ij}| + \max_{1\le i\le m, 1\le j\le n} |b_{ij}|$$

即 $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|_{m_\infty} \le \|\boldsymbol{A}\|_{m_\infty} + \|\boldsymbol{B}\|_{m_\infty}$

习题 2. 求下面矩阵的 *1*-范数、*2*-范数和无穷范数：

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解. $A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\lambda_{max}(A_1^T A_1) = 3 + \sqrt{5}$

$\|A_1\|_1 = 2, \|A_1\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}, \|A_1\|_\infty = 3$

$A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\|A_2\|_1 = 2, \|A_2\|_2 = \sqrt{3+\sqrt{5}}, \|A_2\|_\infty = 3$

习题 3. 阅读完以下补充材料即可：

将一个带有交叉项的二次型转变成没有交叉项的二次型等同于将对称矩阵合同变换为一个对角矩阵。它的几何意义，可以看作是将二次方程所对应的几何图形标准化的过程。例如：在平面上，即椭圆、抛物线和双曲线等二次曲线的标准化过程；在空间上，即二次曲面的标准化过程。下面通过主轴定理及其几何意义窥见一斑。

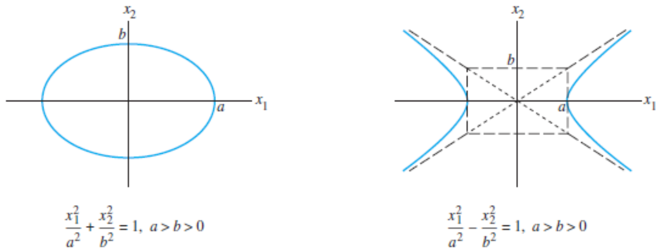

图 1: 对角矩阵时对应标准二次曲线

- **主轴定理**

定理 0.0.1. 令 A 是任意一个 $n\times n$ 的对称矩阵，那么存在一个正交变换 $x=Py$ 使得二次型 x^TAx 转变为 y^TDy，其中 $D=P^TAP$ 是对角矩阵。

定理中 P 的列称为二次型 x^TAx 的主轴。向量 y 是向量 x 在这些主轴下的坐标。

- **主轴定理的几何意义**

假设 $Q(x)=x^TAx$，其中 $x\in\mathbb{R}^2$，A 是 2×2 可逆对称矩阵，c 是常数。可以证明 $\mathbb{R}^2$ 中所有满足 $x^TAx=c$ 的 x 的集合可能为椭圆（圆）、双曲线、两相交直线、点或者空集。如果 A 是对角矩阵，那么二次曲线将是标准的二次曲线，如图*1*所示。如果 A 不是对角矩阵，那么二次曲线将是非标准的二次曲线。图*2*是二次方程为 $5x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2=48$ 的椭圆曲线。显然，它不是一个标准的二次曲线。下面，我们通过寻找该椭圆的主轴将其转化为标准形式，从几何的角度验证主轴定理。

易求得该椭圆方程对应二次型的矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}.$$

可计算出其特征值为 *3* 和 *7*，对应的特征向量分别为

$$v_1=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

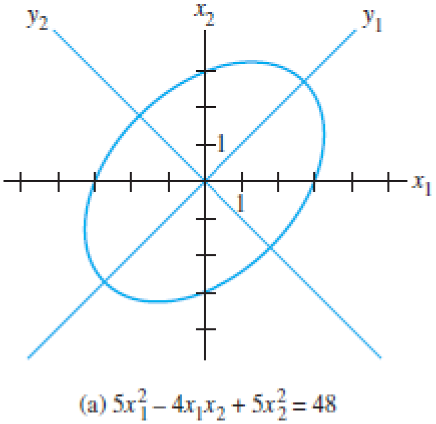

图 2: 非对角矩阵对应非标准二次曲线

令 $P = [v_1\ v_2]$，则从图形中可以看出 P 的列向量，正好对应该椭圆主轴所在的方向。现将 $x = Py$ 代入二次型，可得

$$y^T D y = 3y_1^2 + 7y_2^2.$$

即可得到椭圆的标准方程形式。

实践部分

习题 4. 复现 *Lec6* 例 *13* 的结果。其中负例为 $(1.5, 2), (1.7, 1.5), (2, 2), (1.5, 2.5)$，正例为 $(1, 2), (0.3, 0.3), (2, 1), (1, 1)$。分别采用欧式距离和曼哈顿距离两种距离度量方式。

解. 略