第十章 优化基础

第 29 讲 凸集

黄定江

DaSE @ ECNU

djhuang@dase.ecnu.edu.cn

29.1.1 直线与线段

定义 1

对于 R^n 中的两个点 $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$，形如

$$\boldsymbol{y} = \theta \boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2,\ \theta \in \mathbb{R}$$

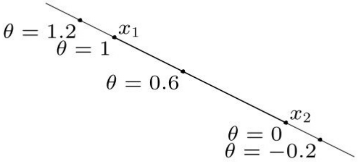
的点形成了过点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的**直线**。当 $0 \leq \theta \leq 1$ 时，这样的点构成了连接点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的**线段**。

直线与线段

$\boldsymbol{y}$ 的表示形式

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_2 + \theta(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$$

给出了另一种解释：直线上的点 $\boldsymbol{y}$ 是基点 $\boldsymbol{x}_2$(对应 $\theta = 0$) 和方向 $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$(由 $\boldsymbol{x}_2$ 指向 $\boldsymbol{x}_1$) 乘以参数 θ 的和。



当 θ 由 0 增加到 1，点 $\boldsymbol{y}$ 相应地由 $\boldsymbol{x}_2$ 移动到 $\boldsymbol{x}_1$。如果 $\theta > 1$，点 $\boldsymbol{y}$ 在超越了 $\boldsymbol{x}_1$ 的直线上。

29.1.2 仿射集

定义 2

如果通过集合 $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ 中任意两点的直线仍然在集合 $\mathbb{C}$ 中，则称 $\mathbb{C}$ 为**仿射集**。即：

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \theta \boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{C}, \ \forall \theta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

可以归纳得出:

- 一个仿射集包含其中任意点的仿射组合.

仿射集

- 如果 $\mathbb{C}$ 是一个仿射集并且 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}$, 则集合

$$\mathbb{V} = \mathbb{C} - \boldsymbol{x}_0 = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 | \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}\}$$

  是一个子空间，即关于加法和数乘是封闭的。

- 因此，仿射集 $\mathbb{C}$ 可以表示为

$$\mathbb{C} = \mathbb{V} + \boldsymbol{x}_0 = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{x}_0 | \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}\}$$

  即一个子空间加上一个偏移。与仿射集 $\mathbb{C}$ 相关联的子空间 $\mathbb{V}$ 与 $\boldsymbol{x}_0$ 的选取无关，所以 $\boldsymbol{x}_0$ 可以是 $\mathbb{C}$ 中的任意一点。我们定义仿射集 $\mathbb{C}$ 的维数为子空间 $\mathbb{V} = \mathbb{C} - \boldsymbol{x}_0$ 的维数，其中 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\mathbb{C}$ 中的任意元素。

仿射包

定义 3

我们称由集合 $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ 中的点的所有仿射组合组成的集合为 $\mathbb{C}$ 的**仿射包**，记为 *aff* $\mathbb{C}$：

$$\mathit{aff}\,\mathbb{C} = \{\theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \theta_k \boldsymbol{x}_k | \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{C}, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$$

仿射包

仿射包是包含 $\mathbb{C}$ 的最小的仿射集合，即 aff$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{S}$。下图展示了 $\mathbb{R}^3$ 中圆盘 S 的仿射包，为一个平面。

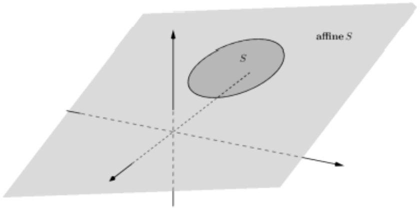


图 1

29.1.3 凸集

定义 4

如果连接集合 $\mathbb{C}$ 中任意两点的线段都在 $\mathbb{C}$ 内，则称 $\mathbb{C}$ 为**凸集**，即

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow \theta \boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{C}, \ \forall 0 \leq \theta \leq 1.$$

从仿射集的定义中可以看出仿射集是凸集。

凸集

例 1

下图显示了 $\mathbb{R}^2$ 空间中一些简单的凸和非凸集合。

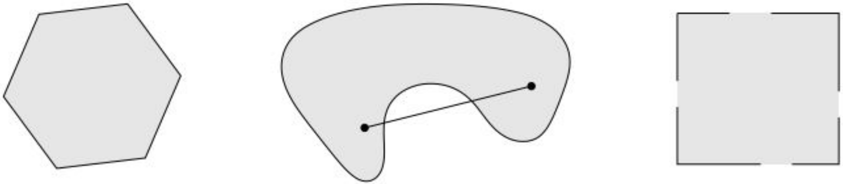


图 2: 左：包含边界的六边形是凸的。中：肾形集合不是凸的，因为图中所示集合中两点间的线段不为集合所包含。右：仅包含部分边界的正方形不是凸的。

凸组合和凸包

定义 5

形如

$$\boldsymbol{x}=\theta_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\theta_k\boldsymbol{x}_k,\ 1=\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k,\theta_i\geq 0,i=1,2,\cdots,k$$

的点称为 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ 的**凸组合**。集合 $\mathbb{C}$ 中点所有可能的凸组合构成的集合称作 $\mathbb{C}$ 的**凸包**，记作***conv*** $\mathbb{C}$。

凸组合和凸包

凸包是包含 $\mathbb{C}$ 的最小的凸集。即 conv $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{B}$。下图显示了凸包的定义。

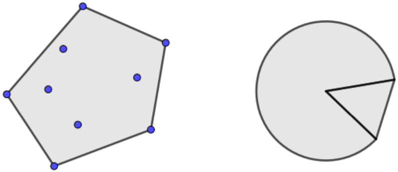


图 3

凸锥和锥组合

定义 6

如果对于任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}$ 和 $\theta \geq 0$ 都有 $\theta \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}$, 我们称集合 $\mathbb{C}$ 是**锥**。
形如 $\boldsymbol{x} = \theta_1 \boldsymbol{x}_1 + \theta_2 \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{C}, \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0$ 的点称为点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 的**锥组合**。
若集合 $\mathbb{C}$ 中任意点的锥组合都在 $\mathbb{C}$ 中，则称 $\mathbb{C}$ 为**凸锥**。

在几何上，具有此类形式的点构成了二维的扇形，这个扇形以 0 为定点，边通过 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，如下图所示：

29.1.4 一些简单的仿射集与凸集

首先介绍一些简单的例子。

- 空集，任意一个点 (即单点集)$\{\boldsymbol{x}_0\}$ 、全空间 $\mathbb{R}^n$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的仿射 (自然也是凸的) 子集。
- 任意直线是仿射的。如果直线通过零点，则是子空间，因此，也是凸锥。
- 一条线段是凸的，但不是仿射的 (除非退化为一个点)。
- 一条射线，即具有形式 $\{\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{v}|\theta\geq 0\}, \boldsymbol{v}\neq\mathbf{0}$ 的集合，是凸的，但不是仿射的。如果射线的基点 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\mathbf{0}$，则它是凸锥。
- 任意子空间是仿射的、凸锥 (自然是凸的)。

29.1.5 超平面与半空间

定义 7

任取非零向量 $\boldsymbol{a}$，形如 $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}=b\}$ 的集合称为**超平面**，
形如 $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}\leq b\}$ 的集合称为**半空间**。
其中 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$ 是对应的超平面和半空间的法向量，且 $b\in\mathbb{R}$。

- 解析地，超平面是关于 x 的非平凡线性方程的解空间 (因此是一个仿射集合)。
- 一个超平面将 $\mathbb{R}^n$ 分成两个半空间。
- 超平面是仿射集和凸集，半空间是凸集但不是仿射集。

超平面与半空间

超平面和半空间的几何解释如下图所示：

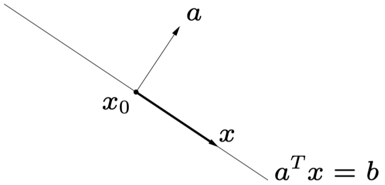


图 4: $\mathbb{R}^2$ 中由法向量 $\boldsymbol{a}$ 和超平面上一点 $\boldsymbol{x}_0$ 确定的超平面。对于超平面上任意一点 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$（如深色箭头所示）都垂直于 $\boldsymbol{a}$。

超平面与半空间

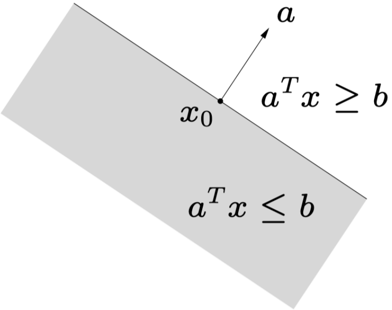


图 5: $\mathbb{R}^2$ 上由 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b$ 定义的超平面决定了两个半空间，由 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq b$ 决定的半空间（无阴影）是向 $\boldsymbol{a}$ 扩展的半空间，由 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq b$ 确定的半空间（阴影所示）向 $-\boldsymbol{a}$ 方向扩展。向量 $\boldsymbol{a}$ 是这个半空间向外的法向量。

29.1.6 Euclid 球

定义 8

球是空间中到某个点距离（或两者差的范数）小于某个常数的点的集合，并将

$$B(\boldsymbol{x}_c, r) = \{\boldsymbol{x} | \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c\|_2 \leq r\} = \{\boldsymbol{x}_c + r\boldsymbol{u} | \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq 1\}$$

称为中心为 $\boldsymbol{x}_c$，半径为 r 的 ***Euclid* 球**。

29.1.7 椭球

定义 9

形如

$$\{\boldsymbol{x} | (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c)^T \boldsymbol{P}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c) \leq 1\}$$

的集合称为**椭球**，其中 $\boldsymbol{P} \in \mathcal{S}_{++}^n$(即 $\boldsymbol{P}$ 对称正定)。椭球的另一种表示为

$$\{\boldsymbol{x}_c + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} | \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq 1\},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异的方阵。

29.1.8 范数球与范数锥

定义 10

设 $\|.\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的范数。称

$$\{\boldsymbol{x} | \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_c\| \leq r\}$$

为以 r 为半径，$\boldsymbol{x}_c$ 为球心的**范数球**。

定义 11

关于范数 $\|.\|$ 的**范数锥**是集合

$$C = \{(\boldsymbol{x}, t) | \|\boldsymbol{x}\| \leq t\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

顾名思义，它是一个凸锥。

29.1.9 多面体

定义 12

我们将满足线性等式和不等式组的点的集合称为**多面体**，即

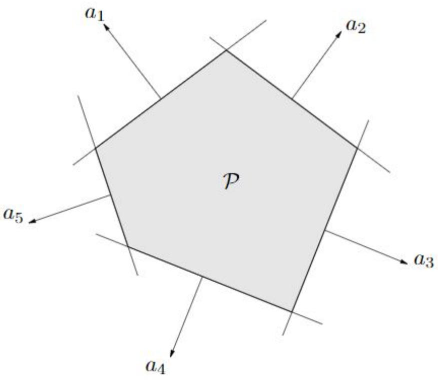
$$\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}\},$$

其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的每个分量均小于等于 $\boldsymbol{y}$ 的对应分量。

- 易得出多面体是有限个半空间和超平面的交集。
- 仿射集合、射线、线段和半空间都是多面体。
- 有界的多面体有时也称为多胞形。

多面体

下图显示了一个由五个半空间的交集定义的多面体。



29.1.10 半正定锥

- 我们用 S^n 表示对称 $n \times n$ 矩阵的集合，即

$$S^n = \{\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n \times n} | \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^T\}$$

  这是一个维数为 $n(n+1)/2$ 的向量空间。
- 我们用 S^n_+ 表示对称半正定矩阵的集合：

$$S^n_+ = \{\boldsymbol{X} \in S^n | \boldsymbol{X} \succeq 0\}$$

- 用 S^n_{++} 表示对称正定矩阵集合：

$$S^n_{++} = \{\boldsymbol{X} \in S^n_+ | \boldsymbol{X} \succ 0\}$$

半正定锥

容易证明集合 S_+^n 是一个凸锥，因此

定义 13

我们称

$$S_+^n = \{\boldsymbol{X} \in S^n | \boldsymbol{X} \succeq 0\}$$

为半正定锥。

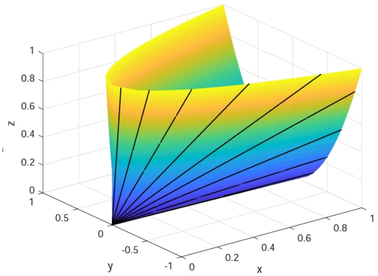


图 6: 二维半正定锥 S_+^2

保凸运算

判定一个集合为凸集的方式：

1. 利用定义

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in C, 0 \leq \theta \leq 1 \Rightarrow \theta \boldsymbol{x}_1 + (1-\theta)\boldsymbol{x}_2 \in C$$

2. 说明集合 C 可以由简单的凸集经过保凸运算后得到。
   本节下面将介绍一些常见的**保凸运算**：
   - 取交集
   - 仿射变换
   - 线性分式及透视函数

29.2.1 交集

定理 1

任意多个凸集的交为凸集，即若 $C_i, i \in \mathcal{L}$ 是凸集，则

$$\cap_{i\in\mathcal{L}} C_i$$

为凸集。这里 $\mathcal{L}$ 是任意指标集（不要求可列）。

交集

例 2

- 半正定锥 S_+^n 可以表示为，

$$\cap_{z\neq 0}\{\boldsymbol{X}\in S^n|\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}\geq 0\}.$$

对于任意 $\boldsymbol{z}\neq 0$，$\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}$ 是关于 $\boldsymbol{X}$ 的 (不恒等于零的) 线性函数，因此集合

$$\{\boldsymbol{X}\in S^n|\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{X}\boldsymbol{z}\geq 0\}$$

实际上就是 S^n 的半空间。由此可见，半正定锥是无穷个半空间的交集，因此是凸的.

29.2.2 凸集的和

- 两个集合的和可以定义为:

$$S_1 + S_2 = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} | \boldsymbol{x} \in S_1, \boldsymbol{y} \in S_2\}$$

如果 S_1 和 S_2 是凸集，那么，$S_1 + S_2$ 是凸的。

29.2.3 凸集的 Cartesian 乘积

- 可以看出，如果 S_1 和 S_2 是凸的，那么其直积或 Cartesian 乘积

$$S_1 \times S_2 = \{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) | \boldsymbol{x}_1 \in S_1, \boldsymbol{x}_2 \in S_2\}$$

也是凸集。

29.2.4 仿射变换

定理 2

设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是仿射变换，即 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，则

(1) 凸集在 f 下的像是凸集：

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \text{为凸集} \Rightarrow f(S) \overset{def}{=} \{f(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in S\} \text{为凸集};$$

(2) 凸集在 f 下的原像是凸集：

$$C \subseteq \mathbb{R}^m \text{为凸集} \Rightarrow f^{-1}(C) \overset{def}{=} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n | f(\boldsymbol{x}) \in C\} \text{为凸集}.$$

仿射变换

- 两个简单的例子是伸缩和平移。如果 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸集，$\alpha \in \mathbb{R}$ 并且 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$，那么，集合 αS 和 $S + \boldsymbol{a}$ 是凸的，其中

$$\alpha S = \{\alpha \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in S\}, \qquad S + \boldsymbol{a} = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} | \boldsymbol{x} \in S\}$$

- 一个凸集向它的某几个坐标的投影是凸的，即: 如果 $S \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 是凸集，那么

$$T = \{\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^m | (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in S \text{ 对于某些 } \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n\}$$

是凸集。

仿射变换

例 3

利用仿射变换保凸的性质，可以证明：

线性矩阵不等式的解集

$$\{\boldsymbol{x} | x_1 \boldsymbol{A}_1 + x_2 \boldsymbol{A}_2 + \cdots + x_m \boldsymbol{A}_m \preceq \boldsymbol{B}\}$$

是凸集，其中 $\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{B} \in S^n$。因为，它可以看作是一个仿射变换的原像

双曲锥

$$\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} \leq (\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x})^2,\ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geq 0\}$$

是凸集，其中 $\boldsymbol{P} \in S_+^n$。因为，它可以看作是 $\boldsymbol{x} \to (\boldsymbol{P}^{1/2}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x})$ 变换下的原像，而值域是凸锥。

29.2.5 透视函数

定义 14

我们定义 $P : \mathbf{dom}\, P \to \mathbb{R}^n, P(z, t) = z/t$ 为**透视函数**，其定义域为 $\mathbf{dom}\, P = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$。透视函数对向量进行伸缩，或称为规范化，使得最后一维分量为 1 并舍弃之。

透视函数

- 如果 $C \subseteq \textbf{dom}\, P$ 是凸集，那么它的像

$$P(C) = \{P(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in C\}$$

  也是凸集。

- 一个凸集在透视函数下的原象也是凸的: 如果 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为凸集，那么

$$P^{-1}(C) = \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | \boldsymbol{x}/t \in C, t > 0\}$$

  是凸集。

29.2.6 线性分式函数

- **线性分式函数**由透视函数和仿射函数复合而成。设 $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{m+1}$ 是仿射的，即

$$g(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{c}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}\\ d\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n},\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m,\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$ 并且 $d\in\mathbb{R}$。则由 $f=P\circ g$ 给出的函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

$$f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})/(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+d),\mathbf{dom}\,f=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+d>0\}$$

称为线性分式 (或投射) 函数。如果 $\boldsymbol{c}=\mathbf{0},d>0$。则 f 的定义域为 $\mathbb{R}^n$，并且 f 是仿射函数。因此，我们可以将仿射和透视函数视为特殊的线性分式函数。

线性分式函数

- 类似于透视函数，线性分式函数也是保凸的。
  如果 C 是凸集并且在 f 的定义域中 (即任意 $\boldsymbol{x} \in C$ 满足 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d > 0$) ，那么 C 的象 $f(C)$ 也是凸集。
  根据前述的结果可以直接得到这个结论:C 在仿射映射下的象是凸的，并且在透视函数 P 下的映射 (即 $f(C)$) 是凸的。
- 类似地，如果 $C \subseteq R^m$ 是凸集，那么其原象 $f^{-1}(C)$ 也是凸的。

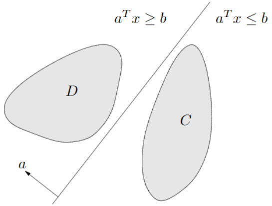
29.3.1 分离与支撑超平面

定理 3

超平面分离定理: 假设 C 和 D 是两个不相交的凸集，则存在非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和常数 b，使得

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq b, \forall \boldsymbol{x} \in C \text{ 且 } \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq b, \forall \boldsymbol{x} \in D,$$

即超平面 $\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b\}$ 分离了 C 和 D。如下图所示：



29.3.2 分离超平面定理

严格分离（即上式成立严格不等号）需要更强的假设。例如当 C 是闭凸集，D 是单点集时，我们有如下严格分离定理：

定理 4

严格分离定理： 设 C 是闭凸集，点 $\boldsymbol{x}_0 \notin C$，则存在非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和常数 b，使得

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} < b, \forall \boldsymbol{x} \in C \text{ 且 } \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_0 > b.$$

29.3.3 支撑超平面

当点 $\boldsymbol{x}_0$ 恰好在凸集 C 的边界上时，可以构造支撑超平面。

定义 15

给定集合 C 及其边界上一点 $\boldsymbol{x}_0$，如果 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ 满足 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_0, \forall \boldsymbol{x} \in C$, 那么称集合

$$\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_0\}$$

为 C 在边界点 $\boldsymbol{x}_0$ 处的**支撑超平面**。

从几何上来说，超平面 $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_0\}$ 与集合 C 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 处相切并且半空间 $\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}_0\}$ 包含 C。

支撑超平面

根据凸集的分离超平面定理，我们有如下支撑超平面定理：

定理 5

如果 C 是凸集，则在 C 的任意边界点处都存在支撑超平面。

支撑超平面定理从几何上看，可以理解为：

给定一个平面后，可以把凸集边界上的任意一点当成支撑点将凸集放置在该平面上。

本讲小结

凸集

- 仿射集与仿射包
- 凸集与凸包
- 常见的凸集与仿射集

凸集的保凸运算

- 保凸运算：交集、和、Cartesian 乘积、仿射变换、透视函数、线性分式函数
- 凸集的性质：分离超平面定理

凸集是凸优化中很重要的概念。通常很难从定义判定一个集合是否是凸集，可以借助保凸运算进行判断。