第三章 度量与投影

第 8 讲 特殊的正交矩阵

黄定江

DaSE @ ECNU

djhuang@dase.ecnu.edu.cn

引入：旋转的应用

- 计算机视觉：人脸识别、目标检测、姿态估计
- 机器人：运动控制
- 计算机图形学
- 机器学习：一种先验知识，旋转不变的学习

8.1.1 旋转矩阵：平面上的旋转

在平面内，一个图形绕着一个定点旋转一定的角度得到另一个图形的变化叫做旋转。这个定点叫做旋转中心，旋转的角度叫做旋转角，如果一个图形上的点 A 经过旋转变为点 A′，那么这两个点叫做旋转的对应点。

旋转是一个线性映射，更具体地，可以看成欧氏空间的一个自同构，它把空间中元素映射为另外一个元素。

在一个平面中，如果我们说一个点绕原点旋转 $\theta > 0$ 保持以下约定：

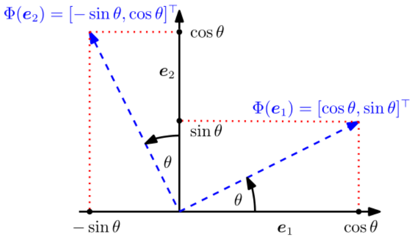
- 原点是固定的点
- 一般，旋转方向规定为逆时针

平面上的旋转：旋转保持基底性质不变

例 1

考虑定义在 $\mathbb{R}^2$ 上平面直角坐标系的自然基底 $\left\{ \boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$，它定义了 $\mathbb{R}^2$ 上的标准坐标系。我们对其旋转一个角度 θ，则旋转后的向量仍然线性无关，因此仍然是 $\mathbb{R}^2$ 的一组基。这意味着旋转保持基底的性质不变。我们把旋转 θ 对应的线性变换记为 Φ_θ，则容易得到：

$$\Phi_\theta(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \Phi_\theta(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$



平面上的旋转：旋转变换矩阵

设 $\mathbb{R}^2$ 中任一点 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2$

那么 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 旋转 θ 后的坐标：

$$\Phi_\theta(\boldsymbol{x}) = x_1 \Phi_\theta(\boldsymbol{e}_1) + x_2 \Phi_\theta(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} \Phi_\theta(\boldsymbol{e}_1), \Phi_\theta(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

所以平面上旋转 θ 的变换矩阵 $\boldsymbol{R}_\theta$ 为：

$$\boldsymbol{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$ 中的旋转

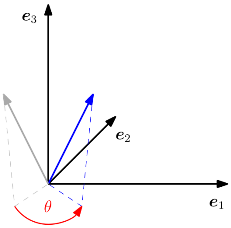
例 2

对于 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$，设 $\mathbb{R}^3$ 的三个基底分别为 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$。若 $\boldsymbol{x}$ 绕 $\boldsymbol{e}_3$ 旋转 θ，记为 $\Phi_\theta^{(3)}$，类似 2 维空间的做法

$$\Phi_\theta^{(3)}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_\theta^{(3)}(\boldsymbol{e}_2) = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_\theta^{(3)}(\boldsymbol{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此，绕 $\boldsymbol{e}_3$ 旋转 θ 的变换矩阵 $\boldsymbol{R}_\theta^{(3)}$ 为：

$$\boldsymbol{R}_\theta^{(3)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



类似的，绕 $\boldsymbol{e}_1$ 旋转 θ 的变换矩阵 $\boldsymbol{R}_\theta^{(1)}$ 为：

$$\boldsymbol{R}_\theta^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

绕 $\boldsymbol{e}_2$ 旋转 θ 的变换矩阵 $\boldsymbol{R}_\theta^{(2)}$ 为：

$$\boldsymbol{R}_\theta^{(2)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^n$ 中的旋转

在 n 维空间中，我们可以固定其中的 $n-2$ 维，在 n 维空间中的 2 维子平面上旋转。

定义 1

令 $\mathbb{V}$ 是 n 维欧氏向量空间，$\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ 是一线性变换，其变换矩阵

$$\boldsymbol{R}_{i,j}(\theta) := \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{i-1} & & & & \\ & \cos\theta & & -\sin\theta & \\ & & \boldsymbol{I}_{j-i-1} & & \\ & \sin\theta & & \cos\theta & \\ & & & & \boldsymbol{I}_{n-j} \end{bmatrix}$$

其中 $1 \le i < j \le n$，$\theta \in \mathbb{R}$。那么 $\boldsymbol{R}_{i,j}$ 叫做 **Givens 旋转矩阵。**

2 维旋转是 $n = 2$ 时 Givens 旋转的一个特殊情形。

8.1.2 旋转矩阵的性质：与正交矩阵的关系

所有的旋转矩阵都是正交矩阵。但并不是所有的正交矩阵都是旋转矩阵。比如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

是正交矩阵，但它不是一个旋转矩阵，事实上，它是一个使向量关于 x 轴对称的反射 (镜像) 矩阵。

旋转矩阵的性质

性质 1

设 $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{R}$ 是旋转矩阵当且仅当它是正交矩阵并且 $\det(\boldsymbol{R}) = 1$。

性质 2

保距性：设 $\boldsymbol{R}_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是旋转矩阵，$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$，有 $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 = \|\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{y})\|_2$。

即空间中的两个点在旋转前后距离保持不变。

性质 3

保角性：设 $\boldsymbol{R}_\theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是旋转矩阵，$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$，有 $\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} = \frac{\langle \boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{y})\rangle}{\|\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x})\|\|\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{y})\|}$。

即空间中的两个向量在旋转前后角度保持不变。$\boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{R}_\theta(\boldsymbol{y})$ 的夹角与 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 的夹角相同。

旋转矩阵的性质

性质 4

多个旋转矩阵的乘积仍然是旋转矩阵。

性质 5

仅在 2 维情形有可交换性即 $\boldsymbol{R}_\theta \boldsymbol{R}_\phi = \boldsymbol{R}_\phi \boldsymbol{R}_\theta$。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

在 3 维或更高维，交换性不成立，比如在 3 维情形下 $\boldsymbol{e}_3$ 绕 $\boldsymbol{e}_3$ 旋转 $\pi/2$ 仍是 $\boldsymbol{e}_3$，再绕 $\boldsymbol{e}_2$ 旋转 $\pi/2$ 会变换到 $\boldsymbol{e}_1$。如果 $\boldsymbol{e}_3$ 先绕 $\boldsymbol{e}_2$ 旋转 $\pi/2$ 到 $\boldsymbol{e}_1$，再绕 $\boldsymbol{e}_3$ 旋转 $\pi/2$ 会变换到 $\boldsymbol{e}_2$。

群的定义

群就是一个定义了满足**封闭性**、**结合律**、有**单位元**和**逆元**的二元运算的集合。具体说

定义 2

考虑一个集合 $\mathbb{G}$ 和定义在 $\mathbb{G}$ 上二元运算 $\circ : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$，如果 $G := (\mathbb{G}, \circ)$ 满足以下条件就被称为**群**:

1. 封闭性：$\forall x, y \in \mathbb{G} : x \circ y \in \mathbb{G}$,
2. 结合性：$\forall x, y, z \in \mathbb{G} : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,
3. 有单位元：$\exists e \in \mathbb{G}, \forall x \in \mathbb{G} : x \circ e = x$并且$e \circ x = x$,
4. 有逆元：$\forall x \in \mathbb{G}, \exists y \in \mathbb{G} : x \circ y = e$ 并且 $y \circ x = e$。我们一般把 x 的逆元记做 x^{-1}。

此外，如果 $\forall x, y \in \mathbb{G} : x \circ y = y \circ x$，那么 $G = (\mathbb{G}, \circ)$ 称作**阿贝尔群**，或称作**可交换群**。

正交群和旋转群

$(\mathbb{R}, +)$ 构成群，也是阿贝尔群。

$(\mathbb{R}, \cdot)$ 不构成群，因为 0 在乘法中没有逆元。$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ 构成一个群，也是阿贝尔群。

$\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的所有正交矩阵构成的集合在矩阵乘法下构成群，称为正交群，记为 $\mathcal{O}(n)$。

$\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的所有旋转矩阵构成的集合在矩阵乘法下构成群，称为特殊正交群，记为 $\mathcal{SO}(n)$。当 $n = 2$ 时，$\mathcal{SO}(2)$ 是阿贝尔群。

正交群和旋转群

$\mathcal{SO}(n)$ 是一个特殊的正交群。简单验证！

- 单位元就是单位矩阵，即逆时针旋转 0 度的变换矩阵。
- 一个旋转矩阵逆元就是这个矩阵的逆，比如平面中逆时针旋转 90° 的逆元就是顺时针旋转 90°，或者说逆时针旋转 270°。
- 矩阵的乘法自然是满足结合律的。
- 而封闭性则意味着多个旋转矩阵的乘积仍然是旋转矩阵。

8.1.3 正交普洛克路斯忒斯 (Procrustes) 问题和瓦赫巴 (Wahba) 问题

Procrustes 之床

在古希腊神话里，有个强盗，叫普洛克路斯忒斯 (Procrustes)。他开设了家黑店，经常邀请过往客人，并告诉他们有一张正合适的床。实际上，他设置了两张铁床，一长一短。如果客人比较矮，他就强迫客人睡长床，并拉扯客人的身体，使其和床一样长。如果客人比较高，他就会强迫客人睡短床，并截断客人的腿。无论哪种情况，客人都会死掉。最后英雄忒修斯（Theseus）击败了普洛克路斯忒斯，强令他躺在自己的短床上，并把这个强盗伸出床外的腿砍掉了。

正交 Procrustes 问题：使一组数据通过正交变换近似匹配另外一组数据

假设 $\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{y}_t, 1 \le t \le T$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单位向量。考虑一组实例 $\boldsymbol{x}_t, 1 \le t \le T$，目标是预测 $\hat{\boldsymbol{y}}_t = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_t$，它是 $\boldsymbol{x}_t$ 正交变换后的数据。$\boldsymbol{y}_t$ 是 $\boldsymbol{x}_t$ 旋转后的真实值，那么第 t 个实例的预测损失为 $L_t(\boldsymbol{R}) = \|\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{y}_t\|^2$。目标是使总的损失即 $L(\boldsymbol{Q}) = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{y}_t\|^2$ 最小。

为了解决这个问题，我们进行推导

$$\begin{aligned}\arg\min_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{O}(n)}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{y}_t\right\|^2 &= \arg\min_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{O}(n)} T-\left(\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{y}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_t\right)\\ &= \arg\max_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{O}(n)} \mathsf{Tr}\left(\left(\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{y}_t^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{Q}\right)\end{aligned}$$

我们记 $\boldsymbol{S}:=\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{y}_t^{\mathrm{T}}$，那么这个问题变形为

$$\arg\max_{\boldsymbol{Q}\in\mathcal{O}(n)} \mathsf{Tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q})$$

Wahba 问题

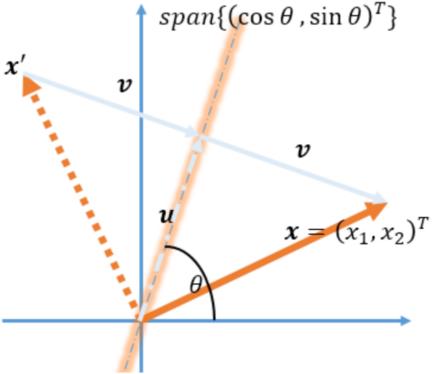
如果我们要求这个正交矩阵必须是旋转矩阵，那么这个问题形式为

$$\arg\min_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{SO}(n)}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2}\left\|\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_t-\boldsymbol{y}_t\right\|^2=\arg\max_{\boldsymbol{R}\in\mathcal{SO}(n)}\mathsf{Tr}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{R})$$

Solution：奇异值分解

平面上的反射变换

下面我们考虑另外一种特殊的正交矩阵：反射矩阵。

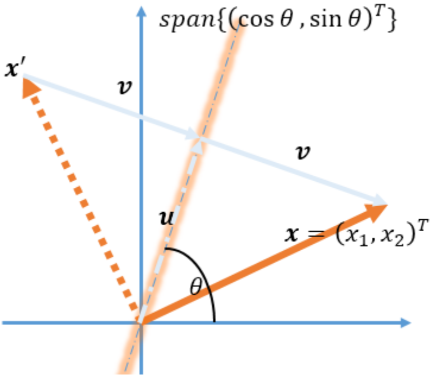


问题

考虑二维平面中的一个向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b} = (\cos\theta, \sin\theta)^{\mathrm{T}}$，如何求得向量 $\boldsymbol{x}$ 关于子空间 $\mathbf{span}\{\boldsymbol{b}\}$ 对称的向量 $\boldsymbol{x}'$？

由于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}'$ 关于子空间 $\mathbf{span}\{\boldsymbol{b}\}$ 对称。
所以 $\frac{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'}{2} = \boldsymbol{u}$。其中 $\boldsymbol{u}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在子空间 $\mathbf{span}\{\boldsymbol{b}\}$ 上的投影。$\boldsymbol{v} \in (\mathbf{span}\{\boldsymbol{b}\})^{\perp}$，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$，那么

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x}$$



根据投影公式 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，那么

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

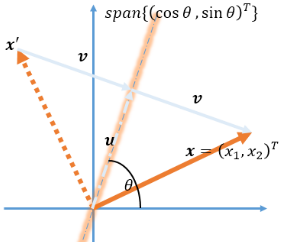
则

$$\boldsymbol{x}' = 2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta - 1 & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & 2\sin^2\theta - 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

令 $\phi = 2\theta$，

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$



或者我们记 $(\mathbf{span}\{\boldsymbol{b}\})^{\perp}$ 中的单位向量为 $\boldsymbol{w}$，容易求得 $\boldsymbol{w} = (\sin\theta, -\cos\theta)^{\mathrm{T}}$。$\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbf{span}\{\boldsymbol{w}\}$ 上的投影，即 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$。利用

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & 1 - 2\cos^2\theta \end{pmatrix}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

我们可以得到同样的结论。

在 3 维空间中，我们有时需要得到一个向量关于一个 2 维平面的镜像，在 n 维空间中，我们有时需要得到一个向量关于 $n-1$ 维超平面的镜像。这时我们根据平面的法向量 $\boldsymbol{w}$ 可以很容易的求出关于 $\boldsymbol{w}$ 垂直的超平面的镜象反射。

Householder 变换

定义 3

设 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|\boldsymbol{w}\|_2 = 1$，定义 $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

则称 $\boldsymbol{H}$ 为 *Householder* 变换矩阵。

Householder 变换也叫做初等反射矩阵或者镜像变换，它是著名的数值分析专家 Householder 在 1958 年为讨论矩阵特征值问题而提出来的。我们可以利用 Householder 变换来进行高维空间上的反射变换。

Householder 变换

下面的定理给出了 Householder 变换的一些简单而又十分重要的性质：

定理 1

设 $\boldsymbol{H}$ 是由(1)定义的一个 *Householder* 变换，那么 $\boldsymbol{H}$ 满足

(1) 对称性：$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}$;

(2) 正交性：$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}$;

(3) 对合性：$\boldsymbol{H}^2=\boldsymbol{I}$;

(4) 反射性：对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，如右图所示，$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{x}$ 关于 $\boldsymbol{w}$ 的垂直超平面的镜像反射。

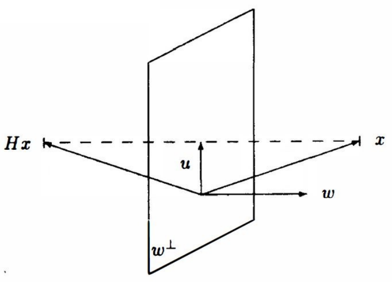


图 1: Householder 变换是关于 $\boldsymbol{w}$ 的垂直超平面的镜面反射。

Householder 变换

(1) 显然。(2) 和 (3) 可由 (1) 导出。事实上, 我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^2 &= \left(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\right) \\ &= \boldsymbol{I} - 4\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} + 4\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{T}\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \end{aligned}$$

(4) 设 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$，则 $\boldsymbol{x}$ 可表示为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{w}$

其中 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{span}\{\boldsymbol{w}\}^{\perp}$， $\alpha \in \mathbb{R}$。利用 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = 0$ 和 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = 1$， 可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} &= \left(\boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\right)(\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{w}) \\ &= \boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{w} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{T}\boldsymbol{u} - 2\alpha\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \\ &= \boldsymbol{u} - \alpha\boldsymbol{w} \end{aligned}$$

这就说明了 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 关于 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{w}\}^{\perp}$ 的镜像反射。

Householder 矩阵的特征值和行列式

这里我们用一个很简单的办法说明 Householder 矩阵的行列式是 -1。

我们知道，$\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 中的 Householder 矩阵 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$ 将 $\boldsymbol{x}$ 变换到关于 $\boldsymbol{w}$ 的垂直超平面 $\mathbf{span}\{\boldsymbol{w}\}^{\perp}$ 的镜像上，这里 $\boldsymbol{w}$ 仍是单位向量。

而在 $\mathbf{span}\{\boldsymbol{w}\}^{\perp}$ 上的每个向量，它们关于这个超平面的镜像仍是本身。也就是 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, 若$\boldsymbol{x}\in\mathbf{span}\{\boldsymbol{w}\}^{\perp}$。而 $\mathbf{span}\{\boldsymbol{w}\}^{\perp}$ 是 $n-1$ 维的，也就是说 $\boldsymbol{H}$ 至少有 $n-1$ 个特征值是 1。

而在 $\mathbf{span}\{\boldsymbol{w}\}$ 上的每个向量 $\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{w}$，它们关于这个超平面的镜像是 $-\boldsymbol{x}$。因为

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{w}-2\alpha\boldsymbol{w}=-\alpha\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{x}, \text{若}\boldsymbol{x}\in\mathbf{span}\{\boldsymbol{w}\}.$$

那么 $\boldsymbol{H}$ 至少有 1 个特征值是 -1。

$\boldsymbol{H}$ 一共有 n 个特征值，所以 $\boldsymbol{H}$ 全部特征值有 $n-1$ 个特征值是 1，1 个特征值是 -1。

方阵的行列式是它所有特征值的乘积，那么 $\det(\boldsymbol{H})=-1$。

旋转矩阵和反射矩阵的乘积

反射矩阵乘以反射矩阵会得到旋转矩阵。

旋转矩阵乘以反射矩阵会得到反射矩阵。

1 8.1 旋转矩阵

2 8.2 反射矩阵

3 8.3 信号处理中常见的正交矩阵

8.3.1 Haar 矩阵

哈尔小波变换（英语：Haar wavelet）是由数学家阿尔弗雷德·哈尔于 1909 年所提出的函数变换，也是小波变换中最简单的一种变换，也是最早提出的小波变换。

Haar 矩阵是哈尔小波变换的离散情形。Haar 矩阵中的每个元素都是 0、$+1$ 或者 -1，并且任意两行都是正交的。

$n=2$ 时，

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

Haar 矩阵的构造

当 $n=4$ 时，我们可以如下构造 Haar 矩阵：
(1) 取第一行全部为 1，$[1,1,1,1]$。我们可以把这个行向量看作用 $[1,1]$ 替换掉了 $\boldsymbol{H}_2$ 的第一行 $[1,1]$ 中的每个 1。
(2) 我们用 $[1,1]$ 替换掉 $\boldsymbol{H}_2$ 第二行中的每个 1，得到 $\boldsymbol{H}_4$ 的第二行 $[1,1,-1,-1]$。
(3) 前两行中，每一行的前两个元素，每一行的后两个元素都是一样的，所以我们取第三行 $[1,-1,0,0]$，第四行 $[0,0,1,-1]$。
这样任意两行都是正交的。

$$\boldsymbol{H}_4=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Haar 矩阵的构造

当 $n=8$ 时，如下构造 Haar 矩阵：

(1) 我们将 $\boldsymbol{H}_4$ 中的每个 1 都替换为 $[1,1]$。得到 $\boldsymbol{H}_8$ 的前四行：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) 可以看到前四行第 $2k-1, 2k, k=1,2,3,4$ 个元素是相同的，所以余下的四行我们分别令其第 $2j-1$，$2j$ 个元素分别是 1，-1，其余元素为 0。

这样任意两行也都是正交的。

$$\boldsymbol{H}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Haar 矩阵变换的特点

哈尔变换有以下几点特性：

- 不需要乘法（只有相加或加减）
- 输入与输出个数相同
- 可以分析一个信号的局部特征
- 大部分运算为 0，不用计算

Haar 矩阵变换常用于图像信号的压缩。

8.3.2 Hadamard 矩阵

Hadamard 矩阵是以法国数学家雅克·阿达马命名的方阵。
其元素要么是 $+1$，要么是 -1，是信号处理中的一种重要的矩阵。

定义 4

$\boldsymbol{H}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 称为 *Hadamard* 矩阵，若它的所有元素取 $+1$ 或者 -1，并且满足

$$\boldsymbol{H}_n\boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_n = n\boldsymbol{I}_n$$

其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位矩阵。

- 用 -1 乘 Hadamard 矩阵的任意行或者任意列得到的结果仍然是 Hadamard 矩阵。
- 称第一列和第一行所有元素都是 $+1$ 的 Hadamard 矩阵为**规范化的 Hadamard 矩阵**。
- $\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{H}_n$ 是标准正交矩阵。

Hadamard 矩阵的构造

定理 2

令 $n=2^k, k=1,2,\cdots$，则规范化的 *Hadamard* 矩阵具有构造公式：

$$\boldsymbol{H}_{2n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_n & \boldsymbol{H}_n\\ \boldsymbol{H}_n & -\boldsymbol{H}_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

证明：

用数学归纳法证明：可以验证 $\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_2=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{H}_2^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{I}_2$。

假设 $n=2^k$ 时 $\boldsymbol{H}_{2^k}$ 是规范化的正交 Hadamard 矩阵，即有 $\boldsymbol{H}_{2^k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{2^k}=\boldsymbol{H}_{2^k}\boldsymbol{H}_{2^k}^{\mathrm{T}}=2^k\boldsymbol{I}_{2^k}$。于是，对 $n=2^{k+1}$，那么

$$\boldsymbol{H}_{2^{k+1}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_{2^k} & \boldsymbol{H}_{2^k}\\ \boldsymbol{H}_{2^k} & -\boldsymbol{H}_{2^k}\end{pmatrix}$$

我们只需要验证 $\boldsymbol{H}_{2^{k+1}}$ 是 Hadamard 矩阵即可。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{2^{k+1}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{2^{k+1}} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{2^k}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{H}_{2^k}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{H}_{2^k}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{H}_{2^k}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{2^k} & \boldsymbol{H}_{2^k} \\ \boldsymbol{H}_{2^k} & -\boldsymbol{H}_{2^k} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^k \boldsymbol{I}_{2^k} & \boldsymbol{O}_{2^k} \\ \boldsymbol{O}_{2^k} & 2 \cdot 2^k \boldsymbol{I}_{2^k} \end{pmatrix} \\
&= 2^{k+1}\boldsymbol{I}_{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

类似地，容易证明 $\boldsymbol{H}_{2^{k+1}}\boldsymbol{H}_{2^{k+1}}^{\mathrm{T}} = 2^{k+1}\boldsymbol{I}_{2^{k+1}}$。又由于 $\boldsymbol{H}_{2^k}$ 是规范化的，所以 $\boldsymbol{H}_{2^{k+1}}$ 也是规范化的。因此，定理对 $n = 2^{k+1}$ 也成立。

例 3

当 $n=2^2=4$ 时，*Hadamard* 矩阵为

$$\boldsymbol{H}_4=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

例 4

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 以 $\boldsymbol{H}_2$ 为有序基底，求向量 $(3,4)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标。

(2) 求向量 $(3,4)^{\mathrm{T}}$ 经过 $\boldsymbol{H}_2$ 线性变换得到的向量。

解

(1) 因为 $3+4=7$，$3-4=-1$，所以向量 $(3,4)^{\mathrm{T}}$ 在这组基下的坐标为

$$\frac{1}{2}(7,-1)^{\mathrm{T}}$$

(2) 因为 $3+4=7$，$3-4=-1$，所以向量 $(3,4)^{\mathrm{T}}$ 经过 $\boldsymbol{H}_2$ 线性变换得到的向量为

$$(7,-1)^{\mathrm{T}}$$

Hadamard 在信号处理中的优势

当 $\boldsymbol{H}$ 为 Hadamard 矩阵时，

若 $\boldsymbol{H}$ 作为线性空间的一组基，由于 Hadamard 矩阵是正交矩阵并且元素只取 $+1$ 或 -1，我们计算一个向量在这组基下的坐标只需要加减法，并将最后的结果统一除以 $\boldsymbol{H}$ 的阶数。

线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$ 称为 Hadamard 变换。同样由于 Hadamard 矩阵的元素只取 $+1$ 或 -1，因此，计算变换后的向量只需要加法和减法而不需要乘法。

Hadamard 变换常用于移动通信中的编码。

8.3.3 Haar 矩阵和 Hadamard 矩阵的紧凑表示：矩阵的克罗内克 (Kronecker) 积

定义 5

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{rl})_{r\times s}$, 是域 $\mathbb{K}$ 中的两个矩阵, 则矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{\lambda\mu})_{mr\times ns}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的克罗内克积, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$, 即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{B} & a_{12}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{B} \\ a_{21}\boldsymbol{B} & a_{22}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{B} & a_{m2}\boldsymbol{B} & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}$$

性质 6

克罗内克积的性质 假设下述和、积有意义，则克罗内克积具有下述性质：

- $\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}_2,\quad \boldsymbol{A}\in\mathbb{R}_{m\times n},\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2\in\mathbb{R}_{p\times q}$
- $(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_2\otimes\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\in\mathbb{R}_{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}_{p\times q}$
- $\boldsymbol{A}\otimes(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{C},\quad \boldsymbol{A}\in\mathbb{R}_{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}_{p\times q},\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}_{k\times l}$
- $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{A}\in\mathbb{R}_{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}_{p\times q}$
- $(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\otimes(\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}),\quad \boldsymbol{A}\in\mathbb{R}_{m\times n},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}_{p\times q},\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}_{n\times r},\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}_{q\times s}$

克罗内克积的幂和连乘积

由于克罗内克积满足结合律，我们可以定义克罗内克积的幂和连乘积。

记

$$\boldsymbol{X}^{\otimes n} = \underbrace{\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{X} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}}_{n\ 次}$$

记

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}_1 \otimes \boldsymbol{X}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{X}_n$$

Haar 矩阵和 Hadamard 矩阵的克罗内克积表示

记

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

利用克罗内克积，我们可以利用 n 阶 Haar 矩阵构造 $2n$ 阶的 Haar 矩阵：

$$\boldsymbol{H}_{2n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_n \otimes (1, 1) \\ \boldsymbol{I}_n \otimes (1, -1) \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 n 阶单位矩阵。

我们也可以利用克罗内克积如下构造 2^k 阶的 Hadamard 矩阵：

$$\boldsymbol{H}_{2^k} = \boldsymbol{H}_2^{\otimes k}$$

8.3.4 傅里叶 (Fourier) 矩阵：共轭矩阵

因为傅里叶矩阵通常是定义在复数域上的复矩阵，先介绍与复矩阵有关的概念。

定义 6

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为复矩阵，那么 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵定义为

$$\bar{\boldsymbol{A}}=(\bar{a_{ij}})_{n\times n}.$$

共轭矩阵的性质

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$k\in\mathbb{C}$，则

- $\overline{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})}=\bar{\boldsymbol{A}}+\bar{\boldsymbol{B}}$;
- $\overline{(k\boldsymbol{A})}=\bar{k}\bar{\boldsymbol{A}}$;
- $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{B}}$;
- $\overline{(\boldsymbol{A}^{-1})}=(\bar{\boldsymbol{A}})^{-1}$。

共轭转置

定义 7

设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^H = (\overline{\boldsymbol{A}^T}) = (\bar{\boldsymbol{A}})^T = (\bar{a}_{ji})_{n\times n}.$$

“H” 是"Hermitian" 的缩写。

例 5

设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1+i & 2+i \\ 1-i & 1-2i \end{pmatrix},$$

那么

$$\boldsymbol{A}^H = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}^H = \begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2-i & 1+2i \end{pmatrix}.$$

共轭转置的性质

性质 7

假设下述和、积、逆有意义，则矩阵的共轭转置具有下述性质：

- 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{n\times m}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^H = \boldsymbol{A}^H + \boldsymbol{B}^H$
- 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{m\times k}$，则 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^H = \boldsymbol{B}^H\boldsymbol{A}^H$
- 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}, k \in \mathbb{C}$，则有 $(k\boldsymbol{A})^H = \bar{k}\boldsymbol{A}^H$
- 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}$，则有 $(\boldsymbol{A}^H)^H = \boldsymbol{A}$
- 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆，则有 $(\boldsymbol{A}^{-1})^H = (\boldsymbol{A}^H)^{-1}$

复数域上内积

正如在 $\mathbb{R}^n$ 上能够定义内积 $\mathbb{C}^n$ 上也能定义内积。设 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 的内积定义为

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{v}$$

酉矩阵

定义 8

设矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，如果矩阵 $\boldsymbol{U}$ 满足

$$\boldsymbol{U}^H \boldsymbol{U} = \boldsymbol{I},$$

那么我们称 $\boldsymbol{U}$ 为酉矩阵。

容易知道正交矩阵都是酉矩阵。

酉矩阵

例 6

矩阵

$$U = \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 2^{-1/2} & 0 \\ -2^{-1/2}i & 2^{-1/2}i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

是一个酉矩阵。

酉矩阵的性质

性质 8

设矩阵 $\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵，那么

- $\boldsymbol{U}$ 可逆且 $\boldsymbol{U}^H = \boldsymbol{U}^{-1}$
- $|\det(\boldsymbol{U})| = 1$
- $\boldsymbol{U}^H$ 也是酉矩阵
- $\|\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$

傅里叶矩阵

定义 9

如果矩阵 $\boldsymbol{F}_n \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为

$$\boldsymbol{F}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{(n-1)} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & \omega_n^8 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \omega_n^9 & \omega_n^{12} & \dots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^{(n-1)} & \omega_n^{2(n-1)} & \omega_n^{3(n-1)} & \omega_n^{4(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

其中 $\omega_n \in \mathbb{C}$，且 $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ 是方程 $\omega_n^n = 1$ 的单位根，那么矩阵 $\boldsymbol{F}_n$ 称为 n 阶傅里叶矩阵。

显然 $\boldsymbol{F}_n$ 是对称矩阵，j,k 位置元素为 $\boldsymbol{F}_{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega_n^{jk} = \frac{1}{\sqrt{n}}e^{\frac{2\pi i}{n}jk}$。

例 7

二阶的傅里叶矩阵为

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i^2 \end{pmatrix}$$

四阶的傅里叶矩阵为

$$\boldsymbol{F}_4 = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i^2 & i^3 \\ 1 & i^2 & i^4 & i^6 \\ 1 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix}$$

定理 3

傅里叶矩阵 $\boldsymbol{F}_n$ 是酉矩阵，即满足

$$\boldsymbol{F}_n^H \boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{I}$$

证明.

设 $\boldsymbol{f}_i$ 是 $\boldsymbol{F}_n$ 第 i 列的列向量，那么

$$\bar{\boldsymbol{f}}_i^T \boldsymbol{f}_i = (\frac{1}{\sqrt{n}})^2 \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{ij}(\bar{\omega}_n^{ij}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{ij}\omega_n^{n-ij} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^n = 1$$

而当 $i \neq k$ 时，

$$\bar{\boldsymbol{f}}_i^T \boldsymbol{f}_k = (\frac{1}{\sqrt{n}})^2 \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{ij}(\bar{\omega}_n^{kj}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{ij}\omega_n^{n-kj} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{n+(i-k)j} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{(i-k)j}$$

□

不妨令 $i > k$，那么我们只需要考察当 $0 < i < n$ 时的 $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{ij}$。注意到 $\omega_n^i \neq 1$ 是方程 $x^n - 1 = 0$ 的根，所以将方程左边因式分解可得

$$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1) = 0$$

所以有

$$\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^i)^j = 0$$

即有

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega_n^{ij} = 0$$

离散傅里叶变换

N 点 DFT（离散傅里叶变换）表示为乘法 $X = \boldsymbol{F}_n\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}$ 是原始输入信号，$\boldsymbol{F}_n$ 是 $N \times N$ 平方 DFT 矩阵，X 是信号的 DFT。

本讲小结

特殊的正交矩阵

- 旋转矩阵
- 反射矩阵
- Haar 矩阵
- Hadamard 矩阵
- 傅里叶矩阵

应用

- 矩阵的正交 (QR) 分解
- 旋转矩阵学习：Procrustes 问题和 Wahba 问题
- 信号处理

矩阵的 QR 分解和奇异值分解 (SVD)？下一章展开具体介绍！