数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 6 次作业

教师：黄定江
助教：陈诺、刘文辉

2022 年 5 月 8 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本**（建议使用统一的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。另外，若作业包含代码部分，**请将代码文件压缩后**上传到**第 6 次作业代码传送门**。代码压缩文件命名格式：“**hw6_ 代码 _ 学号 _ 姓名**”，命名示例：hw6_ 代码 _52215903014_ 刘文辉。其中，“hw6_ 代码”表示第 6 次作业代码。
2. 作业书写说明：
   (a) 可以讨论，禁止抄袭！
   (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名**和**学号**
   (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如“第 6 次作业”；
   (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
   (e) 题与题之间**请空一行**；
   (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 6 次作业

提交截至时间：**2022/03/18 下周五 20:00（晚上）**

理论部分 (正交)

习题 1. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

的行空间、列空间、零空间和左零空间。

解. 先对矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

进行初等变换。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 6 & 1 \\ & -6 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 6 & 1 \\ & & \end{pmatrix}$$

所以该矩阵的秩为 2.

所以行空间为 $span\{(1,-1,0)^T, (2,4,1)^T\}$

列空间为 $span\{(1,2,4)^T, (-1,4,2)^T\}$

零空间为 $span\{(1,1,-6)^T\}$

左零空间为 $span\{(2,1,-1)^T\}$

习题 2. 求由向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 张成的子空间的正交补空间。

解. 容易知道向量 $\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ 与向量 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ 均正交。

又向量组 $\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ 的秩为 *3*。

所以 $L(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix})$ 的正交补空间为 $L(\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix})$

习题 3. 求向量 $(1,1,1)^T$ 投影到一维子空间 $span\{(1,-1,1)^T\}$ 的正交投影。

解. 首先求得投影矩阵

$$P_\pi = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

向量 $(1,1,1)^T$ 投影到一维子空间 $span\{(1,-1,1)^T\}$ 的正交投影为

$$P_\pi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

习题 4. 设 $a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，试将向量组 (a_1, a_2, a_3) 标准正交化。

解. $\hat{\beta}_1 = \alpha_1 = \left(1,2,-1\right)^T$， $\beta_1 = \frac{1}{||\hat{\beta}_1||}\hat{\beta}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1,2,-1\right)^T$

$\hat{\beta}_2 = \alpha_2 - \langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1 = \left(-1,3,1\right)^T - \frac{2}{3}\left(1,2,-1\right)^T = \frac{5}{3}\left(-1,1,1\right)^T$,$\beta_2 = \frac{1}{||\hat{\beta}_2||}\hat{\beta}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1,1,1\right)^T$

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_3 &= \alpha_3 - \langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1 - \langle\alpha_2,\beta_1\rangle\beta_1\\&= \left(4,-1,0\right)^T - \frac{1}{3}\left(1,2,-1\right)^T + \frac{5}{3}\left(-1,1,1\right)^T\\&= \left(2,0,2\right)^T\end{aligned}$$

$\beta_3 = \frac{1}{||\beta_3||}\hat{\beta}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,0,1\right)^T$

故标准化后的向量组为 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

实践部分

习题 5. 利用 *python* 或 *matlab* 完成如下实验步骤，目的是通过实验了解 ℓ_1 范数相比于 ℓ_2 范数在稀疏信号恢复中的优势。

1. 创建一个 n 维向量（信号）$\boldsymbol{x}_0$，且是 s 稀疏的。即该向量仅有 s 个元素非零，其余元素均为 0。这里要求 n 远大于 s，例如：不妨取 $n = 500$，$s = 10$。
2. 创建一个 $m \times n$ 维的高斯随机矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作为观测矩阵。这里要求 m 略小于 n。不妨取 $m = 400$，$n = 500$。
3. 得到观测向量 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0$。
4. 利用 ℓ_2 范数恢复随机矩阵，即求解如下优化问题：
$$\begin{aligned} \min \quad & \|\boldsymbol{x}\|_2 \\ s.t. \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$
假设求得最优解为 $\tilde{\boldsymbol{x}}$。(实际上，它的最优解为 $\tilde{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{4}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{b}$。在后续课程的优化部分将会介绍具体的求解方法。)
5. 利用 ℓ_1 范数恢复随机矩阵，即求解如下优化问题：
$$\begin{aligned} \min \quad & \|\boldsymbol{x}\|_1 \\ s.t. \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$
假设求得最优解为 $\hat{\boldsymbol{x}}$。
6. 试比较 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 与 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 谁更接近原信号 $\boldsymbol{x}_0$，谁更加稀疏。(可利用 *https://github.com/harrydragon/MATLAB/tree/master/MN/LAB2/compressed-sensing-tutorial/l1magic* 求解该优化问题。在后续课程将会介绍优化问题的迭代求解方法。)