

# 数据科学与工程数学基础

## 作业提交规范及第 5 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 3 月 16 日

### 作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本或笔记本**（建议统一使用一般的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。
2. 作业书写说明：
  - (a) 可以讨论，**禁止抄袭！**
  - (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名和学号**
  - (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如“第 5 次作业”；
  - (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
  - (e) 题与题之间**请空一行**；
  - (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；**未交作业的当次作业记为 0 分**。

### 第 5 次作业



提交截至时间：**暂定 2022/03/26 下周五 20:00（晚上）**

## 理论部分 (特殊的正交阵)

**习题 1.** 计算:  $\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}^n$ , 并指出  $n < 0$  时的含义。

**习题 2.** *Householder* 变换可以在数值算法中构造正交基, 如 *Householder QR* 分解能使线性方程组易于求解。从计算观点看, *Householder* 变换可以在保持向量范数不变的情况下使向量的某些元素变为零, 如使非零向量  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$  变为标准向量  $e_1 = [1, 0, \dots, 0]^\top$  的某个常数倍。即

**定理 0.0.1.** 设  $0 \neq x \in R^n$ , 则可构造单位向量  $w \in R^n$ ,  $\|w\|_2 = 1$ , 使得  $H$  满足  $Hx = \alpha e_1$ , 其中  $\alpha = \pm\|x\|_2$

试证明该定理。

提示:

$$Hx = (I - 2ww^\top)x = x - 2(w^\top x)w$$

要使

$$Hx = \alpha e_1$$

则

$$2w^\top x w = x - \alpha e_1 \quad (1)$$

两边取范数

$$(2w^\top x) \|w\|_2 = \|x - \alpha e_1\|_2 \quad (2)$$

(1)(2) 相除, 有

$$w = \frac{x - \alpha e_1}{\|x - \alpha e_1\|_2} \quad (3)$$

故将 (3) 代回 (1), 证明当  $\alpha = \pm\|x\|_2$  时 (1) 成立即可

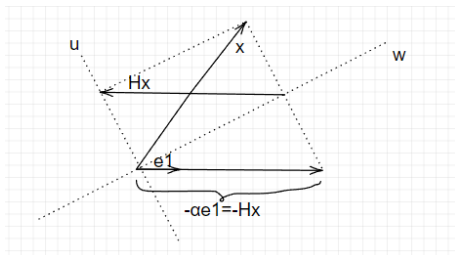


图 1: 合适的  $H(w)$  使得  $Hx = \alpha e_1$