数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 2 次作业

教师：黄定江
助教：陈诺、刘文辉

2022 年 5 月 8 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本或笔记本**（建议统一使用一般的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。
2. 作业书写说明：
   (a) 可以讨论，禁止抄袭！
   (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名**和**学号**
   (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如“第 2 次作业”；
   (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
   (e) 题与题之间**请空一行**；
   (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 2 次作业

提交截至时间：**2022/03/04 本周五 20:00（晚上）**

理论部分

习题 1. 设 $H = Span\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$，$K = Span\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，其中

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

请求出 H, K 和 $H+K$ 的一组基。

解. 由 $\epsilon_3 = 2\epsilon_1 - \epsilon_2$，易知 H 的一组基为 $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$。因为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是线性无关的，所以 K 的一组基为 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$。令 $A = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3]$，依据 $rank(A) = 4$，可知 $H+K$ 即为 $\mathbb{R}^4$。因此，$\mathbb{R}^4$ 下的标准基即为 $H+K$ 的一组基。

习题 2. 考虑这样的多项式 $\mathbf{p}_1(t) = 1+t$, $\mathbf{p}_2(t) = 1-t$ 以及 $\mathbf{p}_3(t) = 2\,(t \in \mathbb{R})$. 判定 $\mathbf{p}_1$，$\mathbf{p}_2$ 和 $\mathbf{p}_3$ 之间的线性相关性，并求出 $Span\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ 的一组基。

解. 因为 $\mathbf{p}_3(t) = \mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t)$，因此这三个多项式是线性相关的。现考虑 $\mathbf{p}_1$ 和 $\mathbf{p}_2$ 的相关性：假设存在 k_1, k_2 使得

$$k_1\mathbf{p}_1(t) + k_2\mathbf{p}_2(t) = 0$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立。将 $\mathbf{p}_1(t) = 1+t$, $\mathbf{p}_2(t) = 1-t$ 代入上式，可得 $k_1 = k_2 = 0$。因此，$\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t)\}$ 为它的一组基。

习题 3. 证明 $\{t, \sin t, \cos 2t, \sin t\cos t\}$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的线性无关函数集。

解. 假设存在 k_i, $i \in \{1, \cdots, 4\}$ 使得

$$k_1 t + k_2 \sin t + k_3 \cos 2t + k_4 \sin t \cos t = 0$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$ 成立。分别取 $t = 0, 2\pi, 2\pi + \pi/2, \pi/4$，可得

$$\begin{cases} & & k_3 & & = 0 \\ 2\pi k_1 & & +k_3 & & = 0 \\ (2\pi + \pi/2)k_1 & +k_2 & -k_3 & & = 0 \\ (\pi/4)k_1 & +(\sqrt{2}/2)k_2 & & +k_4 & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

可以推出只有当 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ 成立时，上述方程组才成立。从而，可得它们是线性无关函数集。