数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 11 次作业

教师：黄定江
助教：陈诺、刘文辉

2023 年 2 月 17 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**使用 Word 或 LaTeX 编写所得到的电子文档**。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为："**学号 _ 姓名**"。命名示例：50000000000_ 刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：**第 11 次作业提交传送门**，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 11 次作业

提交截至时间：**2023/01/21 周六 12:00（中午）**

理论部分

习题 1. 写出下述非线性规划的 *KKT* 条件并求解

$$\begin{aligned} (1)\quad & \mathit{maximize} \quad f(x) = (x-3)^2 \\ & \mathit{suject\ to} \quad 1 \le x \le 5 \\ (2)\quad & \mathit{minimize} \quad f(x) = (x-3)^2 \\ & \mathit{suject\ to} \quad 1 \le x \le 5 \end{aligned}$$

解. *(1)* 原问题等价于

$$\begin{cases} \mathit{minimize} \quad -f(x) = (x-3)^2 \\ g_1(x) = -x + 1 \le 5 \\ g_2(x) = x - 5 \le 0 \end{cases}$$

求目标函数和约束函数的梯度得,

$$\nabla_x f(x) = -2(x-3), \nabla_x g_1(x) = -1, \nabla_x g_2(x) = 1$$

将约束引入广义 *Lagrange* 乘子 v_1, v_2, 在 *KKT* 条件上有

$$\begin{cases} -2(x^* - 3) - v_1^* + v_2^* = 0 \\ v_1^*(-x^* + 1) = 0 \\ v_2^*(x^* - 5) = 0 \\ v_1^* \ge 0, v_2^* \ge 0 \end{cases}$$

若 $v_1^* \neq 0, v_2^* \neq 0$, 无解.

若 $v_1^* = 0, v_2^* \neq 0$, 得 $x^* = 5, v_2^* = 4, -f(x^*) = -4$.

若 $v_1^* \neq 0, v_2^* = 0$, 得 $x^* = 1, v_1^* = 4, -f(x^*) = -4$.

若 $v_1^* = 0, v_2^* = 0$, 得 $x^* = 3, f(x^*) = 0$.

因此最优点 $x^* = 1$ 或 $x^* = 5$, $\mathit{maximize} f(x) = 4$.

(2) 原问题等价于

$$\begin{cases} \mathit{minimize} \quad f(x) = (x-3)^2 \\ g_1(x) = -x + 1 \le 5 \\ g_2(x) = x - 5 \le 0 \end{cases}$$

求目标函数和约束函数的梯度得,

$$\nabla_x f(x) = -2(x-3), \nabla_x g_1(x) = -1, \nabla_x g_2(x) = 1$$

将约束引入广义 *Lagrange* 乘子 v_1, v_2, 在 *KKT* 条件上有

$$\begin{cases} 2(x^* - 3) - v_1^* + v_2^* = 0 \\ v_1^*(-x^* + 1) = 0 \\ v_2^*(x^* - 5) = 0 \\ v_1^* \ge 0, v_2^* \ge 0 \end{cases}$$

若 $v_1^* \neq 0, v_2^* \neq 0$, 无解.
若 $v_1^* = 0, v_2^* \neq 0$, 得 $x^* = 5, v_2^* = -4 < 0$, 不是 *KKT* 点.
若 $v_1^* \neq 0, v_2^* = 0$, 得 $x^* = 1, v_1^* = -4 < 0$, 不是 *KKT* 点.
若 $v_1^* = 0, v_2^* = 0$, 得 $x^* = 3, f(x^*) = 0$.
因此最优点 $x^* = 3$, $minimize f(x) = 0$.

习题 2. 考虑等式约束的最小二乘问题

$$\begin{aligned} &\mathit{minimize} \quad \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 \\ &\mathit{suject\ to} \quad \mathbf{Gx} = \mathbf{h} \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathrm{rank}(\mathbf{A}) = n, \mathbf{G} \in \mathbb{R}^{p\times n}, \mathrm{rank}(\mathbf{G}) = p$. 给出 *KKT* 条件, 推导原问题最优解 x^* 以及对偶问题最优解 v^* 的表达式.

解. 求得 *Lagrangian* 函数为

$$\begin{aligned} L(x,v) =& \|Ax - b\|_2^2 + v^T(Gx - h) \\ =& x^TA^TAx + (G^Tv - 2A^Tb)^Tx - v^Th \end{aligned}$$

可通过如下最优性条件得到函数最小值. 令梯度为 *0* 得,

$$\nabla_x L(x,v) = 2A^TAx + G^Tv - 2A^Tb = 0$$

因此当 $x = \frac{1}{2}(A^TA)^{-1}(G^Tv - 2A^Tb)$ 时, *Lagrangian* 函数取得最小值.
对偶函数为 $g(x) = -\frac{1}{4}(G^Tv - 2A^Tb)^T(A^TA)^{-1}(G^Tv - 2A^Tb) - v^Th$.
最优性条件为

$$\begin{cases} 2A^T(Ax^* - b) + G^Tv^* = 0 \\ Gx^* = h \end{cases}$$

解方程得,

$$\begin{cases} v^* = 2(G(A^TA)^{-1}G^T)^{-1}(G(A^TA)^{-1}A^Tb - h) \\ x^* = (A^TA)^{-1}(A^Tb - G^T(G(A^TA)^{-1}G^T)^{-1}(G(A^TA)^{-1}A^Tb - h)) \end{cases}$$

习题 3. 用 *Lagrange* 乘子法证明：矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的 *2* 范数

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_2=1, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{Ax}\|_2$$

的平方是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的最大特征值。

证明. 优化问题为

$$\begin{aligned} &\texttt{maximize} \quad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax} \\ &\texttt{suject to} \quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 1 \end{aligned}$$

Lagrange 函数为:

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - 2\lambda\boldsymbol{x}$$

令 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$，有:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda$$

这表示在 $f(\boldsymbol{x})$ 的极大值点，$\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征向量，λ 是对应的特征值。此时，

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \lambda$$

因此说明，为使 $f(\boldsymbol{x})$ 最大，$f(\boldsymbol{x}) = \lambda_{max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$，其中 λ_{max} 表示最大特征值。即

$$\|\boldsymbol{A}\|_2^2 = \lambda_{max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$$

□

习题 4. 用 *Lagrange* 乘子法求欠定方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二范数解，其中 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \leq n, \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$

证明. 优化问题为

$$\begin{aligned} \texttt{maximize} \quad & f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}\|_2^2 \\ \texttt{suject to} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Lagrange 函数为:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$$

令 $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$，有:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$$

$$g(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\lambda + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

令 $\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0$:

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\lambda + \boldsymbol{b} = 0$$

由 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$ 得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 可逆，因此

$$\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{b}$$

因此，$\boldsymbol{x}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二范数解:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{b}$$

□

习题 5. 用最速下降法和精确线搜索计算 $\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ，初始点 $x^{(0)} = (2,2,1)^T$. 当 $(f(x^{(n+1)}) - f(x^{(n)})) < 0.001$ 时迭代终止.

解. 由题意得, $f(x) = x^T x, \nabla_x f(x) = 2x$, 设最速下降法的步长为 λ, 那么

$$\begin{aligned} f(x-\lambda\nabla_x f(x)) =& (x-\lambda\nabla_x f(x))^T(x-\lambda\nabla_x f(x)) \\ =& x^T x - 2\lambda\nabla_x f(x)^T x + \lambda^2 \nabla_x f(x)^T \nabla_x f(x) \end{aligned}$$

在 $x - \lambda\nabla_x f(x)$ 方向上, 使 $f(x)$ 最小的 λ 满足

$$\frac{\partial f(x-\lambda\nabla_x f(x))}{\partial\lambda} = -2\nabla_x f(x)^T x + 2\lambda\nabla_x f(x)^T\nabla_x f(x)$$

得

$$\lambda = \frac{\nabla_x f(x)^T x}{\nabla_x f(x)^T \nabla_x f(x)} = \frac{1}{2}$$

所以,

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{1}{2}\nabla_x f(x^{(0)}) = (0,0,0)^T$$

$$f(x^{(1)}) = 0$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{1}{2}\nabla_x f(x^{(1)}) = (0,0,0)^T$$

$$f(x^{(2)}) = 0$$

同理可得, $f(x^{(n)}) = 0 (n > 0)$, 因此当 $|(f(x^{(n+1)}) - f(x^{(n)})| = 0 < 0.001$ 时, 迭代终止.

习题 6. 使用梯度下降法和固定步长 $\lambda = 0.01$ 计算 $\min f(x) = (x_1-1)^2 + 16(x_2-2)^2$ ，初始点 $x^{(0)} = (2,3)^T$， 迭代两步后终止.

解. 具体迭代结果：

k	$x^{(k)^{\mathrm{T}}}$	g_k^{T}	f_k	$\Vert g_k \Vert_\infty$
0	$(2,3)$	$(2,32)$	17	32
1	$(1.98, 2.68)$	$[1.96, 21.76]$	8.3588	21.76
2	$(1.96, 2.46)$	$[1.9208, 14.7968]$	4.3434	14.7968

习题 7. 考虑问题

$$\min f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_1^2 x_2.$$

从初始点 $x^{(0)} = (1.5, 1.5)^{\mathrm{T}}$ 出发, 用 *Newton* 方法求迭代两步后该问题的解（可用编写程序辅助计算）.

解. $f(x)$ 的一、二阶导数分别为

$$g(x)=\left(6x_1-2x_1x_2,6x_2-x_1^2\right)^{\mathrm{T}},\quad G(x)=\begin{bmatrix}6-2x_2 & -2x_1\\ -2x_1 & 6\end{bmatrix}$$

$f(x)$ 有三个稳定点: 极小点 $x_{(1)}=(0,0)^{\mathrm{T}}$, 鞍点 $x_{(2)}=(3\sqrt{2},3)^{\mathrm{T}}$ 和 $x_{(3)}=(-3\sqrt{2},3)^{\mathrm{T}}$. 在这三个点的 *Hesse* 矩阵分别为

$$G\left(x_{(1)}\right)=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix},\quad G\left(x_{(2)}\right)=\begin{bmatrix}0 & -6\sqrt{2}\\ -6\sqrt{2} & 6\end{bmatrix}$$

$$G\left(x_{(3)}\right)=\begin{bmatrix}0 & 6\sqrt{2}\\ 6\sqrt{2} & 6\end{bmatrix}.$$

下面我们从 $x^{(0)}=(1.5,1.5)^{\mathrm{T}}$, 这时 *Newton* 方法在每一迭代步的信息见下表

k	$x^{(k)^{\mathrm{T}}}$	f_k	$\|g_k\|_\infty$
0	$(1.5000, 1.5000)$	10.1250	8.1125
1	$(-3.7500, -2.2500)$	89.0156	48.0633
2	$(0.6250, -3.1250)$	31.6895	20.6151
3	$(0.3190, 0.0014)$	0.3052	1.9155
4	$(-0.0020, -0.0172)$	0.0009	0.1037
5	$(-0.0000, -0.0000)$	0.0000	0.0000
6	$(-0.0000, -0.0000)$	0.0000	0.0000

习题 8. 试用 *DFP* 法计算下述二次函数的极小点

$$\min f(x)=3x_1^2+x_2^2-2x_1x_2-4x_1.$$

解. 假设我们从 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(-2,4)^T$ 开始（没有规定时，可以随机选取一个初始点），并取

$$\overline{\boldsymbol{H}}^{(0)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=[(6x_1-2x_2-4),(2x_2-2x_1)]^T$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)})=(-24,12)^T$$

$$\boldsymbol{p}^{(0)}=-\overline{\boldsymbol{H}}^{(0)}\nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)})=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-24\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\ -12\end{pmatrix}$$

利用一维搜索，即 $\min_\lambda f(\boldsymbol{x}^{(0)}+\lambda\boldsymbol{p}^{(0)})$，可算得

$$\lambda_0=\frac{5}{34}$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\boldsymbol{x}^{(0)}+\lambda_0\boldsymbol{p}^{(0)}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix}+\frac{5}{34}\begin{pmatrix}24\\ -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{26}{17},\frac{38}{17}\end{pmatrix}^T$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \left(\frac{12}{17}, \frac{24}{17}\right)^T$$

$$\Delta \boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} = \left(\frac{26}{17}, \frac{38}{17}\right)^T - (-2,4)^T = \left(\frac{60}{17}, -\frac{30}{17}\right)^T$$

$$\Delta \boldsymbol{g}^{(0)} = \nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)}) - \nabla f(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \left(\frac{6}{17}, \frac{12}{17}\right)^T - (-12,6)^T = \left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right)^T$$

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{H}}^{(1)} &= \overline{\boldsymbol{H}}^{(0)} + \frac{\Delta \boldsymbol{x}^{(0)}(\Delta \boldsymbol{x}^{(0)})^T}{(\Delta \boldsymbol{g}^{(0)})^T \Delta \boldsymbol{x}^{(0)}} - \frac{\overline{\boldsymbol{H}}^{(0)} \Delta \boldsymbol{g}^{(0)} (\Delta \boldsymbol{g}^{(0)})^T \overline{\boldsymbol{H}}^{(0)}}{(\Delta \boldsymbol{g}^{(0)})^T \overline{\boldsymbol{H}}^{(0)} \Delta \boldsymbol{g}^{(0)}} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\left(\frac{60}{17}, -\frac{30}{17}\right)^T \left(\frac{60}{17}, -\frac{30}{17}\right)}{\left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right) \left(\frac{60}{17}, -\frac{30}{17}\right)^T} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right)^T \left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{210}{17}, -\frac{90}{17}\right)^T} \\
&= \frac{1}{986} \begin{pmatrix} 269 & 299 \\ 299 & 862 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = -\overline{\boldsymbol{H}}^{(1)} \nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = -\frac{1}{986} \begin{pmatrix} 269 & 299 \\ 299 & 862 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{17} \\ \frac{24}{17} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{18}{29} \\ \frac{42}{29} \end{pmatrix}$$

再由一维搜索 $\min_\lambda f(\boldsymbol{x}^{(1)} + \lambda \boldsymbol{p}^{(1)})$，得

$$\lambda_1 = \frac{29}{34}$$

从而

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(1)} + \lambda_1 \boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{26}{17} \\ \frac{38}{17} \end{pmatrix} + \frac{29}{34} \begin{pmatrix} -\frac{18}{29} \\ -\frac{42}{29} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^{(2)}) = (0,0)^T$$

可知 $\boldsymbol{x}^{(2)} = (1,1)^T$ 为极小点。

习题 9. 试用二次罚函数法求解如下优化问题:

$$\begin{aligned}
\min\ f_0(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{3}(x_1+1)^3 + x_2 \\
s.t.\ \ f_1(\boldsymbol{x}) &= 1 - x_1 \le 0 \\
f_2(\boldsymbol{x}) &= -x_2 \le 0
\end{aligned}$$

从初始点 $x^{(0)} = (2,0)^{\mathrm{T}}$ 开始，计算迭代两步后的解。

解. 我们不妨取 $M1=1$,$c=2$。由此，构造无约束优化问题：

$$\min p_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}\left(x_1+1\right)^3+x_2+[\min(0,x_1-1)]^2+[\min(0,x_2)]^2$$

易求得在 $x^{(0)}$ 处的梯度（严格上是次梯度）为 $((x_1+1)^2,1)^T=(9,1)$。假设这里采用固定步长 $\lambda=0.1$，则 $x^{(1)}=(1.1-0.1)^T$。这里假定这是该无约束优化问题的最优解，实际上，需要迭代至收敛。

然后，进行第二轮迭代，此时 $M2=c*M1=2$。由此，构造无约束优化问题：

$$\min p_1(\boldsymbol{x})=\frac{1}{3}\left(x_1+1\right)^3+x_2+2*[\min(0,x_1-1)]^2+2*[\min(0,x_2)]^2$$

易求得在 $x^{(1)}$ 处的梯度为 $((x_1+1)^2,1+4x_2)^T=(4.41,0.6)$。仍假设这里采用固定步长 $\lambda=0.1$，则 $x^{(2)}=(0.659-0.16)^T$。这样，便求得两次迭代的解。实际上，我们可以注意到罚函数法的解是可能会违背约束条件，通过不断地加大惩罚使得它收敛在可行域内。

习题 10. 试用内点法求解如下优化问题：

$$\begin{aligned}\min f_0(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{3}\left(x_1+1\right)^3+x_2\\ s.t.\ f_1(\boldsymbol{x})&=1-x_1\leq 0\\ f_2(\boldsymbol{x})&=-x_2\leq 0\end{aligned}$$

解. *参考讲义 Lec35，例 3.*