

数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 9 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2023 年 1 月 30 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：使用 Word 或 L^AT_EX 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 L^AT_EX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为：“学号_姓名”。命名示例：50000000000_刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：[第 9 次作业提交传送门](#)，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 9 次作业



提交截至时间：**2022/12/12 周一 12:00 (中午)**

理论部分

习题 1. 设某种电子器件的寿命 (以 h 计) T 服从双参数的指数分布, 其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-(t-c)/\theta} & t \geq c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $c, \theta (c, \theta > 0)$ 为未知参数. 自一批这种器件中随机地取 n 件进行寿命试验. 设它们的失效时间依次为 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

(1) 求 θ 与 c 的最大似然估计值.

(2) 求 θ 与 c 的矩估计量

解. (1) 易知似然函数为

$$L(\theta, c) = \frac{1}{\theta^n} \exp \left\{ \frac{nc - \sum_{i=1}^n x_i}{\theta} \right\}.$$

所以

$$\ln L(\theta, c) = -n \ln \theta + \frac{nc - \sum_{i=1}^n x_i}{\theta}.$$

对 θ 求偏导, 并令导数为 0, 可得 $\frac{n}{\theta} + \frac{nc - \sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2} = 0$. 可得 $\theta = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - c$. 对该函数求二阶导并将 θ 代入, 可得

$$\frac{n}{\theta^2} + \frac{2nc - 2\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^3} = -\frac{n}{\theta^2} < 0,$$

这说明求得的 θ 确实是极大值点. 因此, θ 的最大似然估计值为 $\theta = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - c$.

另外, 在上式中, 通过简单地观测可以发现 $\ln L(\theta, c)$ 的数值会随着 c 的增加而增加, 故为使得上式最大, 应当使 c 最大. 故 c 的最大似然估计值为 $c = x_{(1)}$.

(2) 该分布的期望和二阶矩分别为

$$E(X) = \int_c^{+\infty} \frac{x}{\theta} \exp \left\{ -\frac{x-c}{\theta} \right\} dx = \theta + c.$$

$$E(X^2) = \int_c^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} \exp \left\{ -\frac{x-c}{\theta} \right\} dx = c^2 + 2c\theta + 2\theta^2.$$

该分布的方差 $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \theta^2$. 通过联立方程组, 可求得 θ 的矩估计为 $\theta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{n}}$, c 的矩估计为 $c = \bar{x} - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{n}}$.

习题 2. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{(1-\theta)/\theta} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad 0 < \theta < +\infty$$

X_1, X_2, \cdots, X_n 是来自总体 X 的样本。

(1) 验证 θ 的最大似然估计量是 $\hat{\theta} = \frac{-1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$

(2) 证明 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量。

解. (1) 易知似然函数为

$$L(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1-\theta}{\theta}}.$$

所以 $\ln L(\theta) = -n \ln \theta + \frac{1-\theta}{\theta} \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)$. 对 θ 求导, 并令导数为 0, 可得

$$-\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = 0.$$

可得 $\hat{\theta} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$. 对该函数求二阶导并将 $\hat{\theta}$ 代入, 可得 $-\frac{n^3}{(\sum_{i=1}^n \ln X_i)^2} < 0$, 这说明求得的 θ 确实是极大值点. 故原命题得证.

(2) 首先求得

$$E(\ln x) = \int_0^1 \ln x \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} dx = -\theta.$$

所以 $E(\hat{\theta}) = -\frac{-n\theta}{n} = \theta$. 故原命题得证.

习题 3. 假设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 已知), X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本, 由过去的经验和知识, 我们可以确定 μ 的取值比较集中在 μ_0 附近, 离 μ_0 越远, μ 取值的可能性越小, 于是我们假定 μ 的先验分布为正态分布

$$\pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\mu^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\mu^2} (\mu - \mu_0)^2 \right] \quad (\mu_0, \sigma_\mu \text{ 已知})$$

求 μ 的后验概率分布。

解. 样本分布密度为

$$q(\mathbf{x} | \mu) = \frac{1}{\sigma^n (2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right]$$

于是后验密度函数为

$$\begin{aligned} h(\mu | \mathbf{x}) &= \frac{q(\mathbf{x} | \mu) \cdot \pi(\mu)}{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})} = \frac{q(\mathbf{x} | \mu) \cdot \pi(\mu)}{\int_{-\infty}^{+\infty} q(\mathbf{x} | \mu) \cdot \pi(\mu) d\mu} \\ &\propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right] \cdot \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\mu^2} (\mu - \mu_0)^2 \right] \end{aligned}$$

化简得

$$h(\mu | \mathbf{x}) \propto \exp \left[-\frac{(\mu - t)^2}{2\eta^2} \right]$$

其中 $t = \frac{\frac{n}{\sigma^2} \bar{x} + \frac{1}{\sigma_\mu^2} \mu_0}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2}}$, $\eta^2 = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2}}$, 于是

$$\mu | \mathbf{x} \sim N \left(\frac{\frac{n}{\sigma^2} \bar{x} + \frac{1}{\sigma_\mu^2} \mu_0}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2}}, \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_\mu^2}} \right).$$

习题 4. 假设总体 $X \sim P(\lambda)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的样本, 假定 λ 的先验分布为伽玛分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$, 求 λ 的后验期望估计 (平方损失下的贝叶斯估计)。

解. 因为 λ 的先验密度函数 $\pi(\lambda)$ 为伽玛分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$, 即

$$\pi(\lambda) \propto \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}$$

样本分布密度函数为:

$$q(\mathbf{x} \mid \lambda) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! x_2! \dots x_n!} e^{-n\lambda} \propto \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda}$$

所以

$$h(\lambda \mid \mathbf{x}) \propto \lambda^{\alpha + \sum_{i=1}^n x_i - 1} e^{-(\beta + n)\lambda}$$

即

$$\lambda \mid \mathbf{x} \sim \Gamma\left(\alpha + \sum_{i=1}^n x_i, \beta + n\right)$$

故 λ 的后验期望估计为

$$\hat{\lambda} = \frac{\alpha + \sum_{i=1}^n x_i}{\beta + n} = \frac{n}{\beta + n} \bar{x} + \frac{\beta}{\beta + n} \frac{\alpha}{\beta}$$

它是样本均值 \bar{x} 和先验分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 的均值 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的加权平均。