习题1

(1)

$$A^T=\begin{pmatrix} M^T & P^TM^T \\ M^TP^T & P^TM^TP^T \end{pmatrix}$$

$\because M$、P为对称阵 $\therefore P^T=P$，$M^T=M$

$$\therefore A^T=\begin{pmatrix} M & PM \\ MP & PMP \end{pmatrix}=A$$

(2)

矩阵2范数就是最大特征值,正交相似变换不改变特征值。令

$$B=UDV^T$$

UV正交，则在B的左右两边乘正交阵后不改变特征值，因此2范数不变。又因为F范数是特征值平方和的平方根，所以也没有变化。

(3)

不会

(4)

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\because |A|_p=max\frac{|Ax|_p}{|x|_p}$$

$$\therefore |A|_p=2\frac{|x|_p}{|x|_p}=2$$

习题2

(1)

$$\because P^2-P=0$$
$$\therefore \lambda^2-\lambda=0$$
$$\therefore \lambda=0,1$$

$Px = 0 \cdot x = 0$，P把x投影到0，在P的零空间
$Py = 1 \cdot y = y$，P把y投影到y，即把y投影到自己，则y在P的列空间上

(2)

$$\because P^2 - P = 0 \\ \therefore \lambda^2 - \lambda = 0 \\ \therefore \lambda = 0,1$$

(3)

记向量在A空间上的投影为p，假设

$$P = A(A^TA)^{-1}A^{-1}$$

假设P可逆,则

$$P^{-1} = (A^T)^{-1}A^TAA^{-1} = E$$

由题可知

$$P \neq I_n \\ \therefore P\text{不可逆，可知}det(P) = 0$$

(4)

$$\begin{aligned} (I_n - 2P)(I_n - 2P)^T &= I_nI_n^T - 2I_nP^T - 2PI_n^T + 4PP^T \\ &= E - 4P + 4E \\ \because P^2 - P = 0 \\ \therefore \text{原式} &= (E - 4P + 4E)PP^T \\ &= EPP^T \\ &= E \end{aligned}$$

$$\therefore I_n - 2P\text{是正交矩阵}$$

(5)

$$\begin{aligned} P^T &= [(A^TA)^{-1}A^T]^TA^T \\ &= A[(AA^T)^{-1}]^TA^T \\ &= P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^2 &= A(A^TA)^{-1}A^TA(A^TA)^{-1}A^T \\ &= A(A^TA)^{-1}A^T \\ &= P \end{aligned}$$

$\therefore P$是正交投影矩阵
由第二问可知$rank(P) = tr(P) = rank(A) = m$
(由于P是由A进行初等变化而成的，所以矩阵的秩不发生改变)