

数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 2 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 9 月 30 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：使用 Word 或 \LaTeX 编写所得到的电子文档。若使用 Word 编写，将其另存为 PDF 形式，然后提交 PDF 文档。若使用 \LaTeX 编写，将其编译成 PDF 形式，然后提交 Tex 和 PDF 两个文档。
2. 作业命名规范：提交的电子文档必须命名为：“学号_姓名”。命名示例：52200000000_刘某某。
3. 作业提交途径：点击打开每次作业的传送门网址：[第 2 次作业提交传送门](#)，无需注册和登录，直接上传作业文档即可。注意：传送门将会在截至时间点到达后自动关闭。
4. 作业更改说明：如果需要修改已经提交的作业，只要在截至日期前，再次上传更改后的作业（切记保持同名），即可覆盖已有作业。
5. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；未交作业的当次作业记为 0 分。

第 2 次作业



提交截至时间：**2022/10/14 周五 12:00 (中午)**

理论部分 (范数与二次型)

习题 1. 假设 $M, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称阵, P 为正交阵,

$$A = \left(\begin{array}{c|c} M & PM \\ \hline MP & PMP \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}.$$

(i) 证明 $A^T = A$.

(ii) 假设 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是正交矩阵, $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 证明 $\|UDV\|_2 = \|D\|_2, \|UDV\|_F = \|D\|_F$.

(iii) 证明 $\|A\|_F = 2\|M\|_F, \|A\|_2 \leq 2\|M\|_2$. (提示: 将 A 分解, 并利用 (ii) 结论)

(iv) 假设 $n = 4, M = \text{diag}_{4 \times 4}(-2, 1, 0, 0), P = (e_4|e_3|e_2|e_1)$. 证明 $\|A\|_p = 2 \forall p \in [1, \infty)$.

习题 2. 假设 $P \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{0\}$ 是一个投影矩阵.

(i) 证明 $Py = y \forall y \in \mathcal{R}(P), Px - x \in \mathcal{N}(P) \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(即证明投影 P 沿着零空间 $\mathcal{N}(P)$ 投影到列空间 $\mathcal{R}(P)$)

(ii) 证明 P 的特征值 $\lambda \in \Lambda(P) \subseteq \{0, 1\}$. 假设 $\mathcal{R}(P) = \text{span}(u_1, \dots, u_r), \mathcal{N}(P) = \text{span}(v_{r+1}, \dots, v_n)$, 试找到 P 的特征分解 $P = XDX^{-1}$ 并证明 $\text{tr}(P) = \text{rank}(P)$. (提示: 利用 (i) 结论.)

(iii) 证明当 $P \neq I_n, \det(P) = 0$.

(iv) 证明当 P 是正交投影矩阵 ($P^2 = P = P^T$) 时, $I_n - 2P$ 是正交矩阵.

(v) 假设 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, m \leq n, \text{rank}(A) = m$. $P = A(A^T A)^{-1}A^T$ 证明 P 是正交投影矩阵, $\text{rank}(P) = m$. (提示: 利用 (ii) 结论.)