

数据科学与工程数学基础

作业提交规范及第 6 次作业

教师：黄定江

助教：陈诺、刘文辉

2022 年 3 月 13 日

作业提交规范

1. 作业提交形式：**练习本**（建议使用统一的**练习本**即可，不接收以纸张的方式书写的作业）。另外，若作业包含代码部分，**请将代码文件压缩后上传到第 6 次作业代码传送门**。代码压缩文件命名格式：“**hw6_代码_学号_姓名**”，命名示例：hw6_代码_52215903014_刘文辉。其中，“hw6_代码”表示第 6 次作业代码。
2. 作业书写说明：
 - (a) 可以讨论，**禁止抄袭！**
 - (b) 练习本封面至少包含两方面信息：**姓名和学号**
 - (c) 每一次的作业**请另起一页**，并在**第一行标明第几次作业**。例如“第 6 次作业”；
 - (d) 每一题请**标注题号**，无需抄题，直接解答；
 - (e) 题与题之间**请空一行**；
 - (f) 不要求字好，但要求书写整体清晰易读。
3. 作业提交途径：纸质作业交给**学习委员**，由学习委员**按学号顺序**收齐后统一在截止日期前交到**助教实验室**。**单数周**布置的作业交到助教刘文辉处**数学馆西 109**；**双数周**布置的作业交到助教陈诺处**地理馆 353**。
4. 作业评分说明：正常提交作业的按照实际评分记录；逾期补交作业的根据逾期情况在实际评分基础上酌情扣分；**未交作业的当次作业记为 0 分**。

第 6 次作业



提交截至时间：2022/03/18 下周五 20:00（晚上）

理论部分 (正交)

习题 1. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

的行空间、列空间、零空间和左零空间。

习题 2. 求由向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 张成的子空间的正交补空间。习题 3. 求向量 $(1, 1, 1)^T$ 投影到一维子空间 $\text{span}\{(1, -1, 1)^T\}$ 的正交投影。习题 4. 设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 试将向量组 (a_1, a_2, a_3) 标准正交化。

实践部分

习题 5. 利用 *python* 或 *matlab* 完成如下实验步骤, 目的是通过实验了解 ℓ_1 范数相比于 ℓ_2 范数在稀疏信号恢复中的优势。

1. 创建一个 n 维向量 (信号) \mathbf{x}_0 , 且是 s 稀疏的。即该向量仅有 s 个元素非零, 其余元素均为 0。这里要求 n 远大于 s , 例如: 不妨取 $n = 500$, $s = 10$ 。
2. 创建一个 $m \times n$ 维的高斯随机矩阵 \mathbf{A} 作为观测矩阵。这里要求 m 略小于 n 。不妨取 $m = 400$, $n = 500$ 。
3. 得到观测向量 $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ 。
4. 利用 ℓ_2 范数恢复随机矩阵, 即求解如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{x}\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

假设求得最优解为 $\tilde{\mathbf{x}}$ 。(实际上, 它的最优解为 $\tilde{\mathbf{x}} = \frac{1}{4}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b}$ 。在后续课程的优化部分将会介绍具体的求解方法。)

5. 利用 ℓ_1 范数恢复随机矩阵, 即求解如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\mathbf{x}\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned}$$

假设求得最优解为 $\hat{\mathbf{x}}$ 。

6. 试比较 $\tilde{\mathbf{x}}$ 与 $\hat{\mathbf{x}}$ 谁更接近原信号 \mathbf{x}_0 , 谁更加稀疏。(可利用 <https://github.com/harrydragon/MATLAB/tree/master/MN/LAB2/compressed-sensing-tutorial/11magic> 求解该优化问题。在后续课程将会介绍优化问题的迭代求解方法。)