数学基础 hw-2

一、

(i)

$$A^T = \left(\begin{array}{c|c} M & PM \\ \hline MP & PMP \end{array}\right)^T = \left(\begin{array}{c|c} M^T & (MP)^T \\ \hline (PM)^T & (PMP)^T \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} M^T & P^T M^T \\ \hline M^T P^T & P^T M^T P^T \end{array}\right)$$

∵ M, P 为 n 阶对称阵

∴ $M^T = M \quad P^T = P$

$$= \left(\begin{array}{c|c} M & PM \\ \hline MP & PMP \end{array}\right) = A$$

(ii) 对 D 做奇异值分解，记作 $D = HGP$，其中 H, P 为正交矩阵，在 D 的左边乘以正交矩阵 V，则有 $VD = VHGP$，VH 仍为正交矩阵。因为

$$(VH)^T VH = H^T V^T V H = H^T E H = E = VH(VH)^T$$

∴ 当前的 $(VH)GP$ 是 VD 的奇异值分解，且与 D 有相同的奇异值矩阵 G。

在D的右边乘以正交矩阵 V，则有 $VDV = VHGPV$，同理 VH 和 PV 都为正交矩阵，当前的 $(VH)G(PV)$ 是 VDV 的奇异值分解，且与 D 有相同的奇异值矩阵 G.

$\|D\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(D^T D)}$ ∴ 既然奇异值矩阵相同，则 $\|VDV\|_2 = \|D\|_2$

$\|D\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |d_{ij}|^2} = \sqrt{trace(D^T D)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} \sigma_i^2}$ 奇异值不变，显然 $\|VDV\|_F = \|D\|_F$

$\|Ax\|_1 \overset{\det}{=} \sum_{i=1}^{8} |x_i|$ 而 Ax 中最大的 $\sum_{i=1}^{8}|x_i|$ 为 2 （最大列和）

$\therefore \|A\|_1 = 2$

$\|A\|_2 = \max\{\|Ax\|_2 : x \in K^8,\ \|x\|_2 = 1\}$

$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + \cdots |x_8|^2)^{\frac{1}{2}} = 1$ $\therefore x$ 还是单位向量

$\therefore \|A\|_2 = \max\{\|Ax\|_2 : x \in K^8,\ \|x\|_2 = 1\} = \sqrt{4} = 2$

$\|A\|_\infty = \max\{\underbrace{\|Ax\|_\infty}_{\text{最大行和}} : x \in K^8,\ \|x\|_\infty = 1\}$

$\|x\|_\infty = 1 = \max\{|x_1|, \cdots, |x_8|\}$ 令 x 仍为单位向量

则最大绝对行和仍为 2

$\therefore \|A\|_p = 2 \quad \forall p \in [1, \infty)$

二、

(i) $\because P^2-P=0$

$\therefore \lambda^2-\lambda=0$

$\lambda(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=1$

$Px=0\cdot x=0$ $\therefore$ P把x投影到0，在其零空间

$Py=1\cdot y=y$ ，P把y投影到y，即把y投影到自己，y在P的列空间上

(ii)

$\lambda^2-\lambda=0$

$\lambda_1=0 \quad \lambda_2=1$

$\therefore \lambda \in \Lambda(P) \subseteq \{0,1\}$

(iii)

向量a投影为P，设

$$P=a(a^T a)^{-1}a^{-1}$$

如果P可逆，则 $P^{-1}=(a^T)^{-1}a^T a a^{-1}=E$

$\because P \neq I_n$

$\therefore$ P不可逆， $\det(P)=0$

(iv) $P^2=P=P^T$

$(I_n-2P)(I_n-2P)^T = I_n I_n^T - 2I_n P^T - 2P I_n^T + 4PP^T = E-4P+4E$

$\because P^2-P=0$

$\therefore (E-4P+4E)PP^T = EPP^T = E$

$\therefore I_n-2P$ 为正交矩阵