

一、简答题（本题 15 分，每题各 5 分）

1. 循环不变式有三个性质：初始化、保持和终止。请问分别是什么含义？
2. 什么是动态规划？有两种具体实现方式，各是什么？
3. 什么是平衡二叉树？红黑树是一种二叉平衡树，请介绍红黑树的 5 个特点。

二、算法复杂度分析（本题 15 分，每题各 5 分）

4. 对于规模为 n 的输入，算法 A 运行 $4n^2$ 步，算法 B 运行 $128n \lg n$ 步。当 n 满足什么条件时，A 算法优于 B 算法？
5. 对于下列每个递归式，给出 $T(n)$ 的渐近上界和下界。假定 $n \leq 2$ 时， $T(n)$ 是常数。给出尽量紧确的界，并验证其真确性。

$$T(n) = 2T(n/2) + n^4$$

$$T(n) = 16T(n/4) + n^2$$

$$T(n) = T(n-2) + n^2$$

$$T(n) = 7T(n/2) + n^2$$

$$T(n) = T(n-1) + n$$

6. 证明：考虑函数 $f(n)$ ，如果 $f(n) \in o(g(n))$ ，则 $f(n) \notin \omega(g(n))$ 。（注： \notin 表示不属于）

三、算法基础（本题 15 分，每题各 5 分）

7. 已知算法 A 以概率 p 输出 1，以概率 $1-p$ 输出 0，且 $0 < p < 1$ 。现拟基于算法 A 设计算法 B，能以概率 $1/2$ 返回 0，以概率 $1/2$ 返回 1。请描述算法 B，并分析其期望运行时间。
8. 令 a 、 b 、 c 和 d 表示 4 个实数，如何仅用 3 次乘法计算出 $ac-bd$ 和 $ad+bc$ 。
9. 证明或者反驳以下猜测。

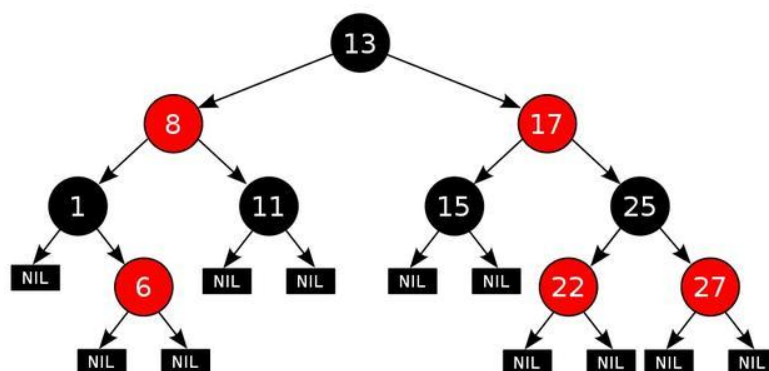
$$(1) f(n)+g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n))) \quad (2) f(n) = O(g(n)) \text{ 蕴含 } g(n) = \Omega(f(n))$$

四、排序与顺序统计量（本题 20 分，每题各 5 分）

10. 描述一个运行时间为 $\Theta(n \lg n)$ 的算法，给定 n 个整数的集合 S 和另一个整数 x ，该算法能确定 S 中是否存在两个其和刚好为 x 的元素。
11. 快速排序法的 PARTITION 函数使用了循环不变式。请解释初始化、保持和终止各是什么？
12. 说明在数组 $A = \langle 13, 19, 3, 6, 4, 8, 11, 18, 9 \rangle$ 上执行 PARTITION 操作的过程，画出数组的变化情况。
13. 算法 SELECT 将输入元素每 5 个元素分为一组，从而在线性时间内可解。如果分成每组 3 个元素，还是线性时间吗？为什么？

五、树（本题 20 分，每题各 5 分）

14. 将关键字 1,3,5,7,9,2,4,6,8,10 连续地插入一棵初始为空的红黑树之后，试画出该红黑树。
15. 以图中的红黑树为基础，插入元素，请画出新的红黑树。
(1) 仅插入 2； (2) 仅插入 20。



16. 假设一棵二叉搜索树中的结点在 1 到 1000 之间。现在想要查找数值为 363 的结点。下面序列中那个不是查找过的序列。
- (1) 2,252,401,398,330,344,397,363
 - (2) 924,220,911,244,898,258,362,263
 - (3) 925,202,911,240,912,245,363
 - (4) 2,399,387,219,266,382,381,278,363
 - (5) 935,278,347,621,299,392,358,363
17. 考虑一棵二叉搜索树 T ，其关键字互不相同。如果 T 中的一个结点 x 的右子树为空，且 x 有一个后继 y 。请结合树的结构，说明节点 y 和 x 之间的关系（提示：可以说明 y 和 x 之间的祖先/子孙关系和左/右节点关系）

六、动态规划（本题 15 分，每题各 5 分）

18. 对矩阵规模序列 $\langle 5, 15, 12, 5, 5 \rangle$ ，求矩阵链最优括号化方案。
19. 对输入链长度为 n 的矩阵链乘法问题，描述其子问题图包含多少个顶点？多少条边？这些边分别连接哪些顶点？
20. 钢条价格表如下所示。现在假设每次切割都需要有额外开销 2。请设计动态规划方法来求解最优切割方案。

长度	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
价格	1	5	8	9	10	17	17	20	24	30