数学基础知识

ElegantLaTeX Program

目录

第 1 章 多元函数微分部分

定义 1.1 (二元函数)

设有两个独立的变量 x 与 y 在其给定的变域 D 中，任取一组数值时，第三个变量 z 就以某一确定的法则有唯一确定的值与其对应，那么变量 z 称为变量 x 与 y 的二元函数。记作：$z = f(x, y)$. 其中 x 与 y 称为自变量，函数 z 叫做因变量，自变量 x 与 y 的变域 D 称为函数的定义域。

♣

定义 1.2 (二重极限)

对于二元函数 $z = f(x, y)$，可以学习当自变量 x 与 y 趋向于有限值 ξ 与 η 时，函数 z 的变化状态。在平面 xoy 上，(x, y) 趋向 (ξ, η) 的方式可以是多种多样的，因此二元函数的情况要比一元函数复杂得多。如果当点 (x, y) 以任意方式趋向点 (ξ, η) 时，$f(x, y)$ 总是趋向于一个确定的常数 A，那么就称 A 是二元函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (\xi, \eta)$ 时的极限，这种极限通常称为二重极限，如下图所示，记作

$$\lim_{x\to\xi, y\to\eta} f(x, y) = A$$

严格定义：

如果定义于 (ξ, η) 的某一去心邻域的一个二元函数 $f(x, y)$ 跟一个确定的常数 A 有如下关系：对于任意给定的正数 ε，无论怎样小，相应的必有另一个正数 δ，凡是满足

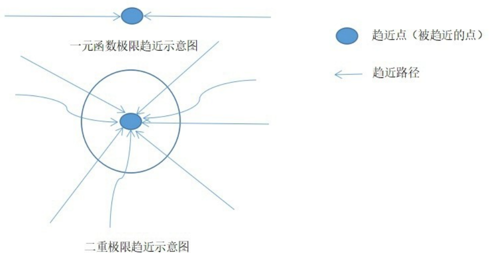
$$0 < (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < \delta^2$$

的一切 (x, y) 都使不等式

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立，那么常数 A 称为函数 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (\xi, \eta)$ 时的二重极限。

♣



二重极限四则运算法则：如果当 $(x, y) \to (\xi, \eta)$ 时，$f(x, y) \to A, g(x, y) \to B$. 那么

- $f(x, y) \pm g(x, y) \to A \pm B$
- $f(x, y)g(x, y) \to A * B$
- $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \to \frac{A}{B}$, 其中 $B \neq 0$

定义 1.3 (二元函数单调性)

只考虑二元函数 $f(x, y)$ 对 x 或 y 的单调性，即 y 不变，定义域内对任意的 $x_1, x_2 (x_1 > x_2)$，若 $f(x_1, y) - f(x_2, y) \geq 0$，则称 $f(x, y)$ 在定义域内单调递增；反之，则单调递减。

♣

定义 1.4 (一元函数连续性)

如果

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

那么就说函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续；

如果

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

那么就说函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处右连续；

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处既左连续又右连续。

♣

定义 1.5 (二元函数连续性)

若在定义域 D 内满足

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续；如果 $f(x,y)$ 在区域 D 上的每个点处都连续，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续。

♣

定义 1.6 (二元函数偏导数)

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义。若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{x=x_0,y=y_0},\ \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_0,y=y_0},\ z_x^{'}|_{x=x_0,y=y_0},\ f_x^{'}(x_0,y_0)$$

于是

$$f_x^{'}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f_y^{'}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的偏导数 $f_x^{'}(x,y), f_y^{'}(x,y)$ 仍具有偏导数，则它们的偏导数称为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数。按照对变量求导次序的不同，有如下四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}^{''}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = f_{xy}^{''}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = f_{yx}^{''}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}^{''}(x,y)$$

其中 $f_{xy}^{''}(x,y), f_{yx}^{''}(x,y)$ 称为二阶混合偏导数。同样可得三阶、四阶以及 n 阶偏导数。二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数。

♣

定义 1.7 (偏导数连续性)

多元函数的偏导数在一点连续是指偏导数在该点的某个邻域内存在，于是偏导数在这邻域内有定义，则这个偏导函数在该点连续。

定理 1.1 (二阶混合偏导数相等定理)

如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在定义域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等，即 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$。

定义 1.8 (全微分)

函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ 分别与自变量的增量 $\Delta x, \Delta y$ 乘积之和

$$f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$$

若该表达式与函数的全增量 Δz 之差是 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的高阶无穷小 ($\rho\to 0$)，那么称如下表达式为函数 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 处的全微分。记作

$$dz=f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$$

多元复合函数求导

- 链式求导

  设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 均在 (x,y) 处可导, 函数 $z=z(u,v)$ 在对应的 (u,v) 处有连续的一阶偏导数, 那么复合函数 $z=z(u(x,y),v(x,y))$ 在 (x,y) 处可导, 且有链式求导公式:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

- 全导数

  由二元函数 $z=z(u,v)$ 和两个一元函数 $u=u(x), v=v(x)$ 复合起来的函数 $z=z(u(x),v(x))$ 是 x 的一元函数，这时复合函数的导数就是一个一元函数的导数 $\frac{dz}{dx}$，称为全导数。此时的链式求导公式为:

$$\frac{dz}{dx}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{du}{dx}\\ \frac{dv}{dx}\end{pmatrix}$$

- 全微分形式不变性

  设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 均在 (x,y) 处可导, 函数 $z=z(u,v)$ 在对应的 (u,v) 处有连续的一阶偏导数, 那么复合函数 $z=z(u(x,y),v(x,y))$ 在 (x,y) 处可导, 则有

$$\begin{aligned}dz&=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\ dy\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}du\\ dv\end{pmatrix}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv\end{aligned}$$

第 2 章 多元函数积分部分

定义 2.1 (二重积分)

设 $z=f(x,y)$ 为有界闭区域 σ 上的有界函数：

(1) 把区域 σ 任意划分成 n 个子域 $\Delta\sigma_k(k=1,2,3,\ldots,n)$，其面积记作 $\Delta\sigma_k(k=1,2,3,\ldots,n)$

(2) 在每一个子域 $\Delta\sigma_k$ 上任取一点 (ξ_k,η_k)，作乘积 $f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$

(3) 把所有这些乘积相加，即作出和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

(4) 记子域的最大直径 d。如果不论子域怎样划分以及 (ξ_k,η_k) 怎样选取，上述和数当 $n\to+\infty$ 且 $d\to 0$ 时的极限存在，那么称此极限为函数 $f(x,y)$ 在区域 σ 上的二重积分。记作：

$$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

其中 x 与 y 称为积分变量，函数 $f(x,y)$ 称为被积函数，$f(x,y)d\sigma$ 称为被积表达式，σ 称为积分区域。♣

性质

1. 被积函数中的常数因子可以提到二重积分符号外面去
$$\iint_{\sigma} Af(x,y)d\sigma=A\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma$$

2. 有限个函数代数和的二重积分等于各函数二重积分的代数和
$$\iint_{\sigma}[f_1(x,y)\pm f_2(x,y)]\,d\sigma=\iint_{\sigma} f_1(x,y)d\sigma\pm\iint_{\sigma} f_2(x,y)d\sigma$$

3. 如果把积分区域 σ 分成两个子域 σ_1 与 σ_2，即 $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$，那么
$$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma=\iint_{\sigma_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{\sigma_2} f(x,y)d\sigma$$

4. 如果在 σ 上有 $f(x,y)\le g(x,y)$，那么
$$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma\le\iint_{\sigma} g(x,y)d\sigma$$

5. 积分中值定理：设 $f(x,y)$ 在闭域 σ 上连续，则在 σ 上至少存在一点 (ξ,η)，使
$$\iint_{\sigma} f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot S_\sigma$$
其中 S_σ 是区域 σ 的面积。

定义 2.2 (一元函数反常积分)

- 设 $f(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 上的连续函数，如果极限 $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ 存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$，即
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$
这时也称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。如果上述极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

- 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,b]$ 上的连续函数，则可类似的定义函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty,b]$ 上的反常积分
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

- 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty]$ 上的连续函数，如果反常积分
$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx,\int_0^{+\infty} f(x)dx$$
都收敛，则称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)dx$$
如果 $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 至少有一个发散，则称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

♣

定义 2.3 (二元函数含参量反常积分)

设 $f(x,y)$ 定义在无界区域 $R\{(x,y)\,|a\le x\le b,c\le y<+\infty\}$ 上，若对每一个固定的 $x\in[a,b]$，反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 都收敛，则它的值是 x 在区间 $[a,b]$ 上取值的函数，表示为
$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)dy,x\in[a,b]$$
称为定义在 $[a,b]$ 上的含参量 x 的无穷限反常积分，或简称为含参量反常积分。

♣

定义 2.4 (含参量反常积分一致收敛)

对于含参量反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 和函数 $I(x)$，若 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\forall M>N,\forall x\in[a,b]$，都有
$$\left|\int_M^{+\infty} f(x,y)dy\right|<\varepsilon$$
则称含参量反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $I(x)$。

♣

定义 2.5 (一致收敛积分连续性)

设 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)\,|a\le x<+\infty,c\le y\le d\}$ 上连续，$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，则一元函数 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上连续。

♣

定理 2.1 (积分顺序交换定理)

设 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y)\,|a\le x<+\infty,c\le y\le d\}$ 上连续，$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，则 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上可积，并且
$$\int_c^d dy\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty} dx\int_c^d f(x,y)dy$$

♡

定理 2.2 (积分号下求导的定理)

设 $f(x,y), f_y'(x,y)$ 在 $\{(x,y)\,|a\le x<+\infty, c\le y\le d\}$ 上连续，$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 收敛，$\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，则 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $[c,d]$ 上可导，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$$

定义 2.6 (雅可比行列式)

由 $A\subset R^n$ 到 R 的映射（或变换）就是 n 元函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A.$$

由 $A\subset R^n$ 到 R^n 的映射（或变换）就是 n 个 n 元函数构成的函数组，即

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \quad\cdots \qquad\qquad\qquad\qquad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D \\ y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n), \end{cases}$$

表示为 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$。设它们对每个自变量都存在偏导数，行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

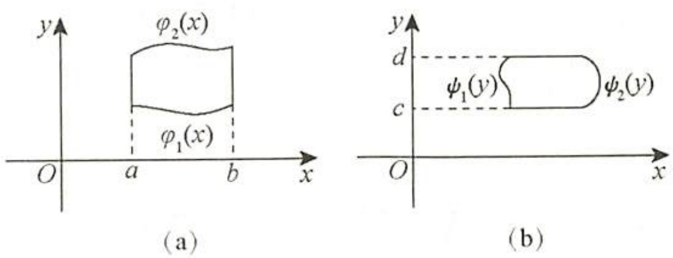
称为函数组 $(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 在点 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的雅可比行列式，也称为函数行列式，表示为

$$J_n=\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

二重积分计算

- 直角坐标系及换序

在直角坐标系下，按照积分次序的不同，一般将二重积分的计算分为两种情况。



(1)

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

其中 D 如上图 (a) 所示，为 X 型区域：$\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x), a\le x\le b$

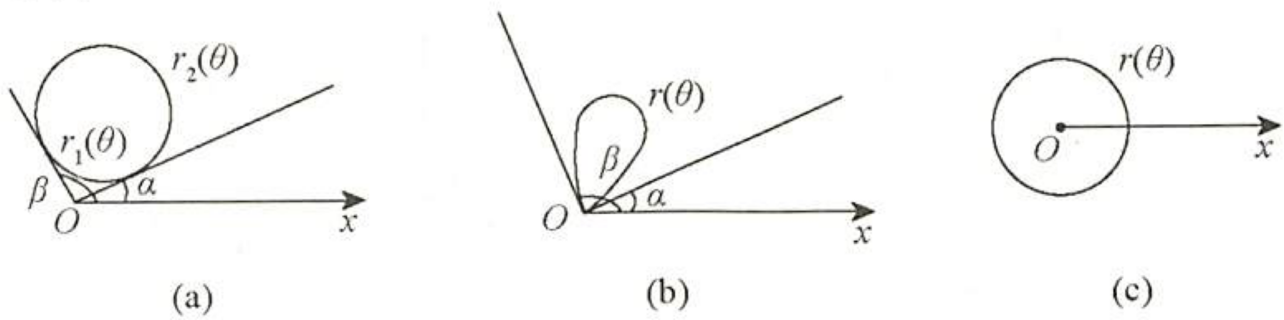
（2）

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

其中 D 如上图 (b) 所示，为 Y 型区域：$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d$

- 极坐标系及换序

在极坐标系下，按照积分区域与极点位置关系的不同，一般将二重积分的计算分为三种情况，如下图所示：



（a）极点 O 在区域 D 外部

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

（b）极点 O 在区域 D 边界上

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

（c）极点 O 在区域 D 内部

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

- 直角坐标系转换为极坐标系——换元

令 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy &= \iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{matrix}\right\| drd\theta \\ &= \iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\left\|\begin{matrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{matrix}\right\| drd\theta \\ &= \iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta\end{aligned}$$

其中 $\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{matrix}\right\|$ 指的是行列式的绝对值。

- 一般换元法

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)dxdy \xlongequal[y=y(u,v)]{x=x(u,v)} \iint\limits_{D_{uv}} f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$a.f(x,y)\rightarrow f\left[x(u,v),y(u,v)\right].$$

$$b.\iint\limits_{D_{xy}}\rightarrow\iint\limits_{D_{uv}}.$$

$$c.dxdy\rightarrow\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

注意：其中 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$，是 (x,y) 面到 (u,v) 面的一对一映射，$x=x(u,v),y=y(u,v)$ 存在一阶连续偏导数，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0.$

第 3 章 级数部分

定义 3.1 (级数)

设 $\{u_n\}$ 是一数列，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \ldots$$

称为无穷级数，简称级数。

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

称为级数的部分和。若部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，并称这个极限值 s 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$$

如果极限 $\lim_{n\to\infty} s_n$ 不存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

性质

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 s, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 也收敛, 且其和为 ks.

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s, σ , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛于 $s \pm \sigma$.

   注
   - 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散；
   - 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 敛散性不定。

3. 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的敛散性。

   注 一个级数的敛散性与其前有限项无关。

4. 收敛级数加括号仍收敛且和不变。

   注
   - 若级数加括号以后收敛，原级数不一定收敛；
   - 若级数加括号以后发散，在原级数一定发散。

5. 级数收敛的必要条件

   若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

注

- 若 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不一定收敛；
- 若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散。

定义 3.2 (正项级数)

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0$

基本定理：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{s_n\}$ 上有界。

正项级数审敛准则

1. 比较判别法
   设 $u_n \leq v_n$ ，则
   $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛（大收则收）；

   $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散（小散则散）。

2. 比较法极限形式
   设
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l(0 \leq l \leq +\infty)$$
   - 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散。
   - 若 $l = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散。
   - 若 $l = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛。

   注 使用比较法和比较法的极限形式时，需要适当地选择一个已知其敛散性的级数作为比较的基准。最常用的是 p 级数和等比级数。

   定义 3.3 (p 级数)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
   当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leq 1$ 时发散。

   定义 3.4 (等比级数)
   $$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n, a > 0, q > 0$$
   当 $q < 1$ 时收敛，当 $q \geq 1$ 时发散。

3. 比值法

若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛，} & \rho<1\\ \text{发散，} & \rho>1\\ \text{不一定，} & \rho=1\end{cases}$$

4. 根值法

若

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\begin{cases}\text{收敛，} & \rho<1\\ \text{发散，} & \rho>1\\ \text{不一定，} & \rho=1\end{cases}$$

第 4 章 向量矩阵二次型微分部分

定义 4.1 (向量函数梯度)

若 $x \in R^n, f(x) : R^n \to R$ 是一实值函数，其中 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，则定义

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial x^T} f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f\right)^T$$

♣

向量函数导数的运算法则

- 线性法则：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是向量 x 的实值函数，c_1 和 c_2 为实常数，则
$$\frac{\partial\left[c_1 f(x) + c_2 g(x)\right]}{\partial x} = c_1 \frac{\partial f(x)}{\partial x} + c_2 \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

- 乘法法则：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是向量 x 的实值函数，则
$$\frac{\partial f(x) g(x)}{\partial x} = g(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} + f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

- 商法则：若 $g(x) \neq 0$，则
$$\frac{\partial f(x)/g(x)}{\partial x} = \frac{1}{g^2(x)}\left[g(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x} - f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right]$$

定义 4.2 (矩阵函数梯度)

若 $A \in R^{n\times m}, f(A) : R^{n\times m} \to R$ 是一实值函数，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

则定义矩阵函数的梯度为

$$\frac{\partial}{\partial A} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_{11}} & \frac{\partial f}{\partial a_{12}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{1m}} \\ \frac{\partial f}{\partial a_{21}} & \frac{\partial f}{\partial a_{22}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{2m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial a_{n1}} & \frac{\partial f}{\partial a_{n2}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial a_{nm}} \end{pmatrix}$$

♣

矩阵函数导数的运算法则

- 线性法则：若 $f(A)$ 和 $g(A)$ 分别是矩阵 A 的实值函数，c_1 和 c_2 为实常数，则
$$\frac{\partial\left[c_1 f(A)+c_2 g(A)\right]}{\partial A}=c_1\frac{\partial f(A)}{\partial A}+c_2\frac{\partial g(A)}{\partial A}$$

- 乘法法则：若 $f(A)$ 和 $g(A)$ 都是矩阵 A 的实值函数，则
$$\frac{\partial f(A)g(A)}{\partial A}=g(A)\frac{\partial f(A)}{\partial A}+f(A)\frac{\partial g(A)}{\partial A}$$

- 商法则：若 $g(A)\neq 0$，则
$$\frac{\partial f(A)/g(A)}{\partial A}=\frac{1}{g^2(A)}\left[g(A)\frac{\partial f(A)}{\partial A}-f(A)\frac{\partial g(A)}{\partial A}\right]$$

定义 4.3 (向量微分)

设 $x\in R^n$，则向量 x 的微分定义为
$$dx=\begin{pmatrix}dx_1\\dx_2\\\vdots\\dx_n\end{pmatrix}, dx^T=(dx_1,dx_2,\dots,dx_n)$$

♣

定义 4.4 (矩阵微分)

设 $A\in R^{n\times m}$，则矩阵 A 的微分定义为
$$dA=\begin{pmatrix}da_{11}&da_{12}&\dots&da_{1n}\\da_{21}&da_{22}&\dots&da_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\da_{m1}&da_{m2}&\cdots&da_{mn}\end{pmatrix}$$

♣

矩阵微分性质

- $d(cA)=cdA, A\in R^{n\times m}$
- $d(A+B)=dA+dB, A\in R^{n\times m}, B\in R^{n\times m}$
- $d(AB)=dAB+AdB, A\in R^{n\times m}, B\in R^{m\times k}$
- $dA^T=(dA)^T, A\in R^{n\times m}$

定义 4.5 (二次型微分)

给定函数 $f(x) = x^T Ax$，其中 A 是一方阵，x 是一列向量，则

(1)

$$
\begin{aligned}
df(x) &= Tr(d(x^T Ax)) \\
&= Tr(d(x^T)Ax + x^T d(Ax)) \\
&= Tr(d(x^T)Ax + x^T dAx + x^T Adx) \\
&= Tr(dx^T Ax) + Tr(x^T Adx) \\
&= Tr(x^T A^T dx) + Tr(x^T Adx) \\
&= Tr(x^T (A + A^T)dx)
\end{aligned}
$$

根据

$$df = Tr((\frac{\partial f}{\partial x})^T dx)$$

可知

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (A + A^T)x$$

如果 A 是对称矩阵，即

$$A = A^T$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (A + A^T)x = 2Ax$$

(2)

$$
\begin{aligned}
df(A) &= Tr(x^T d(Ax)) \\
&= Tr(dx^T A^T x) \\
&= Tr(x^T dA^T x) \\
&= Tr(x^T dAx) \\
&= Tr(xx^T dA)
\end{aligned}
$$

根据

$$df = Tr((\frac{\partial f}{\partial A})^T dA)$$

可知

$$\frac{\partial f}{\partial A} = xx^T$$

♣