《概率论与数理统计》习题

第二十一讲　贝叶斯估计

1. 设一页书上的错别字个数服从泊松分布 $P(\lambda)$，λ 有两个可能取值：1.5 和 1.8，且先验分布为

$$P(\lambda = 1.5) = 0.45, \quad P(\lambda = 1.8) = 0.55$$

现检查了一页，发现有 3 个错别字，试求 λ 的后验分布。

2. 验证：正态分布方差（均值已知）的共轭先验分布是倒伽玛分布。(提示：若 X 服从伽玛分布，那么称随机变量 $1/X$ 的分布为倒伽玛分布。)

3. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自如下幂级数分布的样本，总体分布密度为

$$p(x; c, \theta) = cx^{c-1}\theta^{-c} I_{\{0 \le x \le \theta\}}, c > 0, \theta > 0.$$

4. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$ 的样本. 假定 λ 的先验分布为伽玛分布 $Ga(\alpha, \beta)$.
   (a) 计算 λ 的后验分布。
   (b) 求 λ 的贝叶斯估计 $\hat{\lambda}_1$。
   (c) 求 λ 的极大似然估计 $\hat{\lambda}_2$。

5. 设随机变量 X 服从负二项分布，其概率分布为

$$f(x|p) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, x = k, k+1, \cdots$$

证明其成功概率 p 的共轭先验分布族为贝塔分布族。

第二十二讲　区间估计

1. 阅读书第 300 页中例 6.6.1。采用随机模拟的方法，按以下设定复现图 6.6.1。$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 来自正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，我们打算构造 μ 的区间估计。假定均值 μ 的真值为 0，方差 σ^2 的真值为 $3^2 = 9$。考虑四种情况：

   情况一：方差已知，即 $\sigma^2 = 9$ 时，样本量 $n = 10$；

   情况二：方差已知，即 $\sigma^2 = 9$ 时，样本量 $n = 30$；

   情况三：方差未知时，样本量 $n = 10$；

   情况四：方差未知时，样本量 $n = 30$；

   在上述的每一种情况下，对 μ 构造置信水平为 95% 的置信区间，并重复 100 次。由此，得到 100 个区间，并类似地绘制图 6.6.1。比较所绘制的四张图，你可以得到怎样的结论？(答案写清结论及理由,图像可打印上交)

2. 总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2 已知，问样本量 n 取多大时才能保证 μ 的置信水平为 95% 的置信区间的长度不大于 k。

3. 假设人体身高服从正态分布，今抽测甲、乙两地区 18 岁 ~ 25 岁女青年身高数据如下：甲地抽取 10 名，样本均值 1.64 米，样本标准差 0.2 米；乙地区抽取 10 名，样本均值 1.62 米，样本标准差 0.1 米。求

   (a) 两样本总体方差比的置信水平为 95% 的置信区间；

   (b) 两样本总体均值差的置信水平为 95% 的置信区间；

4. 设总体 X 的密度函数为

   $$p(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} I_{\{x>\theta\}}, -\infty < \theta < \infty$$

   $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为抽自此总体分布的简单随机样本。

   (a) 证明：$x_{(1)} - \theta$ 的分布与 θ 无关，并求出此分布；

   (b) 求 θ 的置信水平的 $1-\alpha$ 置信区间。

5. $0.50, 1.25, 0.80, 2.00$ 是取自总体 X 的样本，已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$.

(a) 求 μ 的置信水平为 95% 的置信区间；

(b) 求 X 的数学期望的置信水平为 95% 的置信区间；