《概率论与数理统计》习题

第二讲　条件概率的定义与三大公式、独立性

1. 口袋中有一个球，不知它的颜色是黑的还是白的. 现再往口袋中放入一个白球，然后从口袋中任意取出一个，发现取出的是白球，试问口袋中原来那个球是白球的可能性为多少?

记事件 A 为“取出的是白球”，事件 B 为：原来那个球是白球“. 容易看出:$P(A|B) = 1, P(A|\overline{B}) = 0.5$, 另外由于对袋中原来那个球的颜色一无所知，故设 $P(B) = P(\overline{B}) = 0.5$ 是合理的. 由贝叶斯公式得

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})} = \frac{2}{3}$$

2. 假设只考虑天气的两种情况：有雨或者无雨. 若已知今天的天气情况，明天的天气保持不变的概率为 p, 变的概率为 $1-p$. 设第一天无雨，试求第 n 天也无雨的概率.

设事件 A_i 为”第 i 天无雨“，记 $p_i = P(A_i), i = 1, 2, \cdots$. 则有 $p_1 = 1$, 且

$$P(A_{i+1}|A_i), \quad P(A_{i+1}|\overline{A_i}) = 1-p$$

所以由全概率公式得

$$p_n = pp_n + (1-p)(1-p_{n-1}) = (2p-1)p_{n-1} + 1 - p, \quad n \geq 2.$$

得递推公式

$$p_n - \frac{1}{2} = (2p-1)(p_{n-1} - \frac{1}{2}), \quad n \geq 2.$$

所以

$$p_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}(p_1 - \frac{1}{2}),$$

将 $p_1 = 1$ 代入上式可得

$$p_n = \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}(\frac{1}{2})$$

由此得

$$p_n = \frac{1}{2}[1 + (2p-1)^{n-1}], \quad n = 2, 3, \cdots .$$

3. 设 $P(A)>0$, 试证：

$$P(B|A) \geq 1-\frac{P(\bar{B})}{P(A)}$$

因为

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geq P(A)+P(B)-1=P(A)-P(\overline{B})$$

所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\geq\frac{P(A)-P(\overline{B})}{P(A)}=1-\frac{P(\overline{B})}{P(A)}.$$

4. 甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知在每局中甲胜的概率为 0.6, 乙胜的概率为 0.4. 比赛可采用三局两胜制或五局三胜制，试问哪一种比赛制度对甲更有利?

(1) 若采用三局两胜制，则甲在下列两种情况下获胜：
$A_1=$” 甲胜前两局”
$A_2=$” 前两局甲乙各胜一局, 第三局甲胜”
所以得

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.648$$

(2) 若采用五局三胜制，则甲在下列三种情况下获胜：
$B_1=$” 前三局甲胜”,
$B_2=$” 前三局中甲胜两局乙胜一局，第四局甲胜”,
$B_3=$” 前四局甲乙各胜两局，第五局甲胜”,
所以得

$$P(B_1\cup B_2\cup B_3)=0.682$$

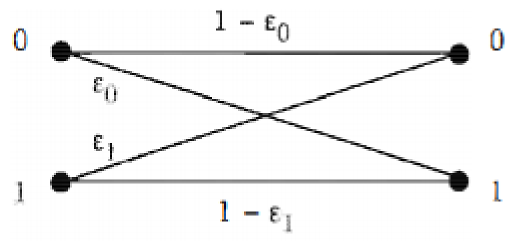
所以五局三胜制对甲更有利

5. 对于事件 A 与事件 B, 假设 $P(B)>0$，证明 $P(A\cap B|B)=P(A|B)$.
通过条件概率的定义，有

$$P(A\cap B|B)=\frac{P(A\cap B\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A|B)$$

6. 现用噪声通信信道进行通信。信源通过噪声通信信道发送消息（一串符号）。每个符号为 0 或 1，概率分别为 p 和 $1{-}p$，且分别以概率 ϵ_0 和 ϵ_1 被错误接收，不

同符号被错误接收的概率是独立的。



图：二进制通信信道中的错误概率

(1) 正确接收第 k 个符号的概率是多少？(2) 符号串 1011 被正确接收的概率是多少？(3) 为了提高可靠性，每个符号传输三次，接收的字符串按多数规则解码。换句话说，当且仅当接收到的三个符号串包含至少两个 0（或分别为 1）时，0（或 1）被发送为 000（或 111），并且在接收器处被解码为 0（或 1）。0 被正确解码的概率是多少？(4) 在使用 (3) 中的方案时，ϵ_0 取值为多少，0 被正确解码的概率能有所提高？(5) 假设使用了第 (3) 中的方案。如果接收到的字符串为 101，则符号为 0 的概率是多少？

(1) 令 A 为发送 0 的事件。使用总概率定理，期望的概率是

$$\mathbf{P}(A)(1-\epsilon_0)+(1-\mathbf{P}(A))(1-\epsilon_1)=p(1-\epsilon_0)+(1-p)(1-\epsilon_1)$$

(2) 通过独立性，字符串 1011 被正确接收的概率为

$$(1-\epsilon_0)(1-\epsilon_1)^3$$

(3) 为了正确解码 0，接收到的字符串必须是 000,001,010 或 100 。假设传输的字符串是 000 ，接收到 000 的概率是 $(1-\epsilon_0)^3$ ，每个字符串 001,010 和 100 的概率是 $\epsilon_0(1-\epsilon_0)^2$ 。因此，正确解码的概率为

$$3\epsilon_0(1-\epsilon_0)^2+(1-\epsilon_0)^3$$

(4) 当符号为 0 时，使用和不使用 (3) 中的方案正确解码的概率分别是 $3\epsilon_0(1-\epsilon_0)^2+(1-\epsilon_0)^3$ 和 $1-\epsilon_0$ 因此，如果 (3) 中的方案提高了概率，有

$$3\epsilon_0(1-\epsilon_0)^2+(1-\epsilon_0)^3>(1-\epsilon_0)$$

或

$$(1-\epsilon_0)(1+2\epsilon_0)>1$$

这相当于 $0<\epsilon_0<1/2$ 。

(5) 通过贝叶斯法则，有

$$\mathbf{P}(0 \mid 101)=\frac{\mathbf{P}(0)\mathbf{P}(101 \mid 0)}{\mathbf{P}(0)\mathbf{P}(101 \mid 0)+\mathbf{P}(1)\mathbf{P}(101 \mid 1)}$$

上式中所需的概率为

$$\mathbf{P}(0)=p, \quad \mathbf{P}(1)=1-p, \quad \mathbf{P}(101 \mid 0)=\epsilon_0^2\left(1-\epsilon_0\right), \quad \mathbf{P}(101 \mid 1)=\epsilon_1\left(1-\epsilon_1\right)^2$$