

## 《概率论与数理统计》习题

### 第七讲 多维随机变量及常见的分布

1. 口袋中有 5 个白球, 8 个黑球, 从中不放回地一个接一个取出 3 个。如果第  $i$  次取出的是白球, 则令  $X_i = 1$ , 否则令  $X_i = 0, i = 1, 2, 3$ . 求

(a)  $(X_1, X_2, X_3)$  的联合分布列;

(b)  $(X_1, X_2)$  的联合分布列

2. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 6(1-y), & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(a) 求  $P(X > 0.5, Y > 0.5)$ ;

(b) 求  $P(X < 0.5)$  和  $P(Y < 0.5)$ ;

(c) 求  $P(X + Y < 1)$ .

3. 设随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 其联合分布列如下, 试求联合分布列中的  $a, b, c$ .

$X \backslash Y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	$a$	$1/9$	$c$
$x_2$	$1/9$	$b$	$1/3$

4. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求 (1) 边际密度函数  $p_X(x)$  和  $p_Y(y)$ ; (2)  $X$  与  $Y$  是否独立?

5. 在长为  $a$  的线段的中点的两边随机地各取一点, 求两点间的距离小于  $a/3$  的概率.
6. 股票市场交易者购入 100 股 A 股票和 200 股 B 股票。设  $X$  和  $Y$  分别表示 A 股票和 B 股票的价格波动。在一段时间内, 假设  $X$  和  $Y$  的联合密度函数在整数集  $x$  和  $y$  上是一致的且满足

$$-2 \leq x \leq 4, \quad -1 \leq y - x \leq 1$$

- (a) 求  $X$  和  $Y$  的边缘密度函数以及均值.
- (b) 求该交易者获取利润的均值.

### 第八讲 多维随机变量的特征数

1. 求掷  $n$  颗骰子出现点数之和的数学期望与方差.
2. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求  $E(X), E(Y), Cov(X, Y)$

3. 设随机变量  $X$  有密度函数  $p(x)$ , 且密度函数  $p(x)$  是偶函数, 假定  $E|X|^3 < +\infty$ . 证明:  $X$  与  $Y = X^2$  不相关, 但不独立.
4. 如今有四个随机变量:  $W, X, Y, Z$ . 且满足

$$\begin{aligned} E[W] &= E[X] = E[Y] = E[Z] = 0, \\ Var(W) &= Var(X) = Var(Y) = Var(Z) = 1. \end{aligned}$$

假设  $W, X, Y, Z$  是两两不相关的。求  $R, S$  的相关系数  $\rho(R, S)$  以及  $R, T$  的相关系数  $\rho(R, T)$ . 其中  $R = W + X, S = X + Y, T = Y + Z$ .