《概率论与数理统计》习题

第二十三讲　7.1 假设检验的基本思想与概念

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自 $N(\mu, 1)$ 的样本，考虑如下假设检验问题

$$H_0: \mu = 2 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu = 3$$

若检验由拒绝域为 $W = \{\bar{x} \geq 2.6\}$ 确定。

(a) 当 $n = 20$ 时求检验犯两类错误的概率；

(b) 如果要使得检验犯第二类错误的概率 $\beta \leq 0.01$，n 最小应取多少?

(c) 证明：当 $n \to \infty$ 时，$\alpha \to 0$，$\beta \to 0$。

解:

(1) 在 H_0 成立时，$\bar{x} \sim N(2, 1/20)$，犯第一类错误的概率为:

$$\alpha = P(\bar{x} \geq 2.6 | H_0) = P(\frac{\bar{x} - 2}{\sqrt{1/20}} \geq \frac{2.6 - 2}{\sqrt{1/20}}) = 0.0037.$$

同理，在 H_1 成立时，$\bar{x} \sim N(3, 1/20)$，犯第二类错误的概率为:

$$\beta = P(\bar{x} < 2.6 | H_1) = P(\frac{\bar{x} - 3}{\sqrt{1/20}} < \frac{2.6 - 2}{\sqrt{1/20}}) = 0.0367.$$

(2) 可得:

$$\beta = P(\bar{x} < 2.6 | H_1) = P(\frac{\bar{x} - 3}{\sqrt{1/n}} < \frac{2.6 - 2}{\sqrt{1/n}}) \leq 0.01.$$

$$n \geq 33.93.$$

因而，n 最小应取 34 才使得检验犯第二类错误的概率 $\beta \leq 0.01$.

(3) 证明:

当样本量为 n 时，

$$\alpha = P(\bar{x} \geq 2.6 | H_0) = P(\frac{\bar{x} - 2}{\sqrt{1/n}} \geq \frac{2.6 - 2}{\sqrt{1/n}}) = 1 - \Phi(0.6\sqrt{n}).$$

$$\beta = P(\bar{x} < 2.6 | H_1) = P(\frac{\bar{x} - 3}{\sqrt{1/n}} < \frac{2.6 - 2}{\sqrt{1/n}}) = 1 - \Phi(0.4\sqrt{n}).$$

当 $n \to \infty$，$\Phi(0.6\sqrt{n}) \to 1$，$\Phi(0.4\sqrt{n}) \to 1$，使得 $\alpha \to 0$，$\beta \to 0$.　■

2. 设总体为均匀分布 $U(0,\theta)$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本，考虑检验问题

$$H_0 : \theta \geq 3 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta < 3,$$

拒绝域取为 $W = \{x_{(n)} \leq 2.5\}$，求检验犯第一类错误的最大值 α，若要使得该最大值 α 不超过 0.05，n 至少应取多大？解：

均匀分布 $U(0,\theta)$ 的最大次序统计量 $x_{(n)}$ 的密度函数为：

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < x < \theta \\ 0, & others. \end{cases}$$

所以，

$$\alpha(\theta) = P(x_{(n)} \leq 2.5 | H_0) = \int_0^{2.5} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = (\frac{2.5}{\theta})^n.$$

可以看出，$\alpha(\theta)$ 关于 θ 的减函数，故其最大值在 $\theta = 3$ 时达到，最大值为 $\alpha(3) = (\frac{2.5}{3})^n$. 若要 $\alpha(3) \leq 0.05$，那么 $n \geq 16.43$，即 n 至少为 17.

3. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{20}$ 是来自 $0-1$ 总体 $b(1,p)$ 的样本，考虑如下检验问题：

$$H_0 : p = 0.2 \quad \text{vs} \quad H_1 : p \neq 0.2$$

取拒绝域为 $W = \{\sum_{i=1}^{20} x_i \geq 7 \text{或} \sum_{i=1}^{20} x_i \leq 1\}$，

(a) 求 $p = 0, 0.1, 0.2, \cdots, 0.9, 1$ 时的势并由此画出势函数的图；

(b) 求在 $p = 0.05$ 时犯第二类错误的概率。

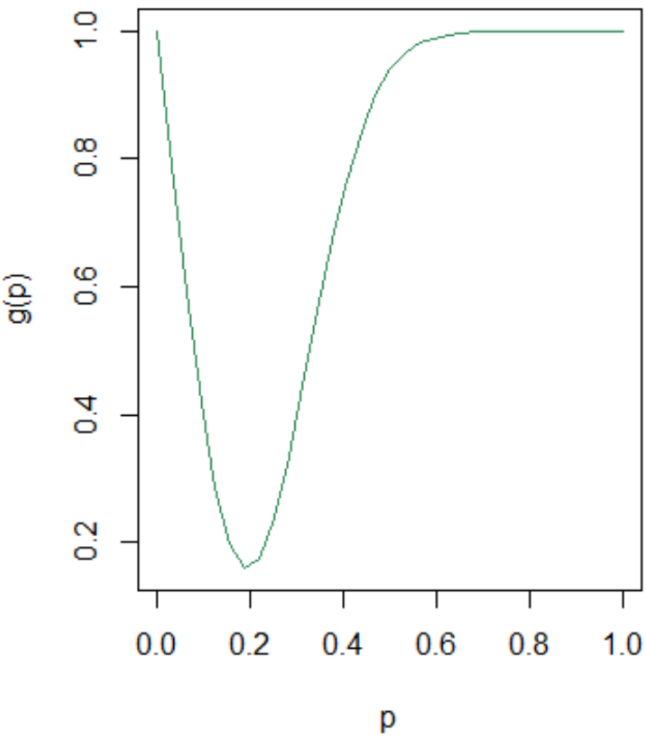
解：

(1) 势函数的计算公式为：

$$\begin{aligned} g(p) &= P_p(\sum_{i=1}^{20} x_i \geq 7 \; or \; \sum_{i=1}^{20} x_i \leq 1) \\ &= \sum_{i=0}^{1} \binom{20}{i} p^i (1-p)^{20-i} + \sum_{i=7}^{20} \binom{20}{i} p^i (1-p)^{20-i}. \end{aligned}$$

当 $p = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1$ 时 , $g(p) = 1.00, 0.39, 0.16, 0.40, 0.75, 0.94, 0.99, 1.00, 1.00, 1.00,$

图像如下：



(2) 当 $p = 0.05$ 时，$\beta = 1 - g(0.05) = 0.2641$.

7.2 正态总体参数假设检验

要求：（1）在应用题中，需要写出严格地写出拒绝域并计算 p 值；（2）无特殊指定，显著性检验 $\alpha = 0.05$；

1. 化肥厂用自动包装机包装化肥，每包的质量服从正态分布，其平均质量为 100kg，标准差为 1.2kg。某日开工后，为了确定这天包装机工作是否正常，随机抽取 9 袋化肥，称得质量（单位:kg）如下：

$$99.3 \quad 98.7 \quad 100.5 \quad 101.2 \quad 98.3 \quad 99.7 \quad 99.5 \quad 102.1 \quad 100.5$$

设方差稳定不变，问这一天包装机的工作是否正常（取 $\alpha = 0.05$)?

解：

此题为总体方差已知时关于正态总体均值的双边假设检验问题,总体 $X \sim N(\mu, 1.2^2)$。

$H_0 : \mu = 100 \quad vs \quad H_1 : \mu \neq 100.$

拒绝域：$W = \left\{|u| \geq u_{1-\alpha/2} = 1.96\right\}.$

计算得：$\bar{x} = 99.98$，$u = \frac{3(99.98-100)}{1.2} = -0.05$，$p = 0.96 > \alpha.$

由于 u 值未落在拒绝域内，没有充分理由拒绝原假设，所以接受原假设，认为这天包装机工作正常。

2. 考察一鱼塘中的与的含汞量，随机地选取 10 条鱼，测得各条鱼的含汞量（单位：mg）为

$$0.8 \quad 1.6 \quad 0.9 \quad 0.8 \quad 1.2 \quad 0.4 \quad 0.7 \quad 1.0 \quad 1.2 \quad 1.1$$

设鱼的含汞量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。试检验假设 $H_0 : \mu \leq 1.2$ vs $H_1 : \mu > 1.2$（取 $\alpha = 0.1$)。

解：

此题为总体方差未知时关于正态总体均值的单边假设检验问题。n=10.

$H_0 : \mu \leq 1.2 \quad vs \quad H_1 : \mu > 1.2.$

拒绝域：$W = \{t > t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.9}(9) = 1.3830\}.$

计算得：$t = -2.2027 < 1.3820$，$p = 0.97 > \alpha.$

在显著效水平为 0.1 下，由于 t 值未落在拒绝域内，没有充分理由拒绝原假设，所以接受原假设。

3. 一药厂生产一种新的止痛片，厂方希望验证服用新药片后至开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半，因此厂方提出需检验假设

$$H_0 : \mu_1 = 2\mu_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_1 > 2\mu_2$$

此处，μ_1, μ_2 分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至开始起作用的时间间隔的总体的均值。设两总体均为正态分布且方差分别为已知值 σ_1^2, σ_2^2，现分别在两总体中取一样本 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_m$，设两个样本独立。试给出上述假设检验问题的检验统计量，拒绝域，并给出 p 值的计算公式。
解:
设 X 为服用原止痛片至开始起作用的时间间隔，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为样本，Y 为服用新止痛片至开始起作用的时间间隔，$y_1, y_2, \ldots, y_m$ 为样本，且两样本独立，$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
此题为两样本总体方差已知时关于正态总体均值的单边假设检验问题。
$H_0 : \mu_1 = 2\mu_2 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 > 2\mu_2$.
拒绝域：$W = \{u > u_{1-\alpha}\}$.
检验统计量为: $u = \frac{\bar{x}-2\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{4\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$.
令 $u_0 = \frac{\bar{x}-2\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{4\sigma_2^2}{n}}}$，其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 由样本计算得到。
p 值的计算公式为：$p = P(u > u_0)$.

4. 对冷却到 $-0.72°\text{C}$ 的样品用 A，B 两种测量方法测量其融化到 $0°\text{C}$ 时的潜热，数据如下：

方法 A :	79.98	80.04	80.02	80.04	80.03	80.03	80.04	79.97
	80.05	80.03	80.02	80.00	80.02			
方法 B :	80.02	79.94	79.98	79.97	80.03	79.95	79.97	79; 97

假设它们服从正态分布，方差相等。在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 时，检验两种测量方法的平均性能是否相等？解:

设 X 和 Y 为两种测量方法，$X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$.

此题为两样本总体方差未知且相等时关于正态总体均值的双边假设检验问题。n=13，n=8.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

拒绝域：$W = \{|t| > t_{1-\alpha/2}(n+m-2) = 2.093\}$.

检验统计量为: $t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} = 3.31 > 2.093$，$p = 0.0036 < \alpha$.

由于 t 值落在拒绝域内，有充分理由拒绝原假设，所以认为两种测量方法的平均性能有显著差异。

5. 为了比较测定活水中氯气含量的两种方法，特在各种场合收集到 8 个污水水样，每个水样均用这两种方法测定氯气含量（单位：mg/l），具体数据如下：

水样号	方法一（x）	方法二（y）	差（$d = x - y$）
1	0.36	0.39	-0.03
2	1.35	0.84	0.51
3	2.56	1.76	0.80
4	3.92	3.35	0.57
5	5.35	4.69	0.66
6	8.33	7.70	0.63
7	10.70	10.52	0.18
8	10.91	10.92	-0.01

设总体为正态分布。试比较两种测定方法是否有显著差异。解：

可看作成对数据的双边假设检验问题。令其差 $d_i = s_i - y_i$.

$H_0 : d = 0 \quad vs \quad H_1 : d \neq 0$.

拒绝域：$W = \{|t| \geq t_{1-\alpha/2}(n+m-1) = 2.3646\}$.

检验统计量为: $t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = 3.646 > 2.3646$，$p = 0.0082 < \alpha$.

由于 t 值落在拒绝域内，所以有利于拒绝原假设，认为两种测定方法有显著差异。

6. 测得两批电子器件的样品的电阻（单位：Ω）为

A 批(x) :	0.140	0.138	0.143	0.142	0.144	0.137
B 批(y) :	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

设这两批器材的电阻值分别服从分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2),N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且两样本独立。

(a) 试检验两个总体的方差是否相等；

(b) 假定两总体的方差相等的情况下，试检验两个总体的均值是否相等；

解:

(1) 采用 F 检验。n=6，m=6.

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \quad vs \quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$

拒绝域: $W=\left\{F\leq F_{\alpha/2}(n-1,m-1) \quad or \quad F\geq F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)\right\}.$

检验统计量为: $F=\frac{s_x^2}{s_y^2}=1.0754.$

由于 F 值没有落在拒绝域内，没有充分理由拒绝原假设，所以认为两个总体的方差相等。

(2) 由于 (1) 问认为两个总体的方差相等，转化为两样本总体方差未知但相等时关于正态总体均值的双边假设检验问题。

$H_0:\mu_1=\mu_2 \quad vs \quad H_1:\mu_1\neq\mu_2.$

拒绝域：$W=\left\{|t|\geq t_{1-\alpha/2}(n+m—2)=2.2281\right\}.$

检验统计量为: $t=1.3856<2.2281$，$p=0.196>\alpha.$

由于 t 值未落在拒绝域内，所以接受原假设。

第二十四讲　7.4 似然比检验与分布拟合检验

1. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，试求假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ 的似然比检验。

   $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

   $L(\sigma^2) = p\left(x_1 \cdots x_n; \sigma^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right\}$

   $\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{in}^n (x_i - \bar{x})^2\right) + A$

   $\frac{\partial \ln L\left(\sigma^2\right)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0$

   $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s_n^2$

   因此，$\lambda = \frac{\left(s_n^2\right)^{-\frac{n}{2}}}{\left(\sigma_0^2\right)^{\frac{n}{2}}}\frac{\exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}}{\exp\left\{-\frac{ns_n^2}{2\sigma_0^2}\right\}} = \left(\frac{s_n^2}{\sigma_0^2}\exp\left(-\frac{s^2}{\sigma_0^2}\right)\right)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{n}{2}\right)$

   $\{\lambda \geqslant c\} \Leftrightarrow \left\{\frac{ns_n^2}{\sigma_\sigma^2} \leq d_1 \text{或} \frac{ns_n^2}{\sigma^2} \geqslant d_2\right\}$

2. 掷一颗骰子 60 次，结果如下

点数	1	2	3	4	5	6
次数	7	8	12	11	9	13

   在显著性水平为 0.05 下检验这颗骰子是否均匀。

   $H_0: P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = \frac{1}{6}$

   $W = \left\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(5)\right\}, \quad \alpha = 0.05, \quad \{\chi^2 \geqslant 11.0705\}$

   $\chi^2 = \frac{(7-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} + \cdots + \frac{(13-10)^2}{10} = 2.8 < 11.0705$

   $P = P(\chi^2(5) \geqslant 2.8) = 0.7308 > 0.05$

   接受原假设