

概率论与数理统计

2021—2022 学年第二学期

作业完成前需阅读以下内容：

- 本次作业共 5 大题，满分 100 分；
- 所有试题均为简答题，需要提供解题过程，解题过程包括但不限于：证明、论述、代码等；
- 完成本次作业时可以查阅资料和书籍，但不要相互讨论和抄袭；
- 如果发现有抄袭的现象，按零分计；
- 本次作业在课程总评中占 5%。

1. (一题多解) 令 X 是一个自由度为 50 的卡方分布随机变量。请采用 多 种方法计算 $P(40 < X < 60)$ 的近似值。

2. 令 x_1, x_2, \dots, x_n 是一组随机样本。 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ 是一组 Bootstrap 样本，也就是说，对这 n 个样本我们有放回且等概率地抽了 n 次样本，于是得到了一组新的样本 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ 。求

(a) x_i^* 的期望与方差；

(b) 从平均的意义上来说，在 n 个 Bootstrap 样本中，不同的样本数量占比约为多少？

3. 现有一枚硬币，设其正面朝上的概率为 p 。同学 A 利用这枚硬币抛了 3 次，均反面朝上。同学 A 将该硬币交给了同学 B。同学 B 抛了 4 次才首次出现正面朝上。根据上述实验的结果，请给出 p 的最大似然估计。

4. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自于一种特殊分布的样本，其累积分布函数 (c.d.f.) 为

$$F(x|\theta) = 1 - \frac{1}{(1+x^2)^\theta}, x \geq 0,$$

其中，参数 $\theta > 0$ 。 θ 的先验分布是伽马分布。

(a) 证明：伽马分布是 θ 的共轭先验分布；

(b) 求 θ 的贝叶斯估计。

5. (实验题) 如何理解第一类错误发生的概率 α ? 能否设计一个实验来说明 α ? (提示：请参考置信区间中的置信度的理解)