《概率论与数理统计》习题

第五讲　期望，方差及其他特征数

1. 设随机变量 X 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

如果 $E(X) = 2/3$, 求 a 和 b.

解由 $\int_0^1 (a + bx^2)dx = 1$ 得

$$a + \frac{1}{3}b = 1$$

又

$$\frac{2}{3} = E(X) = \int_0^1 x(a + bx^2)dx$$

可得

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = \frac{2}{3}$$

联立求解：$a = \frac{1}{3}, b = 2$

2. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = 1 - e^{-x^2}, x > 0$$

试求 $E(X)$ 和 $Var(X)$.

因为 X 为非负连续随机变量，有

$$E(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(X))dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

令 $x = t/\sqrt{2}$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}dt = \sqrt{\pi}/2$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2}dx = 1$$

由此得 $Var(X) = 1 - \pi/4$

3. 设随机变量 X $U(a,b)$, 对 $k=1,2,3,4$, 求 $\mu_k = E(X^k)$ 与 $\upsilon_k = E(X-E(X))^k$. 进一步求此分布的偏度系数和峰度系数。

因为
$$E(X^k) = \int_a^b \frac{x^k}{b-a}dx = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$$
所以
$$\begin{aligned}
\mu_1 &= E(X) = \frac{a+b}{2} \\
\mu_2 &= E(X^2) = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) \\
\mu_3 &= E(X^3) = \frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \\
\mu_4 &= E(X^4) = \frac{1}{5}(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) \\
\nu_1 &= E(X-E(X)) = 0 \\
\nu_2 &= E(X-E(X))^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \\
\nu_3 &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2{\mu_1}^3 = 0 \\
\nu_4 &= \mu_4 - 4\mu_3\mu_1 + 6\mu_2{\mu_1}^2 - 3{\mu_1}^4 = \frac{(b-a)^4}{80}
\end{aligned}$$
偏度系数和峰度系数分别为
$$\begin{aligned}
\beta_s &= \frac{\nu_3}{[\nu_2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \\
\beta_k &= \frac{\nu_4}{{\nu_2}^2} - 3 = -1.2
\end{aligned}$$

4. 设随机变量 X 服从双参数韦布尔分布，其分布函数为
$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right\}, x > 0,$$
其中 $\eta > 0, m > 0$. 试写出该分布的 p 分位数 x_p 的表达式，且求出当 $m=1.5, \eta=1000$ 时的 $x_{0.1}, x_{0.5}, x_{0.8}$ 的值。因为 p 分位数 x_p 满足
$$1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^m\right\} = p$$
解的
$$x_p = \eta[-ln(1-p)]^{\frac{1}{m}}$$
将 $m=1.5, \eta=1000$ 代入上式可得

$x_{0.1} = 223.08 \quad x_{0.5} = 783.22 \quad x_{0.8} = 1373.36.$

第六讲　一元随机变量函数的分布

1. 已知随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{e^x+e^{-x}},-\infty<x<+\infty$$

试求随机变量 $Y=g(X)$ 的概率分布，其中

$$g(x)=\begin{cases}-1, & 当x<0,\\ 1, & 当x\geq 0.\end{cases}$$

$p(x)$ 为偶函数，可得 $P(X<0)=P(\geq 0)=0.5$
由此可得
$P(Y=-1)=P(X<0)=P(X\geq 0)=P(Y=1)=0.5$

2. 设圆的直径服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，求圆的面积的密度函数.
设圆的直径为 X，则圆的面积 $Y=\pi X^2/4$, 而 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因为 $y=g(x)=\pi x^2/4$ 在区间 (0,1) 上为严格单调增函数，其反函数为 $x=h(y)=\sqrt{4y/\pi}$, 且 $h'(y)=1/\sqrt{\pi y}$, 所以圆面积 $Y=\pi X^2/4$ 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}p_X(\sqrt{4y/\pi})|1/\sqrt{\pi y}|, & 0<y<\pi/4\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

即

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & 0<y<\pi/4\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

3. 设随机变量 X 的密度函数为

$$p_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2, & -1<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求下列随机变量的分布：(1)$Y_1=3X$; (2)$Y_2=3-X$; (3)$Y_3=X^2$.
(1)
y = g(x) = 3x 在区间 (-1，1) 上为严格单调增函数

反函数:x = h(y) = y/3

$$p(x)=\begin{cases}p_X(y/3)|1/3|, & -3<y<3\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即

$$p(x)=\begin{cases}y^2/18, & -3<y<3\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)

y = g(x) = 3-x 在区间 (-1，1) 上为严格单调减函数

反函数:x = h(y) = 3-y

$$p(x)=\begin{cases}p_X(3-y)|-1|, & 2<y<4\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即

$$p(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(3-y)^2, & 2<y<4\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3)

因为 Y_3 的可能取值区间为 (0,1)，所以在区间 (0,1) 外，Y_3 的密度函数为 $p_Y(y)=0$, 而当 0<y<1 时,Y_3 的分布函数为

$$F_{Y_3}(y)=P(Y_3\le y)=P(X^2\le y)=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

上式两边关于 y 求导，得

$$P_Y(y)=P_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}+P_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}=\frac{3}{2}\sqrt{y}$$

即

$$p(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\sqrt{y}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

4. 设 X 为随机变量，其取值范围为 0 到 9，取值概率相等均为 1/10.

   (a) 求随机变量 $Y=X\ \mathrm{mod}(3)$ 的分布列.

Y	0	1	2
P	0.4	0.3	0.3

(b) 求随机变量 $Y = 5 \bmod (X+1)$ 的分布列.

Y	0	1	2	5
P	0.2	0.2	0.1	0.5