《概率论与数理统计》习题

第九讲　多维随机变量函数的分布

1. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且 $X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu)$. 如果定义随机变量 Z 如下

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{当} X \le Y, \\ 0, & \text{当} X > Y. \end{cases}$$

求 Z 的分布列.

2. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

(a) 求 $U = X + Y$ 与 $V = X/(X+Y)$ 的联合密度函数 $p_{U,V}(u,v)$;

(b) 以上的 U 与 V 独立吗?

3. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, 试证

$$P(X_i = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}$$

4. 一些随机变量的最小概率密度函数。在某一天，你的高尔夫球得分在 101 到 110 之间，独立于其他天且概率均为 0.1。为了提高自己的分数，你决定在三个不同的日子里进行比赛，并取 X_1, X_2, X_3 三天中的最低分数作为自己的分数 X.

(a) 计算 X 的概率密度函数.

(b) 三天的比赛让你的期望成绩提高了多少?

第十讲　条件分布与条件期望

1. 一射手单发命中目标的概率为 $p(0 < p < 1)$, 射击进行到命中目标两次为止. 设 X 为第一次命中目标所需的射击次数，Y 为总共进行的射击次数，求 (X, Y) 的联合分布和条件分布.

2. 随机变量 X 服从 $(1, 2)$ 上的均匀分布，在 $X = x$ 的条件下，随机变量 Y 的条件分布是参数为 x 的指数分布, 证明: XY 服从参数为 1 的指数分布.

3. 设以下所涉及的数学期望均存在，试证:
   (a) $E[g(X)Y|X] = g(X)E(Y|X)$;

   (b) $E(XY) = E[XE(Y|X)]$;

   (c) $Cov[X, E(Y|X)] = Cov(X, Y)$.

4. Pat 和 Nat 将要约会, 他们所有的约会都安排在晚上 9 点开始。Nat 总是在晚上 9 点准时到达。Pat 非常混乱，到达的时间在晚上 8 点到晚上 10 点之间均匀分布。设 X 表示从晚上 8 点到 Pat 到达的时间之间的小时数。如果 Pat 在晚上 9 点之前到达，他们的约会将持续整整 3 个小时。如果 Pat 在晚上 9 点之后到达，他们约会的持续时间将在 0 到 3-X 小时之间均匀分布。约会从他们见面的时候开始。当 Pat 迟到时，Nat 会感到恼火，在 Pat 第二次约会迟到超过 45 分钟后，Nat 将结束这段关系。所有约会均独立于任何其他约会。
   (a) Nat 等待 Pat 到达的期望小时数是多少?
   (b) 任一约会的期望持续时间是多少?
   (c) 他们分手前的期望约会次数是多少?