《概率论与数理统计》习题

第九讲　多维随机变量函数的分布

1. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，且 $X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu)$. 如果定义随机变量 Z 如下

$$Z = \begin{cases} 1, & 当 X \le Y, \\ 0, & 当 X > Y. \end{cases}$$

求 Z 的分布列.

Z	0	1
P	$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

2. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

(a) 求 $U = X + Y$ 与 $V = X/(X+Y)$ 的联合密度函数 $p_{U,V}(u,v)$;
反函数：$x = uv, y = u(1-v)$
变换的雅可比行列式:$J = -u$
在 (U,V) 的可能取值范围内 $\{u > 0, 0 < v < 1\}$ 内，有

$$p_{U,V}(u,v) = p_X(uv)p_Y(u(1-v))|-u| = ue^{-u}$$

(b) 以上的 U 与 V 独立吗?
分别求 U 与 V 的边际密度函数

$$p_U(u) = ue^{-u}, u > 0$$

$$p_V(v) = 1, 0 < v < 1$$

所以由 $p_{U,V}(u,v) = p_U(u)p_V(v)$, 知 U 与 V 相互独立.

3. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, 试证

$$P(X_i = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}$$

证明:

$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合密度为

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j e^{-\lambda_j x_j}$$

而事件

$\{X_i = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}\}$

$= \{X_1 \geq X_i, \cdots, X_{i-1} \geq X_i, 0 < X_i < +\infty, X_{i+1} \geq X_i, \cdots, X_n \geq X_i\}$, 从而该事件的概率为

$$P(X_i = min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\})$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{x_i}^{+\infty}\cdots\int_{x_i}^{+\infty}\int_{x_i}^{+\infty}\cdots\int_{x_i}^{+\infty}\prod_{j=1}^{n}\lambda_j e^{-\lambda_j x_j} dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n dx_i$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda_i e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) x_i} dx_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}.$$

4. 一些随机变量的最小概率质量函数。在某一天，你的高尔夫球得分在 101 到 110 之间，独立于其他天且概率均为 0.1。为了提高自己的分数，你决定在三个不同的日子里进行比赛，并取 X_1, X_2, X_3 三天中的最低分数作为自己的分数 X.

   (a) 计算 X 的概率质量函数.

   (b) 三天的比赛让你的期望成绩改变了多少?

   解: (a) 随机变量 X 的可能取值为 10 个数字 $101, \cdots, 110$，概率密度函数由下式给出:

$$p_X(k) = \begin{cases} \mathbf{P}(X > k-1) - \mathbf{P}(X > k), & \text{if } k = 101, \cdots, 110 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

已知 $\mathbf{P}(X > 100) = 1$ 并且对于 $k = 101, \cdots, 110$ 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X > k) &= \mathbf{P}\left(X_1 > k, X_2 > k, X_3 > k\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X_1 > k\right)\mathbf{P}\left(X_2 > k\right)\mathbf{P}\left(X_3 > k\right) \\ &= \frac{(110-k)^3}{10^3} \end{aligned}$$

因此

$$p_X(k)=\begin{cases}\frac{(111-k)^3-(110-k)^3}{10^3}, & \text{if } k=101,\cdots,110\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(另一种解决方案基于累积分布函数的概念，将在第 3 章中介绍。)

(b) 由于 X_i 在 [101,110] 范围内的整数上均匀分布，因此 $\mathbf{E}[X_i]=(101+110)/2=105.5$. X 的均值为

$$\mathbf{E}[X]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}k\cdot p_X(k)=\sum_{k=101}^{110}k\cdot p_x(k)=\sum_{k=101}^{110}k\cdot\frac{(111-k)^3-(110-k)^3}{10^3}$$

上述表达式可计算为 103.025. 因此，期望成绩提高 105.5-103.025=2.475.

第十讲　条件分布与条件期望

1. 一射手单发命中目标的概率为 $p(0<p<1)$, 射击进行到命中目标两次为止. 设 X 为第一次命中目标所需的射击次数，Y 为总共进行的射击次数，求 (X,Y) 的联合分布和条件分布.

解: 只论命中与不命中的试验是伯努利试验. 在一伯努利试验序列中，首次命中的射击次数 X 服从几何分布 $Ge(p)$, 即

$$P(X=x)=(1-p)^{x-1}p,\quad x=1,2,\cdots,$$

其中 p 为命中概率,第二次命中目标的射击次数 Y 服从负二项分布 $Nb(2,p)$, 即

$$P(Y=y)=\binom{y-1}{1}(1-p)^{y-2}\cdot p^2,\quad y=2,3,\cdots.$$

由于 X 与 $Y-X$ 相互独立，所以条件分布

$$P(Y=y|X=x)=P(Y-X=y-x|X=x)$$

$$=P(Y-X=y-x)=(1-p)^{y-x-1}\cdot p,$$

$$x=1,2,\cdots,y-1\quad y=2,3,\cdots.$$

从而 (X,Y) 的联合分布列为

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y|X=x)$$

$$=P(X=x)P(Y-X=y-x)$$

$$=(1-P)^{x-1}\cdot p\cdot 1-p^{y-x-1}\cdot p$$

$$= (1-p)^{y-2}p^2,$$

$$x = 1, 2, \cdots, y-1 \quad y = 2, 3, \cdots.$$

另一条件分布

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

$$= \frac{(1-p)^{y-2} \cdot p^2}{(y-1)(1-p)^{y-2} \cdot p^2} = \frac{1}{y-1}$$
$$y = 2, 3, \cdots.$$

2. 随机变量 X 服从 $(1, 2)$ 上的均匀分布，在 $X = x$ 的条件下，随机变量 Y 的条件分布是参数为 x 的指数分布，证明：XY 服从参数为 1 的指数分布.

   证：因为 $X \sim U(1, 2), Y|X = x \sim Exp(x)$, 所以

   $$p(x, y) = p_X(x)p(y|x) = xe^{-xy}, \quad 1 < x < 2, y > 0.$$

   令 $U = XY, V = X$, 则 $u = xy, v = x$ 的逆变换为 $x = v, y = u/v$, 计算雅可比行列式 $J = -1/v$.

   所以 (U, V) 的联合密度函数为

   $$P_{U,V}(u, v) = P_{X,Y}(v, u/v)|-1/v| = ve^{-vu/v}1/v = e^{-u}, \quad 1 < v < 2, u > 0.$$

   由此的 $U = XY$ 的边际密度函数为

   $$P_U(u) = \int_1^2 e^{-u}dv = e^{-u}, \quad u > 0.$$

   即 $U = XY$ 服从参数为 1 的指数分布.

3. 设以下所涉及的数学期望均存在，试证：

   (a) $E[g(X)Y|X] = g(X)E(Y|X)$;

   由 $E(g(X)Y|X = x) = g(x)E(Y|X = x)$, 知 $E(g(X)Y|X) = g(X)E(Y|X)$

   (b) $E(XY) = E[XE(Y|X)]$;

   因为 $E(XY) = E[E(XY|X)]$, 又由 (1) 知 $E(XY|X) = XE(Y|X)$, 所以有 $E(XY) = E[X \cdot E(Y|X)]$.

   (c) $Cov[X, E(Y|X)] = Cov(X, Y)$.

   证 $Cov[X, E(Y|X)] = E[X \cdot E(Y|X)] - E(X) \cdot E(Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = Cov(X, Y)$.

4. Pat 和 Nat 将要约会，他们所有的约会都安排在晚上 9 点开始。Nat 总是在晚上 9 点准时到达。Pat 非常混乱，到达的时间在晚上 8 点到晚上 10 点之间均匀分布。设 X 表示从晚上 8 点到 Pat 到达的时间之间的小时数。如果 Pat 在晚上 9 点之前到达，他们的约会将持续整整 3 个小时。如果 Pat 在晚上 9 点之后到达，他们约会的持续时间将在 0 到 3-X 小时之间均匀分布。约会从他们见面的时候开始。当 Pat 迟到时，Nat 会感到生气，在 Pat 第二次约会迟到超过 45 分钟后，Nat 将结束这段关系。所有约会均独立于任何其他约会。

 (a) Nat 等待 Pat 到达的期望小时数是多少?

 (b) 任一约会的期望持续时间是多少?

 (c) 他们分手前的期望约会次数是多少?

解：(a) 设 W 为 Nat 等待的小时数，则有

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{P}(0 \leq X \leq 1)\mathbf{E}[W \mid 0 \leq X \leq 1] + \mathbf{P}(X > 1)\mathbf{E}[W \mid X > 1]$$

因为只有当 X>1 时 W>0，所以

$$\mathbf{E}[W] = \mathbf{P}(X > 1)\mathbf{E}[W \mid X > 1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(b) 设 D 为约会的持续时间。可知 $\mathbf{E}[D \mid 0 \leq X \leq 1] = 3$. 那么, 当 X>1 时，对于给定 X 的 D 的条件期望为 $(3 - X)/2$. 因此，使用迭代期望定律可知，

$$\mathbf{E}[D \mid X > 1] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[D \mid X] \mid X > 1] = \mathbf{E}\left[\frac{3 - X}{2} \mid X > 1\right]$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[D] &= \mathbf{P}(0 \leq X \leq 1)\mathbf{E}[D \mid 0 \leq X \leq 1] + \mathbf{P}(X > 1)\mathbf{E}[D \mid X > 1] \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{E}\left[\frac{3 - X}{2} \mid X > 1\right] \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{\mathbf{E}[X \mid X > 1]}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{3/2}{2}\right) \\
&= \frac{15}{8}
\end{aligned}$$

(c) Pat 迟到超过 45 分钟的概率是 1/8。分手前的约会数是参数为 1/8 的两个几何分布随机变量之和，其期望值为 $2 \cdot 8 = 16$.