《概率论与数理统计》习题

第三讲　一元随机变量的分布函数，分布列，密度函数

1. 口袋中有 5 个球，编号为 1,2,3,4,5. 从中任取 3 个，以 X 表示取出来的 3 个球中的最大号码.

(1) 试求 X 的分布列

X	3	4	5
P	0.1	0.3	0.6

(2) 写出 X 的分布函数，并作图.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ 0.1, & 3\le x<4,\\ 0.4, & 4\le x<5.\\ 1, & x\ge 5\end{cases}$$

2. 设连续随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

试求:

(1) 系数 A;

由 $F(x)$ 的连续性:

$$1=F(1)=\lim_{x\to 1-0}F(x)=\lim_{x\to 1-0}Ax^2=A$$

解得 $A=1$ (2)X 落在区间 $(0.3,0.7)$ 内的概率;

$$P=F(0.7)-F(0.3)=(0.7)^2-(0.3)^2=0.4$$

(3)X 的密度函数;

$$p(x)=F(x)'=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

3. 设连续随机变量 X 的密度函数 $p(x)$ 是一个偶函数,$F(x)$ 为 X 的分布函数，求证对任意实数 $a>0$, 有

(1)$F(-a)=1-F(a)=0.5-\int_0^a p(x)dx$;

因为 $p(x)$ 是一个偶函数，所以 $P(x)=p(-x)$, 且从

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)d(x)=2\int_0^{+\infty} p(x)d(x)$$

可得

$$\int_0^{+\infty} p(x)d(x)=0.5$$

在 $F(-a)=\int_{-\infty}^{-a} p(x)dx$ 中令 $x=-t$, 则

$$F(-a)=\int_{+\infty}^{a} p(t)(-dt)=\int_a^{+\infty} p(t)dt=1-F(a)$$

所以,

$$F(-a)=\int_a^{+\infty} p(t)dt=\int_0^{+\infty} p(t)dt-\int_0^a p(t)dt=0.5-\int_0^a p(x)dx$$

(2)$P(|X|<a)=2F(a)-1$;

$P(|X|<a)=P(-a<X<a)=F(a)-F(-a)$

$=F(a)-[1-F(a)]=2F(a)-1$ (3)$P(|x|>a)=2[1-F(a)]$.

$P(|X|>a)=P(X<-a)+P(X>a)=F(-a)+1-F(a)$

$1-F(a)+1-F(a)=2[1-F(a)]$

4. 麻省理工学院足球队计划在一个周末进行两场比赛。第一局不输的概率为 0.4。第二局不输的概率为 0.7，与第一局无关。比赛不输的时候，球队获胜或平局的概率是相同的，两局比赛是相互独立的。麻省理工学院队获胜得 2 分，平局得 1 分落败得分为 0。给出足球队在周末获得的分数的分布列。

X	0	1	2	3	4
P	0.18	0.27	0.34	0.14	0.07

5.Alvin 向半径为 r 的圆形目标投掷飞镖，有可能落到目标中的任何一点。设 X 为 Alvin 的飞镖的落点与目标中心的距离。(1) 计算 X 的概率密度函数, 均值和方差。(2) 目标具有半径为 t 的内圆。如果 $X\le t$，Alvin 得到 $S=1/X$ 的分数。否则他的分数为 $S=0$。求 S 的分布函数。同时，S 是连续随机变量吗?

(1) 首先计算 X 的分布函数。对于 $x \in [0, r]$ ，有

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} = \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

对于 $x < 0$ ，有 $F_x(x) = 0$ ，对于 $x > r$ ，我们有 $F_x(x) = 1$ 。通过微分，得到 PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{r^2}, & \text{if } 0 \leq x \leq r \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

有

$$\mathbf{E}[X] = \int_0^r \frac{2x^2}{r^2} dx = \frac{2r}{3}$$

同时

$$\mathbf{E}\left[X^2\right] = \int_0^r \frac{2x^3}{r^2} dx = \frac{r^2}{2}$$

因此

$$\operatorname{var}(X) = \mathbf{E}\left[X^2\right] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{4r^2}{9} = \frac{r^2}{18}$$

(2) 当且仅当 $X \leq t$ 时，Alvin 在 $[1/t, \infty)$ 范围内得到为正的分数，否则他得到 0 分。因此，对于 s<0 ，S 的分布函数为 $F_s(s) = 0$。
对于 $0 \leq s < 1/t$，有

$$F_S(s) = \mathbf{P}(S \leq s) = \mathbf{P}(X \leq t)\mathbf{P}(S \leq s \mid X \leq t) + \mathbf{P}(X > t)\mathbf{P}(S \leq s \mid X > t)$$

有

$$\mathbf{P}(X \leq t) = \frac{t^2}{r^2}, \quad \mathbf{P}(X > t) = 1 - \frac{t^2}{r^2}$$

因为 $S = 0$, 当 $X > t$ 时

$$\mathrm{P}(S \leq s \mid X > t) = 1$$

此外，

$$\mathrm{P}(S \leq s \mid X \leq t) = \mathrm{P}(1/X \leq s \mid X \leq t) = \frac{\mathrm{P}(1/s \leq X \leq t)}{\mathrm{P}(X \leq t)} = \frac{\frac{\pi t^2 - \pi(1/s)^2}{\pi r^2}}{\frac{\pi t^2}{\pi r^2}} = 1 - \frac{1}{s^2 t^2}$$

结合上述方程，可以得到

$$\mathbf{P}(S \leq s) = \frac{t^2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{s^2 t^2}\right) + 1 - \frac{t^2}{r^2} = 1 - \frac{1}{s^2 r^2}$$

根据前面计算的结果，S 的分布函数为

$$F_s(s) = \begin{cases} 0, & \text{if } s < 0 \\ 1 - \frac{t^2}{r^2}, & \text{if } 0 \leq s < 1/t \\ 1 - \frac{1}{s^2 r^2}, & \text{if } 1/t \leq s \end{cases}$$

因为 F_S 在 $s = 0$ 处具有不连续性，所以随机变量 S 不连续。

第四讲　常见的随机变量

1. 令 $X(n,p)$ 表示服从二项分布 $b(n,p)$ 的随机变量，试证明：

$$P(X(n,p) \leq i) = 1 - P(X(n,1-p) \leq n-i-1).$$

证明：

$$P(X(n,p) \leq i) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - \sum_{k=i+1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

令 $k' = n - k$

$$= 1 - \sum_{k'=0}^{n-i-1} \binom{n}{k'} p^{n-k'} (1-p)^{k'} = 1 - P(X(n,1-p) \leq n-i-1)$$

2. 设 K 服从 $(1,6)$ 上的均匀分布，求方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根的概率.
解：方程有实根的充要条件是:

$$\{K^2 - 4 \geq 0\} = \{K \leq -2\} \cup \{K \geq 2\}$$

而 $K \sim U(1,6)$, 因此所求概率为

$$P(K \leq -2) + P(X \geq 2) = 0.8$$

3. 设随机变量 X 服从伽马分布 $Ga(2,0.5)$, 试求 $P(X < 4)$
解：伽马分布 Ga(2,0.5) 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{0.5^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-0.5x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

由于 $\Gamma(2) = 1$, 因此所求概率为

$$P(X < 4) = \frac{1}{4} \int_0^4 x e^{-\frac{x}{2}} dx = 0.594$$

4. 某地区漏缴税款的比例 X 服从参数 $a = 2, b = 9$ 的贝塔分布，试求此比例小于 10% 的概率及平均漏缴税款的比例。
贝塔分布 Be(2,9) 的密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2+9)}{\Gamma(2)\Gamma(9)} x^{2-1} 1 - x^{9-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

因为 $\Gamma(2+9)=10!, \Gamma(2)=1, \Gamma(9)=8!$, 所以 $\dfrac{\Gamma(2+9)}{\Gamma(9)}=90$，因此

$$P(X<0.1)=90\int_0^{0.1} x(1-x)^8 dx=0.2639$$

$$E(X)=\frac{a}{a+b}=\frac{2}{11}$$

5. 凯尔特人队和湖人队将进行共 n 场篮球赛的系列赛，其中 n 是奇数。在每场比赛中，凯尔特人队赢的概率为 p，且每场比赛之间相互独立的。
   (a) 找出对于凯尔特人队来说 $n=5$ 比 $n=3$ 更好时的 p 的值。
   (b) 对 (a) 进行归纳，即对于任何 $k>0$，找到 p 的值，使其对于凯尔特人队来说，$n=2k+1$ 比 $n=2k-1$ 更好。
   考虑 (b) 的一般情况，证明 p >1/2 是 n=2k+1 场比赛优于 n=2k-1 场比赛的充要条件。为了证明这一点，让 N 为凯尔特人队在前 2k-1 场比赛中获胜的次数。如果 A 表示凯尔特人队以 n=2k+1 获胜的事件，B 表示凯尔特人队以 n=2k-1 获胜的事件，那么

$$P(A)=P(N\geq k+1)+P(N=k)\cdot(1-(1-p)^2)+P(N=k-1)\cdot p^2$$

$$P(B)=P(N\geq k)=P(N=K)+P(N\geq k+1)$$

   因此,

$$\begin{aligned}&P(A)-P(B)=P(N=k-1)\cdot p^2-P(N=k)\cdot(1-p)^2\\&=\binom{2k-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^k p^2-\binom{2k-1}{k}(1-p)^2 p^k(1-p)^{k-1}\\&=\frac{(2k-1)!}{(k-1)!k!}p^k(1-p)^k(2p-1)\end{aligned}$$

   P(A)>P(B) 时, 当且仅当 p >1/2。
   因此，更长的系列赛对篮球队来说更好。

6. 一个城市的温度被建模为一个正态随机变量，其均值和标准差都等于 10 摄氏度。对于一个随机选择的时间，温度小于或等于 59 华氏度的概率是多少?
   让 X 和 Y 分别是摄氏和华氏温度，它们的关系是 X = 5(Y − 32)/9。因此，59 华氏度对应 15 摄氏度。因此，如果 Z 是标准正态随机变量，我们使用

$E[X] = \sigma_X = 10$,

$$P(Y \leq 59) = P(X \leq 15) = P\left(Z \leq \frac{15 - E[X]}{\sigma_X}\right) = P(Z \leq 0.5) = \Phi(0.5).$$

根据标准正态表有 $\Phi(0.5) = 0.6915$, 因此 $P(Y{\leq}59) = 0.6915$.