《概率论与数理统计》习题

第七讲　多维随机变量及常见的分布

1. 口袋中有 5 个白球，8 个黑球，从中不放回地一个接一个取出 3 个。如果第 i 次取出的是白球，则令 $X_i = 1$，否则令 $X_i = 0, i = 1, 2, 3.$ 求

   (a) (X_1, X_2, X_3) 的联合分布列；
   $P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = 0.1958$
   $P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0)$
   $= P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = 0.1632$
   $P(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1)$
   $= P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) = 0.0932$
   $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = 0.0350$

   (b) (X_1, X_2) 的联合分布列
   $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 14/39$
   $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 10/39$
   $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 5/39$

2. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} 6(1-y), & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

   (a) 求 $P(X > 0.5, Y > 0.5)$;
   找 $p(x, y)$ 的非零区域与 $\{x > 0.5, y > 0.5\}$ 的交集

$$P(X > 0.5, Y > 0.5) = 6\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{y}(1-y)dxdy = 1/8$$

   (b) 求 $P(X < 0.5)$ 和 $P(Y < 0.5)$;

$$P(X < 0.5) = 6\int_{0}^{0.5}\int_{x}^{1}(1-y)dydx = 7/8$$

$$P(Y<0.5)=6\int_0^{0.5}\int_x^{0.5}(1-y)dydx=1/2$$

(c) 求 $P(X+Y<1)$.

$$P(X+Y<1)=6\int_0^{0.5}\int_x^{1-x}(1-y)dydx=3/4$$

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其联合分布列如下，试求联合分布列中的 a,b,c.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3
x_1	a	$1/9$	c
x_2	$1/9$	b	$1/3$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)$
x_1	a	$1/9$	c	$a+c+1/9$
x_2	$1/9$	b	$1/3$	$b+4/9$
$P(Y=y_j)$	$a+1/9$	$b+1/9$	$c+1/3$	1

由联合分布列的正则性
$a=1/18, b=2/9, c=1/6$

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le y<x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求 (1) 边际密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$; (2)X 与 Y 是否独立?
(1) 当 $0<x<1$ 时，有

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dy=\int_0^x 3xdy=3x^2$$

其余情况，$p_X(x)=0$

又因为当 0<y<1 时，有

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dx=\int_y^1 3xdx=\frac{3}{2}(1-y^2)$$

其余情况，$p_Y(y)=0$

(2) 因为 $p(x,y)\neq p_X(x)p_Y(y)$, 所以 X 与 Y 不独立.

5. 在长为 a 的线段的中点的两边随机地各取一点，求两点间的距离小于 $a/3$ 的概率.

记 X 为线段中点左边所取点到端点 0 的距离，Y 为线段中点右边所取点到端点 a 的距离，则 $X\sim U(0,a/2), Y\sim U(a/2,a)$, 且 X 与 Y 相互独立，它们的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{a^2}, & 0<x<\frac{a}{2},\frac{a}{2}<y<a,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

根据 $p(x,y)$ 的非零区域与 $\{|x-y|<a/3\}$ 的交集，所求概率为

$$P(|Y-X|<\frac{a}{3})=\int_{a/6}^{a/2}\int_{a/2}^{a/3+x}\frac{4}{a^2}dydx=2/9$$

6. 股票市场交易者购入 100 股 A 股票和 200 股 B 股票。设 X 和 Y 分别表示 A 股票和 B 股票的价格波动。在一段时间内，假设 X 和 Y 的联合密度函数在整数集 x 和 y 上是一致的且满足

$$-2\le x\le 4,\quad -1\le y-x\le 1$$

(a) 求 X 和 Y 的边缘密度函数以及均值.

(b) 求该交易者获取利润的均值.

解：(a) 该区域有 21 个整数对 (x,y)

$$R=\{(x,y)\mid -2\le x\le 4,-1\le y-x\le 1\}$$

所以，X 和 Y 的联合密度函数为

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1/21, & \text{if } (x,y) \text{ is in } R,\\ 0, & \text{otherwise .}\end{cases}$$

对于 [-2,4] 范围内的每个 x，都有三个可能的 Y 值。因此，有

$$\boldsymbol{p}_X(x)=\begin{cases}3/21, & \text{if } x=-2,-1,0,1,2,3,4,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

X 的均值是范围 [-2,4] 的中点:

$$\mathbf{E}[X]=1.$$

Y 的边缘密度函数通过表格法获得，于是有

$$p_{\mathrm{Y}}(y)=\begin{cases}1/21, & \text{if } y=-3\\ 2/21, & \text{if } y=-2\\ 3/21, & \text{if } y=-1,0,1,2,3\\ 2/21, & \text{if } y=4\\ 1/21, & \text{if } y=5\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Y 的均值为

$$\mathbf{E}[Y]=\frac{1}{21}\cdot(-3+5)+\frac{2}{21}\cdot(-2+4)+\frac{3}{21}\cdot(-1+1+2+3)=1$$

(b) 利润可知为

$$P=100X+200Y$$

因此

$$\mathbf{E}[P]=100\cdot\mathbf{E}[X]+200\cdot\mathbf{E}[Y]=100\cdot1+200\cdot1=300$$

第八讲　多维随机变量的特征数

1. 求掷 n 颗骰子出现点数之和的数学期望与方差.
记 X_i 为第 i 颗骰子出现的点数,$i=1,2,\cdots,n$, 则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，其共同的分布列为

X_i	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

所有

$$E(X_i)=\frac{7}{2},Var(X_i)=\frac{35}{12}$$

由此得

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{7n}{2}$$
$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{35n}{12}$$

2. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), Cov(X, Y)$

$$E(X) = \int_0^1 \int_{-x}^{x} x dy dx = \frac{2}{3}$$
$$E(Y) = \int_0^1 \int_{-x}^{x} y dy dx = 0$$
$$E(XY) = \int_0^1 \int_{-x}^{x} xy dy dx = 0$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

3. 设随机变量 X 有密度函数 $p(x)$, 且密度函数 $p(x)$ 是偶函数, 假定 $E|X|^3 < +\infty$. 证明: X 与 $Y = X^2$ 不相关、但不独立.
证明:
因为 $E(X) = E(X^3) = 0$, 所以 $Cov(X, X^2) = 0$, 这表明:X 与 $Y = X^2$ 不相关. 为证明 X 与 Y 不相互独立, 特给定 $a > 0$, 使得 $P(X \leq a) < 1$. 现考查如下特定事件的概率
$P(X \leq a, X^2 \leq a^2) = P(-a \leq X \leq a)$
$> P(X \leq a)P(-a \leq X \leq a)$
$= P(X \leq a)P(X^2 \leq a^2)$
所以 X 与 $Y = X^2$ 不独立.

4. 如今有四个随机变量: W, X, Y, Z. 且满足

$$E[W] = E[X] = E[Y] = E[Z] = 0,$$
$$Var(W) = Var(X) = Var(Y) = Var(Z) = 1.$$

假设 W, X, Y, Z 是两两不相关的。求 $R.S$ 的相关系数 $\rho(R.S)$ 以及 $R.T$ 的相关系数 $\rho(R.T)$. 其中 $R = W + X, S = X + Y, T = Y + Z$.
解：可知

$$\text{cov}(R, S) = \mathbf{E}[RS] - \mathbf{E}[R]\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}\left[WX + WY + X^2 + XY\right] = \mathbf{E}\left[X^2\right] = 1$$

并且

$$\text{var}(R) = \text{var}(S) = 2$$

因此

$$\rho(R, S) = \frac{\text{cov}(R, S)}{\sqrt{\text{var}(R)\,\text{var}(S)}} = \frac{1}{2}$$

又已知

$$\text{cov}(R, T) = \mathbf{E}[RT] - \mathbf{E}[R]\mathbf{E}[T] = \mathbf{E}[WY + WZ + XY + XZ] = 0$$

因此

$$\rho(R, T) = 0$$