

《概率论与数理统计》习题

第三讲 一元随机变量的分布函数，分布列，密度函数

1. 口袋中有 5 个球，编号为 1,2,3,4,5. 从中任取 3 个，以 X 表示取出来的 3 个球中的最大号码.

(1) 试求 X 的分布列

(2) 写出 X 的分布函数，并作图.

2. 设连续随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

试求：

(1) 系数 A ;

(2) X 落在区间 $(0.3, 0.7)$ 内的概率;

(3) X 的密度函数;

3. 设连续随机变量 X 的密度函数 $p(x)$ 是一个偶函数, $F(x)$ 为 X 的分布函数, 求证对任意实数 $a > 0$, 有

(1) $F(-a) = 1 - F(a) = 0.5 - \int_0^a p(x)dx$;

(2) $P(|X| < a) = 2F(a) - 1$;

(3) $P(|x| > a) = 2[1 - F(a)]$.

4. 麻省理工学院足球队计划在一个周末进行两场比赛。第一局不输的概率为 0.4。第二局不输的概率为 0.7，与第一局无关。比赛不输，意味着球队有可能获胜或平局，两局比赛是相互独立的。麻省理工学院队获胜得 2 分，平局得 1 分落败得分为 0。给出足球队在周末获得的分数的概率质量函数。

5. Alvin 向半径为 r 的圆形目标投掷飞镖，有可能落到目标中的任何一点。设 X 为 Alvin 的飞镖的落点与目标中心的距离。(1) 计算 X 的概率密度函数, 均值和方差。(2) 目标具有半径为 t 的内圆。如果 $X \leq t$, Alvin 得到 $S = 1/X$ 的分数。否则他的分数为 $S = 0$ 。求 S 的分布函数。同时, S 是连续随机变量吗?

第四讲 常见的随机变量

1. 令 $X(n, p)$ 表示服从二项分布 $b(n, p)$ 的随机变量, 试证明:

$$P(X(n, p) \leq i) = 1 - P(X(n, 1 - p) \leq n - i - 1).$$

2. 设 K 服从 $(1, 6)$ 上的均匀分布, 求方程 $x^2 + Kx + 1 = 0$ 有实根的概率.
3. 设随机变量 X 服从伽马分布 $Ga(2, 0.5)$, 试求 $P(X < 4)$
4. 某地区漏缴税款的比例 X 服从参数 $a = 2, b = 9$ 的贝塔分布, 试求此比例小于 10% 的概率及平均漏缴税款的比例。
5. 凯尔特人队和湖人队将进行共 n 场篮球赛的系列赛, 其中 n 是奇数。在每场比赛中, 凯尔特人队赢的概率为 p , 且每场比赛之间相互独立的。
- (a) 找出对于凯尔特人来说 $n = 5$ 比 $n = 3$ 更好时的 p 的值。
- (b) 对 (a) 进行归纳, 即对于任何 $k > 0$, 找到 p 的值, 使其对于凯尔特人来说, $n = 2k + 1$ 比 $n = 2k - 1$ 更好。
6. 一个城市的温度被建模为一个正态随机变量, 其均值和标准差都等于 10 摄氏度。对于一个随机选择的时间, 温度小于或等于 59 华氏度的概率是多少?