《概率论与数理统计》习题

第一讲　随机事件、概率的定义与性质:

1. 某城市中共发行 3 种报纸 A, B, C. 在这城市的居民中有 45% 订阅 A 报、35% 订阅 B 报、30% 订阅 C 报、10% 同时订阅 A 报 B 报、8% 同时订阅 A 报 C 报、5% 同时订阅 B 报 C 报、3% 同时订阅 A, B, C 报. 求以下事件的概率:

(1) 只订阅 A 报的;

(2) 只订阅一种报纸的;

(3) 至少订阅一种报纸的;

(4) 不订阅任何一种报纸的.

(1) 仍使用 A,B,C 分别表示订阅 A,B,C 报, 则有 $P(A) = 0.45, P(B) = 0.35, P(C) = 0.3, P(AB) = 0.10, P(AC) = 0.08, P(BC) = 0.05, P(ABC) = 0.03$.

P(只订阅 A 报)$= P(A\overline{BC}) = P(A - (B \cup C)) = P(A) - P(A(B \cup C))$

$= P(A) - P(AB) - P(AC) + P(ABC) = 0.30$

(2) 因为 P(只订阅一种报纸)$= P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{AB}C)$

其中 $P(\overline{A}B\overline{C}) = P(B) - P(AB) + P(ABC) = 0.23$

$P(\overline{AB}C) = P(C) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0.20$

所以

P(只订阅一种报纸)$= 0.30 + 0.23 + 0.20 = 0.73$

(3)P(至少订阅一种报纸)$= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 0.90$

(4)P(不订阅任何一种报纸) $= P(\overline{ABC}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 0.10$

2. 证明: (1)$P(AB) \geq P(A) + P(B) - 1$

(2)$P(A_1A_2\cdots A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - (n-1)$

(1) 由 $1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 移项即得结论

(2) 对 n 用数学归纳法, 当 $n = 2$ 时, 由 (1) 知结论成立. 设 $n-1$ 时结论成立, 即

$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) \geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{n-1}) - (n-2)$.

则由 (1) 知

$P(A_1A_2\cdots A_n)$

$= P((A_1A_2\cdots A_{n-1})A_n) \geq P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) + P(A_n) - 1$

$\geq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{n-1} - (n-2) + P(A_n) - 1$

$= P(A_1) + P(A_2) + P \cdots + P(A_n) - (n-1)$

3. 反复掷四面骰子，直到第一次（如果有的话）得到偶数面。这个实验的样本空间是多少?
a. 任何有限序列形式为 $(a_1, a_2, ..., a_n)$，其中任意正整数，$a_1, a_2, ...a_{n\text{-}1}$ 属于 1,3，a_n 属于 2,4。
b. 从未获得偶数。这样的结果是无限序列 $(a_1, a_2, ...)$，序列中的每个元素都属于 1,3。
样本空间由上述两种类型的所有可能结果组成。

4. 在 8×8 的棋盘上，八个“车”被放置在不同的方格中，放的所有可能的位置都是等概率的。找出所有“车”彼此安全的概率，即没有包含超过一个“车”的行或列。

$$P = \frac{8!}{C_{64}^{8}} = \frac{8!}{\frac{64!}{8!56!}} = \frac{8!8!}{\frac{64!}{56!}} = \frac{64 \times 49 \times 36 \times 25 \times 16 \times 9 \times 4}{\frac{64!}{56!}}$$

5. 一个箱子里有 n 个球，其中 m 个是红色的。
(1) 我们随机选择 k 个球，不放回（即在下一次选择之前，选定的球不会放回箱子里）。那么挑选出来 k 个球中 i 个是红球的概率是多少?
(2) 我们随机选择 k 个球，有放回（即在下一次选择之前，选定的球会放回箱子里）。那么挑选出来 k 个球中 i 个是红球的概率是多少?
(1) 设事件 A: 不放回时，k 个球中有 i 个红球

$$P(A) = \frac{C_m^i C_{n-m}^{k-i}}{C_n^k}$$

(2) 设事件 B: 有放回时，k 个球中有 i 个红球

$$P(B) = C_k^i \left(\frac{m}{n}\right)^i \left(\frac{n-m}{n}\right)^{k-i}$$

6. 口袋中有 10 个球，分别标有号码从 1 到 10，现从口袋中不放回地任取其中 4 个，记下取出的球的号码，试求：
（1）4 个球中最小号码为 5 的概率　（2）4 个球中最大号码为 5 的概率

(1) 设事件 A:4 个球中最小号码为 5
即 4 个球中有 1 个球的号码为 5，剩下 3 个球的号码都比 5 大

$$P(A)=\frac{C_5^3}{C_{10}^4}=\frac{1}{21}$$

(2) 设事件 B:4 个球中最小号码为 5
即 4 个球中有 1 个球的号码为 5，剩下 3 个球的号码都比 5 小

$$P(B)=\frac{C_4^3}{C_{10}^4}=\frac{2}{105}$$

7. 把 n 个“0”和 n 个“1”随机地排列，求没有两个“1”连在一起的概率。
考虑 n 个“1”的放法：$2n$ 个位置上“1”占有 n 个位置，所以共有 C_{2n}^n 种放法，这是分母
没有两个”1” 连在一起，相当于在 n 个“0”之间及两头（共 $n+1$ 个位置）去放“1”，这共有 C_{n+1}^n 种放法，于是所求概率为

$$P=\frac{C_{n+1}^n}{C_{2n}^n}$$

8.（编程）在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，求事件“两数之和小于 7/5”的概率。(分别用频率方法和几何方法确定概率)
(参考代码: 答案不唯一)

```
 #频率法
import numpy as np
iterations = 200000
times= 0
for i in range(iterations):
    a = np.random.random()
    b = np.random.random()
    if (a + b) < (7/5):
        times += 1
prob = times/iterations
print("%.2f" % prob)
#几何法
area = 1 - 0.6 * 0.6 / 2
print(area/1)
```