

Rapport Projet Oscillations d'un pendule

LIMAM Mohamed Selim
LEFORT Kelvin

30 août 2023

Table des matières

1	Méthode de RK4	3
1.1	Construction de la méthode de RK4	3
1.2	Implémentation de la méthode de RK4	3
2	Pendule simple	5
2.1	Définition et histoire	5
2.2	Mise en équation	6
2.3	Etude qualitative	6
2.3.1	Existence d'une unique solution maximale	7
2.3.2	Existence d'une unique solution globale	7
2.3.3	Intégrale première du mouvement (en physique)	8
2.3.4	Solution constante	8
2.3.5	Solution bornée	8
2.3.6	Variations de la solution	9
2.3.7	Solution périodique	11
2.4	Etude numérique	11
3	Pendule couplé	12
3.1	Définition et histoire	12
3.2	Mise en équation	13
3.3	Etude qualitative	13
3.3.1	Existence d'une solution maximale	13
3.4	Etude numérique	14
4	Double pendule	15
4.1	Définition et histoire	15
4.2	Mise en équation	15
4.3	Etude qualitative	16
4.3.1	Existence d'une solution maximale	16
4.4	Etude numérique	16
5	Conclusion	16
6	Annexe	18
6.1	Asymptote horizontale en l'infini	18
6.2	Mise en équation du pendule couplé	19

On utilisera durant tout le projet la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) car elle est connue pour être une méthode très précise et largement utilisée pour résoudre numériquement des Equations Différentielles Ordinaires (EDO). On n'étudiera pas les méthodes (stabilité, consistance, ordre, ...) et on ne comparera pas les différentes méthodes (RK4, Euler explicite, Euler implicite, Crank-Nicholson, ...) entre elles. Cela a été fait durant les TP d'EDO. On s'arrêtera aux simulations.

1 Méthode de RK4

Soient $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $y^0 \in \mathbb{R}^d$. Soit $T \in \mathbb{R}_+$.

La méthode de RK4 est une méthode d'approximation numérique d'une EDO de la forme :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I := [0, T] \\ y(0) = y^0 \end{cases}$$

où f et y^0 sont les données du problème de Cauchy.

1.1 Construction de la méthode de RK4

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Commençons par discrétiser l'intervalle I en N intervalles de même longueur $h := \frac{T}{N}$. Pour cela, posons $t_n = nh$ et $I_n = [t_n, t_{n+1}]$ pour $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ (il y a donc $(N+1)$ points t_n). L'objectif est de construire une suite de valeurs y_0, \dots, y_N approchant les valeurs $y(t_0), \dots, y(t_N)$. Remarquons que puisque $y(0) = y^0$, alors on prend $y_0 = y^0$.

Voici la méthode de RK4 pour construire une telle suite :

Méthode de RK4

Soient $(k_{n,1})_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$, $(k_{n,2})_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$, $(k_{n,3})_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ et $(k_{n,4})_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ des suites finies à valeurs dans \mathbb{R}^d . Alors $(k_{n,1})_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$, $(k_{n,2})_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$, $(k_{n,3})_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$, $(k_{n,4})_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ et $(y_n)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ vérifient :

$$\begin{cases} k_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ k_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n,1}) \\ k_{n,3} = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n,2}) \\ k_{n,4} = f(t_n + h, y_n + hk_{n,3}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4}) \end{cases}$$

avec $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

1.2 Implémentation de la méthode de RK4

Remarquons que la construction de la suite $(y_n)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ par la méthode de RK4 se fait de manière récurrente à un pas (pour déterminer y_{n+1} , on a juste besoin de connaître y_n) et de manière explicite (on n'a pas besoin de résoudre d'équations pour déterminer y_{n+1} à partir de y_n). Vous trouverez par la suite un pseudo-code qui explique comment construire la suite algorithmiquement.

Voyons à présent comment écrire cet algorithme en langage C.

La première question qui se pose est comment représenter un vecteur de \mathbb{R}^d . Quoi de mieux qu'une structure pour le faire :

```
1 #define TAILLE_MAX 10
2 typedef struct Vecteur_s
3 {
4     int d; // taille du vecteur, en supposant que d <= TAILLE_MAX
5     double x[TAILLE_MAX]; // coefficients du vecteur
6 }Vecteur_t;
```

Il faut ensuite écrire les opérations $+$ entre deux vecteurs et $.$ entre un scalaire et un vecteur. Pour cela, on créera deux fonctions, `somme_vecteur` et `produit_vecteur` :

Algorithme 1: Méthode de RK4**Données:**

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$y^0 \in \mathbb{R}^d$$

$$T \in \mathbb{R}_+$$

$$N \in \mathbb{N}^*$$

Résultat: $(y_0, \dots, y_N) \in (\mathbb{R}^d)^{N+1}$

```

1 Fonction  $(y_0, \dots, y_N) \leftarrow \text{runge\_kutta\_4}(f, y^0, T, N)$ 
2    $h \leftarrow \frac{T}{N}$ 
3    $y_0 \leftarrow y^0$ 
4    $t \leftarrow 0$ 
5   Pour  $n \leftarrow 0$  à  $(N - 1)$  faire
6      $k_1 \leftarrow f(t, y_n)$ 
7      $k_2 \leftarrow f(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$ 
8      $k_3 \leftarrow f(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$ 
9      $k_4 \leftarrow f(t + h, y_n + hk_3)$ 
10     $y_{n+1} \leftarrow y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ 
11     $t \leftarrow t + h$ 
12  FinPour
13  Renvoyer  $(y_0, \dots, y_N)$ 
14 FinFonction

```

```

1 Vecteur_t somme_vecteur(Vecteur_t u, Vecteur_t v)
2 {
3     Vecteur_t w;
4
5     w.d = u.d;
6     for (int i = 0 ; i < w.d ; i++)
7     {
8         w.x[i] = u.x[i] + v.x[i];
9     }
10
11     return w;
12 }
13
14 Vecteur_t produit_vecteur(double lambda, Vecteur_t u)
15 {
16     Vecteur_t v;
17
18     v.d = u.d;
19     for (int i = 0 ; i < v.d ; i++)
20     {
21         v.x[i] = lambda*u.x[i];
22     }
23
24     return v;
25 }

```

On regroupera alors la structure Vecteur_t et les deux fonctions dans les fichiers vecteur.h et vecteur.c.

On se demande désormais comment représenter la fonction f en C et comment la donner en paramètre par la suite à la fonction runge_kutta_4 (on écrira cette fonction après).

Pour la représentation de f , rien de plus trivial qu'une fonction :

```

1 Vecteur_t f(double t, Vecteur_t y)
2 {
3     Vecteur_t z;

```

```

4
5 // contenu de la fonction f selon le problème en question
6
7 return z;
8 }

```

On mettra cette fonction et sa déclaration dans les fichiers `f.h` et `f.c`.

Pour pouvoir donner la fonction `f` en paramètre, nous utiliserons les pointeurs de fonctions. Nous y reviendrons lors de l'écriture de la fonction `runge_kutta_4`.

Enfin, pour écrire l'algorithme `runge_kutta_4` en C, nous écrirons une fonction et pour stocker le résultat (y_0, \dots, y_N) , on allouera dynamiquement un tableau de $(N+1)$ cases, chacune pouvant stocker une structure `Vecteur_t` :

```

1 Vecteur_t* runge_kutta_4(Vecteur_t (*f)(double t, Vecteur_t y), Vecteur_t y0,
2 double T, int N)
3 {
4     Vecteur_t* y = NULL;
5     y = (Vecteur_t*)malloc((N + 1)*sizeof(Vecteur_t));
6     if (NULL == y)
7     {
8         printf("Erreur lors de l'allocation memoire\n");
9         exit(EXIT_FAILURE);
10    }
11
12    Vecteur_t k1;
13    Vecteur_t k2;
14    Vecteur_t k3;
15    Vecteur_t k4;
16    double h = T/N;
17    double t = 0;
18
19    y[0] = y0;
20    for (int n = 0 ; n < N ; n++)
21    {
22        k1 = (*f)(t, y[n]);
23        k2 = (*f)(t + h/2, somme_vecteur(y[n], produit_vecteur(h/2, k1)));
24        k3 = (*f)(t + h/2, somme_vecteur(y[n], produit_vecteur(h/2, k2)));
25        k4 = (*f)(t + h, somme_vecteur(y[n], produit_vecteur(h, k3)));
26        y[n + 1] = somme_vecteur(y[n], produit_vecteur(h/6,
27        somme_vecteur(k1, somme_vecteur(produit_vecteur(2,
28        k2), somme_vecteur(produit_vecteur(2, k3), k4))));
29        t += h;
30    }
31
32    return y;
33 }

```

Nous mettrons cette fonction et sa déclaration dans les fichiers `runge_kutta_4.h` et `runge_kutta_4.c`.

2 Pendule simple

2.1 Définition et histoire

L'étude du pendule simple remonte aux années 1500/1600 par Galilée. Il aurait découvert les propriétés du pendule simple en observant les oscillations du lustre de la cathédrale de Pise.

En physique, le pendule simple est une masse ponctuelle m fixée à l'extrémité d'un fil de longueur l sans masse, inextensible et rigide, et oscillant sous l'effet de la pesanteur. Lorsque le pendule est écarté de sa position d'équilibre (la verticale), son point matériel de masse m se déplace le long d'un arc de cercle sous l'effet de son poids, qui le ramène constamment vers sa position d'équilibre. Le problème posé consiste à prédire la position du pendule dans le temps en connaissant sa masse

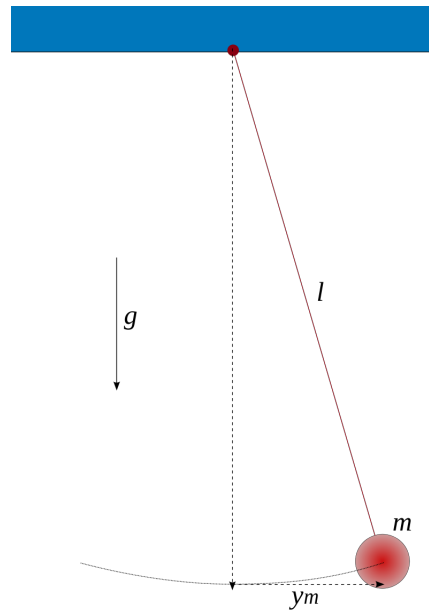


FIGURE 1 – Pendule simple

m , la longueur l du fil, et l'angle de départ θ_0 formé par le fil avec la verticale (on supposera que la vitesse angulaire initiale est nulle). Connaître l'angle θ que forme le pendule à différents moments dans le temps permettra donc de résoudre ce problème. On supposera par la suite que θ est deux fois dérivable (cela a un sens en mécanique classique).

2.2 Mise en équation

Pour établir l'équation du problème, nous allons utiliser le concept d'énergie mécanique du pendule simple.

L'énergie mécanique totale du pendule simple à l'instant t est donnée par :

$$E_{\text{tot}}(t) = E_c(t) + E_p(t) \Leftrightarrow E_{\text{tot}}(t) = \frac{1}{2}m(l\theta'(t))^2 + mgl(1 - \cos(\theta(t)))$$

En considérant la conservation de l'énergie mécanique (E_{tot} reste constant), nous pouvons établir l'équation différentielle du mouvement du pendule simple :

$$E'_{\text{tot}}(t) = 0 \Leftrightarrow \theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin(\theta(t))$$

Cette équation décrit l'évolution de l'angle θ du pendule en fonction du temps t .

Remarque 1. Il existe d'autres méthodes pour aboutir à cette équation, comme l'application du principe fondamental de la dynamique, ou l'application du théorème du moment cinétique.

2.3 Etude qualitative

Pour étudier l'équation différentielle, on commence par réécrire l'équation sous la forme d'un problème de Cauchy.

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}$, pour tout $t \geq 0$

On a donc aussi : $X'(t) = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ \theta''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ -\frac{g}{l} \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$

En notant f la fonction définie par
$$\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y = (y_1, y_2)) \longmapsto \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(y_1) \end{pmatrix} \end{cases}$$

On a alors que : $X'(t) = f(t, X(t))$, pour tout $t \geq 0$
 L'équation devient donc :

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)) & \forall t \geq 0 \\ X(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} := X_0 \end{cases}$$

2.3.1 Existence d'une unique solution maximale

Vérifions maintenant que l'équation différentielle admet une solution et montrons que la solution est unique.

Puisqu'il s'agit d'un problème de Cauchy, appliquons le théorème de Cauchy-Lipschitz maximal :

- f est continue : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2)) \mapsto 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y_2} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2)) \mapsto 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y_1} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2)) \mapsto -\frac{g}{l} \cos(y_1) \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y_2} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2)) \mapsto 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $y^* := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sur $[0, T^*[$, pour un certain $T^* > 0$, du problème de Cauchy. Cette solution est donc $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$.

2.3.2 Existence d'une unique solution globale

On se demande maintenant si $T^* = +\infty$, c'est à dire si la solution maximal est globale ?
 Pour répondre à cette question, il suffit de remarquer que :

$$\forall (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \|f(t, y)\|_\infty \leq \frac{g}{l} + \|y\|_\infty$$

où $\|y\|_\infty = \max(|y_1|, |y_2|)$.

En effet, soit $(t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$. $\|f(t, y)\|_\infty = \max(|y_2|, \frac{g}{l} |\sin(y_1)|) \leq \max(|y_2|, \frac{g}{l})$.
 Par disjonction de cas, on a :

- Si $|y_2| \leq \frac{g}{l}$, alors $\max(|y_2|, \frac{g}{l}) = \frac{g}{l} \leq \frac{g}{l} + \|y\|_\infty$.
- Si $\frac{g}{l} < |y_2|$, alors $\max(|y_2|, \frac{g}{l}) = |y_2| \leq \frac{g}{l} + \max(|y_1|, |y_2|) = \frac{g}{l} + \|y\|_\infty$.

Donc $\|f(t, y)\|_\infty \leq \max(|y_2|, \frac{g}{l}) \leq \frac{g}{l} + \|y\|_\infty$.

Par une proposition de cours, la solution est globale donc définie sur \mathbb{R}_+ .

Néanmoins, il n'existe pas, pour le moment, d'expression de la solution (on peut aboutir à une expression si on avait linéarisé l'équation : $\theta''(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0, \forall t \geq 0$ en utilisant l'approximation des petits angles, c'est à dire : $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$).

On va donc utiliser la méthode de RK4 pour approcher numériquement la solution.

Remarque 2. On se doutait de l'existence d'une solution par la nature physique du problème. En effet, par l'absurde, si l'équation n'admettait pas de solutions, alors la fonction θ représentant l'angle ne pourrait pas vérifier l'équation, donc cela remettrait en question les lois de la mécanique classique, ce qui est absurde pour un problème aussi simple que celui du pendule simple d'où son nom...

2.3.3 Intégrale première du mouvement (en physique)

Maintenant qu'on sait qu'une unique solution globale existe, étudions la. Pour cela, nous allons avoir besoin d'intégrer l'EDO :

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0, & \forall t \geq 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \in]-\pi, \pi] \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

ou encore, en multipliant par $2\theta'(t)$ de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{cases} 2\theta'(t)\theta''(t) = \frac{-2g}{l} \sin(\theta(t))\theta'(t), & \forall t \geq 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \in]-\pi, \pi] \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\int_0^t 2\theta'(x)\theta''(x)dx = \int_0^t \frac{-2g}{l} \sin(\theta(x))\theta'(x)dx, \forall t \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$[(\theta'(x))^2]_0^t = \frac{2g}{l} [\cos(\theta(x))]_0^t, \forall t \geq 0$$

ou encore :

$$[\theta'(t)]^2 = \frac{2g}{l} [\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)], \forall t \geq 0$$

Vous avez devant vous l'intégrale première du mouvement en physique.

De cette équation, on tire deux informations :

- $\forall t \geq 0, \theta'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta(t)) = \cos(\theta_0) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta(t) = \theta_0 + 2k\pi \vee \theta(t) = -\theta_0 + 2k\pi$: vitesse nulle seulement aux extrémités du pendule (on y reviendra)
- $\forall t \geq 0, \cos(\theta(t)) \geq \cos(\theta_0)$: solution bornée (on y reviendra aussi)

2.3.4 Solution constante

On se demande à quelle condition nécessaire et suffisante sur θ_0 la solution est-elle constante ? Pour cela, on va s'intéresser aux équilibres de l'EDO (sans prendre en compte les conditions initiales) :

Soit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

y est solution de l'EDO (sans prendre en compte les conditions initiales) ssi $f(t, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pour

tout $t \geq 0$ ssi $\begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} y_1 = k\pi, & \text{pour un certain } k \in \mathbb{Z} \\ y_2 = 0 \end{cases}$

Ainsi, par unicité de la solution du problème de Cauchy,

- Si $\theta_0 = 0$, alors $\theta(t) = 0$, pour tout $t \geq 0$
- Si $\theta_0 = \pi$, alors $\theta(t) = \pi$, pour tout $t \geq 0$

Par ailleurs, ce sont les deux seules situations où la solution est constante, d'après l'équivalence qu'on vient de montrer.

2.3.5 Solution bornée

Supposons à présent que $\theta_0 \notin \{0, \pi\}$.

La solution est-elle bornée ? La réponse est oui. On va montrer que :

$$\forall t \geq 0, -|\theta_0| \leq \theta(t) \leq |\theta_0|$$

Preuve : Raisonnons par l'absurde. Supposons par l'absurde que $(\forall t \geq 0, -|\theta_0| \leq \theta(t) \leq |\theta_0|)$ est faux, autrement dit que $(\exists t \geq 0, \theta(t) < -|\theta_0| \vee \theta(t) > |\theta_0|)$ est vraie.

- Commençons par le cas où il existe $t_1 \geq 0$ tel que $\theta(t_1) > |\theta_0|$. Faisons une disjonction de cas :
 - Si $\theta(t_1) \leq \pi$, alors on a $0 < |\theta_0| < \theta(t_1) \leq \pi$, donc, par strict. décroissance de la fonction \cos sur $[0, \pi]$, $-1 \leq \cos(\theta(t_1)) < \cos(|\theta_0|) < 1$, donc $\cos(\theta(t_1)) < \cos(\theta_0)$.
 - Si $\theta(t_1) > \pi$, puisque $\theta(0) = \theta_0 < \pi$, par le TVI (θ est continue sur \mathbb{R}_+), il existe $t_2 \in [0, t_1]$ tel que $\theta(t_2) = \pi$. Donc $0 < |\theta_0| < \pi = \theta(t_2)$ et donc, par strict. décroissance de la fonction \cos sur $[0, \pi]$, $\cos(\theta(t_2)) < \cos(|\theta_0|) < 1$, donc $\cos(\theta(t_2)) < \cos(|\theta_0|)$.
 Dans les deux cas, $(\exists t \geq 0, \cos(\theta(t)) < \cos(\theta_0))$ est vraie, ce qui est absurde car $(\forall t \geq 0, \cos(\theta(t)) \geq \cos(\theta_0))$ est vraie, d'après l'intégrale première du mouvement.
- Trouver l'absurdité pour le cas où il existe $t_1 \geq 0$ tel que $\theta(t_1) < -|\theta_0|$ est laissé au lecteur ; le raisonnement est très similaire.

Ainsi, on a montré le résultat voulu.

2.3.6 Variations de la solution

La solution est-elle croissante ? décroissante ? les deux ? Nous allons répondre à ces question ci-dessous.

Supposons tout d'abord que $\theta_0 > 0$. Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 1. *Si $\theta_0 > 0$, alors θ est strictement décroissante de θ_0 à $-\theta_0$ sur $[0, \tilde{T}]$ et strictement croissante de $-\theta_0$ à θ_0 sur $[\tilde{T}, 2\tilde{T}]$, pour un certain $\tilde{T} > 0$.*

Preuve :

- Commençons par montrer que θ est strictement décroissante de θ_0 à $-\theta_0$ sur $[0, \tilde{T}]$.
 - Tout d'abord, on va exclure le cas où θ est décroissante sur \mathbb{R}_+ en raisonnant par l'absurde et donc supposons par l'absurde que θ est décroissante sur \mathbb{R}_+ .
Puisque θ est une fonction bornée, alors θ converge vers un certain $\theta_l \in [-\theta_0, \theta_0[[-\pi, \pi[$.
De plus, par l'intégrale première du mouvement, puisque $[\theta'(t)]^2 = \frac{2g}{l}[\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0)]$, pour tout $t \geq 0$, alors θ' converge vers $-\sqrt{\frac{2g}{l}[\cos(\theta_l) - \cos(\theta_0)]}$ (θ est décroissante sur \mathbb{R}_+ donc $\theta' \leq 0$). Par une proposition (voir annexe) que j'ai démontré, alors nécessairement $-\sqrt{\frac{2g}{l}[\cos(\theta_l) - \cos(\theta_0)]} = 0$, autrement dit $\theta_l = -\theta_0$ (car $\theta_l \neq \theta_0$ et $\theta_l \in]-\pi, \pi[$).
Par ailleurs, puisque $\theta''(t) = -\frac{g}{l}\sin(\theta(t))$, pour tout $t \geq 0$, alors θ'' converge vers $-\frac{g}{l}\sin(\theta_l)$. Par la même proposition appliquée à la fonction θ' , nécessairement $-\frac{g}{l}\sin(\theta_l) = 0$, c'est-à-dire $\theta_l = 0$ (car $\theta_l \in]-\pi, \pi[$ et $\sin(\theta_l) = 0$).
Par conséquent, on a montré que $\theta_l = -\theta_0 \neq 0$ et $\theta_l = 0$, ce qui est absurde.
 - Maintenant qu'on a exclu ce cas, on peut commencer.
 - On remarque que $\theta''(0) = -\frac{g}{l}\sin(\theta_0) < 0$ (car $\theta_0 \in]0, \pi[$). Par continuité de θ'' sur \mathbb{R}_+ , il existe $\tilde{\eta} > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \tilde{\eta}]$, $\theta''(t) < 0$, donc sur $[0, \tilde{\eta}]$, θ' est strictement décroissante. Or, $\theta'(0) = 0$. Par conséquent, pour tout $t \in [0, \tilde{\eta}]$, $\theta'(t) \leq 0$ et donc θ est décroissante sur $[0, \tilde{\eta}]$ (encore mieux, θ est strictement décroissante sur $[0, \tilde{\eta}]$ car $\theta'(t) = 0$ seulement pour $t = 0$).
 - On peut alors poser $\tilde{T} := \sup(A)$, avec $A := \{\eta > 0 : \forall t \in [0, \eta], \theta'(t) < 0\}$.
En effet, A est une partie non vide de \mathbb{R} car $\tilde{\eta} \in A$ (donc $\tilde{T} > 0$) et c'est une partie bornée de \mathbb{R} car sinon, cela voudrait dire que θ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ ; cas qu'on a exclu.
 - Montrons d'abord que A est un ouvert de \mathbb{R} .
Soit $\eta \in A$. Alors, pour tout $t \in [0, \eta]$, $\theta'(t) < 0$. En particulier, $\theta'(\eta) < 0$. Par continuité de θ' sur \mathbb{R}_+ , il existe $\epsilon > 0$ tel que $\eta - \epsilon \geq 0$ et, pour tout $t \in]\eta - \epsilon, \eta + \epsilon[$, $\theta'(t) < 0$. En somme, pour tout $t \in]0, \eta + \epsilon[$, $\theta'(t) < 0$, donc $] \eta - \epsilon, \eta + \epsilon[\subset A$, d'où A est un ouvert de \mathbb{R} .
 - Montrons à présent que $A =]0, \tilde{T}[$.
En effet, $A \subset]0, \tilde{T}[$ (car $A \subset]0, \tilde{T}]$ et A est un ouvert de \mathbb{R} donc $\tilde{T} \notin A$). Pour l'inclusion inverse, soit $t_1 \in]0, \tilde{T}[$. Puisque \tilde{T} est le plus petit des majorants de A , alors t_1 n'est pas un majorant de A , et donc il existe $t_2 > t_1$ tel que $t_2 \in A$. Donc pour tout $t \in]0, t_2[$, $\theta'(t) < 0$, en particulier, pour tout $t \in]0, t_1[$, $\theta'(t) < 0$, autrement dit $t_1 \in A$, d'où $]0, \tilde{T}[\subset A$.

- On vient donc de montrer que :

$$\forall t \in]0, \tilde{T}[, \theta'(t) < 0$$

- Montrons enfin que $\theta'(\tilde{T}) = 0$.

En effet, puisque \tilde{T} est le plus petit des majorants de A , on peut construire une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers \tilde{T} . Par conséquent, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta'(\eta_n) < 0$ et par continuité de θ' sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$\theta'(\tilde{T}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta'(\eta_n) \leq 0$$

Or, $\theta'(\tilde{T}) < 0$ n'est pas possible. En effet, par l'absurde, si c'était le cas, alors on aurait :

$$\forall t \in]0, \tilde{T}], \theta'(t) < 0$$

autrement dit $\tilde{T} \in A$, ce qui est absurde car $\tilde{T} \notin A$. D'où $\theta'(\tilde{T}) = 0$.

- On a donc montré que :

$$\begin{cases} \theta'(t) < 0, & \forall t \in]0, \tilde{T}[\\ \theta'(0) = \theta'(\tilde{T}) = 0 \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} \theta'(t) < 0, & \forall t \in]0, \tilde{T}[\\ \theta(0) = \theta_0, \theta(\tilde{T}) = -\theta_0 \\ \theta'(0) = \theta'(\tilde{T}) = 0 \end{cases}$$

car $\theta'(\tilde{T}) = 0$ et $\theta(\tilde{T}) \neq \theta_0$ (car $\theta(0) = \theta_0$ et θ est strictement décroissante sur $]0, \tilde{T}[$) donc, d'après l'intégrale première du mouvement, $\theta(\tilde{T}) = -\theta_0$.

Ainsi, on a montré que θ est strictement décroissante de θ_0 à $-\theta_0$ sur $[0, \tilde{T}]$ (et la vitesse angulaire est nulle seulement lorsque θ vaut $-\theta_0$ ou θ_0).

- Montrons à présent que θ est croissante de $-\theta_0$ à θ_0 sur $[\tilde{T}, 2\tilde{T}]$.

Posons, pour tout $t \geq 0$, $\tilde{\theta}(t) = -\theta(t + \tilde{T})$.

- $\tilde{\theta}(0) = -\theta(\tilde{T}) = -(-\theta_0) = \theta_0$ et $\tilde{\theta}'(0) = -\theta'(\tilde{T}) = 0$
- $\tilde{\theta}''(t) = -\theta''(t + \tilde{T}) = -[-\frac{g}{l} \sin(\theta(t + \tilde{T}))] = \frac{g}{l} \sin(-\theta(t + \tilde{T})) = \frac{g}{l} \sin(\tilde{\theta}(t))$, pour tout $t \geq 0$

Donc $\tilde{\theta}$ est aussi une solution du problème de Cauchy. Par unicité de la solution, $\tilde{\theta} = \theta$, autrement dit $-\theta(t + \tilde{T}) = \theta(t)$, pour tout $t \geq 0$, c'est-à-dire $\theta(t) = -\theta(t - \tilde{T})$, pour tout $t \geq \tilde{T}$.

Or,

- $t \mapsto t - \tilde{T}$ est strictement croissante sur $[\tilde{T}, 2\tilde{T}]$ à valeurs dans $[0, \tilde{T}]$.
- $u \mapsto \theta(u)$ est strictement décroissante sur $[0, \tilde{T}]$ à valeurs dans $[-\theta_0, \theta_0]$.
- $v \mapsto -v$ est strictement décroissante sur $[-\theta_0, \theta_0]$ à valeurs dans $[-\theta_0, \theta_0]$.

Ainsi, par composition de fonctions, θ est strictement croissante sur $[\tilde{T}, 2\tilde{T}]$ à valeurs dans $[-\theta_0, \theta_0]$, $\theta(\tilde{T}) = -\theta_0$ et $\theta(2\tilde{T}) = -\theta(2\tilde{T} - \tilde{T}) = -\theta(\tilde{T}) = \theta_0$; θ est donc strictement croissante de $-\theta_0$ à θ_0 sur $[\tilde{T}, 2\tilde{T}]$.

Remarque 3. L'intuition que j'ai eu (pour montrer la stric. croissance) provient de la symétrie du problème du pendule simple. En effet, lorsque le pendule a un angle de $-\theta_0$ et une vitesse angulaire nulle, c'est la même configuration que celle initiale si on se place de l'autre côté du pendule. Ce "changement de côté" se manifeste dans les calculs par le signe $-$ et le " $t + \tilde{T}$ " signifie qu'on se place \tilde{T} de temps plus tard, c'est-à-dire une fois que le pendule a atteint l'angle $-\theta_0$.

Supposons maintenant que $\theta_0 < 0$.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2. Si $\theta_0 < 0$, alors θ est strictement croissante de θ_0 à $-\theta_0$ sur $[0, \tilde{T}]$ et strictement décroissante de $-\theta_0$ à θ_0 sur $[\tilde{T}, 2\tilde{T}]$

Remarque 4. En réalité, tout comme pour la remarque précédente, le cas où $\theta_0 < 0$ est le même que le cas où $\theta_0 > 0$ si on se place de l'autre côté du pendule. Ayons la même intuition que tout-à-l'heure.

Preuve : Posons $\tilde{\theta} = -\theta$.

- $\tilde{\theta}(0) = -\theta_0 > 0$ et $\tilde{\theta}'(0) = -\theta'(0) = 0$
- $\tilde{\theta}''(t) = -\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin(-\theta(t)) = \frac{g}{l} \sin(\tilde{\theta}(t))$, pour tout $t \geq 0$

Donc $\tilde{\theta}$ est solution du problème de Cauchy avec comme données initiales $\tilde{\theta}(0) = -\theta_0 > 0$ et $\tilde{\theta}'(0) = 0$. Par la proposition, $\tilde{\theta}$ est strictement décroissante de $-\theta_0$ à θ_0 sur $[0, \tilde{T}]$ et strictement croissante de θ_0 à $-\theta_0$ sur $[\tilde{T}, 2\tilde{T}]$ (il s'agit du même \tilde{T} que précédemment) et ainsi, $\theta = -\tilde{\theta}$ est strictement croissante de θ_0 à $-\theta_0$ sur $[0, \tilde{T}]$ et strictement décroissante de $-\theta_0$ à θ_0 sur $[\tilde{T}, 2\tilde{T}]$.

Remarque 5. L'antisymétrie du problème est mise en lumière par l'imparité de la fonction sinus dans l'EDO.

2.3.7 Solution périodique

Lorsqu'on pense au pendule simple, on pense de suite à sa période (mouvement qui oscille). Cela voudrait dire que la solution est périodique ?

Pour cela, nous allons d'abord montrer le résultat général suivant :

Proposition 3. On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & \forall t \geq 0 \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $y^0 \in \mathbb{R}^d$ sont les données du problème vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz global.

Supposons que l'équation est autonome (i.e. pour tout $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $f(t, y) = g(y)$ pour une certaine fonction g) et qu'il existe $T > 0$ tel que $y(T) = y^0$.

Alors :

$$y(t + T) = y(t), \forall t \geq 0$$

Preuve : Posons, pour tout $t \geq 0$, $z(t) = y(t + T)$.

- $z(0) = y(T) = y^0$
- $z'(t) = y'(t + T) = f(t + T, y(t + T)) = g(y(t + T)) = g(z(t)) = f(t, z(t))$, pour tout $t \geq 0$

z est donc solution du problème de Cauchy tout comme y . Par unicité de la solution, $z = y$, autrement dit :

$$y(t + T) = y(t), \forall t \geq 0$$

Ainsi, en remarquant que f est bien autonome et que $\theta(2\tilde{T}) = \theta_0$ et $\theta'(2\tilde{T}) = 0$ (quelque soit le signe de θ_0), c'est-à-dire $X(2\tilde{T}) = X_0$, alors, d'après la proposition qu'on vient de montrer, θ et θ' sont $2\tilde{T}$ -périodique.

2.4 Etude numérique

Dans cette section, nous allons en réalité approcher numériquement θ et θ' puisque l'EDO doit être mise sous forme d'un problème de Cauchy pour utiliser la méthode de RK4.

Ici,

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\frac{g}{l} \sin(y_1) \end{pmatrix}, \forall (t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

On peut donc compléter le fichier f.c :

```
1 #include "vecteur.h"
2 #include <math.h>
3 #include "f.h"
4
5 extern double l;
```

```

6
7 Vecteur_t f(double t, Vecteur_t y) // d = 2
8 {
9     Vecteur_t z;
10    z.d = y.d;
11    z.x[0] = y.x[1];
12    z.x[1] = -g/l*sin(y.x[0]);
13
14    return z;
15 }

```

La ligne 5 permet d'éviter de passer l en paramètre de la fonction f afin d'avoir juste à modifier le contenu de la fonction f si le problème change et non tous les prototypes, les pointeurs de fonctions et appels à la fonction f , ... Il faut voir l comme un paramètre et non une variable à part entière de f .

On a ensuite créé un fichier `recuperation_donnees.c` qui comme l'indique le nom, permettra de récupérer les données du problème par l'utilisateur (le temps final T en secondes, le nombre d'intervalles N pour la discrétisation, l'angle initial θ_0 en radians et la longueur l de la tige en mètres). On ne demande pas la masse de la bille car comme on l'a expliqué, le mouvement du pendule simple ne dépend pas de la masse de la bille. Il faudra exécuter le programme `recuperation_donnees.exe` pour récupérer les données.

Les données sont ensuite stockées dans le fichier `donnees_entree.txt` sous le format suivante :

`T l theta_0 N`

Par exemple :

`20 1 1 600`

Ensuite, on a créé le fichier `calcul_solution.c` qui récupère les données, calcule une approximation de θ et θ' selon la méthode de RK4 (donc appel de la fonction `runge_kutta_4` avec la fonction f en paramètre) puis il écrit la solution dans le fichier `donnees_sortie.txt` sous le format suivant :

`t_0 theta_0`
`t_1 theta_1`
`.`
`.`
`.`
`t_N theta_N`

On ne récupère donc pas l'approximation de θ' , on n'en a pas besoin pour la simulation. Il faudra exécuter le programme `calcul_solution.exe` pour effectuer les tâches décrites.

Enfin, le fichier `simulation_pendule_simple.py` récupère l'approximation et les données du problème et réalise une simulation à partir de celles-ci. L'utilisation du langage python est justifiée par la simplicité du module `pygame` permettant des affichages graphiques.

Pour la compilation, on a réalisé un `makefile`. Il suffira donc de taper :

`make recuperation_donnees.exe`

pour créer l'exécutable `recuperation_donnees.exe` et :

`make calcul_solution.exe`

pour créer l'exécutable `calcul_solution.exe`.

3 Pendule couplé

3.1 Définition et histoire

Le pendule couplé est un autre problème physique qui est constitué de deux pendules simples couplé avec un ressort.

Dans ce nouveau système on considère, en plus des deux pendules, le ressort qui rajoute une force supplémentaire à considérer dans notre étude de ce problème.

On supposera que les deux pendules sont de longueur l , et que le ressort, de raideur k , est fixé de chaque côté sur les pendules à une distance de a par rapport à l'axe de rotation de chaque pendule. On notera respectivement m_1 et m_2 les masses ponctuelles du premier et deuxième pendule et θ_1 et θ_2 les angles formés avec la verticale du premier et deuxième pendule (on supposera que la vitesse angulaire initiale des deux pendules est nulle).

3.2 Mise en équation

On remarque alors que déterminer les angles θ_1 et θ_2 à tout instant permettra de connaître le mouvement du pendule couplé et donc de résoudre ce problème.

Le calcul du moment des forces par rapport aux axes de rotation et l'application du théorème du moment cinétique permettent d'établir les équations du mouvement que vérifient θ_1 et θ_2 :

$$\begin{cases} m_1 l^2 \theta_1''(t) + m_1 g l \sin(\theta_1(t)) - a^2 k (\sin(\theta_2(t)) - \sin(\theta_1(t))) \cos(\theta_1(t)) = 0, & \forall t \geq 0 \\ m_2 l^2 \theta_2''(t) + m_2 g l \sin(\theta_2(t)) + a^2 k (\sin(\theta_2(t)) - \sin(\theta_1(t))) \cos(\theta_2(t)) = 0, & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \theta_1''(t) = \frac{a^2 k (\sin(\theta_2(t)) - \sin(\theta_1(t))) \cos(\theta_1(t)) - m_1 g l \sin(\theta_1(t))}{m_1 l^2}, & \forall t \geq 0 \\ \theta_2''(t) = \frac{-a^2 k (\sin(\theta_2(t)) - \sin(\theta_1(t))) \cos(\theta_2(t)) - m_2 g l \sin(\theta_2(t))}{m_2 l^2}, & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Ce système d'équations décrit l'évolution des angles θ_1 et θ_2 des pendules en fonction du temps.

3.3 Etude qualitative

Pour étudier ce système d'EDO, on commence par écrire l'équation sous la forme d'un problème de Cauchy.

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_1'(t) \\ \theta_2'(t) \end{pmatrix}$ pour tout $t \geq 0$

On a aussi : $X'(t) = \begin{pmatrix} \theta_1'(t) \\ \theta_2'(t) \\ \theta_1''(t) \\ \theta_2''(t) \end{pmatrix}$ pour tout $t \geq 0$

Or d'après les équations de mouvement :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \theta_1'(t) \\ \theta_2'(t) \\ \frac{a^2 k (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1) - m_1 g l \sin(\theta_1)}{m_1 l^2} \\ \frac{a^2 k (\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2) - m_2 g l \sin(\theta_2)}{m_2 l^2} \end{pmatrix}$$

On note donc f la fonction définie par : $\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \longmapsto \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{a^2 k (\sin(y_2) - \sin(y_1)) \cos(y_1) - m_1 g l \sin(y_1)}{m_1 l^2} \\ \frac{a^2 k (\sin(y_2) - \sin(y_1)) \cos(y_2) - m_2 g l \sin(y_2)}{m_2 l^2} \end{pmatrix} \end{cases}$

On a alors : $X'(t) = f(t, X(t))$, pour tout $t \geq 0$

L'équation devient donc : $\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), & \forall t \geq 0 \\ X(0) = \begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} := X_0 \end{cases}$

3.3.1 Existence d'une solution maximale

Vérifions maintenant que l'équation différentielle admet une solution et montrons que la solution est unique.

Puisqu'il s'agit d'un problème de Cauchy, appliquons le théorème de Cauchy-Lipschitz maximal :

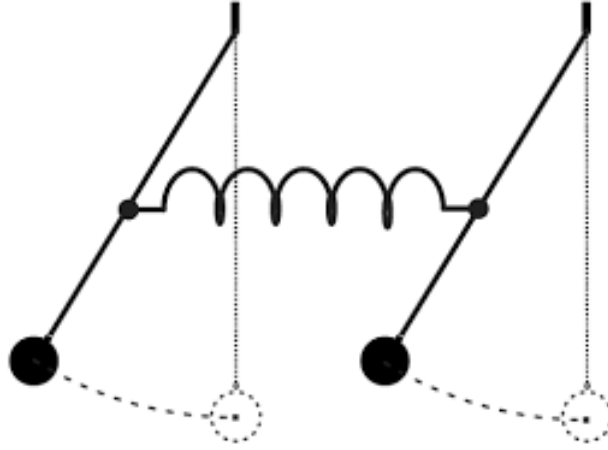


FIGURE 2 – Pendule couplé

- f est continue : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \frac{\partial f_1}{\partial y_4} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto 0 \end{cases}$ sont continues sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y_3} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \frac{\partial f_2}{\partial y_3} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y_4} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto 1 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$
- $\frac{\partial f_3}{\partial y_3} = \frac{\partial f_3}{\partial y_4} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$
- $\frac{\partial f_3}{\partial y_1} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto \frac{a^2 k (\sin(y_1)(\sin(y_1) - \sin(y_2)) - 1) - m_1 g \cos(y_1)}{m_1 l^2} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$
- $\frac{\partial f_3}{\partial y_2} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto \frac{a^2 k \cos(y_2) \cos(y_1)}{m_1 l^2} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$
- $\frac{\partial f_4}{\partial y_3} = \frac{\partial f_4}{\partial y_4} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$
- $\frac{\partial f_4}{\partial y_2} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto \frac{a^2 k (1 + \sin(y_2)(\cos(y_1) - 2\sin(y_2)))}{m_2 l^2} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$
- $\frac{\partial f_4}{\partial y_1} : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \mapsto \frac{-a^2 k \cos(y_1)(\cos(y_2) + m_1 g l)}{m_2 l^2} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale $y^* := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ sur $[0, T^*[,$ pour un certain $T^* > 0$, du problème de Cauchy. Cette solution est donc $X = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix}$.

3.4 Etude numérique

L'avantage d'avoir implémenté la méthode de RK4 d'une manière générale est qu'il nous suffit à présent de juste modifier le contenu de la fonction f , la lecture des données par l'utilisateur

(car les paramètres changent), l'écriture de l'approximation (car on a θ_1 et θ_2 à présent), et la récupération des données et l'affichage graphique durant la simulation (la boucle générale reste la même, c'est-à-dire on affiche la nouvelle position du pendule toutes les h secondes). Je vous laisse regarder les fichiers par vous-même.

4 Double pendule

4.1 Définition et histoire

Le double pendule est un pendule simple à l'extrémité duquel on accroche un autre pendule simple. A priori, on a envie de se dire qu'en "combinant" deux pendules simples, le mouvement de ce nouveau pendule sera simple aussi. Néanmoins, à posteriori (d'après la simulation numérique), son évolution est généralement chaotique.

On note respectivement l_1 et l_2 la longueur du premier et du deuxième pendule, m_1 et m_2 la masse de la bille du premier et du deuxième pendule, et θ_1 et θ_2 l'angle formé avec la verticale par le premier et deuxième pendule. On supposera encore une fois que la vitesse angulaire initiale des deux pendules est nulle.

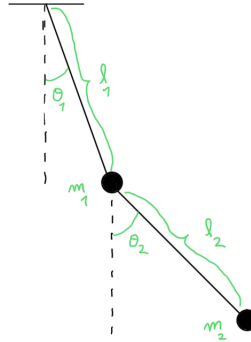


FIGURE 3 – Double pendule

4.2 Mise en équation

On remarque alors que déterminer les angles θ_1 et θ_2 à tout instant permettra de connaître le mouvement du double pendule et donc de résoudre ce problème.

En appliquant les équations de Lagrange, on obtient les équations du mouvement qui vérifient θ_1 et θ_2 :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1\theta_1''(t) + m_2l_2\theta_2''(t)\cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + m_2l_2\theta_2'(t)^2\sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + (m_1 + m_2)g\sin(\theta_1(t)) = 0 \\ l_1\theta_1''(t)\cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + l_2\theta_2''(t) - l_1\theta_1'(t)^2\sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) + g\sin(\theta_2(t)) = 0, \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Posons

$$X(t) := \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_1'(t) \\ \theta_2'(t) \end{pmatrix}, \forall t \geq 0$$

Posons ensuite :

$$A(X(t)) := \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)l_1 & m_2l_2\cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \\ l_1\cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) & l_2 \end{bmatrix}, \forall t \geq 0$$

et

$$b(X(t)) := \begin{pmatrix} -m_2l_2\theta_2'(t)^2\sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - (m_1 + m_2)g\sin(\theta_1(t)) \\ l_1\theta_1'(t)^2\sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - g\sin(\theta_2(t)) \end{pmatrix}, \forall t \geq 0$$

Alors le système d'équations devient :

$$A(X(t)) \begin{pmatrix} \theta_1''(t) \\ \theta_2''(t) \end{pmatrix} - b(X(t)) = 0, \forall t \geq 0$$

autrement dit :

$$A(X(t)) \begin{pmatrix} \theta_1''(t) \\ \theta_2''(t) \end{pmatrix} = b(X(t)), \forall t \geq 0$$

Remarquons que, pour tout $t \geq 0$, $A(X(t))$ est inversible. En effet, pour tout $t \geq 0$:

$$\Delta(X(t)) := \det A(X(t)) = l_1 l_2 (m_1 + m_2 (1 - \cos^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))) \geq l_1 l_2 m_1 > 0$$

En particulier, pour tout $t \geq 0$, $\Delta(X(t)) \neq 0$.

Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} \theta_1''(t) \\ \theta_2''(t) \end{pmatrix} = A^{-1}(X(t))b(X(t)), \forall t \geq 0$$

$$\text{avec } A^{-1}(X(t)) = \frac{1}{\Delta(X(t))} \begin{bmatrix} l_2 & -m_2 l_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \\ -l_1 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) & (m_1 + m_2) l_1 \end{bmatrix}, \forall t \geq 0$$

4.3 Etude qualitative

Pour étudier ce système d'EDO, on commence par écrire l'équation sous la forme d'un problème de Cauchy.

$$\text{On a : } X'(t) = \begin{pmatrix} \theta_1'(t) \\ \theta_2'(t) \\ \theta_1''(t) \\ \theta_2''(t) \end{pmatrix} \text{ pour tout } t \geq 0$$

Or d'après les équations de mouvement :

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \theta_1'(t) \\ \theta_2'(t) \\ A^{-1}(X(t))b(X(t)) \end{pmatrix}$$

$$\text{On note donc } f \text{ la fonction définie par : } \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \longmapsto \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ A^{-1}(y)b(y) \end{pmatrix} \end{cases}$$

On a alors : $X'(t) = f(t, X(t))$, pour tout $t \geq 0$

$$\text{L'équation devient donc : } \begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), & \forall t \geq 0 \\ X(0) = \begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} := X_0 \end{cases}$$

4.3.1 Existence d'une solution maximale

Par manque de temps et de place dans le rapport, ce paragraphe est laissé au lecteur. Je vous

$$\text{laisse montrer que l'équation différentielle admet une unique solution, qui est donc } X = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix}$$

(appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz).

4.4 Etude numérique

Pour l'étude numérique, c'est exactement la même chose que pour le pendule simple et le pendule couplé. Je vous laisse regarder les fichiers par vous-même et les exécuter afin de réaliser une simulation numérique du double pendule. Si vous y arrivez, c'est que vous avez bien compris le raisonnement général.

5 Conclusion

Durant ce projet, nous avons exploré trois problèmes physiques liés aux pendules en simulant numériquement leur oscillation à partir des EDO que vérifient les angles. Nous voyons donc l'importance de l'étude des EDO et de leur approximation numérique dans l'étude des problèmes en

physique. Néanmoins, remarquons que ces trois problèmes sont des problèmes uniquement temporels. En effet, les grandeurs (ici les angles) qu'on cherche à déterminer (ou plus exactement à approcher numériquement) ne dépendent que du temps, c'est-à-dire que d'une variable réelle. Cette branche des mathématiques a donc des limites. Par exemple, elle ne s'applique pas quand il y a des perturbations de proche en proche (propagation des ondes, diffusion de la chaleur, ...), c'est-à-dire il y a en plus d'une évolution temporelle une évolution spatiale, et donc la grandeur qu'on cherche à déterminer (cf hauteur d'une vague, température dans une pièce, ...) dépend à présent de plusieurs variables réelles (temps et position dans l'espace). Dans ce type de problèmes, il y aura donc des dérivées partielles qui apparaissent dans les équations (cf représentation d'une vague). Mais comment fait-on me diriez-vous ?

A suivre en MACS 2 durant le cours sur les Equations aux Dérivées Partielles (EDP linéaires et Différences Finies)...

N.B. Pour l'étude qualitative des EDO pour le problème du pendule couplé et du double pendule, nous aurions pu aller plus loin à l'instar du pendule simple, mais par manque de temps et de place, nous ne l'avons pas fait. On voit donc une amélioration possible dans ce projet...

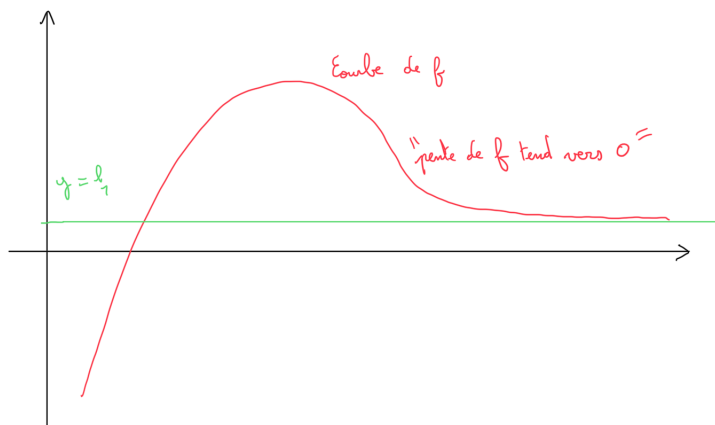


FIGURE 4 – Illustration de la proposition 4

6 Annexe

6.1 Asymptote horizontale en l'infini

Proposition 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction .

Si f admet une limite finie en $+\infty$, est dérivable et f' admet une limite finie en $+\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

Preuve : Notons l_1 la limite de f en $+\infty$ et l_2 la limite de f' en $+\infty$. Montrons que $l_2 = 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1$, on a par définition de la limite :

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geq A, |f(x) - l_1| \leq \epsilon$$

Par conséquent, pour tout $n > 0$, il existe $A_n \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq A_n$, $|f(x) - l_1| \leq \frac{1}{2n}$.

On va à présent construire deux suites par récurrence.

On considère d'abord la suite réelle $(x_{1,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} x_{1,1} = A_1 \\ x_{1,n+1} = \max(A_{n+1}, x_{1,n} + 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On considère ensuite la suite réelle $(x_{2,n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $x_{2,n} = x_{1,n} + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $x_{2,n} - x_{1,n} = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$|f(x_{2,n}) - f(x_{1,n})| = |f(x_{2,n}) - l_1 + l_1 - f(x_{1,n})| \leq |f(x_{2,n}) - l_1| + |f(x_{1,n}) - l_1| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

Or, puisque f est continue sur $[x_{1,n}, x_{2,n}]$ et dérivable sur $]x_{1,n}, x_{2,n}[$, par le théorème des accroissements finis, il existe $x_n \in]x_{1,n}, x_{2,n}[$ tel que :

$$f(x_{2,n}) - f(x_{1,n}) = f'(x_n)(x_{2,n} - x_{1,n}) = f'(x_n)$$

et donc :

$$|f'(x_n)| = |f(x_{2,n}) - f(x_{1,n})| \leq \frac{1}{n}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc par le théorème de l'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0$$

De plus, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{1,n+1} - x_{1,n} \geq 1$ (par construction de la suite), alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{1,n} = +\infty$$

et donc, par le théorème de comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tel que :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0 \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l_2 \end{cases}$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = l_2$$

Pour résumer, on vient de montrer que :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x_n) = l_2 \end{cases}$$

Finalement, par unicité de la limite, on en déduit que $l_2 = 0$, ce qui achève la démonstration.

6.2 Mise en équation du pendule couplé

Nous allons montrer dans ce paragraphe comment obtenir le système d'équations du pendule couplé. Vous trouverez ci-dessous le schéma du pendule couplé.

Commençons par étudier le premier pendule :

- Bilan des forces
 - $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$, où $\vec{g} = g \vec{u}_x = g(\cos(\theta_1) \vec{u}_{r_1} - \sin(\theta_1) \vec{u}_{\theta_1})$
 $\vec{P}_1 = m_1 g \cos(\theta_1) \vec{u}_{r_1} - m_1 g \sin(\theta_1) \vec{u}_{\theta_1}$
 - $\vec{T}_1 = -T_1 \vec{u}_{r_1}$
 - $\vec{F}_{R_1} = ka(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \vec{u}_y = ka(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \sin(\theta_1) \vec{u}_{r_1} + ka(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1) \vec{u}_{\theta_1}$
- Calcul du moment des forces
 - $\vec{M}_{O_1}(\vec{P}_1) = l \vec{u}_{r_1} \wedge \vec{P}_1 = -lm_1 g \sin(\theta_1) \vec{u}_z$
 - $\vec{M}_{O_1}(\vec{T}_1) = \vec{0}$
 - $\vec{M}_{O_1}(\vec{F}_{R_1}) = a \vec{u}_{r_1} \wedge \vec{F}_{R_1} = a^2 k(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1) \vec{u}_z$
- Calcul du moment cinétique
 - $\vec{L}_{O_1}(M_1) = l \vec{u}_{r_1} \wedge m_1 l \theta_1' \vec{u}_{\theta_1} = m_1 l^2 \theta_1' \vec{u}_z$
- Le théorème du moment cinétique nous affirme que :

$$\vec{L}_{O_1}'(M_1) = \vec{M}_{O_1}(\vec{P}_1) + \vec{M}_{O_1}(\vec{T}_1) + \vec{M}_{O_1}(\vec{F}_{R_1})$$

c'est-à-dire :

$$m_1 l^2 \theta_1'' \vec{u}_z = -lm_1 g \sin(\theta_1) \vec{u}_z + a^2 k(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1) \vec{u}_z$$

ou encore :

$$m_1 l^2 \theta_1'' + lm_1 g \sin(\theta_1) - a^2 k(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1) = 0$$

Le raisonnement pour le deuxième pendule est analogue, à la différence près que $\vec{F}_{R_2} = -\vec{F}_{R_1}$. On obtient ainsi :

$$m_2 l^2 \theta_2'' + lm_2 g \sin(\theta_2) + a^2 k(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2) = 0$$

Ainsi, on aboutit comme convenu au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} m_1 l^2 \theta_1''(t) + m_1 g l \sin(\theta_1(t)) - a^2 k(\sin(\theta_2(t)) - \sin(\theta_1(t))) \cos(\theta_1(t)) = 0, & \forall t \geq 0 \\ m_2 l^2 \theta_2''(t) + m_2 g l \sin(\theta_2(t)) + a^2 k(\sin(\theta_2(t)) - \sin(\theta_1(t))) \cos(\theta_2(t)) = 0, & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Je tiens à préciser que j'ai supposé les forces de rappel du ressort horizontales pour faciliter la mise en équation (ce qui est faux mais c'est une "bonne" approximation pour des angles "petits").

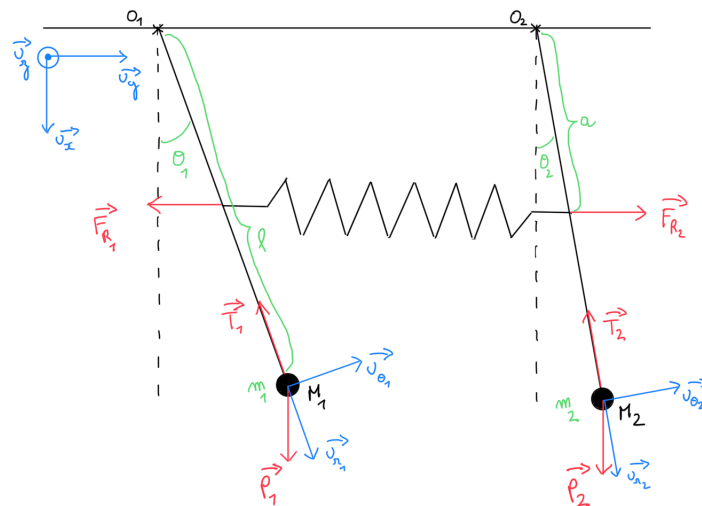


FIGURE 5 – Pendule couplé

Références

- [1] Nicolas Vauchelet (2023) : *Cours sur les EDO (MACS 1)*
- [2] Le Mans Université : *page internet*, <http://subaru.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/coupressort.html>
- [3] Wikipédia : *page internet*, https://fr.wikipedia.org/wiki/Pendule_double
- [4] Wikipédia : *page internet*, https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_du_moment_cin%C3%A9tique