Oscillations d’un pendule

Projet EDO

Selim Mohamed LIMAM Kelvin LEFORT

MACS 1 - Sup Galilée - Institut Galilée - Université Sorbonne Paris Nord

2023/2024

Sommaire

Définition

- Méthode d'approximation numérique d'un problème de Cauchy
- explicite à un pas
- Méthode très précise (ordre 4) et largement utilisée en pratique

Algorithme 1: Méthode de RK4

Fonction $(y_0, \ldots, y_N) \leftarrow$ *runge_kutta_4* (f, y^0, T, N)
- $h \leftarrow \frac{T}{N}$
- $y_0 \leftarrow y^0$
- $t \leftarrow 0$
- **Pour** $n \leftarrow 0$ *à* $(N-1)$ **faire**
  - $k_1 \leftarrow f(t, y_n)$
  - $k_2 \leftarrow f(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$
  - $k_3 \leftarrow f(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$
  - $k_4 \leftarrow f(t + h, y_n + hk_3)$
  - $y_{n+1} \leftarrow y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
  - $t \leftarrow t + h$
- **FinPour**
- **Renvoyer** $(y_0, \ldots, y_N)$

FinFonction

Sommaire

Pendule simple

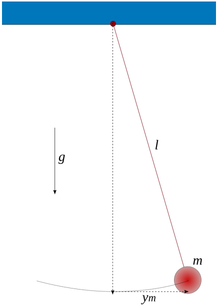

Figure: Pendule simple

Mise en équation

θ vérifie l'équation :

$$\begin{cases} \theta'' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \in]-\pi, \pi] \\ \theta'(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Problème de Cauchy

Posons $X = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta' \end{pmatrix}$.

Alors $X' = \begin{pmatrix} \theta' \\ \theta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta' \\ \frac{-g}{l}\sin(\theta) \end{pmatrix}$.

En notant f la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, y = (y_1, y_2)) \longmapsto \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{-g}{l}\sin(y_1) \end{pmatrix} \end{cases}$$

L'équation (1) devient :

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), \forall t \geq 0 \\ X(0) = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} := X_0 \end{cases} \tag{2}$$

Etude qualitative

- Il existe une unique solution globale de (2), autrement dit de (1), qui est donc θ
- θ est constant ssi $\theta_0 = 0$ ou $\theta_0 = \pi$
- θ est borné : $-|\theta_0| \leq \theta \leq |\theta_0|$
- θ oscille périodiquement entre $-|\theta_0|$ et $|\theta_0|$

Simulation numérique

Figure: Simulation pendule simple

Sommaire

Pendule couplé

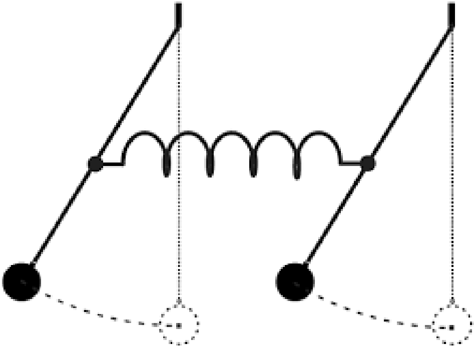

Figure: Pendule couplé

Mise en équation

θ_1 et θ_2 vérifient l'équation :

$$\begin{cases} m_1 l^2 \theta_1'' + m_1 g l \sin(\theta_1) - a^2 k(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1) = 0 \\ m_2 l^2 \theta_2'' + m_2 g l \sin(\theta_2) + a^2 k(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2) = 0 \\ \theta_1(0) = \theta_{1,0} \in]-\pi, \pi] \\ \theta_2(0) = \theta_{2,0} \in]-\pi, \pi] \\ \theta_1'(0) = 0 \\ \theta_2'(0) = 0 \end{cases}$$

Mise en équation

Autrement dit :

$$\begin{cases} \theta_1'' = \frac{-m_1 gl\sin(\theta_1)+a^2k(\sin(\theta_2)-\sin(\theta_1))\cos(\theta_1)}{m_1 l^2} \\ \theta_2'' = \frac{-m_2 gl\sin(\theta_2)-a^2k(\sin(\theta_2)-\sin(\theta_1))\cos(\theta_2)}{m_2 l^2} \\ \theta_1(0) = \theta_{1,0} \in]-\pi,\pi] \\ \theta_2(0) = \theta_{2,0} \in]-\pi,\pi] \\ \theta_1'(0) = 0 \\ \theta_2'(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Problème de Cauchy

Posons $X = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix}$.

Alors $X' = \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ \frac{-m_1 g l \sin(\theta_1) + a^2 k(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1)}{m_1 l^2} \\ \frac{-m_2 g l \sin(\theta_2) - a^2 k(\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)) \cos(\theta_2)}{m_2 l^2} \end{pmatrix}$.

Problème de Cauchy

En notant f la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \longmapsto \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \frac{-m_1 gl \sin(y_1) + a^2 k(\sin(y_2) - \sin(y_1)) \cos(y_1)}{m_1 l^2} \\ \frac{-m_2 gl \sin(y_2) - a^2 k(\sin(y_2) - \sin(y_1)) \cos(y_2)}{m_2 l^2} \end{pmatrix} \end{cases}$$

L'équation (3) devient :

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), \forall t \geq 0 \\ X(0) = \begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} := X_0 \end{cases} \tag{4}$$

Etude qualitative

- Il existe une unique solution maximale de (4), autrement dit de (3), qui est donc (θ_1, θ_2)

Simulation numérique

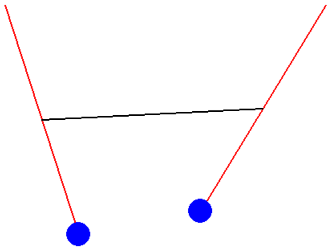

Figure: Simulation pendule couplé

Sommaire

Double pendule

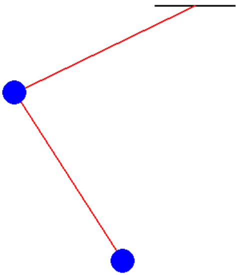

Figure: Double pendule

Mise en équation

θ_1 et θ_2 vérifient l'équation :

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1 \theta_1'' + m_2 l_2 \theta_2'' \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \theta_2'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ +(m_1 + m_2) g \sin(\theta_1) = 0 \\ l_1 \theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) + l_2 \theta_2'' - l_1 \theta_1'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin(\theta_2) = 0 \\ \theta_1(0) = \theta_{1,0} \in] - \pi, \pi] \\ \theta_2(0) = \theta_{2,0} \in] - \pi, \pi] \\ \theta_1'(0) = 0 \\ \theta_2'(0) = 0 \end{cases}$$

Problème de Cauchy

Posons $X := \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix}$

Posons ensuite $A(X) := \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1 & m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_2 \end{bmatrix}$ et

$b(X) := \begin{pmatrix} -m_2 l_2 \theta_2'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \sin(\theta_1) \\ l_1 \theta_1'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g \sin(\theta_2) \end{pmatrix}$

Problème de Cauchy

Alors le système d'équations devient :

$$A(X)\begin{pmatrix}\theta_1''\\ \theta_2''\end{pmatrix} - b(X) = 0$$

autrement dit :

$$A(X)\begin{pmatrix}\theta_1''\\ \theta_2''\end{pmatrix} = b(X)$$

Problème de Cauchy

Remarquons que $A(X)$ est inversible. En effet :

$$\Delta(X) := \det A(X) = l_1 l_2 (m_1 + m_2(1 - \cos^2(\theta_1 - \theta_2))) \geq l_1 l_2 m_1 > 0$$

En particulier $\Delta(X) \neq 0$

Problème de Cauchy

Par conséquent :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{pmatrix} = A^{-1}(X)b(X) \\ \theta_1(0) = \theta_{1,0} \in]-\pi,\pi] \\ \theta_2(0) = \theta_{2,0} \in]-\pi,\pi] \\ \theta_1'(0) = 0 \\ \theta_2'(0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

avec $A^{-1}(X) = \frac{1}{\Delta(X)} \begin{bmatrix} l_2 & -m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) & (m_1 + m_2) l_1 \end{bmatrix}$

On a donc :

$$X' = \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \\ A^{-1}(X)b(X) \end{pmatrix}$$

Problème de Cauchy

En notant f la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (t, y = (y_1, y_2, y_3, y_4)) \longmapsto \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ A^{-1}(y)b(y) \end{pmatrix} \end{cases}$$

On a alors : $X'(t) = f(t, X(t))$, pour tout $t \geq 0$
L'équation (5) devient :

$$\begin{cases} X'(t) = f(t, X(t)), \qquad \forall t \geq 0 \\ X(0) = \begin{pmatrix} \theta_{1,0} \\ \theta_{2,0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} := X_0 \end{cases} \tag{6}$$

- Il existe une unique solution maximale de (6), autrement dit de (5), qui est donc (θ_1, θ_2)

Simulation numérique

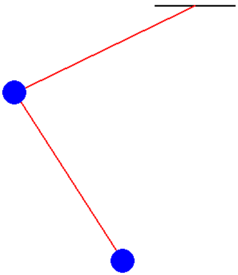

Figure: Simulation double pendule

Conclusion

- L'étude des EDO et de leur approximation numérique ont une place importante dans l'étude de problèmes en physique...
- ...Mais pas tous les problèmes (voir cours EDP linéaires et Différences Finies en MACS 2)