笔记

limbo137

1 洛伦兹群的 Lie 代数

设

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则

$$x + \varepsilon y = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$$

定义模方：

$$|x + \boldsymbol{\varepsilon} y|^2 = (x + \boldsymbol{\varepsilon} y)(x - \boldsymbol{\varepsilon} y) = x^2 - y^2$$

有

$$e^{\varepsilon\lambda} = \cosh\lambda + \boldsymbol{\varepsilon}\sinh\lambda = \begin{bmatrix} \cosh\lambda & \sinh\lambda \\ \sinh\lambda & \cosh\lambda \end{bmatrix}$$

不难验证 $e^{\varepsilon\lambda}$ 是 $O(1,1)$ 的群元

对于一维体系，发生在 (x,t) 的事件可用 $x + \boldsymbol{\varepsilon} ct$ 来表示, 则洛伦兹变换 (boost) 表示为

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} = \gamma - \boldsymbol{\varepsilon}\beta\gamma$$

对于一个事件 (x,t)，用洛伦兹变换成 (x',t')，有

$$\begin{aligned} x' + \boldsymbol{\varepsilon} ct' &= \Lambda(x + \boldsymbol{\varepsilon} ct) = (\gamma - \boldsymbol{\varepsilon}\beta\gamma)(x + \boldsymbol{\varepsilon} ct) \\ &= \gamma(x - \beta ct) + \boldsymbol{\varepsilon}\gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

故有洛伦兹变换：

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

存在一个 λ，使得一个参考系的洛伦兹变换可表为

$$e^{-\boldsymbol{\varepsilon}\lambda} = \gamma - \boldsymbol{\varepsilon}\beta\gamma$$

则称这个 λ 为该参考系的快度

2 一维运动

2.1 一维匀加速运动

在固有参考系中，固有时 τ 定义为[1]

$$c\mathrm{d}\tau = \sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}c\mathrm{d}t$$

其中 v 为相对速度，在一维情形下简化成：

$$\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}\mathrm{d}t = \sqrt{1 - \beta^2}\mathrm{d}t$$

即得

$$\gamma = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}$$

位矢（即事件）定义为

$$\tilde{r} = x + \boldsymbol{\varepsilon}ct$$

则速度矢量定义为

$$\tilde{v} = \frac{\mathrm{d}\tilde{r}}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(v + \boldsymbol{\varepsilon}c) = c\gamma(\beta + \boldsymbol{\varepsilon}) = c\boldsymbol{\varepsilon}e^{\boldsymbol{\varepsilon}\lambda}$$

其模方：

$$|\tilde{v}|^2 = \tilde{v}\tilde{v}^* = -c^2$$

对上式求导，有：

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}\tilde{v}^* + \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}^*\tilde{v} = 0$$

为保证加速度模长在 boost 下不变，定义加速度矢量为

$$\tilde{a} = \frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tau}$$

即得：

$$\tilde{a}\tilde{v}^* + \tilde{v}\tilde{a}^* = 0 \tag{1}$$

---

[1] 可见在洛伦兹变换中 $\mathrm{d}\tau$ 是不变的

对于一维匀加速运动，我们一般认为我们认为下列这个量保持恒定[2]：

$$\frac{\mathrm{d}(\gamma v)}{\mathrm{d}t} = a = \text{constant} \tag{2}$$

用快度改写上式：

$$\mathrm{d}\sinh\lambda = \frac{a}{c}\mathrm{d}t$$

积分，代入初速度为 0，令 $\rho = \frac{c^2}{a}$，有

$$ct = \rho\sinh\lambda$$

用 (2) 式除以 $\beta = \frac{\mathrm{d}x}{c\mathrm{d}t}$, 再积分可得：

$$x = \rho(\cosh\lambda - 1)$$

联立上两式，得到世界线方程：

$$(x+\rho)^2 - (ct)^2 = \rho^2$$

是双曲线方程

2.2 一维振动

对于一个体系，固有时 τ 与参考系无关，因此力学体系的作用量应该正比于该积分，即

$$S = \alpha\int c\mathrm{d}\tau = \alpha\int\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}c\mathrm{d}t$$

我们应该保证真实路径该积分最小，对于自由粒子，真实路径的该积分反而最大，另一方面，作用量中应该含有粒子本身的性质——质量，最后，被积函数（即 Lagrange 量）应该具有能量量纲，于是我们令 $\alpha = -mc$ 则作用量表为：

$$S = -\int mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t$$

得到 Lagrange 量：

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{mc^2}{\gamma} = -\frac{mc^2}{\cosh\lambda}$$

[2]此时的 4-加速度为

$$a\gamma(1+\boldsymbol{\varepsilon}\beta) = ae^{\boldsymbol{\varepsilon}\lambda}$$

对于一维运动, 定义动量为

$$p=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}v}=-mc\frac{\mathrm{d}\cosh^{-1}\lambda}{\mathrm{d}\tanh\lambda}=mc\sinh\lambda=mc\beta\gamma$$

顺便我们得到能量表达式：

$$E=pv-L=mc^2\gamma$$

静止时得到粒子静质能 mc^2

以上讨论是对于自由粒子而言的，对于具有形如 $U(x)=\frac{1}{2}kx^2$ 势能的粒子，Lagrange 量为

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{1}{2}kx^2$$

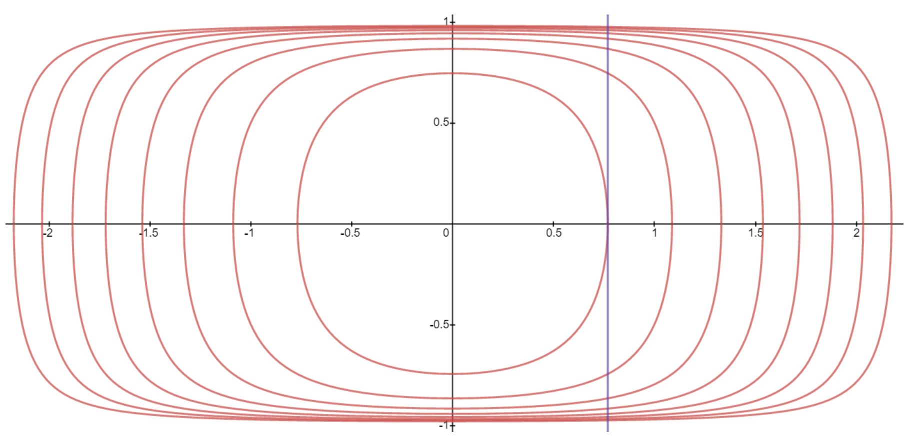
代入 Lagrange 方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}v}=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}$，可得到运动方程，但是我们不必去解这个方程，我们应该另辟蹊径来寻找一些定性的结论，这个体系是保守的，故有能量守恒 (也可通过运动方程积分得到)：

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{1}{2}kx^2$$

将此式无量纲化

$$\frac{E}{mc^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{1}{2}(\frac{\omega x}{c})^2$$

以 x 为横坐标，$\frac{v}{c}$ 为纵坐标，取几个能量的值，作图



靠近中心的红线是能量低的体系，远离的则是高能体系，可以看出，最大速度不会超过 c，而图中蓝线对应 $x=\frac{c}{\omega}$, 即振幅的位置

2.3 一维碰撞

定义动量矢量：

$$\tilde{p} = m\tilde{v} = p + mc\gamma\boldsymbol{\varepsilon}$$

其模方：

$$\tilde{p}\tilde{p}^* = p^2 - m^2c^2\gamma^2 = -m^2c^2$$

整理得到

$$(pc)^2 + (mc^2)^2 = E^2$$

对于光子等零质量的粒子，有

$$E = pc$$

顺便得到自由粒子的 Hamilton 量：

$$H = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$$

两个粒子，质量为 m_1 和 m_2，速度为 v_1，v_2，在同一直线上，碰后仍在同一直线上，速度为 v_1'，v_2'，有动量守恒：

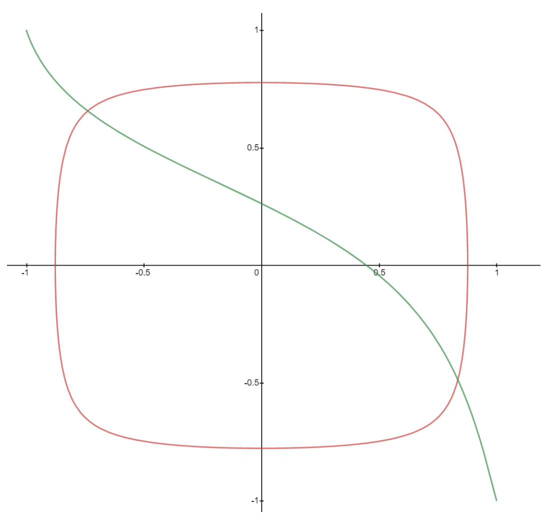
$$\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \tilde{p}_1' + \tilde{p}_2' \tag{3}$$

待定系数：

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' = P \tag{4}$$

$$m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 = m_1\gamma_1' + m_2\gamma_2' = \frac{E}{c^2} \tag{5}$$

我们用两个粒子的 β 分别做横纵坐标，画出上两个方程对应的图像



绿线代表方程 (4)，红线代表方程 (5)，红绿线一般有两个交点，一个为初态，另一个为末态，我们有几条定性的结论

1. 与非相对论情形相同，若 $m_1 = m_2$，则两粒子速度交换（因为方程完全对称）

2. 无论总能量多么高，最大速度不会超过 c

3. 若 $m_1 << m_2$，则 $v_1' \approx -v_1$,$v_2' \approx v_2$

我们现在来推导柯尼希定理，为方便，我们使用快度，在质心系有：

$$(m_1 + m_2)\sinh\lambda_c = m_1\sinh\lambda_1 + m_2\sinh\lambda_2$$

得到

$$\begin{aligned}
\sinh\lambda_c &= \frac{m_1\sinh\lambda_1 + m_2\sinh\lambda_2}{m_1 + m_2} \\
\cosh\lambda_c &= \sqrt{1 + (\frac{m_1\sinh\lambda_1 + m_2\sinh\lambda_2}{m_1 + m_2})^2} \\
&= \frac{\sqrt{(m_1\cosh\lambda_1 + m_2\cosh\lambda_2)^2 + 2m_1m_2(1 + \sinh\lambda_1\sinh\lambda_2 - \cosh\lambda_1\cosh\lambda_2)}}{m_1 + m_2} \\
&= \frac{\sqrt{(m_1\cosh\lambda_1 + m_2\cosh\lambda_2)^2 + 2m_1m_2(1 - \cosh(\lambda_1 - \lambda_2))}}{m_1 + m_2}
\end{aligned}$$

于是有质心动能表达式：

$$\frac{E_{质心}}{c^2} = (m_1+m_2)\cosh\lambda_c = \sqrt{(m_1\cosh\lambda_1 + m_2\cosh\lambda_2)^2 + 2m_1m_2(1 - \cosh(\lambda_1 - \lambda_2))}$$

设总能量：

$$E = m_1c^2\cosh\lambda_1 + m_2c^2\cosh\lambda_2$$

于是柯尼希定理写成：

$$E^2 = E_{质心}^2 + 2m_1m_2c^4(\gamma_u - 1)$$

其中 γ_u 定义成

$$\gamma_u = \gamma_1\gamma_2(1 - \frac{v_1v_2}{c^2})$$

两边开平方，做一些近似：

$$(m_1+m_2)c^2+\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2cv_2^2 = (m_1+m_2)c^2\sqrt{(1+\frac{v_c^2}{2c^2})^2 + \frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{u^2}{c^2}}$$

当体系中各速度均远小于光速时，上式可近似为：

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}u^2$$

即经典力学中的柯尼希定理

3 静力学

我们定义力矢量

$$\tilde{f} = m\tilde{a} = \gamma\frac{\mathrm{d}\tilde{p}}{\mathrm{d}t} = \gamma\frac{\mathrm{d}(p + mc\gamma\boldsymbol{\varepsilon})}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

引入空间力 $f = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$，则力矢量写成

$$\tilde{f} = \gamma(f + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}E}{c\mathrm{d}t}) = \gamma(f + \boldsymbol{\varepsilon}\frac{P}{c})$$

不过我们想利用 (6) 式，利用快度改写，有

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \cosh\lambda\frac{\mathrm{d}\tilde{p}}{\mathrm{d}t} = \cosh\lambda\frac{\mathrm{d}(p + mc\gamma\boldsymbol{\varepsilon})}{\mathrm{d}t} \\ &= mc\cosh\lambda\frac{\mathrm{d}(\cosh\lambda + \boldsymbol{\varepsilon}\sinh\lambda)}{\mathrm{d}t} \\ &= mc(\cosh^2\lambda + \boldsymbol{\varepsilon}\cosh\lambda\sinh\lambda)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{7}$$

又因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c\tanh\lambda$$

用 (7) 除以上式

$$\tilde{f} = mc^2\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}\cosh\lambda\sinh\lambda + \sinh^2\lambda)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} \tag{8}$$

利用 (7) 和 (8)

$$\tilde{f}(c\mathrm{d}t - \boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{d}x) = mc^2\mathrm{d}\lambda$$

稍微改写一下

$$\tilde{f}e^{-\boldsymbol{\varepsilon}\lambda} = mc\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} \tag{9}$$

我们还知道

$$\mathrm{d}\tilde{r}^* = -c\boldsymbol{\varepsilon}e^{-\boldsymbol{\varepsilon}\lambda}\mathrm{d}\tau$$

代入有

$$\tilde{f}\mathrm{d}\tilde{r}^* = -\boldsymbol{\varepsilon}mc^2\mathrm{d}\lambda$$

其共轭是

$$\tilde{f}^*\mathrm{d}\tilde{r} = \boldsymbol{\varepsilon}mc^2\mathrm{d}\lambda$$

这也印证了 (1) 式，4-加速和 4-速度是互相垂直的，所以上面这个结论虽然形式上类似做功，但却是某种力和位移的外积，还赋予了快度 λ 新意义

$$\Delta\lambda = \frac{1}{\varepsilon mc^2}\int_{\tilde{r_1}}^{\tilde{r_2}} \tilde{f}^* \mathrm{d}\tilde{r}$$

由 (6) 我们得出粒子做匀速运动的充要条件为所受的 4-力为 0

4 3+1 维情形

受上面的做法启发，我们尝试将 4-矢量定义成下面的样子

$$\tilde{v} = c\gamma(I + \vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}) \tag{10}$$

其中 $\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma}$ 定义成

$$\vec{\beta}\cdot\vec{\sigma} = \beta_x\sigma_x + \beta_y\sigma_y + \beta_z\sigma_z$$

其中 σ_i 是 pauli 矩阵, 定义成

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

可以验证:

$$e^{\lambda\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = (I\cosh\lambda + \vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sinh\lambda)$$

所以 (10) 可以写成

$$\tilde{v} = ce^{\lambda\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$$

其中

$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v}$$

所以洛伦兹变换表示为

$$\Lambda = e^{-\lambda\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$$