讲义

limbo137

2021 年 7 月 11 日

第一部分　力学

1　运动学

运动学是物理理论中最“实在”的一部分，我们完全可以找除牛顿力学以外另一种物理理论来描述我们的世界，但这个理论正确与否，也要靠其造成的运动学“实在”来验证。如果同样情况下两种物体做不同的运动，那么显然有一种理论出了问题。

我们通常所说的运动，实际上指的是物体的“运动状态”随时间的变化，这便是整个运动，**运动状态其实就是质点的速度矢量**，那么整个运动就是速度矢量随时间变化的函数

$$\vec{v}(t)$$

为什么说知道这个就知道整个运动了呢，因为由速度函数可以通过求导求出加速度函数 $\vec{a}(t)$，而位移函数 $\vec{x}(t)$ 也可以通过反推得到，下面我们举直线运动的例子来说明这一点。

1.1　直线运动

在直线运动中，原来的矢量变成了标量，于是速度，加速度，位移三者之间的关系也变得简单了起来

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

根据导函数和原函数的定义[1]，我们也可以得到 $v-t$ 图上，加速度和位移的几何意义，就是切线斜率和面积，

一类最特殊也最常考的运动就是匀加速直线运动，这类运动的核心是加速度不变，我们从数学上可以算出 v 和 x

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
v &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = at + v_0 \\
x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2
\end{aligned}
$$

整理一下，下面这两个方程就是匀加速直线运动的基本方程了，从理论上来讲，一切关于匀加速直线运动的问题都可以利用这两个方程解决

$$
\begin{aligned}
v &= at + v_0 \\
x &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2
\end{aligned} \tag{1}
$$

为了方便，我们还需要 x 与 v 的关系，这个时候上面两式约掉 t

$$v^2 - v_0^2 = 2ax \tag{2}$$

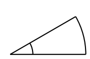
匀加速直线运动中的二级结论

在相等的时间间隔下，匀加速直线运动的位移

1.2 曲线运动

1.3 圆周运动

处理圆周的问题离不开角度，不过这里的角度要换成弧度制，它定义成弧长与半径之比，



$$v = \omega r$$

$$
\begin{aligned}
a &= v\omega \\
&= \frac{v^2}{r} \\
&= \omega^2 r
\end{aligned}
$$

[1] 参见数学选修 2-2

抛体运动

$$x = v_x t$$
$$y = v_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = x \tan\theta - \frac{g x^2}{2 v \cos^2\theta}$$

一般的曲线运动

$$a = \frac{v^2}{\rho}$$

其中 ρ 称为**曲率半径**

2 动力学

2.1 牛顿定律

牛顿第二定律 (力的定义)

$$F = ma$$

弹力

$$F(x) = -kx$$

滑动摩擦

$$f = \mu N$$

万有引力

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

重力

$$G = mg$$

3 静力学

静摩擦

$$F_{静} = F_{外}$$

沿杆，绳方向的力的判断

受力分析综合

受力分析的几个步骤
1. 找好方向，做好投影
2. 判断运动状态，合外力等于 ma（注意方向）
3. 解方程，求出所求力或加速度

4 机械能

4.1 动能和动能定理

动能定理: 合外力做功等于动能的变化
对于受恒定力的质点

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= Fx \\ &= max \\ &= \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)\end{aligned}$$

于是动能定义为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

4.2 势能

$$\mathrm{d}E_k = F\mathrm{d}x$$

如果可以定义[2]

$$-\mathrm{d}E_p = F\mathrm{d}x$$

这个 E_p 就称为势能
则有

$$\mathrm{d}(E_k + E_p) = 0$$

这说明，动能加势能的和是一个在运动中不变的量，我们称之为**守恒量**
那么我们得到了另外一个力的定义

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

[2]很多时候，我们无法找到这样的 E_p 使这个定义成立，这样的外力场称为非保守的，此时的势能要用另外的方式定义或无法定义

我们对这两种定义进行一些评述，在粒子（质点）在外力场的作用下，第一种定义中的 m 是物体本身的属性，表示对外力的一种“抵抗”，也就是物体本身的惯性，而加速度 a 则是粒子对外力场的一种“响应”。而第二种定义中势能是外力场的性质，势能的对空间的导数表明了势能的局部性质，表示对粒子的一种“作用”，或者叫“扰动”，可以说第一种定义是粒子是如何对作用进行响应的，而第二种定义则是说明了外场是如何对粒子进行扰动的，所以我们联立两式，消去 F

$$-\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = ma$$

这个结果是分析力学拉格朗日方程的变体，中如果我们只看这种响应的结果 a

$$a = -\frac{\mathrm{d}E_p}{m\mathrm{d}x}$$

可以看出，质量 m 是一种对外场的“抵抗”

4.3 动量

在两个物体的相互作用中，还有其他的守恒量

考虑两个互相作用的物体，除此之外没有其它作用，我们有牛顿第三定律

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

12 表示物体 1 对物体 2 的作用，21 反之，负号表示方向相反，我们利用牛顿第二定律

$$m_1\frac{\mathrm{d}\vec{v}_1}{\mathrm{d}t} = -m_2\frac{\mathrm{d}\vec{v}_2}{\mathrm{d}t}$$

移项可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0$$

定义总动量为 $\vec{p}$

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

5 万有引力和天体

5.1 从万有引力到开普勒三定律

万有引力定律写成

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

要想得到加速度，要与 $F = ma$ 结合，我们有

$$a(r) = \frac{GM}{r^2}$$

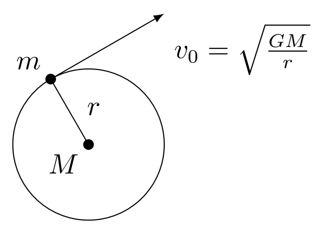
这个关系是天体中最本质的关系，也是卫星运动的基本方程，注意这个加速度指向中心天体，我们想到如果这个天体的速度的大小和方向合适，那么可以做圆周运动，什么是合适的大小和方向？先让上面这个加速度等于圆周运动的向心加速度

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$$

可以解出

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

也就是说，当一个质点在 r 处时，必须以垂直于质点-天体连线为方向，以 $\sqrt{\frac{GM}{r}}$ 为初速度大小发射时，质点**才能**做圆轨道运动，可见这种条件是十分苛刻的。好在，在我们的太阳系中，几大行星的轨道都十分接近正圆形。



什么决定了天体的轨道？

把一个质点在一个天体附近以一个初速度射出，那么它的轨道就是既定的，既然如此，就是先知道了初速度 v_0 和距离 r，那么我们就不应该不分青红皂白的写向心力方程，我们应该沿着物理学基本的寻找守恒量的观点，去寻找质点在只收万有引力作用下的守恒量，这个量可以从数学上推导出来，人们发现，在一个只受有心力[3]的系统中，下面的量是守恒的 (v_θ 是垂直于受力方向的速度分量，称为切向速度)

$$v_\theta r = \frac{r^2 \Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

即单位时间扫过的面积，我们称之为掠面速度，掠面速度守恒就是开普勒第二定律的主要内容。

[3]不止是万有引力，凡是受力方向始终指向一点均可

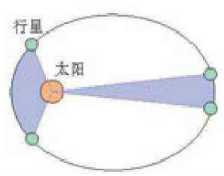


图 1: 行星与太阳的连线在相等的时间扫过相等的面积

通过掠面速度守恒和万有引力定律，我们可以得出行星的轨道是一个椭圆，中心天体处在这个椭圆的一个焦点上，即开普勒第一定律，想要证明这一点并非易事，Feynman 曾有一个巧妙的证明[4], 我们这里不过多介绍。

我们来对绕天体做半径为 R 圆轨道的卫星的周期做一些推导，周期 T 满足

$$T^2 = (\frac{2\pi R}{v})^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$$

于是

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

在椭圆轨道中也有类似的结果，不过需要把 R 换成半长轴 a

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

这就是开普勒第三定律，半长轴的三次方和周期的二次方成正比，由表达式还可看出，这个比值只于中心天体的质量有关。这个也是一个守恒量，不过要在多个卫星绕同一天体运行时才起作用，上面的掠面速度守恒则适用同一卫星运行时的不同位置时。

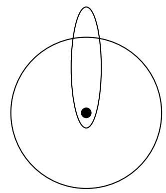
5.2 宇宙速度

我们在地球上抛出一个物体时，它做什么轨道运动，我们学过抛体运动，知道它将做抛物线运动，但是事实果真如此吗？抛出的苹果和天上的月亮会出现不同的轨道吗？

事实上，无论是抛出的苹果，还是天上的月亮，都在做椭圆轨道运动，只不过抛出的苹果速度太小，椭圆的半长轴太大（要想到另外一个焦点是地球中心），这个椭圆是如此之扁以至于它无论如何都会返回地面，而这一小

[4]参见https://www.bilibili.com/video/BV1Zs411A7KJ?from=search&seid=6802919749265632960

部分运动轨迹就看起来像抛物线一样（图中这个椭圆还不够扁）



所以，如果在地球附近沿切线射出一个物体，不考虑其它因素，如果速度合适，那么这个物体就可以绕地球（在地表附近）做圆轨道运动，这个速度也是发射卫星的最小速度，我们让上面的圆轨道条件中的 r 替换成地球半径 R，我们得到了这个速度

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = 7.9\mathrm{km/s}$$

称为**第一宇宙速度**

那么既然能在地球附近做轨道运动，我们在航天上更关心，它速度达到多大时，可以脱离地球引力的束缚，这时就有了**第二宇宙速度**

为了介绍第二宇宙速度，我们先给出引力势能的概念[5]，引力势能与电势能类似，在无穷远初为 0，越靠近中心天体越小，所以正常情况下这个势能为负

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

其中 r 是到中心天体中心的距离，那么根据机械能守恒，我们出发点在地球表面，初速度是 v_0，总能量是

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}$$

在逃离中心引力场的束缚时，动能不断变为引力势能，如果将全部动能用完也还没能抵消完全势能，那么就无法脱离引力的魔爪，但要是引力势能变为 0 时（即无穷远），动能还有剩余，此时的总能量大于 0，那么就是成功脱离了引力的束缚，于是我们只需要让总能量大于 0，就是脱离的条件，即

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \geqslant 0$$

解得

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

[5]这部分仅作了解

右边的速度就是最小速度，即第二宇宙速度，也叫逃逸速度

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2\text{km/s}$$

脱离太阳的引力要复杂的多，这里径直给出结论

$$v_3 = 16.7\text{km/s}$$

5.3 引力半径和黑洞

由逃逸速度的表达式可知，恒星质量越大，半径越小，逃逸速度越大，我们知道宇宙中的速度极限是光速，那么有没有逃逸速度是光速的天体呢？我们来推导一下这种天体应该满足的条件

$$v_2 = c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

于是

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

这个半径称为**施瓦西半径**，也叫引力半径，天体半径小于这个半径的天体叫**黑洞**

6　振动与波 *

第二部分　电磁学

7　静电场

8　稳恒电流

9　磁场

10　电磁感应

11　交流电

第三部分　热学 *

12　微观理论

13　宏观理论

第四部分　光学 *

14　几何光学

15　波动光学

第五部分　近代物理

16　原子物理

17　相对论初步