SU(2)

limbo137

2021 年 11 月 15 日

我们取旋量的一种规范

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\phi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

容易证明其满足

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1$$

为保证上式, $|\psi\rangle$ 的演化方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi\rangle = A|\psi\rangle \tag{1}$$

的解有形式

$$|\psi(t)\rangle = U|\psi(0)\rangle$$

其中 U 满足

$$U^\dagger U = 1$$

且

$$\det U = 1 \tag{2}$$

全体这样的算子的集合组成 SU(2)lie 群

根据演化方程 (1), 我们有

$$U = e^{At}$$

于是

$$\det U = \det e^{At} = e^{\mathrm{Tr}At}$$

按照 (2), 有

$$\mathrm{Tr}A = 0$$

全体 A 的集合称为 lie 群 SU(2) 的 lie 代数, 这里可以看出 SU(2) 的 lie 代数都是迹零的反厄米矩阵[1].

我们来看这个群的具体表示, 首先我们仍考虑演化方程, 我们有时也称其为二维自洽系统

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

中间乘 i 的目的是让中间的矩阵成为厄米的，解决这种问题的一般思路往往是对角化, 而对角化中的矩阵我们使用上面的 U 来做基变换, 中间矩阵的特征方程是

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \text{Tr A}\lambda + \det A = 0$$

其本征值是

$$\lambda = \frac{\text{Tr A}}{2} \pm \frac{\sqrt{(\text{Tr A})^2 - 4\det A}}{2}$$

所以当 $\text{Tr A} = 0$ 时，$\lambda = \pm i\sqrt{\det A}$

但我们其实有更好的方式，由厄米和迹零性，我们可以改写上面的矩阵

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} z & x+yi \\ x-yi & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

其中 a, b, c 是实数，其中 b, c 定义与上不同，继续改写为

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = (ix \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + iy \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + iz \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

定义

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = i\vec{r} \cdot \vec{\sigma} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

且

$$\det(i\vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = |\vec{r}|^2$$

所以对角化后

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}' = ir\sigma_z \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'$$

[1]写成矩阵是该群的一种表示

其中 $r=\sqrt{|\vec{r}|^2}$
解是

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = e^{ir\sigma_z}\begin{pmatrix} u_0' \\ v_0' \end{pmatrix} = (I\cos r + i\sigma_z \sin r)\begin{pmatrix} u_0' \\ v_0' \end{pmatrix}$$

又

$$U^\dagger irt\sigma_z U = i\vec{r}\cdot\vec{\sigma}$$

所以

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = e^{i\vec{r}\cdot\vec{\sigma}t}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = (I\cos rt + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin rt)\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

其中

$$r\vec{n} = \vec{r}$$

上面的作用相当于以 $\vec{r}$ 的角速度旋转

设 $rt=\theta$，有

$$e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = (I\cos\theta + i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\theta)$$

特殊地

$$e^{i\theta\sigma_z} = (I\cos\theta + i\sigma_z\sin\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

同时

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{a}\cdot\vec{b}I + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$$

所以

$$[(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}),(\vec{b}\cdot\vec{\sigma})] = 2i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$$