1 温差电

1.1 题目

德国物理学家塞贝克发现不同导体接在一起时，如果存在温度差，回路中将产生电流，因而发明出了温差电池。温差电动势可解释为金属中自由电子气通过定向运动，传递原子实振动能量的结果 (杜隆-珀替定律告诉我们电子气对金属热容的贡献可以忽略不计)。现认为自由电子气遵循理想气体压强公式 $p = nkT$，压强全部来自金属原子实热振动的贡献，并且电子数密度 n 与温度无关，电阻率 ρ 随温度成线性变化

(1) 电子与原子实的碰撞可采用弹性刚球的模型进行描述。现考虑一柱形导体，上下底接入电源，使得导体内部电场为 E，已知电子在导体内部运动的平均碰撞时间间隔为 τ，电子带电荷为 e，质量为 m。

计算单个电子在导体中的平均速度 $\overline{v}$

已知柱形导体横截面为 S，电子数密度为 n，计算电流 I

电阻率 ρ 是材料本身属性，证明: 任意柱形导体电阻率 ρ 无关于电场 E，横截面 S，以及导体长度

(2) 进一步假定平均碰撞时间的微小增量 $d\tau$ 正比于 τdT，且 $\tau|_{T=T_0} = \tau_0$。计算 τ 与温度 T 的函数关系式。

现给一条热电偶回路，只由 A,B 两个柱形导体“69”拼接而成。

电阻率分别为

$$\rho_A = \rho_1(1 + \alpha_1 (T - T_0) , \rho_B = \rho_2(1 + \alpha_2 (T - T_0)$$

。在平衡态下，两个拼接处温度为 T_1, T_2。

由微观欧姆定律知电流密度

$$\overrightarrow{j} = \frac{1}{\rho}(\overrightarrow{E}_{\text{温差}} + \overrightarrow{E}_{\text{静电}})$$

由 $p = nkT$ 可得电子的平均受力

$$f = \frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{ndx}} = k\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dx}}$$

证明对于温差不大且随温度线性变化的电阻，温差电动势

$$\varepsilon_{温差} = \oint \overrightarrow{E}_{温差}\mathrm{dx} \approx \alpha\left(T_1 - T_2\right) + \frac{1}{2}\beta\left(T_1 - T_2\right)^2$$

其中 α 和 β 为与导体形状有关的比例系数。又在温度为 T_0 时电子的平均碰撞间隔满足

$$\tau_0 = \frac{1}{d2n\bar{v}}$$

其中 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{m}}$ 表示电子平均运动速率。(积分时可以视 $\lambda(T - T_0)$ 是个小量)

1.2 答案

(1) 1. 在不考虑温度对电阻率影响情况下，不妨直接取含源电路中导体的一部分进行分析。电子在连续的两次碰撞间在电场力作用下获得定向运动速度，对应加速度 $a = \frac{eE}{m}$，则经过时间 τ 获得的平均速度为

$$v = \frac{1}{2}a\tau = \frac{eE\tau}{2m}$$

代入电流的微观表达式有

$$I = nes\bar{v} = \frac{ne2sE\tau}{2m}$$

上下同乘 l 代换得到 I 与 U 的关系并直接使用欧姆定律有

$$R = \frac{2ml}{ne^2\tau S}$$

进一步得到 $\rho = \frac{2m}{ne^2\tau}$ 其中 m 均表示电子质量

2. 依题意得到

$d\tau = \lambda\tau dT$ 其中 λ 为比例系数

两边分离变量后积分，注意到 $\tau|_{T=T_0} = \tau_0$ 有

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau} = \int_{T_0}^{T} \lambda dT \Leftrightarrow \tau = \tau_0 e^{\lambda(T-T_0)}$$

（2）取一段均匀金属直导线，以温度降落方向为 n 方向，取 n 一段自由电子气分析两端压强差，依题意对理想气体压强公式取微分有

$$dp = nkdT$$

则此段自由电子气中每个电子的平均受力为

$$f = \frac{dp}{ndx} = k\frac{dT}{dx}$$

仿照 (1) 计算有电子定向运动的平均速率为

$$\bar{v} = \frac{1}{2}a\tau = \frac{kdT}{2mdx}\tau$$

进一步得到导体内电流密度

$$j^{\rightarrow} = -env^{-} = -enkdT/2mdx\tau$$

电流密度贡献分静电场与温差电场两部分

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}(E_{\text{温差}} + E_{\text{静电}}) \Leftrightarrow E_{\text{温差}} = j - E_{\text{静电}}$$

对闭合回路作积分，注意到回路中静电势降落为 0，则

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{E}_{温差} \cdot d\vec{x} &= \oint \vec{j} - \vec{E}_{静电} \cdot d\vec{x} = j \cdot d\vec{x} \\
&= \int_{T_1}^{T_2} {}_1[1 + {}_1(T - T_1)]en\frac{k}{2m}[\tau_0 e^{\lambda_1(T-T_1)}]dT \\
&+ \int_{T_2}^{T_1} {}_2[1 + {}_2(T - T_2)]en\frac{k}{2m}[\tau_0 e^{\lambda_2(T-T_2)}]dT \\
&= {}_1en\frac{k}{2m}\int_{T_1}^{T_2}[1 + {}_1(T - T_1)][\tau_0 e^{\lambda_1(T-T_1)}]dT \\
&+ {}_2en\frac{k}{2m}\int_{T_2}^{T_1}[1 + {}_2(T - T_2)]\tau_0 e^{\lambda_2(T-T_2)}]dT \\
&= {}_1en\frac{k}{2m}\int_{T_1}^{T_2}[1 + {}_1(T - T1)][\tau_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_1(T-T_1)^n}{n!})]dT \\
&+ {}_2en\frac{k}{2m}\int_{T_2}^{T_1}[1 + {}_2(T - T_2)][\tau_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_2(T-T_2)^n}{n!}]dT
\end{aligned}
$$

积分后忽略级数中的高次项得到

$$
\begin{aligned}
&\approx \rho_1 en\frac{k\tau_0}{2m}[\frac{\alpha_1+\lambda_1}{2}(T_2-T_1)^2 + (T_2-T_1)] \\
&+ \rho_2 en\frac{k\tau_0}{2m}[\frac{\alpha_2+\lambda_2}{2}(T_1-T_2)^2 + (T_1-T_2)] \\
&= en\frac{k\tau_0}{2m}[(\rho_1\frac{\alpha_1+\lambda_1}{2} + \rho_2\frac{\alpha_2+\lambda_2}{2})(T_2-T_1)^2 + (\rho_1-\rho_2)(T_2-T_1)] \\
&= \frac{1}{\pi d^2\sqrt{\frac{8kT_0}{\pi m}}}e\frac{k}{2m}[(\rho_1\frac{\alpha_1+\lambda_1}{2} + \rho_2\frac{\alpha_2+\lambda_2}{2})(T_2-T_1)^2 + \\
&(\rho_1-\rho_2)(T_2-T_1)]
\end{aligned}
$$

2 牛顿光学

2.1 题目

光在空间中传播的路径满足费马原理 $\delta\int nds = 0$，这一表达式恰与分析力学中的哈密顿原理 $\delta\int L(q,q',t)dt = 0$ 相类似，因此有些物理学家会把

光类比成一个个特别的实物粒子来处理 (听起来很像是牛爵爷当年建立的微粒说)。我们略去中间建立哈密顿光学的繁琐过程，不加证明地知道以下几点：光源在折射率分布为 $n(\vec{r})$ 的介质的 $\vec{r}_0$ 处发出光线，这束光线可视作速度方向与光线方向相同且动能为 $E_k = \frac{1}{2}n(\vec{r})^2$ 的实物粒子，而粒子速度大小为 $n(\vec{r})$。现空间内充满有一种折射率会随着电场变化的介电常数为 ε_r 的特殊介质，折射率分布满足 $n(\vec{r}) = \sqrt{\chi E(\vec{r})}$。若在空间内放置一根无限长的均匀带正电直线，线密度为 η。以带电直线为 z 轴建立正交坐标架 $o-xyz$(显然这里的原点 O 是任意的)。在 $(a, b, 0)$ 处放置一点光源 A 沿 $\vec{y}$ 方向发射出激光。

(1) 写出折射率分布函数

(2) 已知光粒子的经典总能量视作 0，试根据势能梯度求出光粒子在介质中的受力表达式

(3) a. 说明光粒子在势场中是角动量守恒的，求出激光的轨迹方程

b. 如果要求点光源发出的激光恰好可以为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}a, a, 0)$ 处的一个传感器所接收到，求出 a, b, χ 之间的关系

提示：

$$r \times v = rv * \sin\langle r, v\rangle = rv * \frac{\mathrm{rd}}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}$$

(4) OA 所在平面上有另外一个点光源 B，如果想让点光源 B 发出的激光在平面内做圆周运动，那么 B 发出的光线方向与其坐标应该满足什么条件？