可导与连续可导的区别

所谓可导即导数存在，即

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{1}$$

存在，特殊的，若$x_0=0$,那么即

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} \tag{2}$$

存在，有时这个式子还会写成

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \tag{3}$$

(2)和(3)是完全等价的

所谓连续可导意为导数连续

连续指对一个函数$f(x)$及一点x_0来讲，存在等式

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \tag{4}$$

对于一个函数$f(x)$的导函数$f'(x)$来讲，在x_0连续意味着

$$\lim_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0) \tag{5}$$

成立，如果一个函数在x_0处满足(1)和(5)式，则称为在x_0处**连续可导**,若只满足(1)，则称为在x_0处**可导**

举例来讲，我们了考察一个具体函数

$$f(x)=\begin{cases} x^\alpha\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases} \tag{6}$$

若使$f(x)$在0处可导，应满足什么条件？连续可导呢？

若$f(x)$在0处可导,那么直接利用(3)，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} \tag{7}$$

可导意味着极限(7)要存在，我们知道，这个极限存在的条件是$\alpha>1$（极限存在不包括极限等于无穷大！）

连续可导意味着(5)，要得到(5)的左半部分的$f'(x)$，首先要求导，我们需要知道在0处的导数，若(7)存在(即$\alpha>1$)，经过计算，我们得到(7)式若存在

则必为0，于是$f'(0) = 0$
再对$x > 0$的部分求导，就得到了完整的导数

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

(5)左半部分的极限意味着左右极限都存在且相等，在0处，其左极限显然是0，我们考察其右极限

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \alpha x^{\alpha-1} \sin \frac{1}{x} - x^{\alpha-2} \cos \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f'(0) \tag{9}$$

要使该式成立，x的指数不能为负，即$\alpha > 2$