题目

limbo137

2021 年 7 月 30 日

须知

在开始之前，我们需要熟悉一些物理学中常用但是你不一定非常了解的事情。对时间求导在物理上往往在函数上方打点，例如

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$$

以及著名的 Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

还可以思考这个复数以及 θ 在复平面上的意义

虚数 i 被物理学家 Roger Penrose 称为“魔数 (The magic number)”，包含虚数在内的复数 (complex number) 在物理学中用处巨大，本题旨在用几个例子来初窥复数的奥秘。

$$i^2 = -1$$

0.1 简谐振动

经典力学中一类重要的运动称为简谐振动 (simple harmonic vibration)，这类运动往往有一个和坐标反向且成正比的力，于是其加速度也就和坐标反向且成正比，即

$$a = -\omega^2 x \tag{1}$$

其中 ω^2 是比例系数。我们知道，速度和加速度实际上是 x 的一阶导数和二阶导数，即

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$a = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

1) 求 $x = e^{at}$ 的导数，以及二阶导数，试求出满足 (1) 式的 a 值。
2) 设 $\omega u = v$，那么就有下面的方程组

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \omega u \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\omega x \end{aligned} \tag{2}$$

试将该方程组写成矩阵形式。
3) 找出这样的矩阵 A 满足

$$A^2 = -I$$

I 为单位矩阵，与上面的矩阵形式相比较。
4) 再设

$$r = x + iu$$

将 (2) 写成 r 与 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 的关系。
5) 当 $t = 0$ 时，$r = r_0 = A_0 e^{i\phi}$，称为复振幅 (complex amplitude)。求解 4) 中的 r，并在复平面上表示

0.2 平面运动

在研究平面运动时我们往往利用复数表示平面的坐标，即

$$(x, y) \to r = x + iy$$

这样做的好处是在极坐标中

$$(\rho, \theta) \to r = \rho e^{i\theta} \tag{3}$$

利用式 (3) 我们可以求出

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} e^{i\theta} + i\rho e^{i\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

为了方便，我们利用上方打点的写法

$$v = \dot{r} = \dot{\rho} e^{i\theta} + i\rho\dot{\theta} e^{i\theta} \tag{4}$$

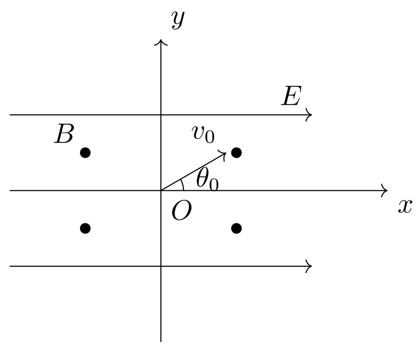
此时 $e^{i\theta}$ 前的系数就是速度 v 沿位置矢量方向的分量，也叫径向分量，$ie^{i\theta}$ 是与径向垂直的分量，称为切向分量，对于上例我们就有

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{\rho} \\ v_\theta &= \rho\dot{\theta} \end{aligned}$$

仿照上面的过程（或利用极坐标的 Christoffel 符号），求加速度 a 的径向分量和切向分量

0.3 电磁正交场

在一个电场与磁场互相垂直的空间内，一带电荷量为 q 的粒子在某一垂直于磁场方向的平面内运动，初速度和电场方向夹角为 θ_0，大小为 v_0，我们可以初步画出图形



在这种体系下，粒子所受的电磁力（是一个复数）可以写成

$$F = qE - ivB$$

1) 列出粒子的受力方程，并试图求解 v 与 t 的关系

(提示：方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a + by$$

的通解是

$$y = Ce^{bx} - \frac{a}{b}$$

其中 C 由初值条件决定)

2) 求位矢 r, 进而求出位置随时间变动的参数方程

提示：

$$\int Ce^{bx} - \frac{a}{b}\mathrm{d}x = \frac{Ce^{bx}}{b} - \frac{a}{b}x + C_1$$

0.4 Kepler 运动

Kepler 运动指受经典引力下的运动，假设中心天体的质量为 M，M 足够大以至于可以看作惯性参考系，复平面中的引力可以写成

$$F = -\frac{GMm}{\rho^2}e^{i\theta} \tag{5}$$

1) 利用 $F = ma$ 求加速度 a
由开普勒第二定律我们知道，行星与中心天体的连线在相同的时间扫过相同的面积，那么单位时间该连线扫过的面积是守恒的，即下面的量守恒

$$L = v_\theta \rho = \rho^2 \dot{\theta} = 2\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

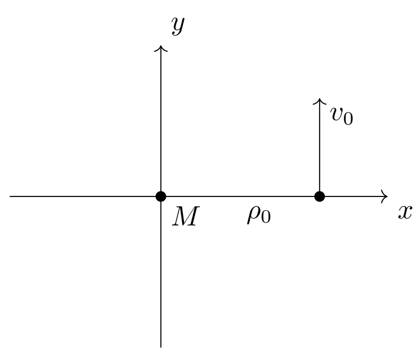
还可以写成

$$L = \rho^2 \dot{\theta} \tag{6}$$

2) 利用 (5) 和 (6)，证明下面的量守恒

$$iLv - GMe^{i\theta}$$

如果在实的向量平面上，这个守恒的矢量称为 Runge-Lenz 矢量
3) 假设粒子初始距离中心天体 ρ_0，速度为垂直与位置矢量的 v_0（如下图）



求 v 复数随位移辐角 θ 的变化，并将其画在以 θ 为辐角的复平面上
4) 利用上面的结果以及 (4)，求在极坐标下该粒子运动的轨迹方程 $\rho(\theta)$