答案

limbo137

2021 年 8 月 22 日

0.1 简谐振动

这是复数的第一个重要应用，在简谐运动中，质点运动遵循的方程是

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

首先按照一般的解方程的套路，我们往往会设

$$x = Ce^{at}$$

代入，得

$$a^2 = -\omega^2$$

从这个方程就可以得到

$$a = \pm \mathrm{i}\omega$$

之后的操作就是把 a 带回去，得到两个线性无关特解，但是我们今天要用另一种方式来解这个方程

我们首先设 $\omega u = \dot{x}$，那么就有方程组

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \omega u \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -\omega x \end{aligned} \tag{1}$$

我们还可以略施小计，把这个方程写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = -\omega \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

其中右侧矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

满足

$$A^2 = -I$$

其中 I 为 2×2 单位阵[1]，在其他地方，你是否看到过这样的等式？

$$\mathrm{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这里可以看到他们都满足平方为负一的性质，值得一提的是，当矩阵 A 作用在二维矢量上时，相当于把矢量逆时针旋转了 $90°$。
所以我们如果设

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = -\omega A\vec{r}$$

其实算到这里，熟悉一些微分方程或是 lie 理论的小伙伴已经可以写出通解了

$$\vec{r} = \vec{C}e^{-\omega At}$$

其中 $\vec{C}$ 是常矢量。但是很多同学对矩阵指数不是很了解，我们还有另一种"奇技淫巧"。

　　我们再设

$$r = x + \mathrm{i}u$$

我们来计算 $\dot{r}$ 的值

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \dot{x} + \mathrm{i}\dot{u} \\ &= \omega u - \mathrm{i}\omega x \\ &= -\mathrm{i}\omega(x + \mathrm{i}u) \end{aligned}$$

所以得出

$$\dot{r} = -\mathrm{i}\omega r$$

结合题目给定的复振幅，我们由此可以解出

$$r = r_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

[1] 出题的时候这个题表述不太明确，只要答案结果满足上式均给分

这时仔细看一下这个结果，是不是和上面结果

$$\vec{r} = \vec{C}e^{-A\omega t}$$

十分相似呢？这是你是否对等式

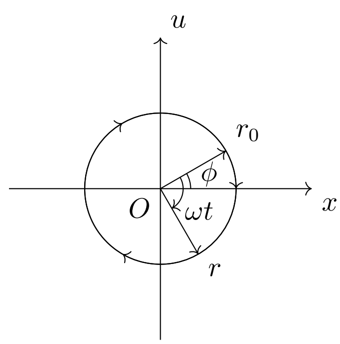
$$\mathrm{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

有了更深的理解 [2]？

利用著名的 Euler 公式，我们有

$$r = r_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} = A_0 e^{\mathrm{i}(\phi - \omega t)} = A_0 \cos(\phi - \omega t) + \mathrm{i} A_0 \sin(\phi - \omega t)$$

我们把这个图画在复平面上



这张图可以称之为相图 (phase diagram)，上面每一个点代表了粒子的位置-速度组合，就是粒子的一个状态，粒子状态的不断变化就体现为点的不断移动，这样的移动会划出一条轨迹，我们称之为相轨，图上这条相轨是一个半径为 A_0 的圆，粒子的位置矢量从辐角为 ϕ 开始顺时针转动，从物理上，转动方向还可以用以下方式判断：例如粒子在第一象限时，$u > 0$ 时，$\dot{x} > 0$，意味着 x 将增大，因此矢量顺时针旋转。

[2]这实际上来源于二维平面上的正交变换 (行列式为正) 和复数这两个群有一个同构映射，任意复数都可以通过下面的方式映射为矩阵

$$a + \mathrm{i}b \to \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

对于 $e^{\mathrm{i}\theta}$ 而言，有

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \to \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

即旋转矩阵

0.2 平面运动

这里尤指在极坐标下的运动，这里就在极坐标中求二阶导数

$$r = \rho e^{\mathrm{i}\theta} \tag{2}$$

$$v = \dot{r} = \dot{\rho} e^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{i}\rho\dot{\theta} e^{\mathrm{i}\theta} \tag{3}$$

$$a = \dot{v} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) e^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{i}(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) e^{\mathrm{i}\theta} \tag{4}$$

大部分同学其实对这一步并没有什么问题，直接求出

$$a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}$$

当然题目中还允许答题者使用另一种解法，即利用极坐标的 Christoffel 符号，请允许我花一些时间，说说如何从复数的角度看待极坐标下的 Christoffel 符号，如果读者赶时间，可以直接跳过这部分，进入下一问的答案与解析

刚刚说了复数到实平面的映射，我们再来说说复数到平面切空间上的映射，我们把 1 和 i 作为切空间的两个自然基矢，即

$$1 \to \frac{\partial}{\partial x}$$
$$\mathrm{i} \to \frac{\partial}{\partial y}$$

其实也本该如此，那么我们来观察一下位置矢量 r 的微分

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y$$

通过上面的映射，有

$$\mathrm{d}r = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y$$

又在切空间中，坐标变换默认下面等式成立

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}r$$

我们来计算 $\mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}r = e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\rho + \mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = e^{\mathrm{i}\theta} = \varepsilon_r$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\theta} = \varepsilon_\theta$$

这一对 ε 是我们所设的极坐标中的一组基[3]

$$\varepsilon_\mu = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\theta} \\ \mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix}$$

对于极坐标中某个矢量 V^μ，其真实导数一部分来自于矢量本身的变化，另一部分来自于坐标基矢带来的变化，即

$$\mathrm{d}(V^\mu \varepsilon_\mu) = \varepsilon_\mu \mathrm{d}V^\mu + V^\mu \mathrm{d}\varepsilon_\mu \tag{5}$$

所以我们来求 $\mathrm{d}\varepsilon_\mu$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\varepsilon_\mu &= \mathrm{d}\begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\theta} \\ \mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix}\mathrm{d}\rho + \begin{bmatrix} \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} \\ -\rho e^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\theta} \\ \mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix}\mathrm{d}\rho + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\theta} \\ \mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix}\mathrm{d}\theta \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}\varepsilon_\mu \mathrm{d}\rho + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{bmatrix}\varepsilon_\mu \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\rho}\varepsilon_\mu = \partial_\rho \varepsilon_\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{bmatrix}\varepsilon_\mu \\
\frac{\partial}{\partial\theta}\varepsilon_\mu = \partial_\theta \varepsilon_\mu = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ -\rho & 0 \end{bmatrix}\varepsilon_\mu
\end{aligned}$$

我们这样摆放这两个导数

$$\begin{bmatrix} \partial_\rho \varepsilon_\mu & \partial_\theta \varepsilon_\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\rho \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\varepsilon_\mu$$

---

[3]需要说明的是，这组基是未归一化的，归一化后的基为

$$\varepsilon_\mu^* = \begin{bmatrix} e^{\mathrm{i}\theta} \\ \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} \end{bmatrix}$$

微分容易得到 $\mathrm{d}\varepsilon_\mu^* = \mathrm{i}\varepsilon_\mu^* \mathrm{d}\theta$，所以 (5) 可以简单地写成

$$\mathrm{d}(V^\mu \varepsilon_\mu^*) = \varepsilon_\mu^*(\mathrm{d}V^\mu + V^\mu \mathrm{i}\mathrm{d}\theta)$$

右边括号内部分除以时间微元常写作

$$\dot{v} + \omega \times v$$

我们设

$$\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\rho \end{bmatrix}, \Gamma^{\theta}_{\nu\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \\ \frac{1}{\rho} & 0 \end{bmatrix}$$

称之为极坐标下的 Christoffel 符号
所以有

$$\partial_{\nu}\varepsilon_{\mu} = \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\varepsilon_{\sigma}$$

这里重复 σ 指标代表求和
代入 (5) 中，有

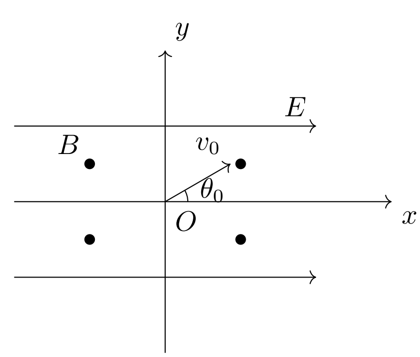
$$\mathrm{d}(V^{\mu}\varepsilon_{\mu}) = \varepsilon_{\mu}\mathrm{d}V^{\mu} + V^{\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}\varepsilon_{\sigma}\mathrm{d}x^{\nu}$$

第二项可以交换哑指标 σ 和 μ，然后我们对时间求导

$$\frac{\mathrm{d}(V^{\mu}\varepsilon_{\mu})}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_{\mu}(\frac{\mathrm{d}V^{\mu}}{\mathrm{d}t} + V^{\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t})$$

右边括号内的部分可以称为 V^{μ} 的“真导数”，第一项由矢量本身变化导致，第二项由标架的变化所导致，我们将 x^{ν} 和 $\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}t}$ 代入，也能得到 (3) 式和 (4) 式的结果。

0.3 电磁正交场



在这个体系中，粒子受力为

$$F = q(E - \mathrm{i}vB)$$

加速度不难写出

$$\dot{v} = \frac{q}{m}(E - \mathrm{i}vB)$$

这算是一个简单的线性方程了，我们简单改写一下

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -\frac{\mathrm{i}qB}{m}(v+\mathrm{i}\frac{E}{B}) \\ &= -\mathrm{i}\omega_0(v+\mathrm{i}u)\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v+\mathrm{i}u) = -\mathrm{i}\omega_0(v+\mathrm{i}u)$$

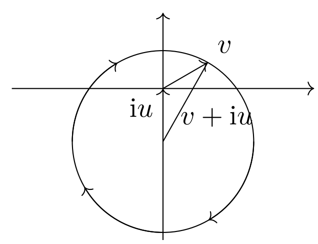
解出 $v+\mathrm{i}u$

$$v+\mathrm{i}u = (v_0 e^{\mathrm{i}\theta_0} + \mathrm{i}u)e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{6}$$

进而得到

$$v = v_0 e^{\mathrm{i}(\theta_0 - \omega_0 t)} + \mathrm{i}ue^{-\mathrm{i}\omega_0 t} - \mathrm{i}u$$

下面来画 v 在复平面的轨迹，从 (6) 可以看出，$v+\mathrm{i}u$ 这个量在复平面上是顺时针以 ω 的角速度旋转的，下图满足了这种情况



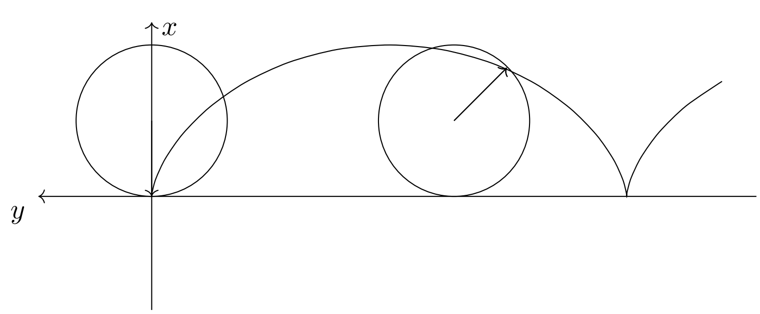
这就是 v 随 t 的变化，当 $v_0 = 0$ 时，有

$$v = \mathrm{i}u(e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} - 1)$$

对其积分，就有

$$r = \frac{u}{\omega_0}(1 - e^{-\mathrm{i}\omega_0 t}) - \mathrm{i}ut$$

这又是什么样的曲线呢？从表面上看，第一项在旋转，第二项是一个向下的匀速直线运动，为方便起见，我们把 xOy 轴逆时针转 $90°$，如下图



这个图刻画了上面我们求得的结果，另一个物理模型可能会对理解这条曲线有帮助，想象一个轮子静止在原点处，开始向 y 轴负方向纯滚，如果我们开始时在轮子最底端做一些标记（例如图上的箭头）那么这一点的在空中划过的轨迹就与上面的轨迹一致[4], 这条轨迹称为滚轮线或摆线，在本题中，带电粒子似乎在朝着 y 轴负方向“漂移”，于是速率 $u = E/B$ 也常常称为电漂移速率，有趣的是，这个速率满足

$$\vec{B} \times \vec{u} = \vec{E}$$

0.4 Kepler 运动

在大质量天体附近，忽略两体效应，万有引力所导致的经典加速度为

$$\dot{v} = -\frac{GM}{\rho^2} e^{i\theta}$$

而且我们还知道有角动量守恒

$$L = \rho^2 \dot{\theta}$$

两式左右相乘，有

$$L\dot{v} = -GM\dot{\theta} e^{i\theta}$$

两边乘 i 移项化简得到

$$\mathrm{d}(iLv + GMe^{i\theta}) = 0$$

题目给出的初速度为 $\mathrm{i}v_0$ 向上，初始 $e^{i\theta} = 1$，$L = v_0\rho_0$ 那么有

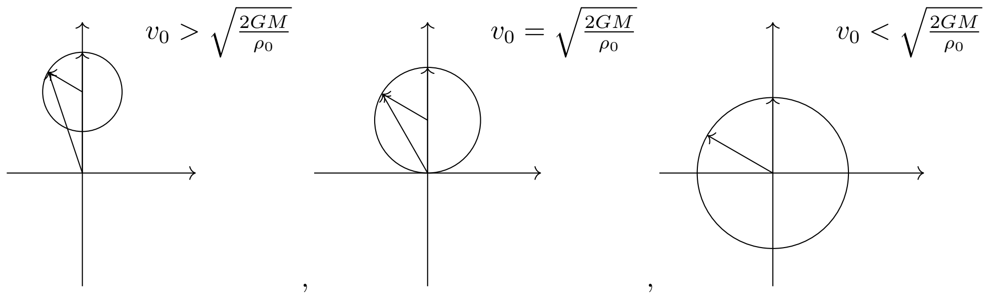
$$iLv + GMe^{i\theta} = -Lv_0 + GM$$

求得 v

$$v = iv_0 + \frac{\mathrm{i}GM}{v_0\rho_0}(e^{i\theta} - 1)$$

[4]这一点请读者自证

通过 v 的不同取值我们有不同的图像与之对应，图中圆的半径为 $\frac{GM}{v_0\rho_0}$, 圆心的高度是 $(0, v_0)$



这三种情况分别对应三种不同的轨道，只有最右边的才是闭合轨道，所以第一种情形下的相轨不是完整的圆，在下面的一些地方是破缺的；而第二种情况只有一点破缺，这些都留给读者自证

接下来我们代入 (3) 式

$$\dot{\rho}e^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{i}\rho\dot{\theta}e^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{i}v_0 + \frac{\mathrm{i}GM}{v_0\rho_0}(e^{-\mathrm{i}\theta} - 1)$$

利用 $\rho\dot{\theta} = L/\rho$ 我们有

$$-\mathrm{i}\dot{\rho} + \frac{L}{\rho} = v_0 e^{-\mathrm{i}\theta} + \frac{GM}{v_0\rho_0}(1 - e^{-\mathrm{i}\theta})$$

选取实部

$$\frac{v_0\rho_0}{\rho} = (v_0 - \frac{GM}{v_0\rho_0})\cos\theta + \frac{GM}{v_0\rho_0}$$

于是我们得到

$$\rho(\theta) = \frac{v_0^2\rho_0^2}{GM + (v_0^2\rho_0 - GM)\cos\theta}$$