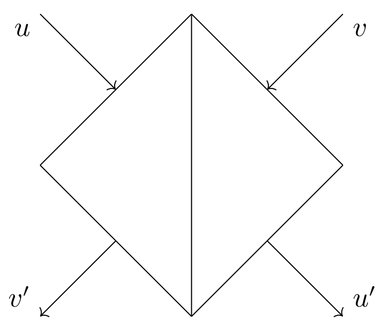
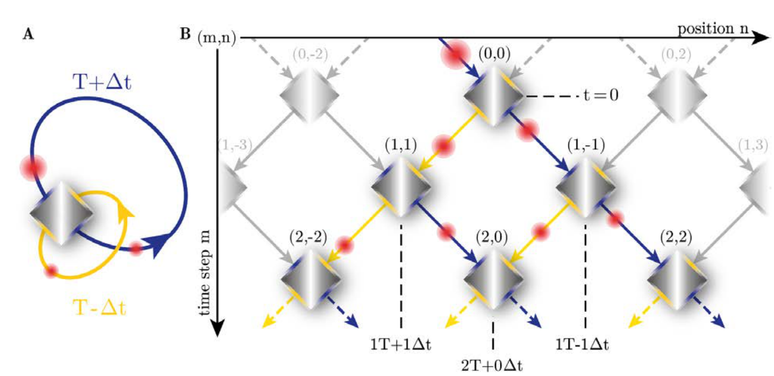
Topological funneling note



对于单个 BS 分束器，有

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_u & r_u \\ r_v & t_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

由于能量守恒，上方矩阵是酉的



按照上图的摆放，有

$$\begin{pmatrix} u_n^m \\ v_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_u & r_u \\ r_v & t_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1}^{m-1} \\ v_{n+1}^{m-1} \end{pmatrix}$$

这里的 m 随演变增大，可以看作时间，n 是空间的标志，所以这个体系是 $1+1$ 维的

按照文献的假定，此时的矩阵为[1]

$$\begin{pmatrix} u_n^m \\ v_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_u e^{i\varphi_u} & 0 \\ 0 & G_v e^{i\varphi_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & i\sin\beta \\ i\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1}^{m-1} \\ v_{n+1}^{m-1} \end{pmatrix}$$

可以写成

$$\begin{pmatrix} u_n^m \\ v_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_u e^{i\varphi_u} & 0 \\ 0 & G_v e^{i\varphi_v} \end{pmatrix} (\mathbf{I}\cos\beta + i\sigma_x \sin\beta) \begin{pmatrix} u_{n-1}^{m-1} \\ v_{n+1}^{m-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

我们假设光线状态随 n(也就是随空间) 变化为

$$\begin{pmatrix} u_n^m \\ v_n^m \end{pmatrix} = e^{iQ\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} U^m \\ V^m \end{pmatrix}$$

这个式子类似平面波假设，此时的矩阵 Q 类似角波数，称为横向 Bloch 动量 (transverse Bloch momentum)，代入 (1) 中，有

$$\begin{pmatrix} U^m \\ V^m \end{pmatrix} = T(Q, G, \varphi, \beta) \begin{pmatrix} U^{m-1} \\ V^{m-1} \end{pmatrix}$$

其中

$$T(Q, G, \varphi, \beta) = e^{-iQ\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} G_u e^{i\varphi_u} & 0 \\ 0 & G_v e^{i\varphi_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & i\sin\beta \end{pmatrix} e^{iQ\frac{n+1}{2}} \\ \begin{pmatrix} i\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} e^{iQ\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

对于时间演化，我们对称地写出

$$\begin{pmatrix} U^m \\ V^m \end{pmatrix} = e^{i\theta\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

θ 称为传播常数 (propagation constant) 即代表能量, 有本征方程

$$e^{i\theta} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = T(Q, G^2, \varphi^2, \beta^2) T(Q, G^1, \varphi^1, \beta^1) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \tag{3}$$

上标是两个相继的时间步长

[1] 此处与文献的记号稍有不同

均匀晶格

在均匀晶格中，$G^1 = G^2 = 1, \varphi^1 = \varphi^2 = 0$,$\beta^1 = \beta^2$ 是常数
由 (2) 式，有

$$T(Q,1,0,\beta) = e^{-iQ\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & i\sin\beta \end{pmatrix} e^{iQ\frac{n+1}{2}} \\ \begin{pmatrix} i\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} e^{iQ\frac{n-1}{2}} \end{pmatrix}$$

代入本征方程 (3)，有

$$e^{i\theta} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = T^2(Q,1,0,\beta) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & i\sin\beta \end{pmatrix} e^{\frac{1}{2}iQ} \\ \begin{pmatrix} i\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}iQ} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$$

$$e^{i\theta} = \begin{pmatrix} -\sin^2\beta + \cos^2\beta\cos Q + i\cos^2\beta\sin Q & i\sin\beta\cos\beta(1+\cos Q) - \sin\beta\cos\beta\sin Q \\ i\sin\beta\cos\beta(1+\cos Q) + \sin\beta\cos\beta\sin Q & -\sin^2\beta + \cos^2\beta\cos Q - i\cos^2\beta\sin Q \end{pmatrix}$$

有

$$\cos\theta = -\sin^2\beta + \cos^2\beta\cos Q$$

此即均匀晶格的色散关系

SSH 晶格

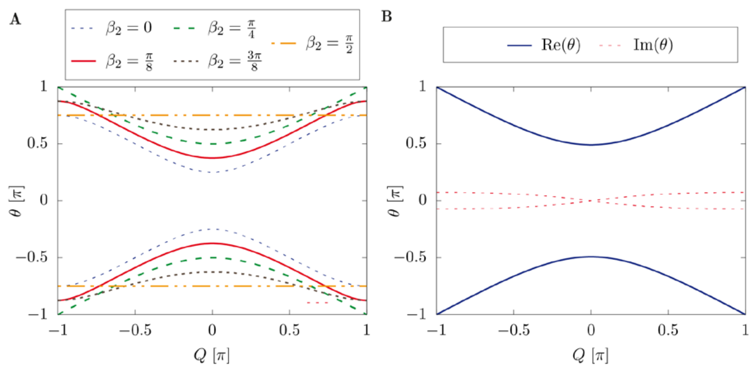
在 SSH 晶体中，$G^1 = G^2 = 1, \varphi^1 = \varphi^2 = 0$，$\beta^1 \neq \beta^2$，上方的平方项变为交叉项，有

$$\cos\theta = -\sin\beta^1\sin\beta^2 + \cos\beta^1\cos\beta^2\cos Q$$

趋肤效应晶格

在趋肤效应晶格中，$G_u^1 = G_u^2 = e^{\gamma}, G_v^1 = G_v^2 = e^{-\gamma}, \varphi^1 = \varphi^2 = 0$,$\beta^1 = \beta^2$ 是常数，有

$$\cos\theta = -\sin^2\beta + \cos^2\beta\cos(Q-2i\gamma)$$



<u>双值 SSH 模型</u>

我们来计算 zak 相, 首先有动量空间的酉算子

$$S(Q,\beta^1,\beta^2)=T(Q,1,0,\beta^2)T(Q,1,0,\beta^1)$$

与哈密顿量 H 有下面关系

$$S(Q,\beta^1,\beta^2)=e^{iH(Q,\beta^1,\beta^2)}$$

我们来计算 $S(Q,\beta^1,\beta^2)$ ，根据 (3) 式

$$S=\begin{pmatrix} -\sin\beta^1\sin\beta^2+e^{iQ}\cos\beta^1\cos\beta^2 & i\sin\beta^1\cos\beta^2+ie^{iQ}\cos\beta^1\sin\beta^2 \\ i\sin\beta^1\cos\beta^2+ie^{-iQ}\cos\beta^1\sin\beta^2 & -\sin\beta^1\sin\beta^2+e^{-iQ}\cos\beta^1\cos\beta^2 \end{pmatrix}$$

写成 Pauli 矩阵的形式

$$\begin{aligned} S=&(-\sin\beta^1\sin\beta^2+\cos Q\cos\beta^1\cos\beta^2)\mathbf{I}+i\sigma_x(\sin\beta^1\cos\beta^2+\cos Q\cos\beta^1\sin\beta^2) \\ &+i\sigma_y(-\sin Q\cos\beta^1\sin\beta^2)+i\sigma_z(\sin Q\cos\beta^1\cos\beta^2) \\ =&\cos\theta\mathbf{I}+i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\theta \end{aligned}$$

则有

$$\cos\theta=-\sin\beta^1\sin\beta^2+\cos Q\cos\beta^1\cos\beta^2$$

和

$$\vec{n}=\frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin\beta^1\cos\beta^2+\cos Q\cos\beta^1\sin\beta^2 \\ -\sin Q\cos\beta^1\sin\beta^2 \\ \sin Q\cos\beta^1\cos\beta^2 \end{pmatrix}$$

注意到

$$\vec{n'} = (e^{-i(\frac{\beta^1}{2}+\frac{\pi}{4})\sigma_y} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z})\vec{n} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} -\sin Q\cos\beta^2 \\ \cos Q\sin\beta^1\cos\beta^2 + \cos\beta^1\sin\beta^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

是一个幺正变换，此时的哈密顿量

$$H' = U^\dagger H U$$

此时的本征矢是旋量

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} \\ \sin\frac{\Theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

因为 $\vec{n'}$ 在 xy 平面内，于是 $\Theta = \pi/2$

$$\psi = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

令 $e^{i\phi} = f(Q)$ ，则

$$f(Q) = \frac{1}{\sin\theta}(-\sin Q\cos\beta^2 + i(\cos Q\sin\beta^1\cos\beta^2 + \cos\beta^1\sin\beta^2))$$

这种情形下,zak 相位写成

$$\mathcal{Z} = i\int_{-\pi}^{\pi}\psi^*\frac{\partial}{\partial Q}\psi \mathrm{d}Q = \frac{i}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial f(Q)}{\partial Q}f^{-1}(Q)\mathrm{d}Q$$

解得

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} =& \frac{i}{2\sin^2\theta}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\beta^2(\cos Q + i\sin\beta^1\sin Q)(i\cos\beta^1\sin\beta^2\cos\beta^2(\sin Q + i\sin\beta^1\cos Q))\mathrm{d}Q \\ =& -\frac{\pi\sin\beta^1\cos^2\beta^2}{\sin^2\theta}\end{aligned}$$