# 讲义

赵翔

2021 年 7 月 6 日

# 1 万有引力和天体

## 1.1 从万有引力到开普勒三定律

万有引力定律写成

$$F(r) = \frac{GMm}{r^2}$$

要想得到加速度，要与 $F = ma$ 结合，我们有

$$a(r) = \frac{GM}{r^2}$$

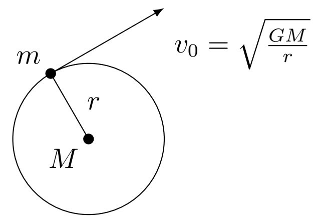
这个关系是天体中最本质的关系，也是卫星运动的基本方程，注意这个加速度指向中心天体，我们想到如果这个天体的速度的大小和方向合适，那么可以做圆周运动，什么是合适的大小和方向？先让上面这个加速度等于圆周运动的向心加速度

$$\frac{v^2}{r} = \frac{GM}{r^2}$$

可以解出

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

也就是说，当一个质点在 $r$ 处时，必须以垂直于质点-天体连线为方向，以 $\sqrt{\frac{GM}{r}}$ 为初速度大小发射时，质点**才能**做圆轨道运动，可见这种条件是十分苛刻的。好在，在我们的太阳系中，几大行星的轨道都十分接近正圆形。




**什么决定了天体的轨道？**

把一个质点在一个天体附近以一个初速度射出，那么它的轨道就是既定的，既然如此，就是先知道了初速度 $v_0$ 和距离 $r$，那么我们就不应该不分青红皂白的写向心力方程，我们应该沿着物理学基本的寻找守恒量的观点，去寻找质点在只收万有引力作用下的守恒量，这个量可以从数学上推导出来，人们发现，在一个只受有心力[1]的系统中，下面的量是守恒的 ($v_\theta$ 是垂直于受力方向的速度分量，称为切向速度)

$$v_\theta r = \frac{r^2 \Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

即单位时间扫过的面积，我们称之为掠面速度，掠面速度守恒就是开普勒第二定律的主要内容。

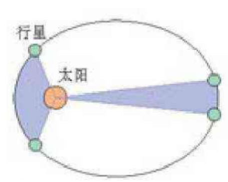



图 1: 行星与太阳的连线在相等的时间扫过相等的面积

通过掠面速度守恒和万有引力定律，我们可以得出行星的轨道是一个椭圆，中心天体处在这个椭圆的一个焦点上，即开普勒第一定律，想要证明这一点并非易事，Feynman 曾有一个巧妙的证明[2], 我们这里不过多介绍。

我们来对绕天体做半径为 $R$ 圆轨道的卫星的周期做一些推导，周期 $T$ 满足

$$T^2 = (\frac{2\pi R}{v})^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM}$$

[1]不止是万有引力，凡是受力方向始终指向一点均可

[2]参见https://www.bilibili.com/video/BV1Zs411A7KJ?from=search&seid=6802919749265632960

于是

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

在椭圆轨道中也有类似的结果，不过需要把 $R$ 换成半长轴 $a$

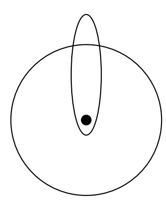
$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

这就是开普勒第三定律，半长轴的三次方和周期的二次方成正比，由表达式还可看出，这个比值只于中心天体的质量有关。这个也是一个守恒量，不过要在多个卫星绕同一天体运行时才起作用，上面的掠面速度守恒则适用同一卫星运行时的不同位置时。

## 1.2 宇宙速度

我们在地球上抛出一个物体时，它做什么轨道运动，我们学过抛体运动，知道它将做抛物线运动，但是事实果真如此吗？抛出的苹果和天上的月亮会出现不同的轨道吗？

事实上，无论是抛出的苹果，还是天上的月亮，都在做椭圆轨道运动，只不过抛出的苹果速度太小，椭圆的半长轴太大（要想到另外一个焦点是地球中心），这个椭圆是如此之扁以至于它无论如何都会返回地面，而这一小部分运动轨迹就看起来像抛物线一样（图中这个椭圆还不够扁）



所以，如果在地球附近沿切线射出一个物体，不考虑其它因素，如果速度合适，那么这个物体就可以绕地球（在地表附近）做圆轨道运动，这个速度也是发射卫星的最小速度，我们让上面的圆轨道条件中的 $r$ 替换成地球半径 $R$，我们得到了这个速度

$$v_1=\sqrt{\frac{GM}{R}}=7.9\mathrm{km/s}$$

称为**第一宇宙速度**

那么既然能在地球附近做轨道运动，我们在航天上更关心，它速度达到多大时，可以脱离地球引力的束缚，这时就有了**第二宇宙速度**

为了介绍第二宇宙速度，我们先给出引力势能的概念[3]，引力势能与电势能类似，在无穷远初为 0，越靠近中心天体越小，所以正常情况下这个势能为负

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

其中 $r$ 是到中心天体中心的距离，那么根据机械能守恒，我们出发点在地球表面，初速度是 $v_0$，总能量是

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}$$

在逃离中心引力场的束缚时，动能不断变为引力势能，如果将全部动能用完也还没能抵消完全势能，那么就无法脱离引力的魔爪，但要是引力势能变为 0 时（即无穷远），动能还有剩余，此时的总能量大于 0，那么就是成功脱离了引力的束缚，于是我们只需要让总能量大于 0，就是脱离的条件，即

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \geqslant 0$$

解得

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

右边的速度就是最小速度，即第二宇宙速度，也叫逃逸速度

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2\mathrm{km/s}$$

脱离太阳的引力要复杂的多，这里径直给出结论

$$v_3 = 16.7\mathrm{km/s}$$

## 1.3　引力半径和黑洞

由逃逸速度的表达式可知，恒星质量越大，半径越小，逃逸速度越大，我们知道宇宙中的速度极限是光速，那么有没有逃逸速度是光速的天体呢？我们来推导一下这种天体应该满足的条件

$$v_2 = c = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

于是

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

这个半径称为**施瓦西半径**，也叫引力半径，天体半径小于这个半径的天体叫**黑洞**

[3]这部分仅作了解