

1 温差电

1.1 题目

德国物理学家塞贝克发现不同导体接在一起时，如果存在温度差，回路中将产生电流，因而发明出了温差电池。温差电动势可解释为金属中自由电子气通过定向运动，传递原子实振动能量的结果（杜隆-珀替定律告诉我们电子气对金属热容的贡献可以忽略不计）。现认为自由电子气遵循理想气体压强公式 $p = nkT$ ，压强全部来自金属原子实热振动的贡献，并且电子数密度 n 与温度无关，电阻率 ρ 随温度成线性变化

- (1) 电子与原子实的碰撞可采用弹性刚球的模型进行描述。现考虑一柱形导体，上下底接入电源，使得导体内部电场为 E ，已知电子在导体内部运动的平均碰撞时间间隔为 τ ，电子带电荷为 e ，质量为 m 。

计算单个电子在导体中的平均速度 \bar{v}

已知柱形导体横截面为 S ，电子数密度为 n ，计算电流 I

电阻率 ρ 是材料本身属性，证明：任意柱形导体电阻率 ρ 无关于电场 E ，横截面 S ，以及导体长度

- (2) 进一步假定平均碰撞时间的微小增量 $d\tau$ 正比于 τdT ，且 $\tau|_{T=T_0} = \tau_0$ 。计算 τ 与温度 T 的函数关系式。

现给一条热电偶回路，只由 A,B 两个柱形导体“69”拼接而成。

电阻率分别为

$$\rho_A = \rho_1(1 + \alpha_1(T - T_0)), \rho_B = \rho_2(1 + \alpha_2(T - T_0))$$

。在平衡态下，两个拼接处温度为 T_1, T_2 。

由微观欧姆定律知电流密度

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}(\vec{E}_{\text{温差}} + \vec{E}_{\text{静电}})$$

由 $p = nkT$ 可得电子的平均受力

$$f = \frac{dp}{ndx} = k \frac{dT}{dx}$$

证明对于温差不大且随温度线性变化的电阻，温差电动势

$$\varepsilon_{\text{温差}} = \oint \vec{E}_{\text{温差}} dx \approx \alpha (T_1 - T_2) + \frac{1}{2} \beta (T_1 - T_2)^2$$

其中 α 和 β 为与导体形状有关的比例系数。又在温度为 T_0 时电子的平均碰撞间隔满足

$$\tau_0 = \frac{1}{\pi d^2 n \bar{v}}$$

其中 $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT_0}{\pi m}}$ 表示电子平均运动速率。(积分时可以视 $\lambda(T - T_0)$ 是个小量)

1.2 答案

- (1) 1. 在不考虑温度对电阻率影响情况下，不妨直接取含源电路中导体的一部分进行分析。电子在连续的两次碰撞间在电场力作用下获得定向运动速度，对应加速度 $a = \frac{eE}{m}$ ，则经过时间 τ 获得的平均速度为

$$v = \frac{1}{2} a \tau = \frac{eE\tau}{2m}$$

代入电流的微观表达式有

$$I = nes\bar{v} = \frac{ne2sE\tau}{2m}$$

上下同乘 l 代换得到 I 与 U 的关系并直接使用欧姆定律有

$$R = \frac{2ml}{ne^2\tau S}$$

进一步得到 $\rho = \frac{2m}{ne^2\tau}$ 其中 m 均表示电子质量

2. 依题意得到

$d\tau = \lambda\tau dT$ 其中 λ 为比例系数

两边分离变量后积分, 注意到 $\tau|_{T=T_0} = \tau_0$ 有

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\tau} = \int_{T_0}^T \lambda dT \Leftrightarrow \tau = \tau_0 e^{\lambda(T-T_0)}$$

(2) 取一段均匀金属直导线, 以温度降落方向为 n 方向, 取 n 一段自由电子气分析两端压强差, 依题意对理想气体压强公式取微分有

$$dp = nk dT$$

则此段自由电子气中每个电子的平均受力为

$$f = \frac{dp}{ndx} = k \frac{dT}{dx}$$

仿照 (1) 计算有电子定向运动的平均速率为

$$\bar{v} = \frac{1}{2} a \tau = \frac{k dT}{2 m dx} \tau$$

进一步得到导体内电流密度

$$\vec{j} = -en v^- = -en k dT / 2 m dx \tau$$

电流密度贡献分静电场与温差电场两部分

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} (E_{\text{温差}} + E_{\text{静电}}) \Leftrightarrow E_{\text{温差}} = \rho j - E_{\text{静电}}$$

对闭合回路作积分, 注意到回路中静电势降落为 0, 则

$$\begin{aligned}
\oint \vec{E}_{\text{温差}} \cdot d\vec{x} &= \oint \rho \vec{j} - \vec{E}_{\text{静电}} \cdot d\vec{x} = \rho j \cdot d\vec{x} \\
&= \int_{T_1}^{T_2} \rho_1 [1 + {}_1(T - T_1)] en \frac{k}{2m} [\tau_0 e^{\lambda_1(T-T_1)}] dT \\
&\quad + \int_{T_2}^{T_1} \rho_2 [1 + {}_2(T - T_2)] en \frac{k}{2m} [\tau_0 e^{\lambda_2(T-T_2)}] dT \\
&= \rho_1 en \frac{k}{2m} \int_{T_1}^{T_2} [1 + {}_1(T - T_1)] [\tau_0 e^{\lambda_1(T-T_1)}] dT \\
&\quad + \rho_2 en \frac{k}{2m} \int_{T_2}^{T_1} [1 + {}_2(T - T_2)] [\tau_0 e^{\lambda_2(T-T_2)}] dT \\
&= \rho_1 en \frac{k}{2m} \int_{T_1}^{T_2} [1 + {}_1(T - T_1)] [\tau_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1(T - T_1)^n}{n!}] dT \\
&\quad + \rho_2 en \frac{k}{2m} \int_{T_2}^{T_1} [1 + {}_2(T - T_2)] [\tau_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_2(T - T_2)^n}{n!}] dT
\end{aligned}$$

积分后忽略级数中的高次项得到

$$\begin{aligned}
&\approx \rho_1 en \frac{k\tau_0}{2m} \left[\frac{\alpha_1 + \lambda_1}{2} (T_2 - T_1)^2 + (T_2 - T_1) \right] \\
&\quad + \rho_2 en \frac{k\tau_0}{2m} \left[\frac{\alpha_2 + \lambda_2}{2} (T_1 - T_2)^2 + (T_1 - T_2) \right] \\
&= en \frac{k\tau_0}{2m} \left[\left(\rho_1 \frac{\alpha_1 + \lambda_1}{2} + \rho_2 \frac{\alpha_2 + \lambda_2}{2} \right) (T_2 - T_1)^2 + (\rho_1 - \rho_2)(T_2 - T_1) \right] \\
&= \frac{1}{\pi d^2 \sqrt{\frac{8kT_0}{\pi m}}} e \frac{k}{2m} \left[\left(\rho_1 \frac{\alpha_1 + \lambda_1}{2} + \rho_2 \frac{\alpha_2 + \lambda_2}{2} \right) (T_2 - T_1)^2 + \right. \\
&\quad \left. (\rho_1 - \rho_2)(T_2 - T_1) \right]
\end{aligned}$$

2 牛顿光学

2.1 题目

光在空间中传播的路径满足费马原理 $\delta \int n ds = 0$ ，这一表达式恰与分析力学中的哈密顿原理 $\delta \int L(q, q', t) dt = 0$ 相类似，因此有些物理学家会把

光类比成一个个特别的实物粒子来处理 (听起来很像是牛爵爷当年建立的微粒说)。我们略去中间建立哈密顿光学的繁琐过程, 不加证明地知道以下几点: 光源在折射率分布为 $n(\vec{r})$ 的介质的 \vec{r}_0 处发出光线, 这束光线可视为速度方向与光线方向相同且动能为 $E_k = \frac{1}{2}n(\vec{r})^2$ 的实物粒子, 而粒子速度大小为 $n(\vec{r})$ 。现空间内充满有一种折射率会随着电场变化的介电常数为 ε_r 的特殊介质, 折射率分布满足 $n(\vec{r}) = \sqrt{\chi E(\vec{r})}$ 。若在空间内放置一根无限长的均匀带正电直线, 线密度为 η 。以带电直线为 z 轴建立正交坐标架 $o-xyz$ (显然这里的原点 O 是任意的)。在 $(a, b, 0)$ 处放置一点光源 A 沿 \vec{y} 方向发射出激光。

- (1) 写出折射率分布函数
- (2) 已知光粒子的经典总能量视作 0, 试根据势能梯度求出光粒子在介质中的受力表达式
- (3) a. 说明光粒子在势场中是角动量守恒的, 求出激光的轨迹方程
b. 如果要求点光源发出的激光恰好可以为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}a, a, 0)$ 处的一个传感器所接收到, 求出 a, b, χ 之间的关系

提示:

$$r \times v = rv * \sin \langle r, v \rangle = rv * \frac{rd}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}$$

- (4) OA 所在平面上有另外一个点光源 B, 如果想让点光源 B 发出的激光在平面内做圆周运动, 那么 B 发出的光线方向与其坐标应该满足什么条件?

3 偏振光 and 自旋

Part A. 光的本质是电磁学？哪来的角动量？

一、光的电磁波本质与线偏振光

电动力学指出真空中的 Maxwell 方程组：

本题并不强制推导光的波动方程。这并不是本题的考察范围。所以作为证明题，你可以在后面部分中使用该部分的结论。

(1) 证明： $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ ， \vec{E} 垂直于光线的传播方向

(2) 证明：存在这样一个解：

$$E_x = E_0 \cos(\omega(\frac{z}{c} - t))$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = 0$$

光线向 z 传播，，始终都沿 x 方向，这种振动方向沿一条直线的光叫作偏振光。

二、圆偏振光

接下来我们在某个确定的 xOy 平面上考察光在该平面上的电场 E_x, E_y (光还是沿着 z 轴传播) 考察这样的两束重合的线偏振光，其电场分别为：

$$\begin{cases} E_{1x} = E_0 \cos \omega t \\ E_{1y} = 0 \end{cases}, \begin{cases} E_{2x} = 0 \\ E_{2y} = E_0 \sin \omega t \end{cases}$$

(1) 求解两束光的相位差

(2) 描述叠加后的 xOy 平面内电场的变化情况。转动是逆时针还是顺时针？

在处理光的量子化时，我们使用圆偏振光，这是因为光子的自旋是 \hbar ，自旋就是固有的角动量，并不是由于机械转动产生的，你可以理解为光子在自转，也就对应了圆偏振光。换句话说，如果有一个圆偏振激光器射出激光，那么在里面抓出一个光子，它一定是自旋为 \hbar ，并且方向一定都是相同的。在本题 (2) 中的转动情况。我们规定自旋角动量沿 z 轴，而对反方向转动的，我们规定角动量沿 $-z$ 轴。在本题接下来的部分中，我们默认考察该平面，且自旋角动量表示其 z 分量，即一个是 \hbar ，一个是 $-\hbar$ ，规定逆时针为左旋，顺时针为右旋。

Part B. 电场的合成和分解——看看光子转的多快吧

一、光的量子化

首先不要害怕，这整道题对于量子力学的掌握没有任何要求，但是有必要规定一下光子是如何实现量子化的。首先你在看 $x-y$ 平面上的电场时，电场强度的变化就是光的偏振态，比如线偏振，圆偏振，等等。然后我们来规定一下何为“偏振态”。顾名思义，就是把偏振情况用某个和电场强度正比的矢量表示。但是显然这个矢量的大小是需要被唯一确定的。因为显然无论光强多大，只要是左旋圆偏振光，你抓一个光子出来它的角动量一定是 \hbar ，不可能是其的整数倍，过几个小问来建立对这一点的认识。

- (1) 首先我们要解决的是“偏振态”的解，既然左/右旋是“基本单位”，很自然的想到讲偏振光分解为左/右旋的叠加。规定：左/右旋态是一个长度为 1 的矢量进行逆/顺时针绕原点转动的状态。

当我们将某个偏振态分解为左旋和右旋的叠加时，不妨设左旋长度为 a ，右旋长度为 b ，有要求 $a^2 + b^2 = 1$ ，请利用这一点，求出线偏振态的

矢量的最大长度，并将线偏振态分解为左右旋的叠加，并想想线偏振态是否有角动量。

- (2) 考察两束重合且电场处处垂直且同为左旋的圆偏振光，此时显然可以进行电场叠加，类似的也可以进行偏振态叠加。注意这里单独看其中一个光束的偏振态模长仍为 1, 但此处考察“合成后”的光场的偏振态 0, 将其分解至 1,2 方向，由于 1,2 两偏振态相互正交，不会产生“干涉”，所以可以认为。偏振态的角动量可分解为 1,2 偏振态的角动量之和。由此求出光的偏振态的角动量和模长的关系。
- (3) 将一个偏振态分解为左旋和右旋的叠加，左/右旋长度分别为 a, b ，求此时偏振态的角动量

Part C. 偏振态角动量的概率和量子力学理解

我们曾在 Part A 中说过：光子在某方向上的角动量一定是 $\pm\hbar$ ，那么如同上一题中的偏振态角动量是如何出现的呢？这其实是统计的结果。简单来说就是测量得到角动量为 $\pm\hbar$ 的概率是有分布的，导致长时间的测量结果是统计平均值。注意此问对 PartD 的求解并非必要，量子力学指出如果一个态 $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ ，其中 $|\psi\rangle$ 表示偏振态，而 $|+\rangle$ 与 $|-\rangle$ 表示左旋和右旋，那么进行测量时 $|\psi\rangle$ 处于 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 的概率分别是 a^2 和 b^2 。

一、归一化以及与上一问的统一

- (1) 给出 $a^2 + b^2$ 的值，并解释。
- (2) 求该偏振态的角动量

二、线偏振态

- (1) 请将线偏振态 $|\psi\rangle$ 写成 $a|+\rangle + b|-\rangle$ 的形态

- (2) 计算其角动量

Part D. 椭圆偏振光？我来了！

本问将通过几个部分计算出椭圆偏振态的角动量，以及一些实际上的简单应用。

一、正椭圆偏振态

正椭圆偏振态是由相位差为 $\frac{\pi}{2}$ 的 x 和 y 方向的电场产生。已知 x, y 方向电场的最大值分别为 $E_x, E_y (E_x > E_y)$ ，试求出其对应偏振态的：

- (1) 长轴与短轴长度
- (2) 角动量的值

二、一般情况

一般的椭圆偏振态是由相位差为 φ 的 x 和 y 方向电场产生，已知 x, y 方向电场的最大值分别为 E_x, E_y 试求出偏振态的：

- (1) 长短轴长度 (不必比大小)
- (2) 长轴/短轴与坐标轴的夹角 (互余，互补，加 90° 等均可)
- (3) 角动量的值

三、小应用

一束圆偏振光射入双折射晶体后出射，由于双折射晶体的特殊性质，原本某两个正交方向的电场振动相位差由 φ 变为 $\varphi (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 。已知圆偏振光为左旋，激光器功率为 P ，光频率为 ν ，试求：

- (1) 单位时间内通过晶体的光子数
- (2) 晶体受到的力矩大小