现代数学物理教程
群，希尔伯特空间和微分几何

Peter Szekeres
limbo137 译

2022 年 2 月 18 日

目录

第一章　集合和结构

（填充）

1.1　集合和逻辑

（填充）

1.2　子集，集合的交和并

（填充）

1.2.1　交和并

（填充）

1.3　笛卡尔积和关系

（填充）

1.3.1　有序对和笛卡尔积

（填充）

1.3.2　关系

（填充）

1.3.3 等价关系

（填充）

1.3.4 序关系和偏序集合

（填充）

1.4 映射

（填充）

1.4.1 单射，满射和双射

（填充）

1.5 无限集

（填充）

1.5.1 可数集

（填充）

1.5.2 不可数集

（填充）

1.5.3 连续统和选择公理

（填充）

1.6 结构

（填充）

1.6.1 代数结构

（填充）

1.6.2 几何结构

（填充）

1.6.3 动力系统

（填充）

1.7 范畴论

（填充）

第二章 群

2.1 群论的元素

集合 G 上任意一对 $g,h \in G$，都存在 $gh \in G$ 称为其**乘积** (product)，满足

(Gp1) **结合律** (associative law): 对全体 $g,h,k \in G$ 有 $g(hk) = (gh)k$

(Gp2) 存在**恒等元** (identity element): $e \in G$, 使得对全体 $g \in G$

$$eg = ge = g$$

(Gp3) 每个群元 $g \in G$ 有**逆** (inverse) $g^{-1} \in G$ 使得

$$g^{-1}g = gg^{-1} = e$$

这样的集合称为**群** (group)

对任意两个元素都存在乘积，且乘积在群内，这个性质称为**封闭性** (closure property)

类似的，可证明每个 $g \in G$ 都有唯一逆 g^{-1} 且 $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$
如果群元可交换，即

$$gh = hg$$

总成立，则称群是**阿贝尔的** (abelian)，如果群乘法写成加法的形式，那我们默认其是阿贝尔的，g 的逆是 $-g$

集合 $H \subseteq G$ 满足:

(a) $h,k \in H \Rightarrow hk \in H$

(b) $e \in H$

(c) $h \in H, h^{-1} \in H$

H 称为 G 的子群，无需结合律 (Gp1), 因为结合律自动继承下来了

例 2.1. 全体实数和加法形成一个群，称为实数加法群 *(additive group of reals)*. $e = 0$,x 的逆是 $-x$ ，整数加法群和有理数加法群显然都是 $\mathbb{R}$ 的子群

例 2.2. 非零实数 $\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} - \{0\}$ 形成一个群, 称作实数乘法群 *(multiplication group of reals)*，群乘法是普通乘法，恒等元 $e = 1$ 类似的，$\dot{\mathbb{Q}}$ 也是 $\dot{\mathbb{R}}$ 的子群 $\mathbb{C}$ 上同样有加法群，$\dot{\mathbb{C}}$ 上同样有乘法群

2.2 变换和排列群

（填充）

2.3 矩阵群

2.3.1 线性变换

$\mathbb{R}^n$ 是 $n \times 1$ 实列向量空间

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2.3.2 矩阵群

全体 $n \times n$ 非奇异方阵组成一个群，记作 $GL(n, \mathbb{R})$ 原因在于行列式乘积法

$$\det(AB) = det(A)det(B)$$

利用这一点可证明非奇异方阵可以组成一个群，满足封闭性，结合律以及可逆

在复数情况也可以做类似的讨论，记作 $GL(n,\mathbb{C})$，与上面的实数情况并称为 **n 阶一般线性群** (general linear group of order n)，其子群即群乘法为矩阵乘法的，统称为**矩阵群** (matrix groups)

例 2.3. *n 阶的特殊线性群 (special liner group) 或称幺模群 (unimodular group) 记作 $SL(n,\mathbb{R})$*

2.4 同态和同构

2.4.1 同态

两个群 G 和 G', 映射 $\varphi : G \to G'$ 保持群乘法，

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

则称这个映射是同态 (homomorphism)

定理 2.1. *在同态映射下 G 的单位元映射到 G' 的单位元，任意元素之逆映为像元素之逆*

例 2.4. *对任意实数 $x \in \mathbb{R}$ 整数部分 (integral part) 记成 $[x]$，小数部分 (fractional part) 写成 $(x) = x - [x]$，显然 $0 \leqslant (x) < 1$*
在 $[0,1]$ 区间上定义模 1 加法

$$a + b \bmod 1 = (a + b)$$

这个群是阿贝尔的，称为实数模 1 群，a 的逆元是 $1 - a$，0 的逆元是 0，
映射 $\varphi_1 : \mathbb{R} \to [0,1]$,$\varphi_1(x) = (x)$ 保模 1 加法，即 $((x) + (y)) = (x + y)$
类似的，$C(z) = \theta$，其中 $z = |z|e^{i\theta}$,$0 \leqslant \theta < 2\pi$ 称为圆映射或相位映射
是与复数的乘法群同态的，模 2π 加法群与上例类似

例 2.5. *令 $\mathrm{sign} : S_n \to \{+1, -1\}$ 是分配给每个排列宇称的映射*

$$\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^{\pi} = \begin{cases} +1, & \text{若 } \pi \text{ 为偶} \\ -1, & \text{若 } \pi \text{ 为奇} \end{cases}$$

从2.1sign 是从到实数乘法群的同态

$$\mathrm{sign}(\pi\sigma) = \mathrm{sign}(\pi)\,\mathrm{sign}(\sigma)$$

求行列式的映射 $\det : GL(n,\mathbb{R}) \to \dot{\mathbb{R}}$ 也是一个同态

2.4.2 同构

同构 (isomorphism) 是一一到上的同态映射，G 和 G' 若存在同构映射，则称这两个群同构 (isomorphic)，记作 $G \cong G'$，这两个群在群性质上基本相同。

同构映射的逆映射和复合也都是同构的，这表明同构是一种等价关系，所以自然的我们有等价类，所以以后我们在指一个群时，往往指的是其等价类

群论是对同构群等价类的研究，通常，挑出一个等价的特殊代表是好事

定理 2.2 (Cayley). *任意 n 阶有限群都同构于排列群*

证明：

抽象上看两个群可能并没有什么不同，但同一群的不同“具体”版本可能有不同的应用，研究线性变换群或矩阵群的“具体”的理论称为群表示论。

2.4.3 自同构和共轭类

自同构 (automorphism) 指同构于自身的映射 $\varphi : G \to G$

最平凡的例子:$\mathrm{id}_G : G \to G$（单位元）

自同构的复合还是自同构，逆亦然（封闭性）（逆元）

于是一个群的全体自同构映射也是一个群，记作 $\mathrm{Aut}(G)$

2.5 正规子群和商群

（填充）

2.5.1 陪集

（填充）

2.5.2 正规子群

（填充）

2.5.3 商群

（填充）

2.5.4 同态的核

（填充）

2.6 群作用

（填充）

2.7 对称群

（填充）

第三章　向量空间

（填充）

3.1　环和域

（填充）

3.2　向量空间

（填充）

3.3　向量空间的同态

（填充）

3.4　向量空间的子空间和商空间

（填充）

3.4.1　互补子空间和商空间

（填充）

3.4.2　线性映射的像和核

（填充）

3.5 向量空间的基

（填充）

3.5.1 集合张成的子空间

（填充）

3.5.2 向量空间的基

（填充）

3.5.3 线性算符的矩阵

（填充）

3.5.4 基扩张定理

（填充）

3.6 求和惯例和基变换

（填充）

3.6.1 求和惯例

（填充）

3.6.2 基变换

（填充）

3.7 对偶空间

（填充）

3.7.1 线性泛函

（填充）

3.7.2 线性空间的对偶空间

（填充）

3.7.3 对偶的对偶

（填充）

3.7.4 余向量分量的变换法则

（填充）

第四章　线性算符和矩阵

（填充）

4.1　本征空间和特征方程

（填充）

4.1.1　不变子空间

（填充）

4.1.2　本征向量和本征值

（填充）

4.1.3　特征方程

（填充）

4.1.4　最小零化多项式

（填充）

4.2　约当标准形

（填充）

4.2.1 分块对角形

（填充）

4.2.2 幂零算子

（填充）

4.2.3 约当标准形

（填充）

4.3 线性常微分方程

（填充）

4.3.1 二维自洽体系

（填充）

4.4 群表示论简介

（填充）

4.4.1 不可约表示

（填充）

4.4.2 舒尔引理

（填充）

第五章 内积空间

（填充）

5.1 实内积空间

（填充）

5.1.1 实内积的分量

（填充）

5.1.2 正交标准基

（填充）

5.2 复内积空间

（填充）

5.2.1 向量的范数

（填充）

5.2.2 正交标准基

（填充）

5.2.3 幺正变换

（填充）

5.3 有限群的表示

（填充）

5.3.1 正交关系

（填充）

第六章　代数

（填充）

6.1　代数和理想

（填充）

6.1.1　理想和商代数

（填充）

6.2　复数和复结构

（填充）

6.2.1　实向量空间的复化

（填充）

6.2.2　向量空间的复结构

（填充）

6.3　四元数和 Clifford 代数

（填充）

6.3.1 四元数

（填充）

6.3.2 Clifford 代数

（填充）

6.4 Grassmann 代数

（填充）

6.4.1 多重向量

（填充）

6.4.2 外积

（填充）

6.4.3 外积的性质

（填充）

6.5 李群和李代数

（填充）

6.5.1 矩阵李群

（填充）

6.5.2 单参数子群

（填充）

6.5.3 复李代数

（填充）

第七章　张量

（填充）

7.1　自由向量空间和张量空间

（填充）

7.1.1　自由向量空间

（填充）

7.1.2　张量基

（填充）

7.1.3　张量积的对偶表示

（填充）

7.1.4　自由结合代数

（填充）

7.1.5　Grasmann 代数作为自由代数的商代数

（填充）

7.2　多线性映射和张量

（填充）

7.2.1　多重线性映射和 (r, s) 型张量

（填充）

7.2.2　二阶协变张量

（填充）

7.2.3　二阶逆变张量

（填充）

7.2.4　混合张量

（填充）

7.3　张量的基表示

（填充）

7.3.1　张量积

（填充）

7.3.2　基变换

（填充）

7.4　张量的作用

（填充）

7.4.1 缩并

（填充）

7.4.2 升高降低指标

（填充）

7.4.3 对称性

（填充）

第八章　外代数

（填充）

8.1　r-向量和 r-形式

（填充）

8.1.1　算符 A 的反对称化

（填充）

8.2　r-向量的基表示

（填充）

8.3　外积

（填充）

8.3.1　简单 p-向量及其子空间

（填充）

8.4　内积

（填充）

8.5 定向的向量空间

（填充）

8.5.1 n-向量和 n-形式

（填充）

8.5.2 n-向量和 n-形式的变换法则

（填充）

8.5.3 有向的向量空间

（填充）

8.5.4 ϵ-符号

（填充）

8.6 Hodge 对偶

（填充）

8.6.1 p-向量的内积

（填充）

8.6.2 Hodge 星算子

（填充）

第九章 狭义相对论

（填充）

9.1 闵可夫斯基时空

（填充）

9.1.1 庞加莱和洛伦兹变换

（填充）

9.1.2 仿射几何

（填充）

9.1.3 闵可夫斯基空间和 4-张量

（填充）

9.2 狭义相对论运动学

（填充）

9.2.1 狭义洛伦兹变换

（填充）

9.2.2 时间，张度，速度的相对性

（填充）

9.3 粒子动力学

（填充）

9.3.1 世界线和固有时

（填充）

9.3.2 相对论性粒子动力学

（填充）

9.4 电动力学

（填充）

9.4.1 4-张量场

（填充）

9.4.2 电磁学

（填充）

9.4.3 势和规范变换

（填充）

9.5 守恒定律和能动张量

（填充）

9.5.1 电荷守恒

（填充）

9.5.2 能动张量

（填充）

第十章　拓扑

（填充）

10.1　欧氏拓扑

（填充）

10.2　广义拓扑空间

（填充）

10.3　矩阵空间

（填充）

10.4　诱导拓扑

（填充）

10.4.1　诱导拓扑和拓扑乘积

（填充）

10.4.2　同化拓扑

（填充）

10.5 豪斯多夫空间

（填充）

10.6 紧空间

（填充）

10.7 连通空间

（填充）

10.8 拓扑群

（填充）

10.8.1 单位元的连通分量

（填充）

10.9 拓扑向量空间

（填充）

10.9.1 巴拿赫空间

（填充）

第十一章　测度论和积分

（填充）

11.1　可测空间和函数

（填充）

11.1.1　可测空间

（填充）

11.1.2　可测函数

（填充）

11.2　测度空间

（填充）

11.2.1　勒贝格测度

（填充）

11.3　勒贝格积分

（填充）

11.3.1 勒贝格控制收敛定理

（填充）

第十二章　分布

（填充）

12.1　测试函数和分布

（填充）

12.1.1　测试函数空间

（填充）

12.1.2　分布

（填充）

12.1.3　正规分布

（填充）

12.2　分布上的算符

（填充）

12.2.1　分布的微分

（填充）

12.2.2 δ-函数的变量代换

（填充）

12.3 傅立叶变换

（填充）

12.4 格林函数

（填充）

12.4.1 柏松方程

（填充）

12.4.2 波动方程的格林函数

（填充）

第十三章　希尔伯特空间

（填充）

13.1　定义和例子

（填充）

13.2　扩张定理

（填充）

13.2.1　子空间

（填充）

13.2.2　正交标准基

（填充）

13.3　线性泛函

（填充）

13.3.1　正交子空间

（填充）

13.3.2 Riesz 表示定理

（填充）

13.4 有界线性算符

（填充）

13.4.1 伴随算符

（填充）

13.4.2 哈密顿算符

（填充）

13.4.3 幺正算符

（填充）

13.5 谱理论

（填充）

13.5.1 本征向量

（填充）

13.5.2 有界算符的谱

（填充）

13.5.3 哈密顿算符的谱

（填充）

13.6 无界算符

（填充）

13.6.1 自伴和对称算符

（填充）

13.6.2 无界算符的谱

（填充）

第十四章　量子力学

（填充）

14.1　基本概念

（填充）

14.1.1　光子偏振实验

（填充）

14.1.2　态的希尔伯特空间

（填充）

14.1.3　可观测量

（填充）

14.1.4　量子力学中的无界算符

（填充）

14.2　量子动力学

（填充）

14.2.1 海森堡图景

（填充）

14.2.2 经典力学和波动力学的对应关系

（填充）

14.2.3 谐振子

（填充）

14.2.4 角动量

（填充）

14.3 对称变换

（填充）

14.3.1 无穷小生成元

（填充）

14.3.2 粒子数守恒

（填充）

14.3.3 离散对称性

（填充）

14.3.4 全同粒子

（填充）

14.4 量子统计力学

（填充）

14.4.1 密度算符

（填充）

14.4.2 系综

（填充）

14.4.3 全同粒子体系

（填充）

第十五章 微分几何

（填充）

15.1 可微流形

（填充）

15.2 可微映射和曲线

（填充）

15.3 切空间，余切空间和张量空间

（填充）

15.3.1 切矢量

（填充）

15.3.2 余切空间和张量空间

（填充）

15.3.3 向量和张量场

（填充）

15.3.4 坐标变换

（填充）

15.3.5 张量丛

（填充）

15.4 切映射和子流形

（填充）

15.4.1 切映射和映射的拉回

（填充）

15.4.2 子流形

（填充）

15.5 对易子，流和李导数

（填充）

15.5.1 对易子

（填充）

15.5.2 积分曲线和流

（填充）

15.6 分布和 Frobenius 定理

（填充）

第十六章　可微形式

（填充）

16.1　微分形式和外导数

（填充）

16.2　外导数的性质

（填充）

16.3　Frobenius 定理：对偶形式

（填充）

16.4　热力学

（填充）

16.4.1　热力学第二定律

（填充）

16.4.2　绝对熵和温度

（填充）

16.5　经典力学

（填充）

16.5.1　变分学

（填充）

16.5.2　拉格朗日力学

（填充）

16.5.3　哈密顿力学

（填充）

16.5.4　拉格朗日力学和哈密顿力学之间的联系

（填充）

第十七章　流形上的积分

（填充）

17.1　单位分解

（填充）

17.2　n-形式的积分

（填充）

17.3　stokes 定理

（填充）

17.3.1　常规定义域

（填充）

17.4　同调和上同调

（填充）

17.4.1　有序单纯形和欧氏空间中的链

（填充）

17.4.2 流形上的单纯同调

（填充）

17.4.3 De Rham 上同调群和对偶性

（填充）

17.5 庞加莱引理

（填充）

17.5.1 电动力学

（填充）

第十八章　联络和曲率

（填充）

18.1　线性联络和测地线

（填充）

18.1.1　坐标变换

（填充）

18.2　张量场的协变导数

（填充）

18.3　曲率和挠率

（填充）

18.3.1　挠率张量

（填充）

18.3.2　曲率张量

（填充）

18.4 伪黎曼流形

（填充）

18.4.1 黎曼联络

（填充）

18.4.2 测地坐标

（填充）

18.5 测地偏离方程

（填充）

18.6 黎曼张量及其对称性

（填充）

18.6.1 比安基恒等式

（填充）

18.7 嘉当标准形

（填充）

18.7.1 嘉当标准形中的伪黎曼空间

（填充）

18.7.2 局域平直空间

（填充）

18.8 广义相对论

（填充）

18.8.1 等效原理

（填充）

18.8.2 广义相对论的基本假设

（填充）

18.8.3 曲率张量的测量

（填充）

18.8.4 线性近似

（填充）

18.8.5 史瓦西解

（填充）

18.9 宇宙学

（填充）

18.10 时空的变分原理

（填充）

18.10.1 希尔伯特作用量

（填充）

18.10.2　场的能动张量

（填充）

第十九章　李群和李代数

（填充）

19.1　李群

（填充）

19.1.1　左不变向量场

（填充）

19.1.2　李群的李代数

（填充）

19.1.3　Maurer-Cartan 关系

（填充）

19.2　指数映射

（填充）

19.2.1　指数映射

（填充）

19.3　李子群

（填充）

19.3.1　矩阵李群

（填充）

19.4　李群的变换

（填充）

19.4.1　正规子群

（填充）

19.5　保度规群

（填充）

19.5.1　球对称

（填充）