

# 有质量弹簧

limbo137

2021 年 11 月 9 日

## 1 离散弹簧的连续化

1.  $u_i$ : 第  $i$  个质点的坐标
2.  $\varepsilon$ : 每个质点之间原长的间隔

### 1.1 自由情况

设  $\kappa = kl$ , 每一个  $\varepsilon$  的弹性系数  $= nk = kl/\varepsilon = \kappa/\varepsilon$ , 其中  $n = L/\varepsilon$   
利用牛顿方程, 我们有

$$\frac{\kappa}{\varepsilon}(u_{i+1} - u_i - \varepsilon) - \frac{\kappa}{\varepsilon}(u_i - u_{i-1} - \varepsilon) = \lambda \varepsilon \ddot{u}_i$$

连续化, 有

$$\kappa \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\varepsilon} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) = \lambda \varepsilon \ddot{u}$$

则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\lambda}{\kappa} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

设  $u = A_i e^{i(\omega t - kx)}$  有

$$k^2 = \frac{\lambda}{\kappa} \omega^2$$