Пусть дана гладкая функция $f(x)$, чья производная не обращается в ноль в некоторой области. Пусть x^* из этой области таково, что $f(x^*) = 0$. Пусть метод Ньютона сходится: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ и $x_n \to x^*$. Покажем, что тогда он сходится квадратично.

Для этого разложим f в ряд Тейлора в окрестности $x^* : f(x^* + \epsilon) = 0 + f'(x^*)\epsilon + \frac{1}{2}f''(x^*)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{f(x^*+\epsilon)}{f'(x^*+\epsilon)} &= \frac{f'(x^*)\epsilon + \frac{1}{2}f''(x^*)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)}{f'(x^*) + f''(x^*)\epsilon + O(\epsilon^2)} = \epsilon \times \left(1 - \frac{\frac{1}{2}f''(x^*)\epsilon + O(\epsilon^2)}{f'(x^*) + f''(x^*)\epsilon + O(\epsilon^2)}\right) \\ &= \epsilon + O(\epsilon^2)\end{aligned}$$

То есть, если $x_n = x^* + \epsilon_n$ мы получаем

$$x^* + \epsilon_{n+1} = x^* + \epsilon_n - \epsilon_n + O(\epsilon_n^2)$$

или

$$\epsilon_{n+1} = O(\epsilon_n^2)$$

то есть, каждое следующее отклонение как минимум квадратично по предыдущему - ч.т.д.