期末考试不挂科！抢分突击班
大学物理（力学、热学）
主讲人：张云翼老师

目录

第 1 章　质点运动学

1.1 位移、速度、加速度

(1) 位置矢量（位矢）

建立直角坐标系后，物体的位置可用坐标$A(x,y,z)$表示

向量$\vec{r}=\overrightarrow{OA}$就称为位置矢量（位矢），也记为$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

(2) 运动方程

质点坐标 x,y,z 随 t 的变化关系，将 t 消掉即可

【例】已知质点的运动学方程为$\vec{r}=4t^2\vec{i}+(2t+3)\vec{j}$，则质点的运动方程为____。
解：运动学方程表示$x=4t^2, y=2t+3$，消去t即可得到轨迹方程$x=(y-3)^2$

(3) 位移与路程

物体的位置变化称为位移$\Delta\vec{r}$，用起点到终点的有向线段表示

物体实际运动的路径长称为路程Δs

注意：$\Delta\vec{r}$是位移，$|\Delta\vec{r}|$是位移的大小，Δr是物体到原点距离的变化

只有$ds=|d\vec{r}|$是对的，$\Delta s\neq|\Delta\vec{r}|$，$|\Delta\vec{r}|\neq\Delta r$，$|d\vec{r}|\neq dr$

出现Δr、dr基本都是错的

(4) 速度与速率

- 平均速度$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$，平均速率是路程除以时间$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$
- 瞬时速度就是对每个坐标分量求导$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$
- 瞬时速率是瞬时速度的大小$v=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$

注意：不能写成$\frac{dr}{dt}$或$\frac{d|\vec{r}|}{dt}$

【例】一运动质点在某瞬时位于矢径$\vec{r}=(x,y)$的端点处，其速度大小为

(A) $\frac{dr}{dt}$　(B) $\frac{d\vec{r}}{dt}$　(C) $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$　(D) $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

解：速度的大小可以表达为$v=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$，对照可知只有 D 正确

A、C 是错误写法，没有明确实际意义；B 是速度矢量，不是速度的大小。

【例】一质点在Oxy平面内运动。运动学方程为$x=2t, y=19-2t^2$，则在第 2 秒内质点的平均速度大小为________，第 2 秒末的瞬时速度大小为_______。

解：原式质点的平均速度等于位移除以时间。

初始位置$x=0, y=19$，2 秒后，$x=4, y=11$

位移的大小为$\sqrt{(4-0)^2+(11-19)^2}=4\sqrt{5}=8.944$

平均速度大小为 $8.944\div 2=4.472$

下面求瞬时速度。求导得速度$v_x=2, v_y=-4t$

当$t=2$ 时，$v_x=2, v_y=-8$，瞬时速度大小为$\sqrt{2^2+(-8)^2}=2\sqrt{17}=8.25$

(5) 加速度

- 平均加速度$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
- 瞬时加速度就是对每个速度分量求导$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}$

注意：加速度与速度同号为加速、异号为减速，而不是正数加速、负数减速

(6) 位移、速度、加速度的互求

$$v=\frac{dx}{dt},a=\frac{dv}{dt},v=v_0+\int_0^t a\,dt,x=x_0+\int_0^t v\,dt$$

【例】某质点作直线运动的运动学方程为$x=3t-5t^3+6$，则该质点作

(A) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

(B) 匀加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

(C) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴正方向

(D) 变加速直线运动，加速度沿 x 轴负方向

【解】先求导一次，求出速度$v=3-5t^2$；再求导一次，求出加速度$a=-10t$

由此可知，加速度一直在变化，应是变加速直线运动

$a<0$，因此加速度沿x轴负方向。本题应选 D

【例】一质点沿x方向运动，其加速度随时间变化关系为$a=3+2t$，如果质点从原点出发，初始时的速度v_0为 5 m/s，则当t为 3s时，质点的速度$v=$________，位置坐标为$x=$________。

【解】对加速度求积分一次得到速度 $v=5+\int_0^t(3+2t)dt=5+3t+t^2$

然后再积分一次得到位移 $x=\int_0^t(5+3t+t^2)dt=5t+\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3$

当$t=3\,s$时，$v=23$，$x=37.5$

1.2 圆周运动的参数

(1) 切向与法向加速度

加速度可以沿速度方向分解

与速度方向平行的称为切向加速度，改变速度的大小$a_t=\frac{dv}{dt}$

与速度方向垂直的称为法向加速度，改变速度的方向$a_n=v^2/\rho$

其中ρ为曲率半径，若为圆周运动就为半径

【例】在半径为R的圆周上运动的质点，其速率与时间关系为$v=ct^2$，则从 0 时刻到t时刻，质点走过的路程为$s=$______；t时刻质点的切向加速度为$a_t=$______，法向加速度为$a_n=$______，总加速度的大小为$a=$________。

【解】路程 $s=\int_0^t ct^2dt=\frac{1}{3}ct^3$，切向加速度 $a_t=\frac{dv}{dt}=2ct$，法向加速度

$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{c^2t^4}{R}$，总加速度 $a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{4c^2t^2+\frac{c^4t^8}{R^2}}$

(2) 圆周运动参数的互求

$$\boxed{\begin{matrix}角位移\\ \theta\end{matrix}}\ \underset{积分}{\overset{求导}{\rightleftarrows}}\ \boxed{\begin{matrix}角速度\\ \omega\end{matrix}}\ \underset{积分}{\overset{求导}{\rightleftarrows}}\ \boxed{\begin{matrix}角加速度\\ \alpha\end{matrix}}$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt},\alpha=\frac{d\omega}{dt},\omega=\omega_0+\int_0^t\alpha\,dt,\theta=\theta_0+\int_0^t\omega\,dt$$

(3) 角量和线量的关系

- 线速度$v=\omega R$
- 法向加速度$a_n=\frac{v^2}{R}=\omega^2R$
- 切向加速度$a_t=\frac{dv}{dt}=\alpha R$

【例】一质点从静止出发，沿半径为$R=1$ 的圆周运动，角加速度$\alpha=12t^2-6t$，则质点的角速度$\omega=$_______，切向加速度$a_t=$_______，法向加速度a_n=_____，

总加速度为$a=$______。

【解】角速度是角加速度求积分$\omega=\int_0^t(12t^2-6t)dt=4t^3-3t^2$

切向加速度$a_t=\alpha R=12t^2-6t$

法向加速度$a_n=\omega^2R=\left(4t^3-3t^2\right)^2=16t^6-24t^5+9t^4$

总加速度$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{(12t^2-6t)^2+(4t^3-3t^2)^4}$

1.3 相对运动

若相对只有平动，则位移、速度、加速度都满足：

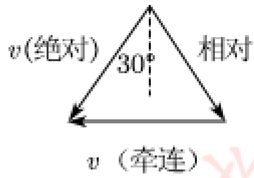
A 的实际（绝对）＝A 相对 B（相对）＋B 的实际（牵连）

【例】某人骑自行车以速率 v 向西行驶，今有风以相同速率从北偏东 30° 方向吹来，试问人感到风从哪个方向吹来？

(A) 北偏东 30° (B) 南偏东 30° (C) 北偏西 30° (D) 西偏南 30°

【解】在本题中，风的速度是绝对速度，是北偏东 30°的v；人的速度是牵连速度，是向西的v；风相对人的速度是相对速度，是所求。

根据绝对＝相对＋牵连，可以画出图形



由此可见，三个速度构成了等边三角形，相对速度是北偏西 30°，应选 C.

第 2 章　质点动力学

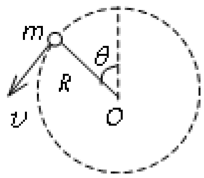
2.1 牛顿运动定律

1、　牛顿第一定律：任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，除非作用在它上面的力迫使它改变这种状态。

2、　牛顿第二定律：$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$，若质量不变，则 $\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$

3、　牛顿第三定律：$\overrightarrow{F_{12}}=-\overrightarrow{F_{21}}$

【例】质量为m的物体系于长度为R的绳子的一个端点上，在竖直平面内绕绳子另一端点（固定）作圆周运动。设t时刻物体瞬时速度的大小为v，绳子与竖直向上的方向成θ角。求t时刻绳中的张力T和物体的切向加速度a_t



【解】在法向上，$T+mg\cos\theta=mv^2/R$，解得$T=mv^2/R-mg\cos\theta$
在切向上，$mg\sin\theta=ma_t$，解得$a_t=g\,sin\theta$

【例】质量为m的子弹以速度v_0水平射入沙土中，设子弹所受阻力与速度反向，大小为$f=Kv$（K为比例系数），忽略子弹的重力，求：
(1) 子弹射入沙土后，速度随时间变化的函数式；
(2) 子弹进入沙土的最大深度。

【解】(1) 根据牛顿第二定律，$-Kv=ma=m\frac{dv}{dt}$
该方程可化为$-\frac{K}{m}dt=\frac{dv}{v}$
两边同时取积分，得$\ln v=-\frac{K}{m}t+C$，即$v=e^{-\frac{K}{m}t+C}$
将$t=0$ 时$v=v_0$代入，解得常数C，上式化为$v=v_0e^{-\frac{K}{m}t}$
(2) 由$v=\frac{dx}{dt}=v_0e^{-\frac{K}{m}t}$，可得$x=\int_0^t v_0e^{-\frac{K}{m}t}dt=\frac{m}{K}v_0(1-e^{-\frac{K}{m}t})$
当$t\to\infty$时，$x\to\frac{m}{K}v_0$，这就是子弹进入的最大深度。

2.2 动量守恒定律

(1) 动量定理

1、冲量：$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$，动量：$\vec{p}=m\vec{v}$

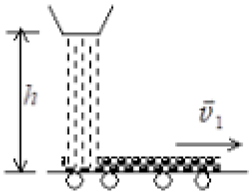
2、质点动量定理：$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\vec{p}_2-\vec{p}_1$或$\vec{F}dt=d\vec{p}$

　　要想求平均冲力，即假设$\vec{F}$不变，有$\vec{F}\Delta t=\Delta\vec{p}=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$

3、质点系动量定理：$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}dt=\vec{p}_2-\vec{p}_1$或$\vec{F}_{外}dt=d\vec{p}$

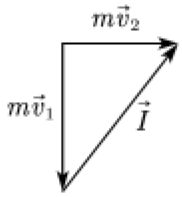
　　注意质点系动量定理与内力无关

【例】如图所示，砂子从$h = 0.8\ m$高处下落到以 3 m/s 的速率水平向右运动的传送带上。传送带给刚落到传送带上的砂子的作用力的方向为



(A) 与水平夹角 53° 向下　　(B) 与水平夹角 53° 向上
(C) 与水平夹角 37° 向上　　(D) 与水平夹角 37° 向下

【解】砂子落到传送带上的速度是$v_1 = \sqrt{2gh} = 4m/s$（向下）
之后的速度为$v_2 = 3m/s$（向右）
根据动量定理，$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$



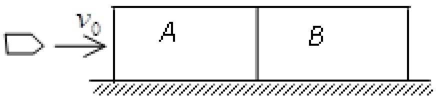
画出图形可知，冲量的方向是与水平夹角 53° 向上，选 B.

【例】一吊车底板上放一质量为 10 kg 的物体，若吊车底板加速上升，加速度大小为$a = 3 + 5t$，则 2 秒内物体动量的增量大小 $\Delta P =$____________；2 秒内吊车底板给物体的冲量大小 $I=$____________。

解：(1) $\Delta v = \int_0^2 (3+5t)dt = 16m/s$，$\Delta P = m\Delta v = 160\ kg \cdot m/s$
(2) 根据动量定理，$I - mgt = \Delta P$，解得$I = 360\ N \cdot s$

(2) 动量守恒定律
质点系所受合外力为零时，总动量不变。
① 动量守恒的条件是质点系的合外力为零
② 若系统在某个方向上的合外力为零，则在该方向上动量守恒
③ 对于碰撞、爆炸问题，可近似认为动量守恒

【例】有两个长方形的物体 A 和 B 紧靠着静止放在光滑的水平桌面上，已知$m_A = 2kg, m_B = 3kg$。现有一质量$m = 100\ g$的子弹以速率$v_0 = 800\ m/s$水平射入长方体 A，经$t = 0.01\ s$，又射入长方体 B，最后停留在长方体 B 内未射出。设子弹射入 A 时所受的摩擦力为$F = 3 \times 10^3\ N$，求：



(1) 子弹在射入 A 的过程中，B 受到 A 的作用力的大小。
(2) 当子弹留在 B 中时，A 和 B 的速度大小。

【解】(1) 子弹在射入 A 的过程中，A 和 B 一起运动
由牛顿第二定律，$F = (m_A + m_B)a$，得$a = 600\ m/s^2$
B 所受作用力大小为$F = m_B a = 1.8 \times 10^3 N$（水平向右）
(2) 子弹刚射入长方体 B 时，A 的速度为$v_A = at = 6m/s$，此后 A 不再加速

整个系统所受合外力为零，动量守恒

根据动量守恒定律，$m_0v_0 = m_Av_A + (m_B + m_0)v_B$，解得$v_B = 22m/s$

【例】质量为m的小物体从质量为M的斜面顶端下滑，斜面长度为L，倾斜角为θ，假设各接触面均光滑，求物体滑到底端时，斜面的位移。

【解】由于不计摩擦，水平方向上系统不受外力，水平方向动量守恒。

设斜面速度为v时，小物体相对于斜面的速度是u

则小物体实际水平速度是$v + u\cos\theta$

根据动量守恒定律，$Mv + m(v + u\cos\theta) = 0$

两边求积分得$M\int_0^t v dt + m\int_0^t (v + u\cos\alpha)dt = 0$

设斜面位移为x，则$\int_0^t v dt = x$；根据题意，$\int_0^t u dt = L$

因此积分的结果是$Mx + m(x + L\cos\alpha) = 0$

解得 $x = -\dfrac{m}{M+m}L\cos\theta$

2.3 角动量守恒定律

（1）角动量

质点对固定的点 O 的角动量为$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v}$

匀速圆周运动的质点对圆心的角动量是$L = mvR$

（2）力矩

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

（3）角动量定理

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt = \vec{L_2} - \vec{L_1}\text{或}\vec{M}dt = d\vec{L}$$

（4）角动量守恒定律：若力矩为零，则角动量不变

① 如果合外力为 0，则力矩当然为 0，角动量守恒

② 如果外力始终过定点，则相对于这个点，角动量守恒

例如：行星运动过程中，相对于中心天体，角动量守恒。

【例】哈雷彗星绕太阳的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆。它离太阳最近的距离是$r_1 = 8.75\times10^{10}m$，此时它的速率是v_1 =$5.46\times10^4\ m/s$。它离太阳最远时的速率是v_2 =$9.08\times10^2\ m/s$，这时它离太阳的距离是r_2 =______。

【解】哈雷彗星运行过程中，只受太阳的引力，相对于太阳角动量守恒

由$mv_1r_1 = mv_2r_2$，解得$r_2 = 5.26\times10^{12}m$

【例】将一质量为m的小球，系于轻绳的一端，绳的另一端穿过光滑水平桌面上的小孔用手拉住。先使小球以角速度ω_1在桌面上做半径为r_1的圆周运动，然后缓慢将绳下拉，使半径缩小为r_2，小球的角速度将变为_______。

【解】在此过程中，小球受力始终过圆心，所以对圆心的角动量守恒

根据角动量守恒定律，$mv_1r_1 = mv_2r_2$

其中$v_1 = \omega_1r_1$，$v_2 = \omega_2r_2$，解得 $\omega_2 = \omega_1\dfrac{v_1^2}{v_2^2}$

（5）动量与角动量的对比

	动量	角动量
表达式	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$
性质	矢量	矢量

与固定点的关系	与固定点有关	与固定点有关
定理	与内力无关	与内力矩无关
守恒条件	合外力为零	合外力矩为零

2.4 机械能守恒定律

(1) 功

功是力和所作用质点位移的数量积：$W=\int_{(1)}^{(2)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

若为恒力做功，可退化为 $W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$

若已经分解到各个方向，则 $W=\int_{x_1}^{x_2}F_x\cdot dx+\int_{y_1}^{y_2}F_y\cdot dy+\int_{z_1}^{z_2}F_z\cdot dz$

【例】质点在几个力的作用下，位移为 $\Delta\vec{r}=4\vec{i}-5\vec{j}+6\vec{k}$。其中一个恒力为 $\vec{F}=-3\vec{i}-5\vec{j}+9\vec{k}$，则这个力在该位移过程中做的功为__________。

【解】恒力做功 $W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=-3\times4+(-5)\times(-5)+9\times6=67J$

【例】质点在几个力的作用下，沿曲线 $x=t, y=t^2$ 运动。其中一个力为 $\vec{F}=5t\vec{i}$，则这个力在 $t=1\,s$ 到 $t=2\,s$ 时间内做的功为________。

【解】根据题意，位置矢量为 $\vec{r}=t\vec{i}+t^2\vec{j}$，$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{i}+2t\vec{j}$

元功 $\vec{F}\cdot d\vec{r}=(5t\vec{i})\cdot(\vec{i}+2t\vec{j})dt=5tdt$，因此所做的功为 $W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^2 5tdt=7.5J$

(2) 动能定理

- 质点动能定理：合力对质点做的功等于质点动能的增量

$$W=E_{k2}-E_{k1}$$

- 质点系动能定理：合外力和非保守外力做功的和，等于质点系动能的增量

$$W_{内}+W_{外}=E_{k2}-E_{k1}$$

【例】质量 $m=2$ kg 的物体沿 x 轴作直线运动，所受合外力 $F=10+6x^2$ (SI)。如果在 $x=0$ 处时速度 $v_0=0$；求该物体运动到 $x=4$ m 处时速度大小。

【解】这一过程中，合外力做的功为 $W=\int_0^4(10+6x^2)dx=168J$

根据动能定理，$W=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$，得 $v\approx13m/s$

(3) 保守力与势能

- 保守力：做功与路径无关的力。保守力沿任意闭合路径的做功为零。
  - ■ 例如：万有引力、重力、弹力是保守力；摩擦力、爆炸力不是保守力
- 势能：保守力可以定义势能，保守内力做功等于势能的减少。

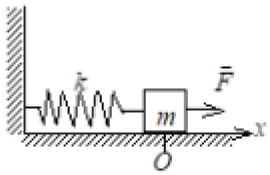
$$W_{12}=E_{p1}-E_{p2}$$

■ 势能与参考系无关，与势能零点有关，一般会默认选择一个势能零点。

■ 势能函数的导数等于保守力的相反数：$F=-\frac{dE_p}{dl}$

	表达式	势能函数	默认势能零点
重力	$G=mg$	$E_p=mgh$	地面
弹力	$F=kx$	$E_p=\frac{1}{2}kx^2$	平衡位置
万有引力	$F=G\frac{Mm}{R^2}$	$E_p=-G\frac{Mm}{R}$	无穷远处

【例】如图所示，劲度系数为k的弹簧，一端固定在墙壁上，另一端连一质量为m的物体，物体在坐标原点 O 时弹簧长度为原长。物体与桌面间的摩擦系数为μ。若物体在不变的外力F作用下向右移动，则物体到达最远位置时系统的弹性势能E_p =__________。



解：设物体最远运动距离为x，根据动能定理， $Fx-\mu mgx-\frac{1}{2}kx^2=0$

解得 $x=\frac{2(F-\mu mg)}{k}$，因此弹性势能为 $\frac{1}{2}kx^2=\frac{2(F-\mu mg)^2}{k}$

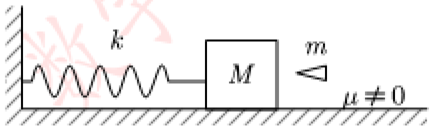
(4) 机械能守恒定律

- 功能原理：外力与非保守内力做功，等于系统内能的增量

$$W_{外}+W_{内非}=E_2-E_1$$

- 机械能守恒定律：只有保守内力做功时，系统的机械能不变
- 三种守恒定律的对比：三种守恒定律是相互独立的，需要分别判断
  ① 动量守恒：要求合外力为零，内力没有要求
  ② 角动量守恒：要求合外力矩为零，内力没有要求
  ③ 机械能守恒：要求非保守内力、外力做功为零，对内力有要求

【例】子弹水平射入一段固定在弹簧上、质量为M的木块内，弹簧劲度系数为k。若测得弹簧压缩最大值为x，木块与水平面间的动摩擦因数为μ，子弹质量为m，求子弹射入的速度大小。



解：在子弹射入瞬间，子弹和木块构成的系统动量守恒，由 $mv_0=(m+M)v$

然后弹簧开始压缩，对子弹、木块、弹簧构成的系统，由功能关系

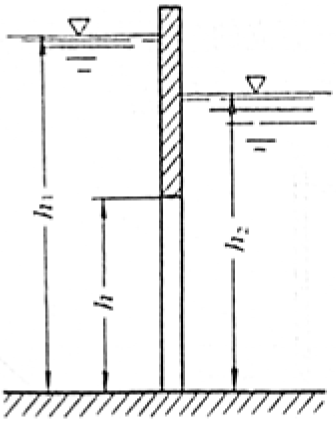
$\frac{1}{2}(m+M)v^2=\frac{1}{2}kx^2+\mu(M+m)gx$，解得 $v_0=\frac{M+m}{m}\sqrt{\frac{k}{M+m}x^2+2\mu gx}$

2.5 流体

(1) 流体静力学

- 流体静压$p=p_0+\rho gh$，液面下深度相同的点压强相等
- 帕斯卡定律：施加于密闭容器内流体的压强将大小不变地传递到流体的各个部分及容器的器壁
- 浮力定律$F=\rho gV_{排}$

【例】有一矩形底孔闸门，高$h=3m$，宽$b=2m$，上游水深$h_1=6m$，下游水深$h_2=5m$。水的密度为 $1.0\times10^3\ kg/m^3$，求两侧水作用于闸门上的静压力大小。



【解】以水底为原点建立坐标系，在上游侧，到水底距离为y处的净水压强为$\rho g(h_1-y)$，因此上游侧的静水压力为

$$\int_0^h \rho g(h_1-y)b\,dy=\rho g b\left(h_1 y-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^h=270\ kN$$

同理，下游侧的静水压力为 $210\ kN$

（2）理想流体：不可压缩的无黏性流体

（3）不可压缩流体的连续性方程

- 定常流（稳定流动）：流体的速度仅与位置有关，与时间无关
- 流线：曲线上每一点切线方向与该点流体速度方向一致
- 连续性方程：$v_1S_1=v_2S_2=Q$，其中Q称为流量

（4）伯努利方程：若理想流体在重力作用下做定常流

$$\frac{1}{2}\rho v^2+\rho gh+p=const.$$

该方程恒等于单位体积流体所具有的能量。

【例】水在平管中做定常流，流量为 $4\times10^3\ cm^3/s$，粗处截面积为 $40\ cm^2$，细处截面积为 $10\ cm^2$。求水在两处的流速和压强差。

【解】根据连续性方程，$v_1S_1=v_2S_2=Q$，解得$v_1=1\ m/s$，$v_2=4\ m/s$

根据伯努利方程，$\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh_1+p_1=\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho gh_2+p_2$

而平管$h_1=h_2$，所以$p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2-v_1^2\right)=7500\ Pa$

【例】油的密度为 $0.9\times10^3 kg/m^3$，在粗细均匀的管道中，1 处比 2 处高 $5.0\ m$，但压强低 $1.2\times10^3\ Pa$，求 $5.0\ m^3$的油在此过程中的能量损失。

【解】由于管道粗细均匀，$S_1=S_2$，根据连续性方程，$v_1=v_2$

所以单位体积能量损失为$\rho g\Delta h-\Delta p=33000\ J$

$5.0\ m^3$的油的能量损失为 $165000 J$

第 3 章　刚体力学基础

3.1 转动惯量

(1) 刚体

不能变形的物体称为刚体，是一种理想模型

刚体的运动形式可分解为平动和转动，转动可用θ, ω, α描述

(2) 转动惯量

刚体绕定轴转动时惯性的量度，由质量对轴的分布决定

转动惯量等于各质点质量乘以距离的平方再求和

对于质点系，$J = \sum m_i r_i^2$；对于连续体，$J = \int r^2 dm$

质量分布离轴越远，转动惯量越大。空心物体比实心物体转动惯量大。

(3) 常见物体的转动惯量

形状	转动惯量
圆环、空心圆柱（对中心轴）	MR^2
圆盘、实心圆柱（对中心轴）	$\frac{1}{2}MR^2$
细杆（对中点）	$\frac{1}{12}ML^2$
细杆（对端点）	$\frac{1}{3}ML^2$
实心球体（对直径）	$\frac{2}{5}MR^2$
空心球壳（对直径）	$\frac{2}{3}MR^2$

(4) 平行轴定理

刚体对任意轴的转动惯量，等于对质心的转动惯量 加 质量乘以两个轴距离的平方

$$J = J_c + md^2$$

【例】四根均匀细杆，质量均为m，长度均为l，构成一个正方形。求它关于过正方形中心、垂直于正方形所在平面的轴的转动惯量。

【解】对于每一根细杆，对其质心的转动惯量是$\frac{1}{12}ml^2$

题意要求的轴到它质心的距离是$\frac{1}{2}l$

根据平行轴定理，它的转动惯量是$\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$

这个物体总的转动惯量是$\frac{1}{3}ml^2 \times 4 = \frac{4}{3}ml^2$

3.2 转动定律

(1) 力矩

对于定轴转动，力矩等于力垂直于轴的分量，乘以它到轴的距离，$M = Fd$

(2) 转动定律

角加速度与合外力矩成正比，与转动惯量成反比，$M = J\alpha$

【例】一作定轴转动的物体，对转轴的转动惯量$J = 3.0\ kg \cdot m^2$，角速度$\omega_0 = 6.0\ rad/s$。现对物体加一恒定的制动力矩$M = -12N \cdot m$，当物体的角速度减

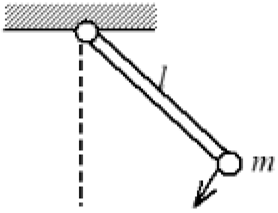
慢到$\omega = 2.0\ rad/s$时，物体已转过了角度$\Delta\theta =$________________。

【解】根据转动定理，$M = J\alpha$，得$\alpha = -4\ rad/s^2$

由$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -4\ rad/s^2$，可得$\omega = 6 - 4t$。可知物体减速用了 1 秒

进而$\Delta\theta = \int_0^1 (6-4t)dt = 4\ rad$（或根据$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\Delta\theta$，得$\Delta\theta = 4\ rad$）

【例】一长为 l，质量为m的直杆，可绕通过其一端的水平光滑轴在竖直平面内作定轴转动，在杆的另一端固定着一质量为m的小球，如图所示。现将杆由水平位置无初转速地释放。则杆刚被释放时的角加速度$\alpha_0 =$__________，杆与水平方向夹角为 60° 时的角加速度$\alpha =$___________。



解：整个物体的转动惯量为$J = \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$

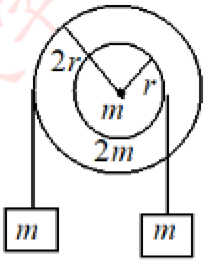
(1) 杆刚释放时，合力矩为$M_0 = \frac{1}{2}mgl + mgl = \frac{3}{2}mgl$

根据转动定理，$M_0 = J\alpha_0$，解得$\alpha_0 = \frac{9g}{8l}$

(2) 转过 60° 后，合力矩为$M = \frac{1}{4}mgl + \frac{1}{2}mgl = \frac{3}{4}mgl$

根据转动定理，$M = J\alpha$，解得$\alpha = \frac{9g}{16l}$

【例】质量分别为 m和 $2m$、半径分别为 r和 $2r$的两个均匀圆盘，同轴地固定在一起，可以绕通过盘心且垂直盘面的水平光滑固定轴转动，大小圆盘边缘都绕有绳子，绳子下端都挂一质量为 m的重物，如图所示。求盘的角加速度的大小。



【解】先求出圆盘的转动惯量$J = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}\times 2m\times(2r)^2 = \frac{9}{2}mr^2$

对于左侧小物体，$mg - T_1 = ma_1$；对于右侧小物体，$T_2 - mg = ma_2$

对于圆盘，$T_1 \times 2r - T_2 \times r = J\alpha$

根据线量和角量的关系，$a_1 = 2\alpha r, a_2 = \alpha r$

联立以上各式解得$\alpha = \frac{2g}{19r}$

3.3 刚体的角动量守恒

(1) 刚体定轴转动的角动量：$L = J\omega$

(2) 角动量定理：外力矩对时间的积累等于角动量的变化

$$\int_{t_1}^{t_2} M_{外} dt = J\omega_2 - J\omega_1$$

(3) 角动量守恒定律：若外力矩为零，则角动量$L = J\omega$不变

若刚体绕光滑轴旋转，无其他外力，则角动量守恒

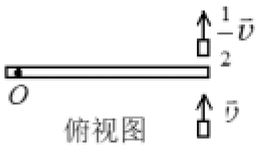
【例】质量为m的小孩站在半径为R的水平平台边缘。平台可以绕通过其中心的竖直光滑固定轴自由转动，转动惯量为J。平台和小孩开始时均静止。当小孩突然以相对于地面为v的速率在台边缘沿逆时针转向走动时，则此平台相对地面旋转的角速度为________。

【解】在整个过程中，小孩和平台构成的系统所受外力来自转轴，对转轴的力矩为零，角动量守恒。

以逆时针方向为正，根据角动量守恒定律，$J\omega + mvR = 0$，解得$\omega = -\frac{mvR}{J}$

其中负号说明，当小孩逆时针走动时，平台顺时针转动。

【例】如图所示，一静止均匀细棒长为L、质量为M，可绕通过棒的端点且垂直于棒长的光滑固定轴 O 在水平面内转动。一质量为m、速率为v的子弹在水平面内沿与棒垂直的方向射入并穿出棒的自由端，设穿过棒后子弹的速率为$v/2$，则此时棒的角速度为____。



俯视图

解：在碰撞过程中，小球和细杆构成的整体所受外力来自转轴，对转轴的力矩为零，角动量守恒。由$mvL = \frac{1}{2}mvL + \frac{1}{3}ML^2\omega$，得$\omega = \frac{3mv}{2ML}$

3.4 刚体的动能定理

(1) 力矩做功：$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$

(2) 刚体的动能：若刚体只能绕定轴转动，则刚体的转动动能 $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

(3) 刚体的动能定理：$W = E_{k2} - E_{k1}$

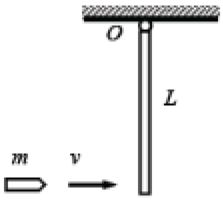
(4) 刚体的重力势能： $E_p = mgh_c$

(5) 机械能守恒定律：若只有保守内力做功，则系统的机械能守恒

(6) 刚体与质点的对比（质点以一维运动为例，刚体只考虑定轴转动）

	质点	刚体
运动方程	$F = ma$	$M = J\alpha$
动量/角动量	$p = mv$	$L = J\omega$
动量/角动量定理	$\int Fdt = \Delta p$	$\int Mdt = \Delta L$
动能	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
力/力矩做功	$W = \int Fdx$	$W = \int Md\theta$

【例】均匀细杆长为L，质量为 $6m$，被光滑水平轴 O 固定在天花板上。一个质量为m的子弹以速度v射入细杆自由端，并留在细杆内。



求：（1）碰撞后瞬间，细杆的角速度；（2）细杆能摆动最大角度的余弦值。

【解】（1）在碰撞的过程中，系统角动量守恒。

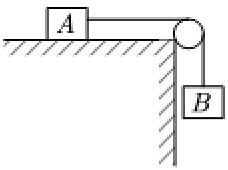
由$mvL=\left(\frac{1}{3}6mL^2+mL^2\right)\omega$，得$\omega=\frac{v}{3L}$

（2）在碰撞后，系统的机械能守恒。

由$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}6mL^2+mL^2\right)\omega^2=(6mg\frac{L}{2}+mgL)(1-\cos\theta)$

解得$\cos\theta=1-\frac{v^2}{24gL}$

【例】质量分别为$m, 2m$的物块 A、B 通过细线相连，绕在可自由旋转的滑轮上。滑轮的质量为 $3m$，是半径为R的均匀圆盘。滑块 A 放在光滑水平桌面上。



求：（1）物块 B 下落的加速度；（2）当物块 B 下落高度为h时的速度大小。

【解】（1）对于物体 A，$T_1=ma$；对于物体 B，$2mg-T_2=2ma$

对于滑轮，$(T_2-T_1)R=\frac{1}{2}\times 3mR^2\alpha$；根据线量与角量的关系，$a=\alpha R$

联立以上各式解得$a=\frac{4}{9}g$

（2）系统整体机械能守恒，$2mgh=\frac{1}{2}\times(m+2m)v^2+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}mR^2\omega^2$

根据线量与角量的关系，$v=\omega R$，解得$v=\frac{2\sqrt{2gh}}{3}$

第 4 章　机械振动与机械波

4.1 简谐振动的描述

（1）运动学方程

简谐振动是物理量随时间按正弦或余弦变化的过程

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

注：写成正弦或余弦都可以，根据自己教材处理。

求导可得$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$, $a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$

【例】已知简谐振动的表达式为$x = A\cos(3t + \varphi)$，已知$t = 0$ 时的位移为 0.04，速度为 0.09，求振幅和初相。

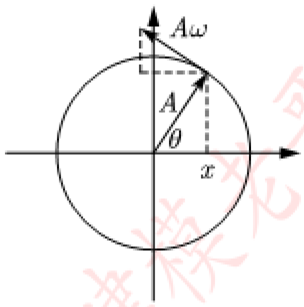
【解】可求出速度表达式为$v = -3A\sin(3t + \varphi)$

将$t = 0$ 代入得 $0.04 = A\cos\varphi$，$0.09 = -3A\sin\varphi$

两式相除得$\tan\varphi = -\frac{3}{4}$，结合位移、速度为正值，$\varphi = -37°$，进而$A = 0.05$

（2）旋转矢量法

矢量在半径为 A 的圆上逆时针旋转，在x轴上的投影就是位移。



【例】质点做简谐振动，振幅为$A = 4$，周期$T = 2$。质点在$t = 0$ 时刻第一次通过$x = -2$，且速度为正方向。求质点再次通过$x = -2$ 处的时间。

【解】根据旋转矢量法，可知第一次通过时的相位为$-\frac{2}{3}\pi$

第二次通过的相位为$\frac{2}{3}\pi$，因此时间为$\frac{4}{3}$

（3）简谐振动的特征量

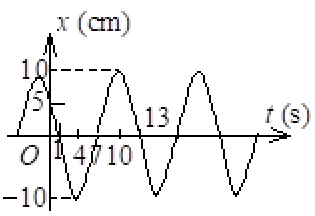
圆频率ω，周期$T = \frac{2\pi}{\omega}$，频率$\nu = \frac{1}{T}$

特别地，对于弹簧振子，$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$；对于单摆，$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

振幅$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$

初相位$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$

【例】写出下图简谐振动的运动学方程。



【解】根据图像，振幅$A = 10\ cm$，周期$T = 12\ s$

根据旋转矢量法可知初相位$\varphi_0=\frac{\pi}{3}$

因此运动学方程为$x=10\cos\left(\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}\right)$

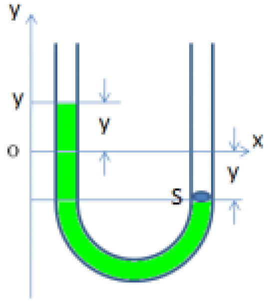
（4）简谐振动的判断依据

回复力与位移成正比，且指向平衡位置$F=-kx$

振动方程可化为$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$或$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$

对于单摆，可对悬点取转动定律，$-gml\theta=ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$

【例】横截面均匀的光滑 U 形管中有适量液体如图所示，液体的总长度为L，忽略摩擦和液体黏性，求液面上下微小起伏（$y\ll L$）的自振周期。



【解】设液体密度为ρ，横截面面积为S

根据牛顿第二定律 $2y\rho gS=-\rho(L-2y)S\frac{d^2y}{dt^2}\approx-\rho LS\frac{d^2y}{dt^2}$

化简得$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2g}{L}y=0$，与振动方程对比得$\omega^2=\frac{2g}{L}$

因此$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$

4.2 简谐振动的能量与合成

（1）简谐振动的能量

动能$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

势能$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

总能量$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$

在一个周期内，动能和势能的平均值各占一半，等于$\frac{1}{4}kA^2$

【例】在弹簧振子中，物体质量为 $0.01kg$，简谐振动的运动学方程为$x=0.1\cos\left(8\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)$，（1）求通过平衡位置时的动能和势能（2）在什么位置上动能与势能相等

【解】（1）根据公式，$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=3.16\times10^{-2}J$

通过平衡位置时，势能为 0，动能最大，就是 $3.16\times10^{-2}J$

（2）当$\sin^2\left(8\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos^2\left(8\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$时，动能与势能相等。

此时，$\cos\left(8\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此位置为$x=\pm0.0707$

（2）同方向、同频率的简谐振动合成

$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$与$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$的合成仍是同频率简谐振动，参数采用旋转矢量法求解。

特例：同相时$A=A_1+A_2$，反相时$A=|A_1-A_2|$

【例】两个同方向、同频率简谐振动的方程分别为$x_1=5\cos\left(5t+\frac{1}{4}\pi\right)$，

$x_2 = 5\cos\left(5t + \frac{3}{4}\pi\right)$，则合振动的振动方程为____________。

【解】根据旋转矢量法可知振幅为 $5\sqrt{2}$，初相为$\frac{\pi}{2}$

因此振动方程为$x = 5\sqrt{2}\cos\left(5t + \frac{\pi}{2}\right)$

4.3 机械波的形成与传播

(1) 机械波产生的条件

① 有做机械振动的物体（波源）② 有连续的介质

(2) 横波与纵波

横波：振动方向与传播方向垂直

纵波：振动方向与传播方向平行

(3) 机械波的传播

机械波是上游质元带动下游质元振动，下游的相位比上游更晚

波动是振动状态的传播，而不是介质的传播

(4) 波的几何描述

波线：表示波传播方向的射线

波面：振动相位相同的点组成的面

波阵面（波前）：某时刻波到达的各点所构成的面

(5) 波的特征量

波速u：振动状态的传播速度，不是质元运动速度

周期T：一个完整波通过波线上某点所需时间，频率$\nu = \frac{1}{T}$，角频率$\omega = 2\pi\nu$

波长λ：波线上相邻的振动状态相同的两质元间的距离

$$\lambda = uT$$

波每传播λ，相位就落后 2π

【例】一平面简谐波。波速为 6.0 m/s，振动周期为 0.1 s，则波长为__________。在波的传播方向上，有两质点（其间距离小于波长）的振动相位差为$\frac{5\pi}{6}$，则此两质点相距________。

【解】根据公式，$\lambda = uT = 0.6\ m$，两质点距离为$\frac{5\pi}{6} \div 2\pi \times \lambda = 0.25m$

4.4 简谐波

(1) 波函数

① 形式：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]\text{或}y = A\cos\left(\omega t \mp \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$$

其中，正向传播取负号，负向传播取正号。

② 含义：

当x给定时，波函数变为该点的振动方程

当t给定时，波函数变为该时刻的位移分布

【例】已知一平面简谐波的表达式为$y = A\cos\pi(4t + 2x)$。

(1) 求该波的波长，频率和波速；

(2) 求$t = 4.2\ s$时刻，离坐标原点最近波峰位置；

(3) 求$t = 4.2\ s$时刻后，第一次有波峰通过原点的时间。

【解】(1) 波动方程可化为$y = A\cos 4\pi\left(t + \frac{x}{2}\right)$，这说明波沿负方向传播

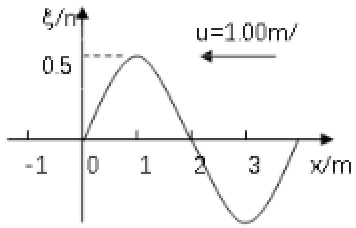
对照方程可知$\omega = 4\pi, u = 2$，因此周期$T = \frac{1}{2}$，频率$\nu = \frac{1}{T} = 2$

波速$u = 2$，波长$\lambda = uT = 1$

（2）当$t=4.2$ 时，波动方程化为$y=A\cos\pi(16.8+2x)=A\cos 2\pi(x+0.4)$
波峰应使得相位 $2\pi(x+0.4)=2k\pi$，解得$x=k-0.4$（k为整数）
因此距离原点最近的波峰位置为$x=-0.4$
（3）因为波沿负方向传播，所以第一个通过原点的波峰位置为$x=0.6$
结合波速$u=2$，可知 $0.3\ s$后第一个波峰到达原点，此时$t=4.5\ s$

③ 求法：
先写出任意一点（假设坐标为$x=d$）的振动方程$y=A\cos(\omega t+\varphi)$
波每传播λ，相位就落后 2π，所以$y=A\cos\left[\omega t+\varphi\mp\frac{2\pi}{\lambda}(x-d)\right]$

【例】一沿 x 轴负向传播的平面简谐波在 t=2s 时的波形曲线如右图所示，求波动方程



【解】先写$x=0$ 处的振动方程，根据图像可得$A=0.5m,\lambda=4\,m$
可求出周期$T=\frac{\lambda}{u}=4\,s$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{2}$
另外$t=2$ 时，$x=0$ 处的相位为$-\frac{\pi}{2}$
因此$x=0$ 处的振动方程为$y=0.5\cos\left[\frac{\pi}{2}(t-2)-\frac{\pi}{2}\right]$
即$y=0.5\cos\left[\frac{\pi}{2}(t-3)\right]$
可得波动方程为$y=0.5\cos\left[\frac{\pi}{2}(t-3)+\frac{2\pi}{4}(x-0)\right]=0.5\cos\left[\frac{\pi}{2}(t-3+x)\right]$

【例】一平面简谐波沿 x 轴正向传播，波的振幅$A=10\ cm$，波的角频率$\omega=7\pi\ rad/s$。当$t=1.0\ s$时，$x=10\ cm$处的 a 质点正通过其平衡位置向 y 轴负方向运动，而$x=20\ cm$处的 b 质点正通过$y=5.0\ cm$点向 y 轴正方向运动。设该波波长$\lambda>10\ cm$，求该平面波的表达式。
【解】根据题意，波动方程为$y=0.1\cos\left[7\pi\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$
对比 a, b 质点的运动状态可知，a 的相位为$\frac{\pi}{2}$，b 的相位为$-\frac{\pi}{3}$
因此 b 落后 a 的相位是$\frac{5\pi}{6}$。根据位置相差λ，相位相差 2π
可知 a 与 b 的位置相差$\frac{5\lambda}{12}$，这说明$\frac{5\lambda}{12}=0.1$，得$\lambda=0.24\,m$
因此波速$u=\frac{\omega\lambda}{2\pi}=0.84$，因此波动方程化为$y=0.1\cos\left(7\pi t-\frac{\pi x}{0.12}+\varphi_0\right)$
最后考虑任意一点的相位
例如$t=1.0\ s$、$x=0.1\ m$处，$7\pi t-\frac{\pi x}{0.12}+\varphi_0=\frac{\pi}{2}$，解得$\varphi_0=-\frac{17}{3}\pi$
波动方程化为$y=0.1\cos\left(7\pi t-\frac{\pi x}{0.12}-\frac{17}{3}\pi\right)=0.1\cos\left(7\pi t-\frac{\pi x}{0.12}+\frac{1}{3}\pi\right)$

（2）波的能量密度
质元能量密度$w=\rho\omega^2A^2\sin^2\left[\omega\left(t\mp\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$
注意波动质元的动能与势能相等，各占一半，总能量随时间而变化
在平衡位置处，能量密度最大；在最大位移处，能量密度为 0
一个周期内平均能量密度为$\bar{w}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

（3）波的强度

单位时间内，通过垂直于波的传播方向的单位面积的平均能量，称为平均能流密度或波的强度，$I=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2u=\bar{w}u$

4.5 波的叠加与干涉

（1）惠更斯原理

介质中波阵面（波前）上的各点都可以看作发射子波的新波源，其后任一时刻这些子波的包络线就是新的波阵面。

（2）波的叠加原理

各列波在相遇前后保持原来的特性不变，相遇处的振动是各列波振动的合成。

（3）波的干涉

波叠加时在空间出现稳定的振动加强和减弱的分布叫波的干涉。

相干条件：① 频率相同 ② 振动方向相同 ③ 相位差固定

两列波的波程差为r_2-r_1，相位差为$\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}$

相位差等于π的偶数倍时为加强点，奇数倍时为减弱点。

【例】S1 和 S2 为两相干波源，它们的振动方向均垂直于图面，发出波长为λ的简谐波，P 点是两列波相遇区域中的一点，已知$S_1P=2\lambda, S_2P=2.2\lambda$，两列波在 P 点发生相消干涉。若 S1 的振动方程为$y_1=A\cos\left(2\pi t+\frac{1}{2}\pi\right)$，则 S2 的振动方程为$y_2=$________。

【解】两列波的相位差为$\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}=\varphi_2-0.9\pi$

要使两列波发生相消干涉，应有$\varphi_2-0.9\pi=(2k+1)\pi$

因此$\varphi_2=0.9\pi+(2k+1)\pi$，简便起见可取$k=-1$，此时$\varphi_2=-0.1\pi$

所以振动方程为$y_2=A\cos(2\pi t-0.1\pi)$

第 5 章　气体动理论

5.1 理想气体

（1）理想气体的微观假设

① 忽略分子本身的形状和大小

② 不考虑分子间除碰撞外的相互作用

③ 所有碰撞均为弹性碰撞

（2）理想气体状态方程

形式 1：$pV = \nu RT$

其中，物质的量 $\nu = \dfrac{m}{M} = \dfrac{N}{N_A}$，气体常数 $R = 8.314 J/(mol \cdot K)$

形式 2：$p = nkT$

其中，分子数密度 $n = \dfrac{N}{V}$，玻尔兹曼常数 $k = \dfrac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} J/K$

注意：需特别注意公式中ν, n的含义

【例】已知一容器内的理想气体在温度为 $273\,K$、压强为 $1.0 \times 10^{-2}\,atm$时，其密度为 $1.24 \times 10^{-2}\,kg/m^3$，气体常数 $R = 8.31 J/(mol \cdot K)$，则该气体的摩尔质量$M =$______

【解】根据理想气体状态方程，$pV = \nu RT$，其中物质的量$\nu = \frac{m}{M}$，密度$\rho = \frac{m}{V}$

因此可变形为$p\frac{m}{\rho} = \frac{m}{M}RT$，整理得$M = \frac{\rho RT}{p} = 0.028\,kg/mol = 28\,g/mol$

5.2 温度和压强

（1）热平衡

- 热平衡态：两个系统长时间热接触达到的共同平衡态
- 热平衡定律（热力学第零定律）：分别与第三个系统处于同一热平衡态的两个系统必然也处于热平衡
- 温度：处于同一热平衡态下的热力学系统所具有的共同的宏观性质（即如果两个系统处于热平衡态，则他们的温度相等）

  注意：温度是宏观性质，只有大量分子的系统才能说温度，单个分子没有温度的概念

（2）温标：温度的数值标度

热力学温标T（K）=摄氏温标t（$°C$）$+273.15$

注意：热学计算时，摄氏温标一律要先化为热力学温标

$0K = -273.15°C$称为绝对零度，绝对零度不可达到（热力学第三定律）

（3）理想气体的温度

$\bar{\varepsilon}_t = \dfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \dfrac{3}{2}kT$（$\bar{\varepsilon}_t$ 为分子平均平动动能）

温度与分子的平均平动动能成正比

可解得方均根速率 $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$

注意：$\overline{v^2}$是将各粒子的速度先平方，再平均；而不是先平均，再平方

（4）理想气体的压强

压强：$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_t$（结合理想气体状态方程记忆）

由此可见，压强与粒子的平动动能、分子数密度有关

【例】一瓶氦气和一瓶氮气密度相同，分子平均平动动能相同，而且它们都处于热平衡状态，则它们
(A) 温度相同、压强相同
(B) 温度、压强都不相同
(C) 温度相同，但氦气的压强大于氮气的压强
(D) 温度相同，但氦气的压强小于氮气的压强

【解】温度与分子平均平动动能成正比，分子平均平动动能相同，温度就相同。压强 $p=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_t$，二者密度相同，但每个氦气分子的质量较小，所以分子数密度n更大，因此氦气的压强也更大，应选 C 项。

【例】在容积为$10^{-2}\,m^3$ 的容器中，装有质量 100 g的气体，若气体分子的方均根速率为 200 m/s，则气体的压强为________________。

【解】根据公式 $p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}$，其中$n=\frac{N}{V}$，而气体总质量$m_0=mN$

由此可知 $p=\frac{1}{3}\frac{N}{V}\frac{m_0}{N}\overline{v^2}=\frac{m_0}{3V}\overline{v^2}=\frac{0.1\text{kg}}{3\times10^{-2}\text{m}^3}\times(200\text{m/s})^2=1.33\times10^5\,Pa$

5.3 内能与能量均分定理

(1) 能量均分定理：每个方向对应的平动动能为$\frac{1}{2}kT$

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=\frac{1}{2}m\overline{v_y^2}=\frac{1}{2}m\overline{v_z^2}=\frac{1}{2}kT$$

(2) 气体分子的自由度

	平动自由度t	转动自由度r	总自由度i
单原子分子	3	0	3
双原子分子	3	2	5
多原子分子	3	3	6

(3) 理想气体的内能

$$E=\frac{i}{2}\nu RT\ （\nu为物质的量）$$

结合 $pV=\nu RT$，也可化为 $E=\frac{i}{2}pV$

【例】1 mol 氧气贮于一氧气瓶中，温度为 27℃，这瓶氧气的内能为____J；分子的平均平动动能为_____J；分子的平均总动能为_____J。（气体常数 $R=8.31J/(mol\cdot K)$，玻尔兹曼常数$k=1.38\times10^{-23}J/K$）

【解】氧气是双原子分子，$i=5$，因此内能$E=\frac{5}{2}\nu RT=6232.5\,J$

分子平均平动动能$\varepsilon_t=\frac{3}{2}kT=6.21\times10^{-21}\,J$

分子总动能$\varepsilon_i=\frac{5}{2}kT=1.035\times10^{-20}\,J$

【例】用绝热材料制成的一个容器，体积为 $2V_0$，被绝热板隔成 A、B 两部分，A 内储有 1 mol 单原子分子理想气体，B 内储有 2 mol 刚性双原子分子理想气体，A、B 两部分压强相等均为 p_0，两部分体积均为 V_0，则：
(1) 两种气体各自的内能分别为 E_A=________；E_B=________；

（2）抽去绝热板，两种气体混合后处于平衡时的温度为 $T=$______。

【解】单原子分子的$i=3$，$E_A=\frac{3}{2}\nu RT=\frac{3}{2}p_0V_0$；双原子分子的$i=5$，$E_B=\frac{5}{2}\nu RT=\frac{5}{2}p_0V_0$

抽去隔板后，内能总和不变，因此$\frac{3}{2}p_0V_0+\frac{5}{2}p_0V_0=\frac{3}{2}RT+5RT$

解得$T=\frac{8p_0V_0}{13R}$

【例】容积为 20.0 L 的瓶子以速率$v=200$ m/s 匀速运动，瓶子中充有质量为$100\ g$的气体。设瓶子突然停止，气体的全部定向运动动能都变为热运动的动能，瓶子与外界没有热量交换。（1）若瓶子中的气体为氦气，求温度、压强各增加多少。（2）若瓶子中的气体为氢气，求温度、压强各增加多少。

解：动能$E_k=\frac{1}{2}mv^2=2000\ J$，内能增量$\Delta E=2000\ J$

（1）氦气是单原子分子，$i=3$，因此内能$\Delta E=\frac{3}{2}\nu R\Delta T$，物质的量$\nu=\frac{m}{M}=25\ mol$，代入数据得$\Delta T=6.41\ K$；内能$\Delta E=\frac{3}{2}\Delta pV$，得$\Delta p=6.67\times10^4 Pa$

（2）氢气是双原子分子，$i=5$，因此内能$\Delta E=\frac{5}{2}\nu R\Delta T$，物质的量$\nu=\frac{m}{M}=50\ mol$，代入数据得$\Delta T=1.92\ K$；内能$\Delta E=\frac{5}{2}\Delta pV$，得$\Delta p=4.0\times10^4 Pa$

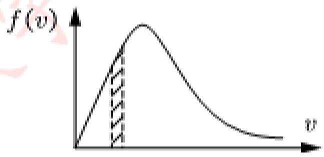
5.4 速率分布律

（1）速率分布函数

速率分布函数$f(v)=\dfrac{dN_v}{Ndv}$表示处于速率v附近、单位速率区间内的概率

某个区间内的图像下方面积表示该区间的概率：$\int_{v_1}^{v_2}f(v)dv$

对整个范围求积分的结果当然是 1：$\int_0^{+\infty}f(v)dv=1$



（2）三种统计速率

- 最概然速率v_p：使$f(v)$取最大值的速率，即概率最大的速率
- 平均速率$\bar{v}$：$\bar{v}=\int_0^{+\infty}vf(v)dv$
- 方均根速率$\sqrt{\overline{v^2}}$：$\overline{v^2}=\int_0^{+\infty}v^2f(v)dv$

【例】设某假想气体的速率分布函数为$f(v)=\begin{cases}av^2 & 0\le v\le v_0\\ 0 & v>v_0\end{cases}$，求：

（1）常数a与v_0的关系；（2）最概然速率、平均速率和均方根速率。

【解】（1）$f(v)$图像下方的面积是 1，$\int_0^{v_0}av^2dv=\frac{1}{3}av_0^3=1$，解得$a=\dfrac{3}{v_0^3}$

（2）$f(v)$在$0\le v\le v_0$上单调递增，因此最概然速率$v_p=v_0$

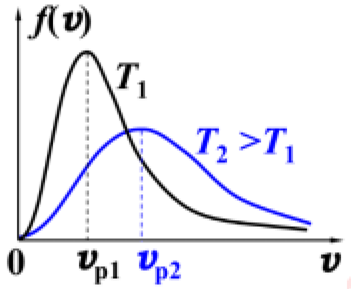
平均速率$\bar{v}=\int_0^{v_0}v\cdot\dfrac{3}{v_0^3}v^2dv=\dfrac{3}{4}v_0$

$\overline{v^2}=\int_0^{v_0} v^2\cdot\frac{3}{v_0^3}v^2dv=\frac{3}{5}v_0^2$，因此均方根速率 $\sqrt{\bar{v}}=\frac{\sqrt{15}}{5}v_0$

（3）麦克斯韦速率分布律

温度越高，曲线向下、向右移动，速率大的分子比例越大

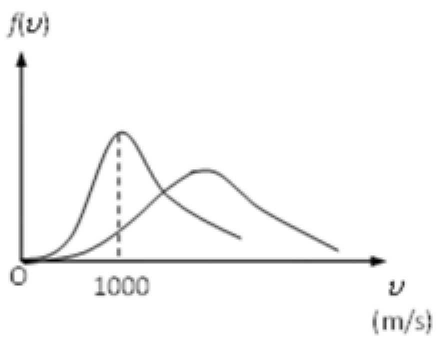
$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}},\bar{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$



【例】图示的曲线分别表示氢气和氦气在同一温度下的分子速率的分布。

（1）氦气分子的最概然速率为_______，氢气分子的最概然速率为_______。

（2）氢气分子的平均速率为_______，氢气分子的均方根速率为_______。



解：（1）温度与分子的平均平动动能成正比，温度相等说明氢气和氦气的分子的平均平动动能相等。而氦气分子质量更大，速率整体更小。所以图中左侧曲线表示氦气，右侧表示氢气。

从图中可直接看出氦气的最概然速率为 1000 m/s。

因为最概然速率 $v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$，与相对分子质量的平方根成反比。氢气的相对分子质量为 2，氦气的相对分子质量为 4，因此氢气的最概然速率是氦气的 $\sqrt{2}$倍，等于 $1000\sqrt{2}\,m/s\approx 1414\,m/s$。

（2）根据三种速率的表达式 $v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}},\bar{v}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$，可知他们的关系为 $v_p:\bar{v}:\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{2}:\sqrt{\frac{8}{\pi}}:\sqrt{3}$，因此平均速

率$\bar{v}=1000\sqrt{\frac{8}{\pi}}m/s\approx 1596m/s$，均方根速率$\sqrt{\overline{v^2}}=1000\sqrt{3}\,m/s\approx 1732\,m/s$

本视频由数学建模老哥团队研发上线，请勿盗用传播谢谢

5.5 碰撞频率与自由程

（1）平均碰撞频率

单位时间一个气体分子与其他分子碰撞次数

若假设只有一种分子，且视为直径为d的球，则$\bar{z}=\sqrt{2}\pi d^2 n\bar{v}$

（2）平均自由程

气体分子在相邻两次碰撞之间飞行的平均路程$\bar{\lambda}=\frac{\bar{v}}{\bar{z}}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$

注意：平均自由程与分子运动的速率无关。

【例】气缸内盛有一定量的氢气（可视作理想气体），当温度不变而压强增大一倍时，氢气分子的平均碰撞频率变为原来的____倍，平均自由程变为原来的____倍。

【解】设原来的状态参数为p,V,T，经过等温过程，参数变为 $2p,V/2,T$。

温度不变，所以平均速率$\bar{v}$不变；

体积变为一半，则分子数密度n变为原来的 2 倍。

平均碰撞频率$\bar{z}=\sqrt{2}\pi d^2 n\bar{v}$，其中$n$变为 2 倍，$\bar{v}$不变，$\bar{z}$变为 2 倍。

平均自由程$\bar{\lambda}=\frac{\bar{v}}{\bar{z}}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$，其中$n$变为 2 倍，因此平均自由程变为 1/2 倍

第 6 章　热力学定律

6.1 热力学第一定律

(1) 准静态过程

热力学系统从一个状态变化到另一个状态称为**过程**，完成过程的具体方法称为**途径**；**准静态过程**是指系统的每一状态都无限接近于平衡状态的过程

改变系统状态的方法是**做功**或**传热**

注意：p，V，T, E是状态量，其变化与途径无关；做功A和传热Q是过程量，与具体途径有关

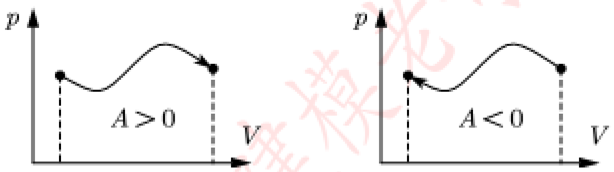
(2) 热力学第一定律

$$Q = \Delta E + A$$

	正	负
热量Q	系统吸热	系统放热
内能变化ΔE	内能增加（升温）	内能减小（降温）
做功A	系统对外做功（膨胀）	外界对系统做功（压缩）

■ 内能变化：$\Delta E = \frac{i}{2}\nu R\Delta T$

■ 功：$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV$，$p-V$图像下方的面积就是做功的大小



■ 热量：$Q = C_m\nu\Delta T$

对于理想气体，定体摩尔热容$C_{V,m} = \frac{i}{2}R$，定压摩尔热容$C_{p,m} = \frac{i+2}{2}R$

定压摩尔热容较大，这是因为气体吸热膨胀时对外做功，需要更多热量

比热容比$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{i+2}{i}$

【例】1 mol双原子理想气体从 300 K升温到 350 K，分别在等体、等压、绝热的条件下，求该过程吸收的热量、增加的内能和对外做的功。

解：(1) 在等体条件下，做功$A = 0$

吸收的热量$Q = C_{V,m}\nu\Delta T = \frac{5}{2}\nu R\Delta T = 1039\ J$

根据热力学第一定律，$\Delta E = Q - A = 1039\ J$ [或者$\Delta E = \frac{5}{2}\nu R\Delta T = 1039\ J$]

(2) 在等压条件下，吸收的热量$Q = C_{p,m}\nu\Delta T = \frac{7}{2}\nu R\Delta T = 1455\ J$

增加的内能$\Delta E = \frac{5}{2}\nu R\Delta T = 1039\ J$

根据热力学第一定律，做功$A = Q - \Delta E = 416\ J$

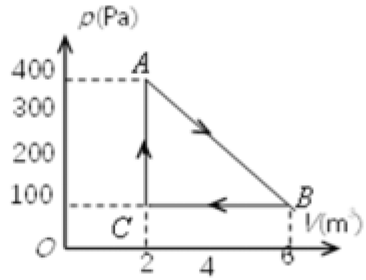
[或者$A = p\Delta V = \nu R\Delta T = 416J$]

(3) 在绝热条件下，吸收的热量$Q = 0$

增加的内能$\Delta E = \frac{5}{2}\nu R\Delta T = 1039\ J$

根据热力学第一定律，做功$A = Q - \Delta E = -1039\ J$

【例】比热容比$\gamma = 1.4$ 的理想气体进行如图循环，状态 A 的温度为 300 K。



（1）状态 B、C的温度和气体物质的量；

（2）各过程中气体对外所作的功；

（3）整个循环气体对外做的总功和吸收的总热量；

（4）各过程气体吸收的热量。

解：（1）根据理想气体状态方程，$\frac{pV}{T}$为定值。利用状态 A 数据可求出$\frac{pV}{T}=\frac{8}{3}$

对于 B、C，将数据代入，可得$T_B=225K$、$T_C=75K$

根据理想气体状态方程，$pV=\nu RT$，将数据代入可得$\nu=0.32\,mol$

（2）做功等于线段下方的面积。对于 A→B 过程，梯形面积$A_{AB}=1000\,J$

对于 B→C 过程，$A_{BC}=-400\,J$；对于 C→A 过程，$A_{CA}=0$

（3）整个过程气体对外做功$A=1000J-400J=600J$

而循环一周回到原来的状态，内能不变$\Delta E=0$

根据热力学第一定律，$Q=\Delta E+A=600J$，说明气体共吸热 $600J$

（4）比热容比$\gamma=1.4$，说明气体是双原子分子，$i=5$

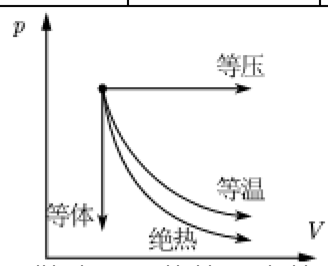
B→C 是等压过程，$Q_{BC}=C_{p,m}\nu\Delta T=\frac{7}{2}\nu R\Delta T=-1400\,J$

C→A 是等体过程，$Q_{CA}=C_{V,m}\nu\Delta T=\frac{5}{2}\nu R\Delta T=1500J$

结合整个过程气体共吸热 $600J$，所以 A→B 过程$Q_{AB}=500J$

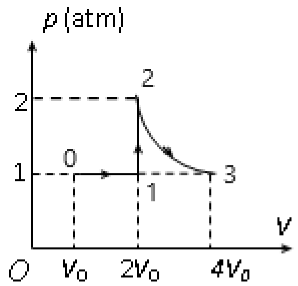
6.2 等值过程

等值过程	不变量	热量Q	内能变化ΔE	做功A	热力学第一定律的简化形式
等体过程	V不变	$\frac{i}{2}\nu R\Delta T$	$\frac{i}{2}\nu R\Delta T$	0	$Q=\Delta E$
等压过程	p不变	$\frac{i+2}{2}\nu R\Delta T$		$p\Delta V$	$Q=\Delta E+p\Delta V$
等温过程	T不变 即pV不变	不是零！		$\nu RT\ln\frac{p_1}{p_2}$	$Q=A$
绝热过程	pV^γ不变	0		$\frac{p_1V_1-p_2V_2}{\gamma-1}$	$0=\Delta E+A$



注意：气体的绝热自由膨胀不做功、不传热，内能不变。

【例】气缸内盛有 1 mol 温度为 27 ℃，压强为 1 atm 的氮气。先使它等压膨胀到原来体积的 2 倍，再等体升压使其压强变为 2 atm，最后使它等温膨胀到压强为 1 atm。求氮气在全过程中对外做的功、吸的热、内能的变化。



【解】初始体积为V_0，根据理想气体状态方程，$p_0V_0=\nu RT_0$，$p_2V_2=\nu RT_2$，$p_0V_3=\nu RT_2$，可知$T_2=T_3=2T_1=4T_0$，体积为$V_3=2V_2=2V_1=4V_0$。

氮气是双原子分子，$i=5$，内能变化为$\Delta E=\frac{5}{2}\nu R(T_3-T_0)=\frac{5}{2}p_0(4V_0)-p_0V_0=\frac{15}{2}p_0V_0=\frac{15}{2}\nu RT_0=18700\,J$

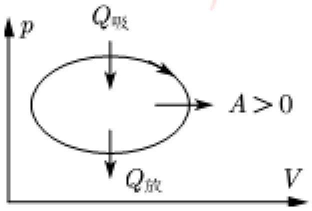
在等压过程中，$A_1=p_0(2V_0-V_0)=p_0V_0=\nu RT_0=2500J$；在等体过程中，$A_2=0$；在等温过程中，$A_3=\nu RT_2\ln\frac{V_3}{V_2}=4\ln 2*\nu RT_0=6915J$。总功$A=9415J$

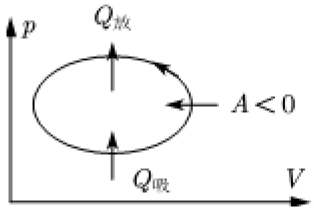
根据热力学第一定律，$Q=\Delta E+A=28115\,J$

6.3 循环过程与热机

(1) 循环过程

从某一状态开始，经过一系列变化，回到原来的状态，对应p-V图上的闭合曲线。循环一周内能不变$\Delta E=0$，做功大小等于闭合曲线的面积





热循环（正循环）：$A=Q_{吸}-Q_{放}$，热循环效率$\eta=\frac{A}{Q_{吸}}=1-\frac{Q_{放}}{Q_{吸}}$

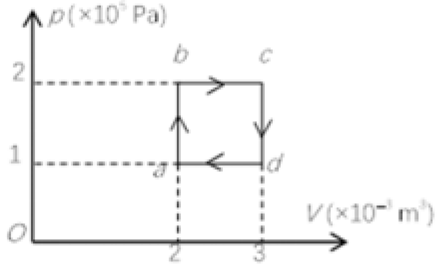
冷循环（逆循环）：$|A|=Q_{放}-Q_{吸}$，制冷系数$w=\frac{Q_{吸}}{A}$

【例】如图所示，$abcda$ 为 1 mol 单原子分子理想气体的循环过程，求：

(1) 气体循环一次，在吸热过程中从外界共吸收的热量；

(2) 气体循环一次对外做的净功；

(3) 热循环效率



解：（1）a→b 和 b→c 过程是吸热的。

a→b 是等体过程，$Q_1 = C_{V,m}\nu\Delta T = \frac{3}{2}\Delta pV = 300J$

b→c 是等压过程，$Q_2 = C_{p,m}\nu\Delta T = \frac{5}{2}p\Delta V = 500J$

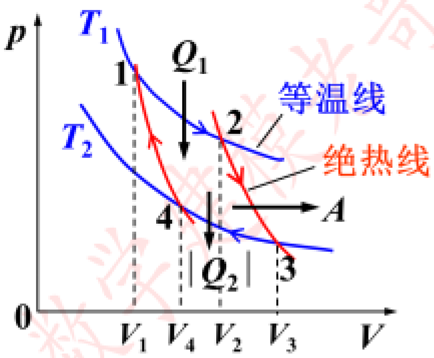
一共吸热$Q_{吸} = 800\ J$

（2）循环一次的净功等于曲线围成的矩形面积，$W = 100\ J$

（3）热循环效率$\eta = \frac{W}{Q_{吸}} = 12.5\%$

（2）卡诺热机：工质只和两个恒温热源交换热量的无摩擦的准静态循环，由等温过程和绝热过程组成，是效率最高的热机

卡诺热机循环效率$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$；卡诺制冷机制冷系数$w = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$



【例】一卡诺热机，低温热源的温度为 27℃，热机效率为 40%，其高温热源温度为___K。今欲将该热机效率提高到 50%，若低温热源保持不变，则高温热源的温度应增加___K。

解：根据卡诺热机的效率公式，$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

若$\eta = 40\%, T_2 = 300K$，可得$T_1 = 500K$

若$\eta = 50\%, T_2 = 300K$，可得$T_1 = 600K$

6.4 热力学第二定律

（1）热力学第二定律的表述

- 开尔文表述：其唯一效果是热量全部转变为功的过程是不可能的
- 克劳修斯表述：热量不能自动地从低温物体传向高温物体

（2）熵增原理：孤立系统内一切过程熵不会减少

- 对于可逆过程（例如无摩擦的准静态过程）而言，$\Delta S = 0$
- 对于不可逆过程（自然过程）而言，$\Delta S > 0$

（3）熵增原理的统计意义：一个孤立系统其内部自发进行的过程，总是由热力学概率小的宏观态向热力学概率大的宏观态过渡。

【例】一绝热容器被隔板分成两半，一半是真空，另一半是理想气体。若把

隔板抽出，气体将进行自由膨胀，达到平衡后

(A) 温度降低，熵增加　　　　(B) 温度不变，熵增加

(C) 温度降低，熵不变　　　　(D) 温度不变，熵不变

【解】气体向真空中的膨胀不做功、不传热。根据热力学第一定律，内能不变，所以温度不变。因为这个过程是不可逆过程，所以熵增加。应选 B。

【例】根据热力学第二定律判断，下列哪种说法是正确的

A. 热量能从高温物体传到低温物体，但不能从低温物体传到高温物体

B. 功可以全部变为热，但热不能全部变为功

C. 气体能够自由膨胀，但不能自动收缩

D. 有规则运动的能量能够变为无规则运动的能量，但无规则运动的能量不能变为有规则运动的能量

【解】A 选项，根据热力学第二定律，热量只是不能**自动地**从低温物体传到高温物体，但可以人为让这个过程进行，错误。

B 选项，根据热力学第二定律，其**唯一效果**是热量全部转变为功的过程是不可能的。如果允许有其他效果，那么热就可以全部转换为功，错误。

C 选项，气体自由膨胀是熵增加过程，能自发进行，而这一过程不可逆，气体不能自由收缩，正确。

D 选项，无规则运动的能量（即热运动的内能）可以变为有规则运动的能量（即做功），只是不能自发转变，会产生其他影响，错误。