華中科技大學
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

第1章 命题逻辑的基本概念

第1章 命题逻辑的基本概念

1.1 命题与联结词

1.2 命题公式及其赋值

逻辑是什么?

逻辑就是思维的规律

逻辑学是探索、阐述和确立有效推理原则的学科

用数学的方法研究关于推理、证明等问题的学科就称为数理逻辑

1.1 命题与联结词

题目1：甲乙丙丁四个小朋友在院子里打球，忽听“砰”的一声，球击中了李大爷家的窗户。李大爷跑出来察看，发现一块玻璃被打裂了。李大爷问：“是谁闯的祸？”

甲：“是乙不小心闯的祸。”

乙：“是丙闯的祸。”

丙：“乙说的不是实话。”

丁：“反正不是我闯的祸。”

如果这四位小朋友中只有一个说了实话，请你帮李大爷判断一下，究竟是谁闯的祸？

A 甲 B 乙 C 丙 D 丁

题目2：甲乙丙丁四个小朋友在院子里打球，忽听“砰”的一声，球击中了李大爷家的窗户。李大爷跑出来察看，发现一块玻璃被打裂了。李大爷问：“是谁闯的祸？”

甲：“是乙不小心闯的祸。”

乙：“是丙闯的祸。”

丙：“乙说的不是实话。”

丁：“反正不是我闯的祸。”

如果这四位小朋友中只有一个说了假话，请你帮李大爷判断一下，究竟是谁闯的祸？

A 甲 B 乙 C 丙 D 丁

若只有一个说假话呢？

1.1 命题与联结词

题目3：从A, B, C, D四位同学中，选两位去支援西部计划

1. A去则C和D要去一个人
2. B和C不能都去
3. C去则D要留下

那如何安排呢?

华中科技大学西部计划项目办公室

关于利用寒假开展疫情有关课题研究的倡议

全体 2020 届西部计划（研究生支教团）志愿者:

当前，全国上下众志成城、全力奋斗、共克时艰，共同防控新冠肺炎疫情。作为西部计划志愿者，带头科学理性认识疫情、合理充实度过假期、积极正面建言献策就是最好的行动。根据校团委有关倡议精神，经征求指导老师和部分同学意见建议，拟面向全体西部计划志愿者，发起疫情有关课题研究学习计划的倡议。

是否存在1、2、3条规则都不满足的安排方案呢?

1.1 命题与联结词

一个非真即假的陈述句称为命题，一般用小写英文字母表示.

作为命题的陈述句表达的判断结果称为命题的真值，真值只取两个值：真或假. 用“1”表示真，用“0”表示假，分别对应真命题(真值为真)与假命题(真值为假).

注意：

◆感叹句、祈使句、疑问句都不是命题;

◆陈述句中的悖论，判断结果不惟一确定的不是命题.

理发师悖论：有一位理发师，他的广告词是这样写的：本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。来找他刮脸的人络绎不绝，自然都是那些不给自己刮脸的人。可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀，你们看他能不能给他自己刮脸呢?

例1 下列句子中哪些是命题?

(1) $\sqrt{2}$是有理数. 假命题

(2) $2+5=7$. 真命题

(3) $x+5>3$. 不是命题

(4) 你去教室吗? 不是命题

(5) 我正在说谎. 悖论

(6) 火星上有水. 命题

(7) 1是奇数, 而2是偶数. 真命题

一个非真即假的陈述句称为命题

1.1 命题与联结词

命题
- 原子命题（简单命题）：不能被分解成更简单的命题
- 复合命题：由原子命题通过**联结词**联结而成的命题

简单命题符号化:

- 用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ 表示简单命题,
- 用“1”表示真, 用“0”表示假,

例如，令

p: $\sqrt{2}$是有理数，则p的真值为0,

q: $2+5=7$, 则q的真值为1.

定义1.1 设p为命题，复合命题“非p”(或 p的否定)称为p的否定式，记作$\neg p$，符号$\neg$称作否定联结词. 规定$\neg p$为真当且仅当p为假.

由定义可知，$\neg p$的逻辑关系为p不成立，因而当p为真时，$\neg p$为假；反之当p为假时，$\neg p$为真.

p	$\neg p$
0	1
1	0

1.1 命题与联结词

定义1.2 设p和q为两个命题，复合命题"p并且q"(或"p与q")称为p与q的合取式，记作$p\wedge q$，$\wedge$称作合取联结词. 规定$p\wedge q$为真当且仅当p与q同时为真.

由定义可知，$p\wedge q$的逻辑关系为p与q同时成立，因而只有当p与q同时为真时，$p\wedge q$才为真，其他情况$p\wedge q$均为假.

使用联结词$\wedge$需要注意两点：一是$\wedge$的灵活性，自然语言中的既…又…，不但…而且…，虽然…但是…都表示两件事情同时成立，因此可以符号化为$\wedge$. 二是不要见到与、和就用联结词$\wedge$.

例2 将下列命题符号化.

(1) 吴颖既用功又聪明.

(2) 吴颖不仅用功而且聪明.

(3) 吴颖虽然聪明，但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解 令p:吴颖用功,

q:吴颖聪明

(1) $p\wedge q$

(2) $p\wedge q$

(3) $\neg p\wedge q$

(4) 设p:张辉是三好生, q:王丽是三好生 $p\wedge q$

(5) p:张辉与王丽是同学

(1)—(3) 说明描述合取式的灵活性与多样性

(4)—(5) 要求分清 “与” 所联结的成分

定义1.3 设p和q为两个命题，复合命题“p或q”称作p与q的析取式，记作$p \vee q$，$\vee$称作析取联结词. 规定$p \vee q$为假当且仅当p与q同时为假.

由定义可知，当p与q中有一个为真时，$p \vee q$为真. 只有当p与q同时为假时，$p \vee q$才为假.

以上定义的析取联结词$\vee$与自然语言中的“或”不完全一样，自然语言中的“或”具有二义性，用它有时具有相容性(即它联结的两个命题可以同时为真)，有时具有排斥性(即只有当一个为真一个为假时才为真)，分别对应于相容或与排斥或.

例3 将下列命题符号化.

(1) 2或4是素数.

(2) 2或3是素数.

(3) 4或6是素数.

(4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.

(5) 王小红生于1975年或1976年.

(1) 令p: 2是素数, q: 4是素数, $p\lor q$

(2) 令p: 2是素数, q: 3是素数, $p\lor q$

(3) 令p: 4是素数, q: 6是素数, $p\lor q$

(4) 令p: 小元元拿一个苹果, q: 小元元拿一个梨

$(p\land\neg q)\lor(\neg p\land q)$

(5) p: 王小红生于1975年, q: 王小红生于1976年,

$(p\land\neg q)\lor(\neg p\land q)$ 或 $p\lor q$

(1)—(3) 为相容或(可以同时为真)

(4)—(5) 为排斥或(只能一个为真), 符号化时(5)可有两种形式, 而(4)则不能.

定义1.4 设p, q为两个命题，复合命题“如果 p, 则q”称作p与q的**蕴涵式**，记作$p \to q$，并称p是蕴涵式的**前件**，q为蕴涵式的**后件**，$\to$称作**蕴涵联结词**. 规定：$p \to q$为假当且仅当p为真q为假.

(1) $p \to q$ 的逻辑关系：q为p的必要条件；

(2) “如果 p, 则 q” 有很多不同的表述方法：

若p，就q；只要p，就q；p仅当q；只有q才p；除非q, 才p 或 除非q，否则非p，…；

(3) 当 p 为假时，$p \to q$恒为真，称为空证明；

(4) p与q可以无任何内在关系！

例4 设 p：天冷，q：小王穿羽绒服，将下列命题符号化.

(1) 只要天冷，小王就穿羽绒服. $p \rightarrow q$

(2) 因为天冷，所以小王穿羽绒服. $p \rightarrow q$

(3) 若小王不穿羽绒服，则天不冷. $p \rightarrow q$

(4) 只有天冷，小王才穿羽绒服. $q \rightarrow p$

(5) 除非天冷，小王才穿羽绒服. $q \rightarrow p$

(6) 除非小王穿羽绒服，否则天不冷. $p \rightarrow q$

定义1.5 设 p, q为两个命题，复合命题“p当且仅当q”称作p与q的等价式，记作$p \leftrightarrow q$，$\leftrightarrow$称作等价联结词. 规定$p \leftrightarrow q$为真当且仅当p与q同时为真或同时为假. $p \leftrightarrow q$的逻辑关系为p与q互为充要条件.

例5 求下列复合命题的真值.

(1) $2+2=4$ 当且仅当 $3+3=6$. 1

(2) $2+2=4$ 当且仅当 3 是偶数. 0

(3) $2+2=4$ 当且仅当太阳从东方升起. 1

(4) $2+2=4$ 当且仅当美国位于非洲. 0

(5) 函数$f(x)$在x_0可导的充要条件是它在x_0连续. 0

注：（1）常用的联结词有5个：否定$\neg$、合取$\wedge$、析取$\vee$、蕴涵$\rightarrow$、等价$\leftrightarrow$.

（2）由一个联结词联结的一个或两个原子命题而成的复合命题称为基本复合命题.

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

（3）联结词的优先顺序：( ) $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$；对同一优先级，从左到右顺序进行.

例6 令p：北京比天津人口多；

q：$2+2=4$；

r：乌鸦是白色的.

求下列复合命题的真值.

(1) $((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \rightarrow r$

(2) $(q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow \neg r)$

(3) $(\neg p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$

p，q，r 的真值分别为1, 1, 0，容易算出上式的真值分别为1, 1, 0

例7将下列论述符号化，并求所得复合命题的真值.
若2和3是素数，则5是奇数；2是素数，3也是素数，所以，5或6是奇数.

解：令p: 2是素数，
q: 3是素数，
r: 5是奇数，
s: 6是奇数，
复合命题符号化为: $(((p\wedge q)\rightarrow r)\wedge p\wedge q)\rightarrow(r\vee s)$.
命题的真值，请大家算一下！

1.2 命题公式及其赋值

- 简单命题是命题逻辑中最基本的研究单位，由于简单命题真值唯一确定，所以简单命题也称为命题常项 (命题常元).
- 取值1 (真)或0 (假)的变元称作命题变项 (命题变元). 可以用命题变项表示真值可以变化的陈述句. 命题变项不是命题!
- 命题常项与命题变项均用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$ 等表示.

注： 命题常项与命题变项的关系类似于初等数学中常量与变量的关系.

1.2 命题公式及其赋值

定义1.6 将命题变项用联结词和圆括号按照一定的逻辑关系联结起来的符号串称作合式公式(也称作命题公式或命题形式，简称公式). 当使用联结词时，合式公式定义如下:

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作原子命题公式;

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是;

(3) 若 A, B 是合式公式， 则 $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是;

(4) 只有有限次地应用(1)—(3)形成的符号串才是合式公式.

1.2 命题公式及其赋值

注：

(1) 设A是合式公式，B为A中一部分，若B也为合式公式，则称B为A的子公式.

(2) 定义中引进了A, B等符号(用来表示任意的合式公式)，称作元语言符号；而某个具体的公式，如p, $p\wedge q$, 称作对象语言符号.

(3) $(\neg A)$, $(A\wedge B)$等公式单独出现时，外层括号可以省去. 公式中不影响运算次序的括号可以省去.

(4) 命题公式不是命题！每一个命题变元都被赋以确定的真值时，公式的真值才被确定，从而成为一个命题.

定义1.7 公式层次

(1) 若公式A是单个命题变项，则称A为0层公式.

(2) 称A是 $n+1(n\geq 0)$ 层公式是指下面情况之一：

(*a*) $A=\neg B$, B 是 n 层公式；

(*b*) $A=B\wedge C$, 其中B, C 分别为 i 层和 j 层公式，且 $n=\max(i,j)$；

(*c*) $A=B\vee C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(*b*)；

(*d*) $A=B\rightarrow C$, 其中B, C 的层次及 n 同(*b*)；

(*e*) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B, C 的层次及 n 同(*b*).

(3) 若公式 A 的层次为k, 则称A为k层公式.

例 公式 $A=p$，$B=\neg p$，$C=\neg p\rightarrow q$，

$D=\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$，

$E=((\neg p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(\neg r\vee s)$，

问公式层次分别是?

分别为0层，1层，2层，3层，4层公式

1.2 命题公式及其赋值

在命题公式中，由于有命题变项的出现，因而真值是不确定的. 用命题常项替换公式中的命题变项称作解释. 例如 $(p\vee q)\to r$.

定义1.8 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变项，给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值，称为对A的一个赋值或解释. 若指定的一组值使A的真值为1，则称这组值为A的成真赋值；若使A的真值为0，则称这组值为A的成假赋值.

说明：

- A中出现命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指 $p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$, $\alpha_i=0$或1, α_i之间不加标点符号;
- A中出现命题变项(按照字母顺序)为 $p, q, r, \ldots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指 $p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \ldots$
- 含n个命题变项的公式有2^n个赋值. 为什么?

如 000, 010, 101, 110是$\neg(p\to q)\leftrightarrow r$的成真赋值,
001, 011, 100, 111是成假赋值.

1.2 命题公式及其赋值

定义1.9 将命题公式A在所有赋值下取值的情况列成表，称作A的真值表.

构造真值表的步骤:

(1) 找出公式中所含的全部命题变项p_1, p_2, …, p_n(若无下角标则按字母顺序排列), 列出2^n个全部赋值, 从00…0开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至11…1为止;

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次;

(3) 对应每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.

如果两个公式A与B的真值表对所有赋值最后一列都相同，则称这两个真值表相同，即A与B等值

例8 写出下列公式的真值表，并求它们的成真赋值和成假赋值.

(1) $A = (p \vee q) \rightarrow \neg r$

(2) $B = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$

(3) $C = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$

(1) $A = (p \vee q) \rightarrow \neg r$

p q r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0 0 0	0	1	1
0 0 1	0	0	1
0 1 0	1	1	1
0 1 1	1	0	0
1 0 0	1	1	1
1 0 1	1	0	0
1 1 0	1	1	1
1 1 1	1	0	0

成真赋值:000, 001, 010, 100, 110; 成假赋值:011, 101, 111

(2) $B=(q\to p)\wedge q\to p$

p q	$q\to p$	$(q\to p)\wedge q$	$(q\to p)\wedge q\to p$
0 0	1	0	1
0 1	0	0	1
1 0	1	0	1
1 1	1	1	1

成真赋值:00, 01, 10, 11; 无成假赋值

1.2 命题公式及其赋值

(3) $C = \neg(\neg p \vee q) \wedge q$

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(\neg p \vee q)$	$\neg(\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

成假赋值: 00, 01, 10, 11; 无成真赋值

定义1.10 设A为任一命题公式,

(1) 若A在它的任何赋值下取值均为真, 则称A为重言式或永真式;

(2) 若A在它的任何赋值下取值均为假, 则称A为矛盾式或永假式;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A是可满足式.

由前例知, $(p\vee q)\rightarrow\neg r$, $(q\rightarrow p)\wedge q\rightarrow p$, $\neg(\neg p\vee q)\wedge q$ 分别为非重言式的可满足式, 重言式, 矛盾式.

注：

1. A是可满足式的等价定义是：A至少存在一个成真赋值；

2. 重言式是可满足式，但反之不真. 若公式A是可满足式，且它至少存在一个成假赋值，则称A是非重言式的可满足式；

3. 真值表可用来判断公式的类型，如果真值表的最后一列全为1，则公式是重言式；如果真值表的最后一列全为0，则公式是矛盾式；如果真值表的最后一列至少有一个为1，则公式是可满足式.

真值表的作用:

(1) 准确地给出公式的成真赋值和成假赋值;

(2) 判断公式的类型.

例9 用真值表判断下列公式的类型.

(1) $p \to (p \vee q)$

(2) $(p \to \neg p) \to \neg q$

(3) $\neg(p \to q) \wedge q$

(4) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

1.2 命题公式及其赋值

(1)

p	q	$p\vee q$	$p\to(p\vee q)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

永真式

(2)

p	q	$\neg p$	$p\to\neg p$	$\neg q$	$(p\to\neg p)\to\neg q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1

非重言式的可满足式

(3) **永假式**

p	q	$p\rightarrow q$	$\neg(p\rightarrow q)$	$\neg(p\rightarrow q)\wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0			
1	1			

公式$\neg q$中不含p，称p为$\neg q$的哑元.
公式的取值与哑元无关.

(4) **永真式**

p	q	$p\rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q\rightarrow \neg p$	$(p\rightarrow q)\rightarrow(\neg q\rightarrow \neg p)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1

1.2 命题公式及其赋值

设公式A和B中共有命题变项$p_1, p_2, \cdots, p_n$，而A或B不全含这些命题变项，例如，A中不含$p_i, \cdots, p_n\ (i \geq 3)$，称这些命题变项为$A$的**哑元**，$A$的取值与哑元无关．因而在讨论$A$和$B$是否有相同的真值表时，可以将$A$和$B$都看成含$p_1, p_2, \cdots, p_n$的命题公式.

1.1 命题与联结词

题目1：甲乙丙丁四个小朋友在院子里打球，忽听“砰”的一声，球击中了李大爷家的窗户。李大爷跑出来察看，发现一块玻璃被打裂了。李大爷问：“是谁闯的祸？”

甲：“是乙不小心闯的祸。”

乙：“是丙闯的祸。”

丙：“乙说的不是实话。”

丁：“反正不是我闯的祸。”

如果这四位小朋友中只有一个说了实话，请你帮李大爷判断一下，究竟是谁闯的祸？

A 甲 B 乙 C 丙 D 丁

题目2：甲乙丙丁四个小朋友在院子里打球，忽听“砰”的一声，球击中了李大爷家的窗户。李大爷跑出来察看，发现一块玻璃被打裂了。李大爷问：“是谁闯的祸？”

甲：“是乙不小心闯的祸。”

乙：“是丙闯的祸。”

丙：“乙说的不是实话。”

丁：“反正不是我闯的祸。”

如果这四位小朋友中只有一个说了假话，请你帮李大爷判断一下，究竟是谁闯的祸？

A 甲 B 乙 C 丙 D 丁

若只有一个说假话呢?

1.2 命题公式及其赋值

甲：“是乙不小心闯的祸。”

乙：“是丙闯的祸。”

丙：“乙说的不是实话。”

丁：“反正不是我闯的祸。”

定义 a：甲闯祸了　　b：乙闯祸了

c：丙闯祸了　　d：丁闯祸了

a	b	c	d	甲：b	乙：c	丙：$\neg c$	丁：$\neg d$
1	0	0	0				
0	1	0	0				
0	0	1	0				
0	0	0	1				

1.2 命题公式及其赋值

甲：“是乙不小心闯的祸。”

乙：“是丙闯的祸。”

丙：“乙说的不是实话。”

丁：“反正不是我闯的祸。”

定义 a：甲闯祸了　　b：乙闯祸了

　　　c：丙闯祸了　　d：丁闯祸了

a	b	c	d	甲：b	乙：c	丙：$\neg c$	丁：$\neg d$
1	0	0	0	0	0		1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1		1
0	0	0	1	0	0	1	0

只有一个说假话

只有一个说真话

1.1 命题与联结词

题目3：从A, B, C, D四位同学中，选两位去支援西部计划

1. A去则C和D要去一个人
2. B和C不能都去
3. C去则D要留下

那如何安排呢?

是否存在1、2、3条规则都不满足的安排方案呢?

1.2 命题公式及其赋值

1. A去则C和D要去一个人　定义　a: A去　b: B去
2. B和C不能都去　c: C去　d: D去
3. C去则D要留下

$X = a \rightarrow (\neg c \wedge d) \vee (c \wedge \neg d)$　$Y = \neg(b \wedge c)$　$Z = c \rightarrow \neg d$

a	b	c	d	X	Y	Z
1	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1

1.2 命题公式及其赋值

第一章主要内容:

- 命题、真值、简单命题与复合命题、命题符号化;
- 联结词$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$及复合命题符号化;
- 命题公式及层次;
- 公式的类型;
- 真值表及其应用.