1 一质点由静止开始做直线运动，初始加速度为 a_0，其后加速度均匀增加，每经过 s 秒增加 a_0. 求质点的速度和位移.

解 由题意可知，加速度和时间的关系为 $a=a_0+\frac{a_0}{s}t$，又 $a=\frac{dv}{dt}$，联立方程并积分得

$$\int_0^v dv=\int_0^t\left(a_0+\frac{a_0}{s}t\right)dt,$$

故质点速度为

$$v=a_0t+\frac{a_0}{2s}t^2=\frac{dx}{dt}.$$

由此知 $\int_0^x dx=\int_0^t\left(a_0t+\frac{a_0}{2s}t^2\right)dt$，故质点位移 $x=\frac{a_0}{2}t^2+\frac{a_0}{6s}t^3$.

2. 一质点做半径为 0.1 m 的圆周运动，其运动方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}t^2$，则其切向加速度 a_t =______.

0.1 m/s

3　一条长为 l 质量均匀分布的细链条 AB，挂在半径可忽略的光滑钉子上，开始处于静止状态，已知 BC 段长为 $L\left(\frac{1}{2}l<L<\frac{2}{3}l\right)$，释放后链条将做加速运动，如图 2.5(a)所示. 试求当 $L=\frac{2}{3}l$ 时，链条的加速度和速度.

解　建立如图 2.5(b)所示的坐标系，设任意时刻 BC 长度为 x，则有

$$\frac{m}{l}xg-\frac{m}{l}(l-x)g=ma,\quad \text{即}\quad a=\frac{2x}{l}g-g.$$

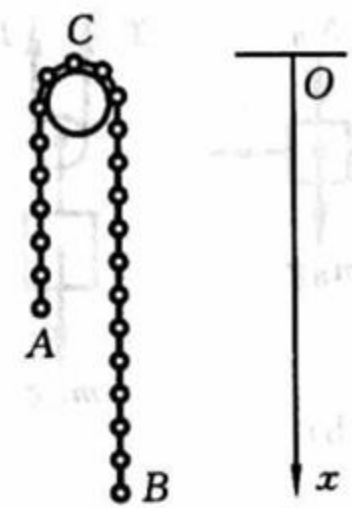
又

$$a=\frac{2x}{l}g-g=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},\quad \int_0^v v\mathrm{d}v=\int_L^{\frac{2}{3}l}\left(\frac{2x}{l}g-g\right)\mathrm{d}x,$$

解得链条的速度为

$$v=\sqrt{2\left(L-\frac{L^2}{l}-\frac{2}{9}l\right)g}.$$

所以当 $L=\frac{2}{3}l$ 时，$a=\frac{1}{3}g$.



(a)　(b)

4

有一条单位长度质量为 λ 的均匀细绳，开始时盘绕在光滑的水平桌面上．现以恒定的加速度 a 竖直向上提拉．当提起的高度为 y 时，作用在绳端的力为多少？若以恒定的速度 $\boldsymbol{v}$ 竖直向上提绳，仍提到 y 的高度，则此时作用在绳端的力又是多少？

解 取竖直向上的方向为正，以被提起的绳段 y 为研究对象，它受有拉力 $\boldsymbol{F}$ 与重力 λyg 作用，依据牛顿定律有

$$F-\lambda yg=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda yv), \quad F-\lambda yg=\lambda v^2+\lambda ya.$$

当加速度 a 恒定时， $F=\lambda(yg+v^2+ya)=\lambda(g+3a)y.$

当加速度 $a=0$，v 为恒定速度时，$F=\lambda yg+\lambda v^2=\lambda(yg+v^2).$

5

长为 l、质量为 m 的匀质链条，置于桌面上，链条与桌面的摩擦因数为 μ，下垂端的长度为 a. 在重力作用下，由静止开始下落，求链条完全滑离桌面时重力、摩擦力的功.

解 建立如图 4.1 所示的坐标系，在链条下落的任意时刻，重力所做的元功为 $dA=\frac{m}{l}yg\,dy$；链条完全脱离桌面时，重力所做的功为

$$A_g=\int_a^l \frac{m}{l}yg\,dy=\frac{1}{2}\frac{m}{l}g(l^2-a^2).$$

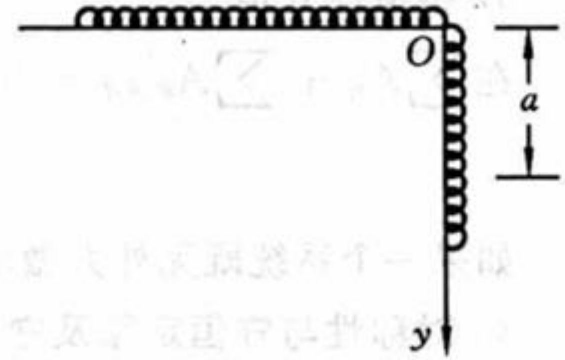


图 4.1

在任意时刻，桌面上的链条长度为 $l-y$，则摩擦力为 $-\frac{m}{l}(l-y)g\mu$，从静止到链条完全滑离桌面摩擦力所做的功为

$$A_f=-\int_a^l \frac{m}{l}(l-y)g\mu\,dy=-\int_a^l mg\mu\,dy+\int_a^l \frac{m}{l}g\mu y\,dy=-\frac{1}{2}mg\mu\frac{(l-a)^2}{l}.$$

6 在光滑水平面上放着一个质量为 m 的物体. 从 $t=0$ 开始，物体受到一个随时间变化而变化的力 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{b}t$ 的作用，其中 $\boldsymbol{b}$ 是一个常矢量，它与水平方向始终保持 θ 角，如图 4.2 所示. 物体沿水平面滑过一段距离后脱离水平面，求在沿水平面滑动过程中力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功.

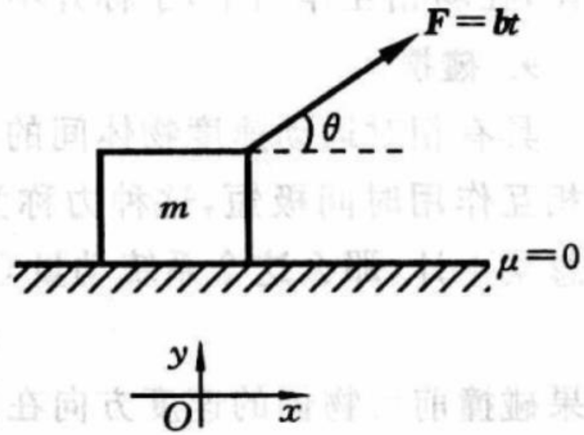


图 4.2

解 由牛顿第二定律有 $bt\cos\theta=ma_x=m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$，即

$$\mathrm{d}v_x=\frac{b\cos\theta}{m}t\,\mathrm{d}t,$$

上式两边对时间积分得

$$\int_0^{v_x}\mathrm{d}v_x=\int_0^t\frac{b\cos\theta}{m}t\,\mathrm{d}t,$$

故
$$v_x=\frac{b\cos\theta}{2m}t^2.$$

当物体离开水平面时，有 $N=0$，即 $mg=bt_0\sin\theta$，亦即

$$t_0=\frac{mg}{b\sin\theta}.$$

由质点动能定理可求得 $0\to t_0$ 时间里，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$A=\frac{1}{2}mv_x^2=\frac{1}{2}m\left[\frac{b\cos\theta}{2m}\left(\frac{mg}{b\sin\theta}\right)^2\right]^2=\frac{m^3g^4\cos^2\theta}{8b^2\sin^4\theta}.$$

7 有一保守力 $\boldsymbol{F}=(-Ax+Bx^2)\boldsymbol{i}$($A$,$B$ 为常数),沿 x 轴作用于质点上.

(1) 若取 $x=0$ 时,$E_p=0$,试求与此力相对应的势能函数表达式;

(2) 求质点从 $x=1$ m 运动到 $x=2$ m 时势能的变化.(所有物理量均采用国际单位制)

解 质点从 $x=a$ 运动到 $x=b$ 时,保守力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$A_{ab}=\int_a^b F\mathrm{d}x=\int_a^b(-Ax+Bx^2)\mathrm{d}x=\frac{A}{2}(a^2-b^2)+\frac{B}{3}(b^3-a^3)=-(E_{pb}-E_{pa}).$$

(1) 取 $x=0$ 时,$E_p=0$ 作为势能零点,依据势能定义,令 $a=x$,$b=0$ 即可求得保守力 $\boldsymbol{F}$ 势场中任意点 x 的势能函数表达式为 $E_p=\frac{A}{2}x^2-\frac{B}{3}x^3$.

(2) 令 $a=1$ m,$b=2$ m,则 $\Delta E_p=-A_{ab}=\frac{3}{2}A-\frac{7}{3}B$.

8 二质点的质量各为 m_1、m_2，当它们之间的距离由 a 缩短到 b 时，万有引力所做的功为______. $-Gm_1m_2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$

9 质量为 M 的匀质圆盘，可绕通过盘心并垂直于盘的固定光滑轴转动，绕过盘的边缘挂有质量为 m，长为 l 的匀质柔软绳索，如图 5.2 所示. 设绳与圆盘无相对滑动，试求当圆盘两侧绳长之差为 s 时，绳的加速度的大小.

解一 如图 5.2 所示，将绳分成三部分考虑，这三部分的质量分别为 m_1、m_2 和 m_3，对圆盘及每一段绳子进行受力分析，有

$$m_1g-T_1=m_1a,\quad T_2-m_2g=m_2a,$$

$$(T_1-T_2)R=J\beta=\left(m_3R^2+\frac{1}{2}MR^2\right)\beta,$$

$$a=\beta R,\quad m_1-m_2=\frac{m}{l}s,$$

联立求解以上各式，可得 $a=\dfrac{2msg}{Ml+2ml}$.

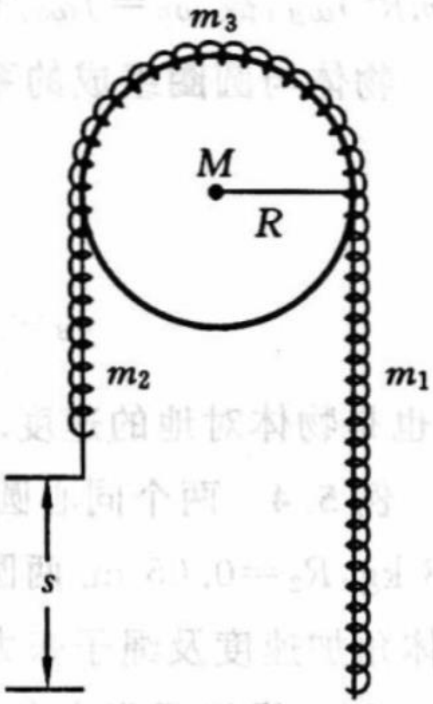


图 5.2

10 一半径为 R，质量为 m 的匀质圆盘，可绕垂直于盘面并通过中心的轴转动，在外力作用下获得角速度 ω_0. 设盘与桌面间的摩擦系数为 μ，现撤去外力，求：(1) 盘从开始减速到停止转动所需的时间；(2) 阻力矩的功.

解 (1) 将圆盘视为由许多个连续分布的环带组成，每个环带到盘中心 O 点的距离都不同，因而各环带所受到的力矩不同，整个圆盘受到的力矩是各个环带所受力矩之和（方向均相同），在离中心 O 点为 r 处取一个环带元，此环带元的宽度为 $\mathrm{d}r$，受到的摩擦力为

$$\mathrm{d}f=\mu\mathrm{d}mg=2\pi\mu g\sigma r\mathrm{d}r,\quad \sigma=\frac{m}{\pi R^2},$$

摩擦力矩为 $\mathrm{d}M=-r\mathrm{d}f=-2\pi\mu g\sigma r^2\mathrm{d}r$，负号说明力矩的方向与 ω_0 方向相反.

圆盘受到的总摩擦力矩为 $M=\int\mathrm{d}M=\int_0^R-2\pi\mu g\sigma r^2\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\mu mgR.$

由转动定律有 $\beta=\frac{M}{J}=\frac{-\frac{2}{3}\mu mgR}{\frac{1}{2}mR^2}=-\frac{4}{3}\frac{\mu g}{R}$，由于 $\beta=-\frac{4\mu g}{3R}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$，故

$$\int_0^t-\frac{4\mu g}{3R}\mathrm{d}t=\int_{\omega_0}^0\mathrm{d}\omega,\quad t=\frac{3R\omega_0}{4\mu g}.$$

(2) 由刚体转动动能定理，可得阻力矩做的功为

$$W=0-\frac{1}{2}J\omega_0^2=-\frac{1}{4}mR^2\omega_0^2.$$

11

一根长为 L，质量为 M 的均匀直棒，可绕垂直于竖直平面的光滑轴转动. 开始时棒悬垂静止，有一质量为 m，水平速度为 $\boldsymbol{v}_0$ 的子弹射向棒的下端，如图 5.5 所示，与棒碰撞后以水平速度 $\boldsymbol{v}$ 飞离，求棒摆到最大高度时，棒与铅直方向的夹角 θ.

解 子弹与棒相碰的瞬间，系统对转轴的合外力矩为零，角动量守恒，设碰撞后棒对转轴的角速度为 ω，则有

$$mLv_0=mLv+\frac{1}{3}ML^2\omega. \quad ①$$

棒被撞击后开始摆动，此过程中仅重力做功，棒的机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}MgL(1-\cos\theta). \quad ②$$

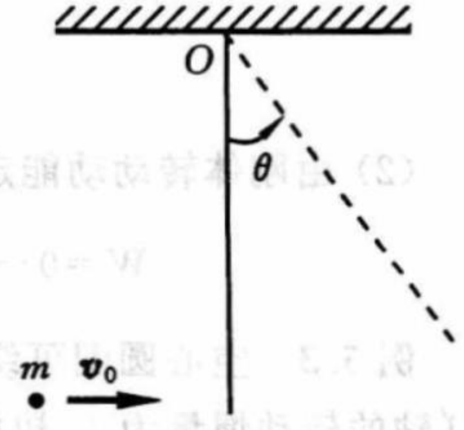


图 5.5

联立求解式①、式②，得

$$\cos\theta=1-\frac{3m^2(v_0-v)^2}{M^2Lg}.$$

12 均质圆盘半径为 R，质量为 M，挖去如图 5.7 所示半径为 $\frac{R}{2}$ 的小圆盘后，求剩余部分对通过中心并垂直于盘面的轴的转动惯量.

解 设小圆盘质量为 m，由平行轴定理，其对 O 轴转动惯量为

$$J_{小盘}=m\left(\frac{R}{2}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{3}{8}mR^2.$$

由于是均质圆盘，所以有

$$\frac{m}{M}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{1}{4},\quad 即\quad m=\frac{1}{4}M,$$

$$J_{小盘}=\frac{3}{8}mR^2=\frac{3}{32}MR^2.$$

由转动惯量的可加性，剩余部分对定轴 O 的转动惯量为

$$J=J_{大盘}-J_{小盘}=\frac{1}{2}MR^2-\frac{3}{32}MR^2=\frac{13}{32}MR^2.$$

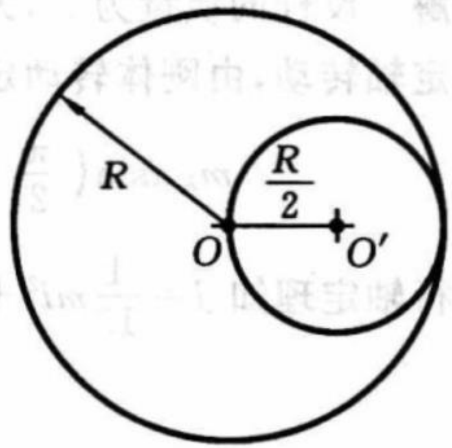


图 5.7