第六章　数理统计的基本概念

本章开始我们学习数理统计的基础知识.

数理统计是数学的一个分支. 它以概率论为基础, 结合统计方法, 从试验或观测得到的数据中提取信息, 对研究对象的统计规律性进行合理推断并做出科学决策, 是现代科学和工程中不可或缺的工具.

在概率论中, 我们都是假设所研究的随机变量的分布已知的, 然后在这一前提下去研究它的性质、特点和规律性, 例如求出它的数字特征、讨论随机变量函数的分布、介绍常用的各种分布等. 在数理统计中, 我们研究的随机变量的分布是未知的. 在此情形下, 人们通过对所研究的随机变量进行重复独立的观察, 得到许多观察值, 通过对这些数据进行分析而对所研究的随机变量的分布作出种种推断.

6.1　随机样本与统计量

6.1.1　随机样本

总体与个体

总体与样本是数理统计的基本概念. 我们把全体研究对象 (或其数据) 的集合称为**总体** (Polulation), 组成总体的元素称为**个体** (Individual).

总体通常用随机变量 X 来表示, 服从某种分布, 但分布的具体参数一般未知, 需要统计推断.

例如, 在 E_1 = “考察全体学生在某次考试中的考试成绩” 这一随机试验中, 总体就是全体考生的考试成绩, 而个体就是其中个别考生的成绩. 不妨认为本次考试成绩服从正态分布, 则总体可表示为随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 而其中的个体, 如第 9527 号匿名考生的成绩, 可表示为与总体 X 同分布的一个随机变量 $X_{9527} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

简单随机样本

从总体中抽取部分个体的过程叫做**抽样**, 被抽到的部分个体, 如 $X_1, X_2, \cdots, X_n$, 组成总体的一个**样本**, 称数目 n 为该样本的**样本容量**. 由于总体通常规模庞大或难以完全观测, 抽样能以较低成本获取足够信息 (我们后面会看到, 大数定律和中心极限定理保证了样本统计量能有效逼近总体参数).

有关抽样的技术是数理统计中的重要内容, 有“抽样方法”和“试验设计”两门课程专门讨论如何正确有效地收集数据. 这里不详细介绍, 只讨论**简单随机抽样**, 即抽样满足

(i) 随机性: 总体中的每个个体被抽取到的机会是均等的;

(ii) 独立性: 被抽取的个体是在相同条件下独立进行的.

定义 6.1. 设总体 X 的分布函数为 $F(x)$, 抽取的样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 若满足其中的个体 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且与总体有相同的分布, 则称该样本为总体 X 的一个**简单随机样本**, 简称**样本**. 当样本取定某组值时, 称这组值为该样本的**样本观测值**.

简言之, 简单随机样本即为与总体 X 独立同分布的一组随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$. 我们将通过样本观察值, 对总体的分布特征进行合理推断.

6.1.2 理论分布函数与经验分布函数

我们把总体 X 的分布函数 $F(x)$ 称为**理论分布函数**. 由样本的独立同分布性质, 样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i).$$

特别地, 对于离散型总体 X, 样本的分布列

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i).$$

对于连续型总体 X, 设其概率密度为 $f(x)$, 则样本的概率密度

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

例 6.2. 某种电器的使用寿命服从指数分布, 参数 λ 未知. 为此抽取了 n 件电器, 观测它们的实际使用寿命. 试确定本问题的总体、样本及样本的分布.

解. 总体 X 是全体电器的寿命, 服从指数分布, (理论) 概率密度函数是

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

样本是抽取的 n 件电器的使用寿命 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 样本的概率密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}, & x_1, x_2, \cdots, x_n > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

□

定义 6.3. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体 X 的样本, 将其观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 从小到大排列为 $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \cdots \leqslant x_n^*$. 称

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1^*, \\ \dfrac{k}{n}, & x_k^* \leqslant x < x_{k+1}^* \ (k = 1, 2, \cdots, n-1), \\ 1, & x \geqslant x_n^*, \end{cases}$$

为 X 的**经验分布函数**.

例 6.4. 随机地观测总体 X 得 8 个数据: 2.5, 3, 2.5, 3.5, 3, 2.7, 2.5, 2. 试据此数据求 X 的一个经验分布函数.

解. 将这组数据从小到大排列:

$$2,\ 2.5,\ 2.5,\ 2.5,\ 2.7,\ 3,\ 3,\ 3.5.$$

由此得 X 的经验分布函数

$$F_8(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ 1/8, & 2 \leqslant x < 2.5, \\ 4/8, & 2.5 \leqslant x < 2.7, \\ 5/8, & 2.7 \leqslant x < 3, \\ 7/8, & 3 \leqslant x < 3.5, \\ 1, & x \geqslant 3.5, \end{cases}$$

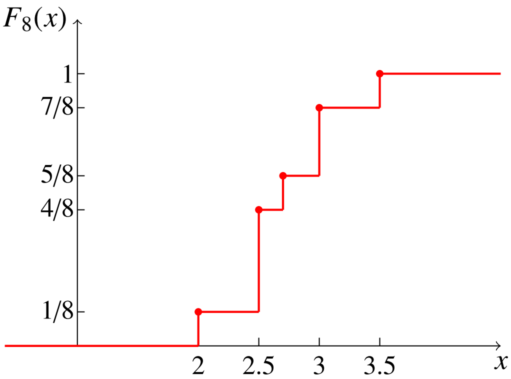

图 6.1: 经验分布函数 $F_8(x)$

其图像如图 6.1. □

由此可见, 经验分布函数依赖于样本观测值, 因此具有随机性. 此外, 经验分布函数值 $F_n(x)$ 实际上是这组样本观测值中事件 $\{X \leqslant x\}$ 出现的频率. 根据大数定律, 当 n 充分大时该频率依概率收敛于其理论概率, 即

$$F_n(x) \xrightarrow{P} F(x).$$

实际上, 格里文科 (W. Glivenko) 于 1933 年证明了如下定理.

定理 6.5 (格里文科定理)**.** 经验分布函数依概率均匀地收敛于理论分布函数:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0\right) = 1.$$

这说明经验分布函数是理论分布函数很好的近似, 这也是我们之所以能用样本来推断总体的依据.

6.1.3　统计量

样本取自总体, 带有总体的信息, 是对总体进行统计推断的基础. 为了对总体的特征进行种种推断, 需要对样本进行数学上的加工处理, 使得样本所含的信息更加集中. 这个过程是通过构造合适的“统计量”来实现的.

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是取自总体 X 的样本, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个连续函数且不含任何未知参数, 则随机变量 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是一个**统计量**. 常用的统计量有

(1) **样本均值**

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\,;$$

(2) **样本方差**

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2;$$

样本标准差

$$S = \sqrt{S^2}\,;$$

(3) **样本 k 阶原点矩**

$$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\,;$$

(4) **样本 k 阶中心矩**

$$B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k.$$

注意到样本方差不等于样本 2 阶中心矩:

$$S^2 \neq B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

我们后面将看到样本方差是总体方差的无偏估计, 而 2 阶中心矩不是. 此外, 总体方差满足 $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$, 而样本方差满足

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - 2X_i^2\overline{X} + \overline{X}^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\overline{X}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) \\ &= \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2\right). \end{aligned} \tag{6.1}$$

(5) **顺序统计量**

$$\begin{aligned} X_1^* &= \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, \\ X_2^* &= \min\Big\{\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \setminus \{X_1^*\}\Big\}, \\ &\vdots \\ X_n^* &= \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}. \end{aligned}$$

显然, 顺序统计量满足 $X_1^* \leqslant X_2^* \leqslant \cdots \leqslant X_n^*$. 简言之, 顺序统计量的观测值是将样本的观测值按从小到大的顺序排列而得. 但注意的是, 每个第 i 位的顺序统计量 X_i^* 都是一个新的随机变量, 不是原样本 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 中的某一个. 例如, $L = \min\{X_1, X_2\}$ 并不意味着 L 是 X_1 或 X_2, 参考例 3.23.

关键顺序统计量有

(7) **样本中位数**

$$\widetilde{X} = \begin{cases} X_{m+1}^*, & n = 2m+1, \\ \dfrac{1}{2}\left(X_m^* + X_{m+1}^*\right), & n = 2m, \end{cases}$$

(8) **样本极差**

$$R = X_n^* - X_1^*.$$

样本均值与样本中位数都能体现样本的平均水平, 区别在于样本均值包括了所有样本信息, 受极端值的影响大, 不如中位数稳定. 因此当调查的数据分布比较规则, 不存在什么极端值, 或数据对中心的偏离不是很大的情况下, 平均数是很好的描述统计量; 如果存在极端值或分布偏离比较大时, 还必须使用中位数来补充描述.

例 6.6. 设有一容量 $n = 8$ 的样本观察值为 (8, 6, 7, 5, 7, 8, 9, 6). 求样本均值及样本方差的观察值.

解. 样本均值 $\overline{X}$ 的观察值为

$$\overline{x} = \frac{1}{8}(8+6+7+5+7+8+9+6) = 7.$$

样本方差 S^2 的观察值为

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{8-1}\left[1^2 + (-1)^2 + 0 + (-2)^2 + 0 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2\right] = \frac{12}{7}. \qquad \square$$

例 6.7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

证明. 由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布于 $N(\mu, \sigma^2)$, 由 (3.1),

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \qquad \square$$

6.2　抽样分布

统计量都是随机变量, 它们的分布统称为**抽样分布** (Sampling Distribution). 在使用统计量进行统计推断时常需知道它的分布. 当总体的分布函数已知时, 抽样分布是确定的, 然而要求出统计量的精确分布是困难的. 本节介绍来自正态总体的三个著名统计量的分布: χ^2 分布 (卡方分布), t 分布和 F 分布. 它们不仅有明确的背景, 而且其概率密度函数有显示表达式, 被称为统计中的“三大抽样分布”.

6.2.1　χ^2 分布

定义 6.8. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 $N(0,1)$ 的样本, 则称统计量

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

服从自由度为 n 的 **χ^2 分布 (卡方分布)**, 记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$.

χ^2 分布由德国数学家赫尔默特 (Friedhelm Helmert) 于 1875 年在研究正态样本的方差分布时首次得到, 但这一成果当时未引起广泛关注. 后由英国著名统计学家皮尔逊 (Karl Pearson) 于 1900 年研究拟合度检验时提出并正式命名.

χ^2 分布的概率密度函数为

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n/2-1}e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

其中, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$, 其图像见下图 6.2.

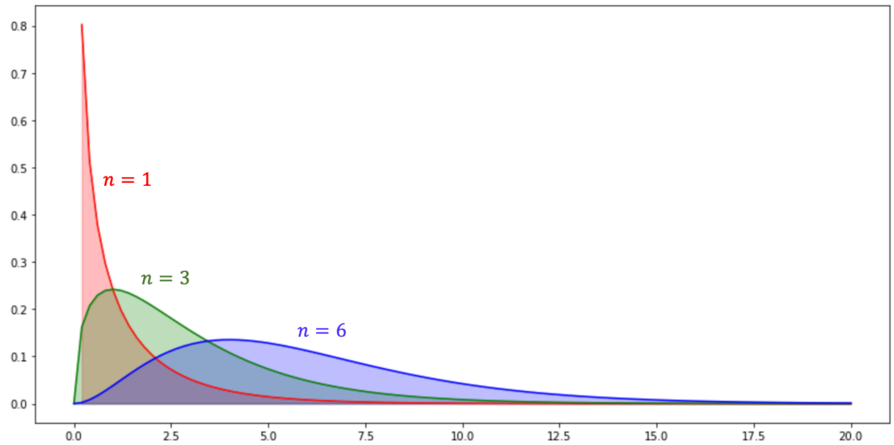

图 6.2: χ^2 分布的概率密度函数曲线

χ^2 分布的性质

命题 6.9 (可加性). 设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 且相互独立, 则 $\chi_1^2+\chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$.

证明. 由条件, 有表示 $\chi_1^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n_1}^2, \chi_2^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_{n_2}^2$, 且其中的随机变量 X_i, Y_j 独立同分布于 $N(0,1)$. 于是,

$$\chi_1^2+\chi_2^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{n_1}^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_{n_2}^2 \sim \chi^2(n_1+n_2). \qquad \square$$

命题 6.10. $\chi^2(n)$ 分布的期望和方差分别为

$$\mathbb{E}(\chi^2) = n, \quad \operatorname{Var}(\chi^2) = 2n.$$

证明. 由定义, 设 $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$, 其中的随机变量 X_i 独立同分布于 $N(0,1)$. 于是,

$$\mathbb{E}(\chi^2) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) = n,$$

由于由分布积分可得 $\mathbb{E}(X_i^4) = 3$, 故

$$\operatorname{Var}(X_i^2) = \mathbb{E}(X_i^4) - \left[\mathbb{E}(X_i^2)\right]^2 = 3-1 = 2.$$

从而,

$$\operatorname{Var}(\chi^2) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i^2) = 2n. \qquad \square$$

上侧分位点

对于给定的值 $\alpha \in (0,1)$, 称满足条件

$$P\left(\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\right) = \alpha$$

的点 $\chi_\alpha^2(n)$ 为 $\chi^2(n)$ 分布的上侧 α 分位点, 如右图 6.3 所示.

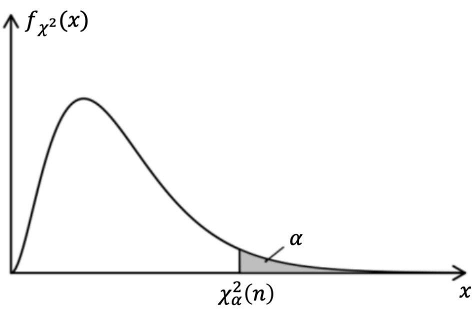

图 6.3: α 为阴影区域面积

教材中的附表 5 给出了 $\chi^2(n)$ 分布在不同 α, n 值时的上侧 α 分位点, 如 $\chi_{0.1}^2(25) = 34.382$. 在实际应用中, 也可通过软件求得 $\chi^2(n)$ 分布的上侧 α 分位点与概率值.

费歇 (Ronald A. Fisher) 曾证明, 当 n 充分大时, $\chi^2(n)$ 分布的上侧 α 分位点 $\chi_\alpha^2(n)$ 有近似:

$$\chi_\alpha^2(n) \approx \frac{1}{2}\left(u_\alpha + \sqrt{2n-1}\right)^2,$$

其中, u_α 为标准正态分布的上侧 α 分位点. 利用这个关系, 可求 $n > 40$ 时的 $\chi_\alpha^2(n)$ 值.

6.2.2　t 分布

定义 6.11. 设 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$, 且相互独立. 称统计量

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从自由度为 n 的 ***t* 分布**或**学生 (Student) 分布**, 记为 $T \sim t(n)$.

t 分布由英国统计学家由戈塞 (William S. Gosset) 于 1908 年提出. 当时他还在都柏林的健力士酿酒厂工作, 因此使用了学生 (Student) 这一笔名. 之后 t 检验以及相关理论经由费雪 (R. Fisher) 的工作发扬光大, 也正是他将此分布称为学生分布.

$t(n)$ 分布的概率密度函数为

$$f_T(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

其函数图像与标准正态分布类似, 为关于纵轴对称的钟形曲线. 实际上, $t(n)$ 分布随 n 的增大有**渐近正态性**:

$$\lim_{n\to\infty} f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

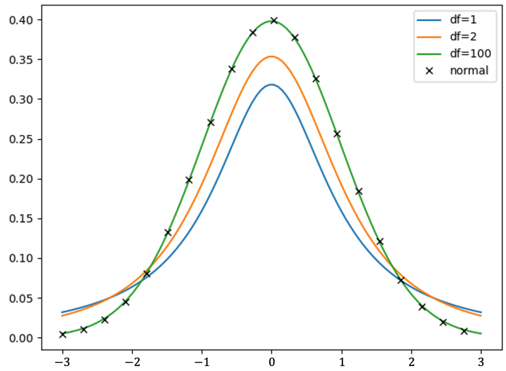

图 6.4: $t(n)$ 分布的概率密度曲线

例如, 图 6.4 给出了 $n = 1, 2, 100$ 时 $t(n)$ 分布的概率密度曲线: 当 $n = 100$ 时, 其密度曲线与标准正态分布的概率密度曲线 (十字虚线) 几乎重合; 而 n 较小时, t 分布的尾部比标准正态分布的尾部有更大的概率.

上侧分位点

对于给定的值 $\alpha \in (0,1)$, 称满足条件

$$P(T > t_\alpha(n)) = \alpha$$

的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上侧 α 分位点, 如图 6.5 所示. 由 t 分布关于纵轴的对称性, 有

$$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n).$$

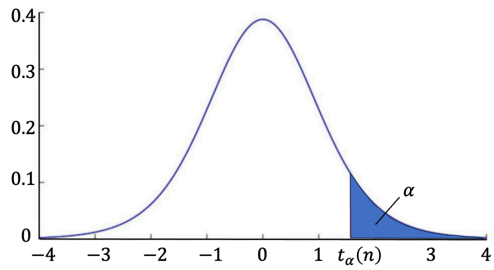

图 6.5

教材中的附表 4 给出了 $t(n)$ 分布在取不同的 α, n 值时的上侧 α 分位点, 但只给到 $n = 45$. 当 $n > 45$ 时, 可由标准正态分布近似.

6.2.3 F 分布

定义 6.12. 设 $X \sim \chi^2(n_1)$, $Y \sim \chi^2(n_2)$, 且相互独立. 称统计量

$$F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$$

服从自由度为 (n_1, n_2) 的 **F 分布**, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$.

F 分布由英国统计学家费雪 (Ronald A. Fisher) 于 1924 年提出. $F(n_1, n_2)$ 分布的概率密度函数为

$$f_F(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma[(n_1+n_2)/2](n_1/n_2)^{n_1/2}x^{n_1/2-1}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)[1+(n_1x/n_2)]^{(n_1+n_2)/2}}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

图像如下图 6.6 所示.

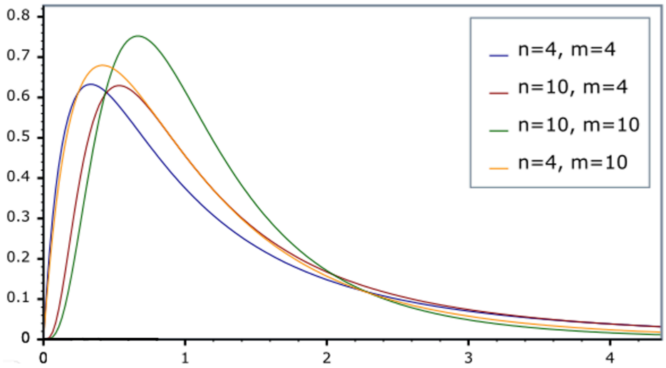

图 6.6: $F(n, m)$ 分布的概率密度曲线

对 F 分布可以像 χ^2 分布那样定义上侧 α 分位点 $F_\alpha(n_1, n_2)$, 这里不再赘述. 教材中的附表 6 给出了 $F(n_1, n_2)$ 分布的上侧 α 分位点 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 的值.

由定义可见, 若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则

$$\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1).$$

因此, 上侧分位点满足

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}.$$

例如, 查表可得 $F_{0.025}(10, 15) = 3.06$, 故

$$F_{0.975}(15, 10) = 3.06^{-1} \approx 0.33.$$

6.3　正态总体的样本均值与样本方差的分布

定理 6.13. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则

(i) 样本期望

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right);$$

(ii) 样本方差

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1);$$

(iii) 样本均值 $\overline{X}$ 与样本方差 S^2 相互独立.

推论 6.14. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则样本方差 S^2 的期望和方差为

$$\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2, \quad \mathrm{Var}\,(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

证明. 由于

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1),$$

由命题 6.10, 有

$$\mathbb{E}\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2\right) = n-1, \quad \mathrm{Var}\left(\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2\right) = 2(n-1).$$

由期望和方差的性质得此推论. □

推论 6.15. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则

$$T := \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1).$$

证明. 由定理 6.13,

$$Y \triangleq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \quad \chi^2 := \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1),$$

且 Y 与 χ^2 独立. 由 t 分布的定义有

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2/\sigma^2}{n-1}}} = \frac{Y}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n-1}}} \sim t(n-1).$$ □

由定理 6.13 (i) 知,

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

推论 6.15 表明, 若总体标准差 σ 未知, 用样本标准差 S 代替, 则分布由标准正态分布变为 t 分布.

推论 6.16. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 是总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 是总体 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, 两样本相互独立. 记两样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2, 则

(i)

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1);$$

(ii)

$$\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{X_i-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \Bigg/ \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\frac{Y_i-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \sim F(n_1, n_2).$$

证明. (i) 由定理 6.13,

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1), \qquad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1).$$

因两样本独立, 故 S_1^2, S_2^2 独立, 且

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(n_2-1)} \sim F\,(n_1-1\,, n_2-1).$$

(ii) 由定义可直接证得. □

例 6.17 (P97)**.** 分别从方差为 20 和 35 的两个独立的正态总体中抽取容量为 8 和 10 的两个样本, 试估计第一个样本方差 S_1^2 不小于第二个样本方差 S_2^2 两倍的概率.

证明. 由推论 6.16 (i),

$$\frac{S_1^2/20}{S_2^2/35} \sim F(7, 9).$$

因此,

$$P\left(S_1^2 \geqslant 2S_2^2\right) = P\left(\frac{S_1^2/20}{S_2^2/35} \geqslant 2 \times \frac{35}{20}\right) = P(F \geqslant 3.5).$$

查表知, $F_{0.05}(7,9) = 3.29$, $F_{0.025}(7,9) = 4.20$, 故

$$0.025 \leqslant P\left(S_1^2 \geqslant 2S_2^2\right) \leqslant 0.005.$$

□