Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по дисциплине «Математическая статистика»

Тема Интервальные оценки

Студент Золотухин А.В.

Группа ИУ7-64Б

Преподаватель Андреева Т.В.

Москва — 2023 г.

1 | Задание

1.1 Цель работы

Цель работы: построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

1.2 Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ
   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;
2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:
   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;
   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 | Теоретическая часть

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X — случайная величина, закон распределения которой зависит от вектора $\vec{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_r)$ неизвестных параметров. Будем считать, что $r = 1$, т. е. $\vec{\theta} = (\theta_1) = (\theta)$.

Опр. Интервальной оценкой параметра θ уровня γ (γ-интервальной оценкой) называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X})\} = \gamma, \gamma \in (0; 1). \tag{2.1}$$

Опр. γ-доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня γ) для параметра θ называют реализацию (выборочное значение) интервальной оценкой уровня γ для этого параметра, т.е. интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$ с детерминированными границами.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Пусть $N(\mu, \sigma^2)$ — общий вид закона распределения генеральной совокупности X. μ, σ^2 — неизвестны.

Границы γ-доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины:

$$\underline{\mu}(\vec{x}) = \overline{x} - \frac{S(\vec{x}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}, \tag{2.2}$$

$$\overline{\mu}(\vec{x}) = \overline{x} + \frac{S(\vec{x}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}, \tag{2.3}$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $S(\vec{x}) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$; $t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ — квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы; n — объем выборки.

Границы γ-доверительного интервала для дисперсии нормальной случайной величины:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{x}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{x})}{h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}, \tag{2.4}$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{x}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{x})}{h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}}, \tag{2.5}$$

где n — объем выборки; $S^2(\vec{x}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$; $h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$, $h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}$ — квантили уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ и $\frac{1-\gamma}{2}$ соответственно распределения $\chi^2(n-1)$.

3 | Практическая часть

```
gamma = 0.9;
n = length(X);

% 1
mu = expectation(X);
s2 = variance(X);
fprintf('mu = %.2f\n', mu);
fprintf('S^2 = %.2f\n\n', s2);

mu_low = mu + (sqrt(s2) * tinv((1 - gamma) / 2, n - 1)) / sqrt(n);
mu_high = mu + (sqrt(s2) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1)) / sqrt(n);
fprintf('mu_low = %.2f\n', mu_low);
fprintf('mu_high = %.2f\n\n', mu_high);

sigma_low  = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
sigma_high = ((n - 1) * s2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
fprintf('sigma_low = %.2f\n', sigma_low);
fprintf('sigma_high = %.2f\n\n', sigma_high);

MX = mean(X);
DX = var(X);
fprintf("MX = %.2f\n", MX);
fprintf("DX = %.2f\n", DX);

% 3
n_array = zeros([1 n]);
mu_array = zeros([1 n]);
mu_low_array = zeros([1 n]);
mu_high_array = zeros([1 n]);
s2_array = zeros([1 n]);
s2_low_array = zeros([1 n]);
s2_high_array = zeros([1 n]);

for i = 1:n
  n_array(i) = i;

mu_i = find_mu(X(1:i));
mu_array(i) = mu_i;
s_sqr_i = find_s_sqr(X(1:i));
s2_array(i) = s_sqr_i;
```

```

mu_low_array(i) = find_mu_low(mu_i, s_sqr_i, i, gamma);
mu_high_array(i) = find_mu_high(mu_i, s_sqr_i, i, gamma);

s2_low_array(i) = find_sigma_sqr_low(s_sqr_i, i, gamma);
s2_high_array(i) = find_sigma_sqr_high(s_sqr_i, i, gamma);
end

mu_const = mu * ones(n);
s2_const = s2 * ones(n);

% a
plot(n_array, mu_const, n_array, mu_array, ...
n_array, mu_low_array, n_array, mu_high_array);
xlabel('n');
ylabel('y');
xlim([10 n]);
legend('$\hat \mu(\vec x_N)$', '$\hat \mu(\vec x_n)$', ...
'$\underline{\mu}(\vec x_n)$', '$\overline{\mu}(\vec x_n)$', ...
'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
figure;

% b
plot(n_array, s2_const, n_array, s2_array, ...
n_array, s2_low_array, n_array, s2_high_array);
xlabel('n');
ylabel('z');
xlim([10 n]);
legend('$\hat S^2(\vec x_N)$', '$\hat S^2(\vec x_n)$', ...
'$\underline{\sigma}^2(\vec x_n)$', '$\overline{\sigma}^2(\vec x_n)$', ...
'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);

% Help functions
function [mu] = find_mu(X)
  mu = mean(X);
end

function [s_sqr] = find_s_sqr(X)
  s_sqr = var(X);
end

function [mu_low] = find_mu_low(mu, s_sqr, n, gamma)
  mu_low = mu - sqrt(s_sqr) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

function [mu_high] = find_mu_high(mu, s_sqr, n, gamma)
  mu_high = mu + sqrt(s_sqr) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

function [sigma_sqr_low] = find_sigma_sqr_low(s_sqr, n, gamma)
```

```
  sigma_sqr_low = (n - 1) * s_sqr / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

function [sigma_sqr_high] = find_sigma_sqr_high(s_sqr, n, gamma)
  sigma_sqr_high = (n - 1) * s_sqr / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end

function mu = expectation(x)
  mu = sum(x) / length(x);
end

function s2 = variance(x)
  n = length(x);
  mu = expectation(x);
  s2 = sum((x - mu).^2) / (n - 1);
end
```

4 | Экспериментальная часть

4.1 Результаты расчетов

Выборка: $\vec{x}$=[3.89,2.60,2.56,2.33,4.35,3.97,4.16,4.10,4.82,3.17,4.15,4.05,4.45,3.76,4.83,4.27,2.03,3.13, 3.69,5.44,2.61,5.20,4.03,5.26,4.42,3.67,4.68,5.22,4.11,3.35,3.83,5.34,4.69,5.12,4.33,4.41,4.82,4.65,3.12,4.71, 2.36,3.10,3.52,1.74,3.46,2.89,5.42,4.12,5.36,4.26,3.49,5.85,5.24,4.23,4.57,3.54,4.38,4.31,2.28,4.17,3.66,5.25, 3.11,4.48,3.80,4.05,3.48,1.12,2.16,4.68,4.21,3.22,4.29,4.70,4.37,4.60,4.15,4.06,3.81,3.58,4.34,3.87,4.53,6.02, 3.34,3.34,2.87,4.64,3.03,3.08,3.46,4.04,4.77,3.59,3.49,6.53,4.16,2.95,4.85,5.53,3.59,4.24,4.45,4.42,4.10,3.77, 4.56,3.89,4.13,4.00,3.95,2.73,4.76,3.19,3.66,4.87,4.18,5.30,4.97,4.56];

Результаты работы программы для выборки (Вариант 4) представлены на рисунках 4.1, 4.2.

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = 4.03$$
$$S^2(\vec{x}_n) = 0.83$$
$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = 3.90$$
$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = 4.17$$
$$\underline{S^2}(\vec{x}_n) = 0.68$$
$$\overline{S^2}(\vec{x}_n) = 1.04$$

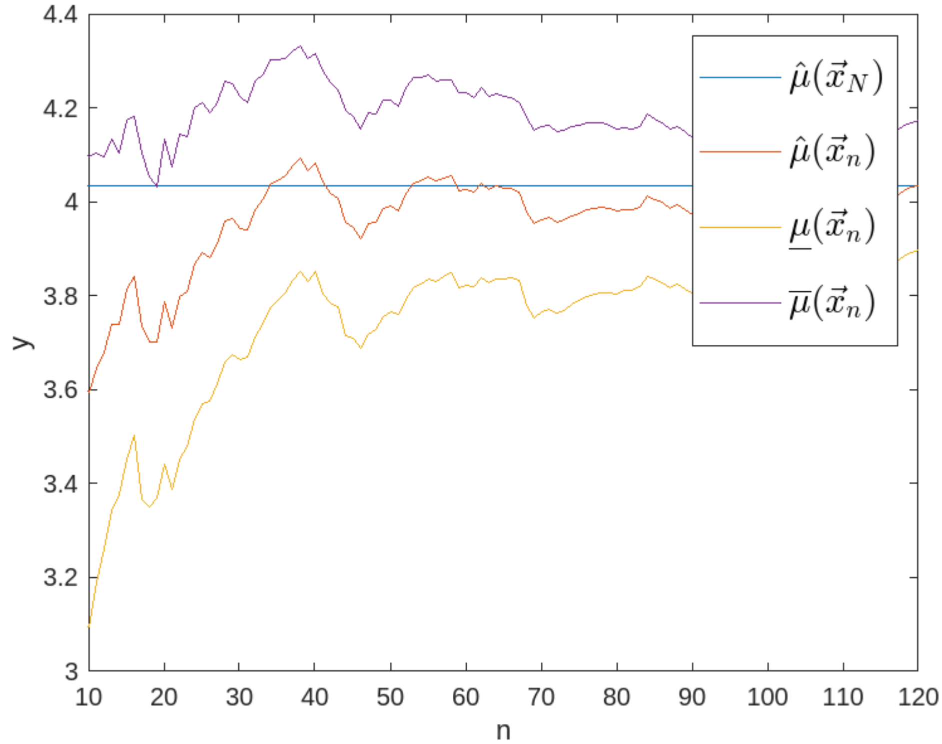

Рис. 4.1: Прямая $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 10 до N

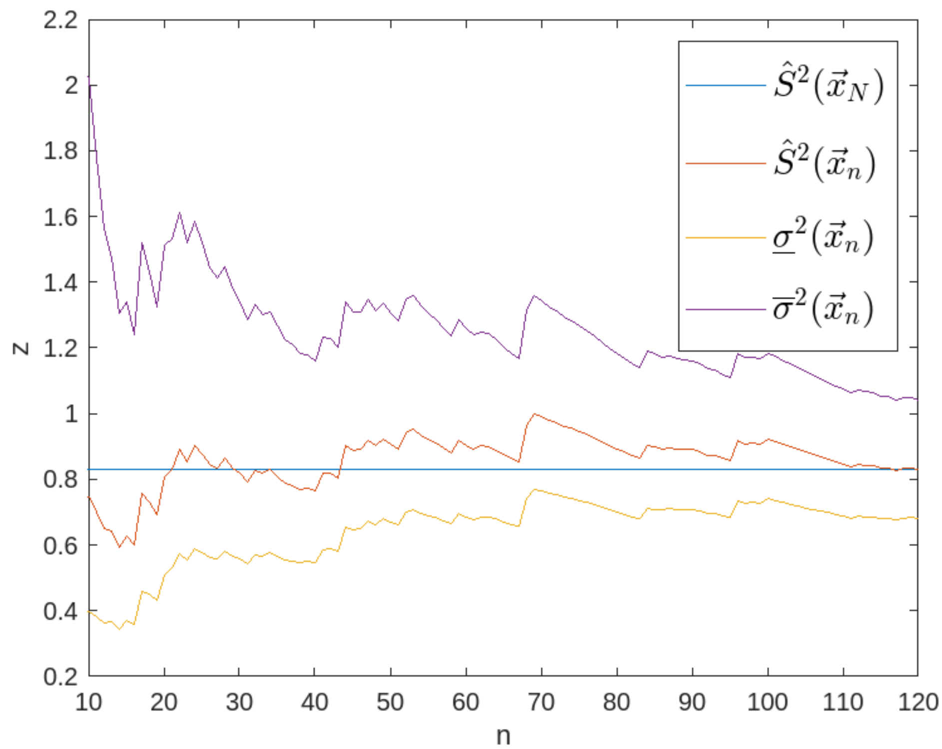

Рис. 4.2: Прямая $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \hat{S}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 10 до N