经典场论-电磁场

傅林

中南大学物理学院

2025 年秋

© 2025 傅林. 保留所有权利.

目录

1 相对论基本理论

1.1 Minkowski 时空

1.1.1 时空与事件

物理学研究物理客体的演化规律，为了方便研究，往往会引入一些模型，模型便是理想化的客体. 在物理学中,"事件"也是一个模型化的概念，其定义为：空间的一点结合时间的一瞬. 对于每个事件，我们可以用如下的坐标进行表示：

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{1.1}$$

从这个表示中，我们要学会相对论理论中的三个习惯：(1) 表达式中会开始出现上标，此处的上标并不表示幂次；(2) 对于一个四维矢量 A^μ，我们将其第一个分量记为 A^0 而不是 A^1；(3) 四维量的分量指标使用希腊字母来表示，而不是我们习惯的拉丁字母 i, j.

有了事件的定义，全部事件的集合就构成了时空. 然而对于时空，更严谨的定义应该是：一个配有度规的 4 维流形. 我并不打算去介绍什么是流形，什么是度规，没有必要在这些数学概念上花费太多不必要的时间. 我们只需要在后面的学习中学会具体使用即可. 对于狭义相对论，其背景时空是 Minkowski 时空，时空度规是 Minkowski 度规：

$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(+1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

我们将对角线元素之和称为度规的号差. 本讲义我们采用号差为-2 的闵氏度规，也有书上采用号差为 +2 的闵氏度规，即 $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1, +1, +1, +1)$，广义相对论教材一般都采用这种习惯. 但二者仅仅是符号不同，并无物理意义上的差异.

狭义相对论最基本的物理规律，是两个时间的时空间隔具有不变性. 设两个事件间的"位移"为:

$$\Delta x^\mu = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \tag{1.3}$$

定义两个事件间的时空间隔为:

$$\Delta s^2 \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \tag{1.4}$$

它在不同的惯性参考系间保持不变. 可以初步将闵氏时空的时空间隔与欧氏空间中两点间的距离联系起来，参考系的变换并不会改变两点间的距离. 正是因为时空间隔的不变性，才带来了狭义相对论中种种奇特的物理规律. 我们在之后的学习中将看到这一点.

1.1.2 Lorentz 变换

接下来我们将寻找当参考系变换时，事件时空坐标的变换规律. 指导思想只有一个：坐标变换不能改变两事件的时空间隔.

设有两个以某个速度相对运动的惯性系 K 和 K'，事件在两个参考系中的时空坐标分别为 $(t, \boldsymbol{x})$ 和 $(t', \boldsymbol{x}')$. 从最简单的情形出发，假设现在我们仅仅改变两个空间坐标，如:

$$(x, y) \to (x', y'),\ t = t',\ z = z' \tag{1.5}$$

要使得时空间隔不变，显然应该有:

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \tag{1.6}$$

可以利用三角函数 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 的性质. 令:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \tag{1.7}$$

以及

$$x' = r\cos(\theta+\phi),\ y' = r\sin(\theta+\phi) \tag{1.8}$$

利用三角恒等式把 x', y' 写开，就得到:

$$x' = r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi = x\cos\phi - y\sin\phi \tag{1.9}$$

$$y' = r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi = x\sin\phi + y\cos\phi \tag{1.10}$$

这便是我们熟悉的空间旋转变换，该变换无法描述两个以给定速度相对运动的惯性系间的坐标变换.

下面我们考虑更复杂的情形，同时改变时间和空间. 考虑:

$$(t, x) \to (t', x'),\ y = y',\ z = z' \tag{1.11}$$

若不改变时空间隔，显然应有:

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 = s^2 \tag{1.12}$$

可以考虑双曲函数的性质: $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$，令

$$ct = s\cosh\theta,\ x = s\sinh\theta \tag{1.13}$$

以及

$$ct' = s\cosh\theta',\ x' = s\sinh\theta' \tag{1.14}$$

令 $\theta = \theta' + \phi$，可得:

$$\begin{aligned} ct &= s\cosh(\theta'+\phi) = s\cosh\theta'\cosh\phi + s\sinh\theta'\sinh\phi \\ &= ct'\cosh\phi + x'\sinh\phi \end{aligned} \tag{1.15}$$

和

$$\begin{aligned} x &= s\sinh(\theta'+\phi) = s\sinh\theta'\cosh\phi + s\cosh\theta'\sinh\phi \\ &= x'\cosh\phi + ct'\sinh\phi \end{aligned} \tag{1.16}$$

式 (1.15) 和 (1.16) 所示的变换称为 x 方向上的 boost(推促).

现在取一个特殊点，也就是 K' 系的原点: $x' = y' = z' = 0$. 根据上面的表达式，其对应在 K 系中的坐标为:

$$x = ct'\sinh\phi,\ ct = ct'\cosh\phi,\ y = 0,\ z = 0 \tag{1.17}$$

因此:

$$\frac{x}{ct} = \frac{v}{c} = \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} \tag{1.18}$$

其中 v 是 K' 系原点在 K 系中沿 x 方向的运动速度. 结合双曲函数的关系，我们可以求出:

$$\cosh\phi = \gamma,\ \sinh\phi = \beta\gamma \tag{1.19}$$

其中:

$$\beta = \frac{v}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.20}$$

将式 (1.19) 代入 boost 表达式，便得到:

$$\begin{aligned} ct &= \gamma ct' + \beta\gamma x' \\ x &= \gamma x' + \beta\gamma ct' \\ y &= y',\ z = z' \end{aligned} \tag{1.21}$$

将这一变换关系用矩阵表示为:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

而对于逆变换，可以利用 K 相对于 K' 的速度为 $-v$，则 $\beta \to -\beta,\ \gamma \to \gamma$，得:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

式 (1.23) 便是我们之后经常使用的 Lorentz 变换表达式，请读者牢记.

有了 Lorentz 坐标变换，相应的速度变换也可以很简单地得出. 质点在两个参考系中的速度分别为:

$$\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t},\ \boldsymbol{u}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}'}{\mathrm{d}t'} \tag{1.24}$$

利用

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t' &= \gamma\,\mathrm{d}t - \frac{\beta\gamma}{c}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x' &= -\beta\gamma c\,\mathrm{d}t + \gamma\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y' &= \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{1.25}$$

得到:

$$u'_x = \frac{u_x - \beta c}{1-\beta u_x/c},\ u'_y = \frac{u_y/\gamma}{1-\beta u_x/c},\ u'_z = \frac{u_z/\gamma}{1-\beta u_x/c} \tag{1.26}$$

相应的逆变换为:

$$u_x = \frac{u'_x + \beta c}{1+\beta u'_x/c},\ u_y = \frac{u'_y/\gamma}{1+\beta u'_x/c},\ u_z = \frac{u'_z/\gamma}{1+\beta u'_x/c} \tag{1.27}$$

1.1.3 Lorentz 协变性

在 Minkowski 时空中研究物理，物理方程都需要写成具有协变性的四维形式. 所谓协变性是指: 在参考系变换前后，物理规律具有相同的形式，具体表现在描述物理规律的方程具有相同

的形式. 协变性是一个很自然的要求，假如某个物理规律不具有协变性，仅仅换个参考系这个规律的形式就变了，这显然是非常不方便的.

下面我们介绍几种 Lorentz 协变量. 首先是四维标量，其定义为：在 Lorentz 变换下不发生改变，即 $\phi(x^\mu)=\phi(x^{\bar{\mu}})$. 其中

$$x^{\bar{\mu}}=\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu}x^{\nu} \tag{1.28}$$

$\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu}$ 即为式 (1.23) 中的 Lorentz 变换矩阵. 我们已经学习的时空间隔 $\mathrm{d}s^2$ 就是一个重要的四维标量.

下面是四维矢量. 四维矢量具有四个分量：$A^\mu=(A^0,A^1,A^2,A^3)$，并且其分量在不同惯性系间的变换规律与时空坐标的变换规律相同：

$$A^{\bar{\mu}}=\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\nu}A^{\nu} \tag{1.29}$$

我们将位于右上角的指标称为逆变指标，位于右下角的指标称为协变指标. 它们可以通过度规张量互相升降：

$$A_\mu=\eta_{\mu\nu}A^\nu,\ A^\mu=\eta^{\mu\nu}A_\nu \tag{1.30}$$

其中 $\eta^{\mu\nu}$ 称为逆度规，它的分量与 $\eta_{\mu\nu}$ 相同. 这样一来，得到对应的协变形式为：

$$A_\mu=(A^0,-A^1,-A^2,-A^3) \tag{1.31}$$

有些时候，我们也将打下标的矢量称为对偶矢量.

最后简单介绍一下张量. 一个 (k,l) 型张量是一个多重线性映射：

$$T:\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{k\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{l\text{个}}\mapsto\mathbb{R} \tag{1.32}$$

输入 k 个对偶矢量、l 个矢量，返回来一个标量. 度规张量 $\eta_{\mu\nu}$ 就是一个 $(0,2)$ 型张量，如果我们输入两个矢量 A^μ 和 B^ν，它将返回这两个矢量的标量积：

$$\eta_{\mu\nu}A^\mu B^\nu=A^0B^0-A^1B^1-A^2B^2-A^3B^3 \tag{1.33}$$

我们在本讲义中接触到的张量也大多都是 $(0,2)$ 型张量，其分量的变换为：

$$T_{\bar{\mu}\bar{\nu}}=\Lambda^{\alpha}{}_{\bar{\mu}}\Lambda^{\beta}{}_{\bar{\nu}}T_{\alpha\beta} \tag{1.34}$$

总之在作指标缩并时，确保左右两边的自由指标能对得上即可.

在四维时空中，我们也可以对这些协变量作微分操作. 对于四维标量 ϕ，可定义其四维梯度：

$$\partial_\mu\phi\equiv\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t},\boldsymbol{\nabla}\phi\right) \tag{1.35}$$

利用度规张量，也可以写出逆变形式的四维梯度：

$$\partial^\mu\phi=\eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi=\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t},-\boldsymbol{\nabla}\phi\right) \tag{1.36}$$

对于四维矢量 $A^\mu=(A^0,\boldsymbol{A})$，可定义其四维散度：

$$\partial_\mu A^\mu\equiv\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}=\frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.37}$$

对于四维标量的梯度 $\partial^\mu\phi$，也可计算其四维散度：

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi=\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi\equiv\Box\phi \tag{1.38}$$

其中 $\Box\equiv\partial_\mu\partial^\mu$ 称为 d'Alembert 算符. 这一算符可以视为四维时空中的 Laplace 算符，我们在后续将经常遇见这个算符.

1.2 运动学基本现象

1.2.1 光锥与因果律

考虑时空中的两个事件，第一事件即为时空原点 $(0,0,0,0)$，第二事件为 (ct,x,y,z)，这两个事件间的时空间隔为:

$$\Delta s^2 = c^2t^2 - (x^2+y^2+z^2) = c^2t^2 - r^2 \tag{1.39}$$

其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为两事件的空间距离. 这两个事件的时空关系可以作如下分类：若 $\Delta s^2 = 0$，称为类光间隔；若 $\Delta s^2 > 0$，称为类时间隔；若 $\Delta s^2 < 0$，称为类空间隔.

我们可以绘制如图1.1所示的光锥. 对于类光间隔，有 $r = ct$，第二个事件应位于以第一个事件为顶点的光锥面上，此时两事件可以用光波来联系. 对于类时间隔，$r < ct$，二者间可通过低于光速的作用来联系，此时第二个事件位于光锥内，上半光锥称为绝对未来，下半光锥称为绝对过去. 而对于类空间隔，$r > ct$，此时两事件的空间距离超出光波在时间 t 内所能传播的距离，因此二者间不可能有任何联系，第二事件位于光锥之外. 上面对于时空关系的划分是绝对的，不会因为参考系的改变而改变.

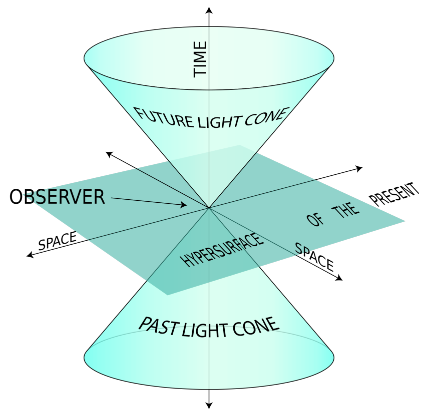

图 1.1: 光锥

基于上面的分析，我们可以开始讨论事物间的因果关系. 因果关系的实质，是由于两个事件间存在某种信号的联系. 例如，运动员听到枪声后起跑，开枪是运动员起跑的原因，二者间是通过声波的传递而联系起来的. 又比如开枪打鸟，鸟落地，开枪是鸟落地的原因，二者间通过子弹联系起来. 这种信号的传播速度是不可能超过光速的，因此两事件间存在因果关系的必要条件是第二事件位于以第一事件为顶点的光锥内. 这样一来，因果关系是绝对的，二者的先后顺序在任何参考系中都相同.

1.2.2 同时性的相对性

谈完了类时间隔，我们来谈一谈类空间隔. 由于具有类空间隔的两事件不可能具备因果关系，因此它们发生的先后顺序也就失去了绝对意义. 也就是说在变换参考系时，两个事件的次序完全可以颠倒.

设 K 系中有两事件 (ct_1, x_1) 和 (ct_1, x_2)，并且假设事件 1 先发生，事件 2 后发生，即 $t_1 < t_2$. 由类空间隔的定义，可得:

$$t_2 - t_1 < \frac{1}{c}|x_2 - x_1| \tag{1.40}$$

将这两事件变换到另一参考系 K'，由 Lorentz 变换可得：

$$t_2' - t_1' = \gamma\Big[(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)\Big] \tag{1.41}$$

由式 (1.40)，我们必然可以找到一个 v，使得

$$t_2 - t_1 < \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) \tag{1.42}$$

这样一来在 K' 中就有 $t_2' < t_1'$，也就是事件 2 先发生，二者的次序发生颠倒. 特别地，如果两参考系间的速度 v 满足

$$v = c^2 \frac{t_2 - t_1}{|x_2 - x_1|} \tag{1.43}$$

则 $t_2' = t_1'$，两事件变为同时发生.

在不同地点同时发生的两事件不可能具有因果关系，因此同时性实际上是一个相对的概念. 在某个参考系同时发生，变换到另一个参考系往往就不再同时.

1.2.3 时间延缓

在物理学中，“时钟”是指任何能够通过其自身内部重复或相继发生的事件来定义时间间隔的物理系统. 设该时钟内部相继发生两个事件，K' 系相对于时钟静止. 在 K' 系中观察这两个事件，它们发生在同一地点，因此该两事件的时空间隔：

$$\Delta s^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 = c^2\Delta\tau^2 \tag{1.44}$$

我们将 $\Delta\tau$ 称为固有时，即静止参考系中给出的时间.

现在到另外一个相对于时钟运动的参考系 K 中去观察这两个事件，两个事件将不再发生在同一地点，时空坐标分别设为 (ct_1, x_1) 和 (ct_2, x_2). 利用时空间隔的不变性，可得：

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta\tau^2 \tag{1.45}$$

由于 $|\Delta x|/\Delta t = v$ 是该时钟相对于 K 的运动速度，可得到：

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\Delta\tau > \Delta\tau \tag{1.46}$$

也就是说，对于同样的物理过程，运动的钟给出的时间更长，即运动的时钟变慢了.

著名的 Hafele–Keating 实验是对时间延缓效应的直接实验验证.1971 年，Hafele 和 Keating 将四台铯原子钟分别放上向东飞行和向西飞行的商用飞机绕地球飞行一周，同时在地面的美国海军天文台保留相同型号的原子钟作为参考. 由于地球存在自西向东的自转，因此向东飞行的飞机相对地心的速度更小，时间更快；而向西飞行的飞机相对地心的速度更大，时间更慢. 最终实验得到的结果如下表所示. 实验数据与相对论的预测高度吻合，因此直接从实验上证实了时间延缓的存在.

表 1: Hafele–Keating 实验结果与理论预测对比

飞行方向	理论预测 / ns	实测结果 / ns
向东绕地球飞行	-40 ± 23	-59 ± 10
向西绕地球飞行	$+275 \pm 21$	$+273 \pm 7$

此外，全球定位卫星也必须考虑相对论效应导致的时间修正. 此时狭义相对论会导致星载原子钟比地面原子钟慢 7.2 μs，而广义相对论会导致星载原子钟比地面原子钟快 45.8 μs. 如果不加以修正，导致的定位误差约为 10^4 m，这将使得我们的定位软件完全无法正常使用.

1.2.4 长度收缩

狭义相对论还有一个很著名的效应称为长度收缩，也就是运动物体的长度会缩短. 如图1.2所示，设参考系 K' 相对于尺子静止，尺子的两端在其中的坐标分别为 x'_1 和 x'_2.K' 系相对于 K 系以速度 v 运动，设某一时刻尺子后端经过 K 系中的 P_1 点，前端经过 P_2 点，这两点的坐标分别为 x_1 和 x_2，并且这两件事必须同时发生，即 $t_1 = t_2$. 那么在 K 系中测得的尺子长度为 $l = x_2 - x_1$，而在 K' 系中测得的尺子长度为 $l_0 = x'_2 - x'_1$.

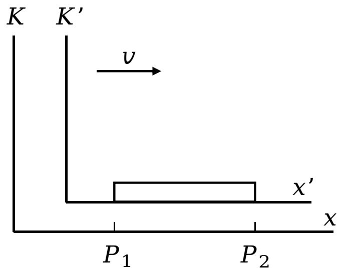

图 1.2: 长度收缩

由 Lorentz 变换，我们有:

$$x'_1 = -\beta\gamma ct_1 + \gamma x_1,\ x'_2 = -\beta\gamma ct_2 + \gamma x_2 \tag{1.47}$$

两式相减，得到:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \tag{1.48}$$

即:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.49}$$

也就是说 $l < l_0$，即运动物体的长度会缩短.

2 自由粒子

2.1 粒子的常见四维量

本节的使命，是将牛顿力学中所熟知的物理量和物理规律拓展至相对论，使之具有协变性. 对于一个粒子或质点而言，有一些基本的四维量. 我们已经知道时空间隔 $\mathrm{d}s^2$ 与固有时 $\mathrm{d}\tau$ 为四维标量，粒子的时空坐标 $\mathrm{d}x^\mu = (c\,\mathrm{d}t\,, \mathrm{d}\boldsymbol{x})$ 为四维矢量. 基于这些已知量，我们可以构造新的四维量.

粒子的 4-速度定义为:

$$u^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \tag{2.1}$$

其中 τ 为粒子静止参考系中的固有时，而在 K 系中设粒子的运动速度为 $\boldsymbol{v}$. 根据 $\mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}\tau$，可求得 4-速度的各分量为:

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau} = \gamma c,\ u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \gamma v_i \tag{2.2}$$

上式可简写为 $u^\alpha = (\gamma c, \gamma\boldsymbol{v})$. 这样一来，我们可得到 4-速度与自身的标量积为:

$$u^\alpha u_\alpha = \eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 \tag{2.3}$$

也就是说 4-速度的模平方是一个四维标量. 将 4-速度乘上粒子质量 m，我们还可以构造粒子的 4-动量:

$$p^\alpha \equiv m u^\alpha = (\gamma mc, \gamma m\boldsymbol{v}) \tag{2.4}$$

我们会在后面对 4-动量作出进一步的解释.

与 4-速度类似，我们还可定义粒子的 4-加速度:

$$a^\alpha \equiv \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \tag{2.5}$$

关于 4-加速度，有一个非常重要的性质：它与 4-速度的标量积为 0，也就是它和 4-速度是始终“正交”的:

$$a^\alpha u_\alpha = \frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau}u_\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u^\alpha}{\mathrm{d}\tau}u_\alpha + \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}\tau}u^\alpha\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(u^\alpha u_\alpha)}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{2.6}$$

有了 4-加速度，我们还可以构造四维力：$F^\alpha = m a^\alpha$，此处不再赘述.

2.2 最小作用量原理

接下来我们将基于演绎法，去得到粒子及电磁场满足的演化方程. 演绎法的基本思路，是基于对称性和已有的物理规律，写出系统的作用量，然后利用最小作用量原理来得到系统的运动方程. 不同于传统学习路径的归纳法，这是一套看待问题的很新的视角. 我们将带领大家一步步走进经典场论的世界，感受对称性的美感.

设系统由 s 个广义坐标所刻画：$\{q^a\}, a = 1, 2, \cdots, s$，并且在给定时刻 t_1 和 t_2 系统的位形 $q^a(t_1)$ 和 $q^a(t_2)$ 确定. 系统的作用量 S 是按照下式定义的泛函:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(t, q^a, \dot{q}^a) \tag{2.7}$$

被积函数 $L(t, q^a, \dot{q}^a)$ 称为体系的拉格朗日量，简称拉氏量. 最小作用量原理是说：系统在 t_1 和 t_2 之间真实的演化轨迹必然使得作用量 S 取极值，也就是 $\delta S = 0$.

我们可以具体计算 S 的变分，来得到系统的运动方程. 下面的计算相信大家应该已经很熟悉了，我们简单地做一遍:

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,L(t,q^a,\dot{q}^a)\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial q^a}\delta q^a+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\delta\dot{q}^a\right)\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\frac{\partial L}{\partial q^a}\delta q^a+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^a)\right]\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\frac{\partial L}{\partial q^a}\delta q^a+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\delta q^a\right)-\delta q^a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)\right]\\ &= -\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^a}\right]\delta q^a=0\end{aligned}\tag{2.8}$$

所以作用量 S 取极值要求 $\{q^a\}$ 满足 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^a}=0,\ \ a=1,2,\cdots,s\tag{2.9}$$

最小作用量原理可视为整个物理学的“第一性原理”，种种复杂的物理过程，背后一定被某个作用量所描述，大自然偏爱让某些量取得极小值. 然而以上的作用量 $S=\int\mathrm{d}t\,L$ 并不是用四维量来表述的，因此其导出的方程 (2.9) 不一定满足相对论所要求的协变性. 我们接下来将着力解决这个难题.

2.3 自由粒子的相对论动力学

2.3.1 自由粒子的作用量

我们要思考：相对论形式下自由粒子的作用量应具有怎样的形式？我们的构造要遵循下面的两个原则:

1. 协变性原则：作用量应满足在 Lorentz 变换下是不变量，因此必须是四维标量.

2. 对应性原则：在非相对论情况下 ($c\to\infty$)，该作用量可以给出非相对论运动方程.

对于非相对论粒子，其作用量为:

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}mv^2\,\mathrm{d}t\tag{2.10}$$

按照类似形式，我们将其中的 v^2 替换为 $u^\alpha u_\alpha=c^2$，$\mathrm{d}t$ 替换为 $\mathrm{d}\tau$. 此时显然满足协变性原则，因为式中均为四维标量. 为了满足对应性原则，我们可以加上一个待定常数 α，因此构造作用量:

$$S=\int_a^b\frac{\alpha}{2}mc^2\,\mathrm{d}\tau=\int_a^b\frac{\alpha}{2\gamma}mc^2\,\mathrm{d}t,\ \ L=\frac{\alpha}{2\gamma}mc^2\tag{2.11}$$

上面我们利用了参考系中 $\mathrm{d}t=\gamma\,\mathrm{d}\tau$. 在非相对论情况下 $c\to\infty$，我们可以将拉氏量进行展开:

$$L=\frac{\alpha}{2}mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\approx\frac{\alpha}{2}mc^2-\frac{\alpha}{4}mv^2\tag{2.12}$$

若我们取 $\alpha=-2$，则:

$$L=\frac{1}{2}mv^2-mc^2\tag{2.13}$$

由于 $-mc^2$ 是常数，因此上式完全符合非相对论粒子的拉氏量. 最终，我们构造出来的相对论形式下自由粒子的作用量为:

$$S = -mc^2 \int_a^b \mathrm{d}\tau = -mc \int_a^b \mathrm{d}s = -mc \int_a^b \sqrt{\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta} \tag{2.14}$$

对应的拉氏量:

$$L = -\frac{1}{\gamma}mc^2 = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{2.15}$$

2.3.2 相对论动量和能量

从拉氏量出发，我们可以构造粒子的相对论动量 $\boldsymbol{p} = \partial L/\partial \boldsymbol{v}$. 代入式 (2.15)，得到:

$$\boldsymbol{p} = -mc^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{c^2}\right)2\boldsymbol{v} = \gamma m\boldsymbol{v} \tag{2.16}$$

在 $c\to\infty$ 时，$\boldsymbol{p}\to m\boldsymbol{v}$，此即非相对论动量.

而相对论能量同样可以由拉氏量出发进行定义:

$$\varepsilon \equiv \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v} - L = \gamma mc^2 \tag{2.17}$$

当 $v\to 0$ 时，$\varepsilon\to mc^2$，因此我们也将 mc^2 称为静止能量，$\varepsilon_k = (\gamma-1)mc^2$ 称为动能. 此外，当 $c\to\infty$ 时，$\varepsilon = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$.

注意到粒子的 4-速度 $u^\alpha = (\gamma c, \gamma\boldsymbol{v})$，构造粒子的 4-动量:

$$p^\alpha \equiv mu^\alpha = (\gamma mc, \gamma m\boldsymbol{v}) = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \boldsymbol{p}\right) \tag{2.18}$$

从上式我们看到，粒子的相对论能量与动量分别构成了 4-动量的时间与空间分量. 利用 Lorentz 变换，我们还可以得到能量与动量在不同参考系中的变换:

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon - Vp_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{2.19}$$

$$p'_x = \frac{p_x - (V/c^2)\varepsilon}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{2.20}$$

$$p'_y = p_y,\ \ p'_z = p_z \tag{2.21}$$

将 4-动量与自身作标量积，就可以得到粒子的能量与动量之间的关系:

$$p^\alpha p_\alpha = m^2u^\alpha u_\alpha = m^2c^2 = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 \tag{2.22}$$

整理即为:

$$\varepsilon^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{2.23}$$

这就是非常著名的能量-动量方程.

2.3.3 运动方程的协变形式

式 (2.14) 便是相对论形式下自由粒子的作用量，利用最小作用量原理可以得到协变形式的运动方程. 对 S 取变分有:

$$\delta S = -mc\int_a^b \delta\sqrt{\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta} \tag{2.24}$$

先计算上式中的被积函数:

$$
\begin{aligned}
\delta\sqrt{\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta} &= \frac{1}{2\,\mathrm{d}s}\delta(\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta) \\
&= \frac{1}{2\,\mathrm{d}s}(\eta_{\alpha\beta}\delta\,\mathrm{d}x^\alpha\cdot\mathrm{d}x^\beta+\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\cdot\delta\,\mathrm{d}x^\beta) \\
&= \frac{1}{\mathrm{d}s}\eta_{\alpha\beta}\delta\,\mathrm{d}x^\alpha\cdot\mathrm{d}x^\beta
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

然后再利用:

$$
\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}x^\beta}{c\,\mathrm{d}\tau}=\frac{u^\beta}{c} \tag{2.26}
$$

最终:

$$
\delta\sqrt{\eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta}=\frac{1}{c}u_\alpha\delta\,\mathrm{d}x^\alpha \tag{2.27}
$$

代入作用量:

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -m\int_a^b u_\alpha\,\mathrm{d}\delta x^\alpha \\
&= -mu_\alpha\delta x^\alpha\big|_a^b+m\int_a^b\delta x^\alpha\,\mathrm{d}u_\alpha \\
&= m\int_a^b\delta x^\alpha\frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_a^b\delta x^\alpha\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau=0
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

得到:

$$
\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau}=0 \tag{2.29}
$$

上式表明:4-动量 p_α 沿自由粒子的世界线是个常数.

3 外场中的带电粒子

3.1 与标量场的耦合

对于外场中的带电粒子，其作用量可写为如下形式：

$$S = S_p + S_{pf} \tag{3.1}$$

其中 S_p 即为上一节得到的自由粒子的运动量，而 S_{pf} 为带电粒子与外场耦合所带来的作用量. 我们接下来要寻找 S_{pf} 的具体形式，它必须满足两个条件：

1. S_{pf} 应为四维标量.
2. 得到的运动方程应与实验结果符合.

作为开头，我们先分析标量场中的运动，了解这一套分析方法，然后再进入矢量场的分析.

在标量场 ϕ 中，我们假设 S_{pf} 为：

$$S_{pf} = \int \alpha c^2 \phi(x^\mu)\,\mathrm{d}\tau \tag{3.2}$$

其中 α 为粒子与标量场的耦合系数，c^2 只是为了最后结果的简洁. 由最小作用量原理有：

$$\delta S = \delta S_p + \delta S_{pf} = 0 \tag{3.3}$$

在上一节我们已经求得：

$$\delta S_p = \int_a^b \delta x^\alpha \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{3.4}$$

因此仅需计算 δS_{pf}. 按照定义，有：

$$\delta S_{pf} = \alpha c^2 \int (\delta\phi \cdot \mathrm{d}\tau + \phi \cdot \delta\,\mathrm{d}\tau) \tag{3.5}$$

其中 $\delta\phi = \partial_\mu \phi \delta x^\mu$，而由上一节可得：

$$\delta\,\mathrm{d}s = c\delta\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c} u_\mu\,\mathrm{d}\delta x^\mu \to \delta\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c^2} u_\mu\,\mathrm{d}\delta x^\mu \tag{3.6}$$

最终：

$$\delta S_{pf} = \int \alpha c^2 \partial_\mu \phi \delta x^\mu\,\mathrm{d}\tau + \int \alpha\phi u_\mu\,\mathrm{d}\delta x^\mu \tag{3.7}$$

对于上面的第二项，利用分部积分：

$$\int \alpha\phi u_\mu\,\mathrm{d}\delta x^\mu = \alpha\phi u_\mu \delta x^\mu\big|_a^b - \int \delta x^\mu\,\mathrm{d}(\alpha\phi u_\mu) = -\int \delta x^\mu \frac{\mathrm{d}(\alpha\phi u_\mu)}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{3.8}$$

最终，整理得到粒子作用量的变分为：

$$\delta S = \int \delta x^\mu\,\mathrm{d}\tau \left[\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} + \alpha c^2 \partial_\mu\phi - \frac{\mathrm{d}(\alpha\phi u_\mu)}{\mathrm{d}\tau}\right] = 0 \tag{3.9}$$

因此协变形式的运动方程为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p_\mu - \alpha\phi u_\mu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(m-\alpha\phi)u_\mu] = -\alpha c^2 \partial_\mu \phi \tag{3.10}$$

我们看到，粒子与标量场的部分作用相当于是其质量从 m 变为 $\bar{m} = m - \alpha\phi$. 可以写出运动方程 (3.10) 的时间分量为：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\varepsilon}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha c^2}{\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{3.11}$$

其中 $\bar{\varepsilon} = \gamma\bar{m}c^2$. 相应的空间分量为：

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha c^2}{\gamma}\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{3.12}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{p}} = \gamma\bar{m}\boldsymbol{v}$.

3.2 与矢量场的耦合

电磁场是一个矢量场，因此前面与标量场耦合的理论显然不能用来描述带电粒子在电磁场中的运动. 接下来，我们研究矢量场中的耦合作用量.

引入矢量场 $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$, 由于耦合作用量必须是一个四维标量, 不妨令其具有形式 $A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu$. 粒子的作用量为:

$$S = S_p + S_{pf} = \int_a^b \left(-mc^2 \,\mathrm{d}\tau + \alpha A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu\right) \tag{3.13}$$

而

$$A_\mu \,\mathrm{d}x^\mu = cA^0 \,\mathrm{d}t - \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv \phi \,\mathrm{d}t - \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{3.14}$$

上面我们定义了 $\phi \equiv cA^0$，则 $A^\mu = (\phi/c, \boldsymbol{A})$. 这样一来:

$$S = \int_a^b \left(-mc^2 \,\mathrm{d}\tau + \alpha\phi \,\mathrm{d}t - \alpha \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right) = \int_a^b \mathrm{d}t \left(-\frac{mc^2}{\gamma} + \alpha\phi - \alpha \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}\right) \tag{3.15}$$

因此粒子的拉氏量为:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + \alpha\phi - \alpha \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} \tag{3.16}$$

有了拉氏量后，可以利用 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = 0 \tag{3.17}$$

来求解粒子的运动方程. 首先来看 $\partial L/\partial \boldsymbol{x}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\nabla} L = \alpha \boldsymbol{\nabla}\phi - \alpha \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}) \tag{3.18}$$

利用矢量分析公式:

$$\begin{aligned} \alpha \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v}) &= \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} \\ &= \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{3.19}$$

因此:

$$\boldsymbol{\nabla} L = \alpha \boldsymbol{\nabla}\phi - \alpha \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) - \alpha(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} \tag{3.20}$$

并且

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\left(-\frac{mc^2}{\gamma}\right) - \alpha \boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} - \alpha \boldsymbol{A} \tag{3.21}$$

最终由 Euler-Lagrange 方程:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p} - \alpha \boldsymbol{A}) = \alpha \boldsymbol{\nabla}\phi - \alpha \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) - \alpha(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} \tag{3.22}$$

然而:

$$\alpha \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \alpha\left[\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}\right] \tag{3.23}$$

所以:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \alpha \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \alpha \boldsymbol{\nabla}\phi - \alpha \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \tag{3.24}$$

式 (3.24) 其实已经与带电粒子在电磁场中的运动方程相吻合，只不过需要再对其进行最后的变形. 令耦合系数 $\alpha = -q$，这里 q 为粒子的电荷量，负号的出现是因为习惯上定义电子为负电荷；定义电场和磁场分别为:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi,\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{3.25}$$

最终运动方程化为:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{3.26}$$

相信大家对这个方程都不陌生，这就是经典的 Lorentz 运动方程，方程的右边称为 Lorentz 力.

对上面的内容进行总结，带电粒子在电磁场中的作用量和拉氏量分别为:

$$S = \int_a^b \left(-mc^2\,\mathrm{d}\tau - qA_\mu\,\mathrm{d}x^\mu\right) \tag{3.27}$$

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} - q\phi \tag{3.28}$$

其中 $A^\mu = (\phi/c, \boldsymbol{A})$，我们也将 ϕ 称为电磁场的标势，$\boldsymbol{A}$ 称为电磁场的矢势.

3.3 协变运动方程

Lorentz 运动方程并不是由四维量组成的，因此不具有协变性. 下面我们将从最小作用量原理出发，得到带电粒子在电磁场中的协变形式运动方程.

此时应有 $\delta S = \delta S_p + \delta S_{pf} = 0$. 而 δS_p 在自由粒子部分已进行计算，因此我们仅需计算 δS_{pf}.

$$\delta S_{pf} = \int_a^b \left(-q\delta A_\mu\cdot\mathrm{d}x^\mu - qA_\mu\cdot\mathrm{d}\delta x^\mu\right) \tag{3.29}$$

对于第一项，由于 $\delta A_\mu = \partial_\nu A_\mu \delta x^\nu$，因此:

$$\int_a^b -q\delta A_\mu\cdot\mathrm{d}x^\mu = \int_a^b -q\partial_\nu A_\mu\delta x^\nu\cdot\mathrm{d}x^\mu = \int_a^b -q\partial_\nu A_\mu u^\mu\delta x^\nu\,\mathrm{d}\tau \tag{3.30}$$

对于第二项，可由分部积分:

$$\begin{aligned} -\int_a^b qA_\mu\cdot\mathrm{d}\delta x^\mu &= -qA_\mu\delta x^\mu\Big|_a^b + \int_a^b q\delta x^\mu\,\mathrm{d}A_\mu \\ &= \int_a^b q\delta x^\mu\partial_\nu A_\mu\,\mathrm{d}x^\nu = \int_a^b q\delta x^\mu\partial_\nu A_\mu u^\nu\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{3.31}$$

最终得到:

$$\delta S = \delta S_p + \delta S_{pf} = \int_a^b \delta x^\mu\,\mathrm{d}\tau\left[\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} - q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)u^\nu\right] \tag{3.32}$$

定义电磁场张量:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \tag{3.33}$$

最终得到协变形式的运动方程为:

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = qF_{\mu\nu}u^\nu \tag{3.34}$$

如果要得到上面方程的时间分量和空间分量，我们必须计算电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的各分量. 由其定义易得 $F_{\mu\nu}$ 是一个反对称张量，即 $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$，故对角线上元素全为 0. 对于非对角元，全部计算得到:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

而由 $F^{\mu\nu}=\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$，可得到该张量的逆变形式为:

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

得到电磁场张量的各分量后，我们来看协变运动方程 (3.34) 的各分量. 对于时间分量 $\mu=0$，有:

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=qF_{0\nu}u^\nu=\frac{\gamma}{c}q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.37}$$

即:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.38}$$

因此协变方程的时间分量对应于粒子能量的变化来源于电磁场所做的功. 而对于空间分量，有:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau}&=-\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{p})_i=qF_{i\nu}u^\nu=qF_{i0}u^0+qF_{ij}u^j\\&=-q\frac{E_i}{c}\gamma c-q\epsilon_{ijk}B_k\gamma v_j=\gamma[-qE_i+q\epsilon_{ikj}B_kv_j]\\&=q\gamma(-E_i+(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})_i)\end{aligned} \tag{3.39}$$

上面利用了 $F_{ij}=-\epsilon_{ijk}B_k$，最终得到:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{3.40}$$

这便是 Lorentz 运动方程.

3.4 电磁势与电磁场

3.4.1 规范不变性

除了用场量 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 表示电磁场，现在我们还可以借助电磁势 $(\phi,\boldsymbol{A})$ 来表示. 一旦空间的电磁势确定，则电磁场可由下式唯一确定:

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{3.41}$$

然而对于确定的电磁场，对应的电磁势却不是唯一的. 设 ψ 为任意时空函数，对电磁势作如下变换:

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\psi,\ \phi'=\phi-\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{3.42}$$

则其描述的电磁场不变. 我们将这一变换称为规范变换，将这一不变性称为规范不变性. 要证明也十分容易:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\psi=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{3.43}$$

$$-\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t}-\boldsymbol{\nabla}\phi'=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\psi-\boldsymbol{\nabla}\phi+\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{3.44}$$

将规范变换用四维势 A_μ 来表示，可写为:

$$A'_\mu=A_\mu-\partial_\mu\psi \tag{3.45}$$

规范不变性表明电磁场存在冗余的自由度，允许我们选定一个额外条件去限制电磁势，这一条件称为规范条件. 常用的规范条件有两种，第一种是 Coulomb 规范：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{3.46}$$

这种规范的好处是可以将电场很容易划分为横场和纵场两部分：

$$\boldsymbol{E}_T=-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t},\ \boldsymbol{E}_L=-\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{3.47}$$

其中 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_T=0,\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}_L=0$.

另一种常用的规范是 Lorenz 规范：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{3.48}$$

这一规范对应的四维形式是：

$$\partial_\mu A^\mu=0 \tag{3.49}$$

也就是四维势的散度为 0.

3.4.2 电磁场的 Lorentz 变换

对电磁场张量作 Lorentz 变换：$F^{\bar{\mu}\bar{\nu}}=\Lambda^{\bar{\mu}}{}_\alpha\Lambda^{\bar{\nu}}{}_\beta F^{\alpha\beta}$，可以得到电磁场的 Lorentz 变换如下：

$$E'_x=E_x,\ E'_y=\gamma(E_y-vB_z),\ E'_z=\gamma(E_z+vB_y) \tag{3.50}$$

$$B'_x=B_x,\ B'_y=\gamma\Big(B_y+\frac{v}{c^2}E_z\Big),\ B'_z=\gamma\Big(B_z-\frac{v}{c^2}E_y\Big) \tag{3.51}$$

可以发现，电磁场沿平行于速度方向的分量保持不变，而垂直于速度方向的分量则发生改变. 上面的变换式还可以写成更加紧致的形式：

$$\boldsymbol{E}'_\parallel=\boldsymbol{E}_\parallel,\ \boldsymbol{B}'_\parallel=\boldsymbol{B}_\parallel \tag{3.52}$$

$$\boldsymbol{E}'_\perp=\gamma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_\perp,\ \boldsymbol{B}'_\perp=\gamma\bigg(\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\bigg)_\perp \tag{3.53}$$

电磁场的 Lorentz 变换表明：电场和磁场是可以相互转化的，一个参考系里的电场可以转换成另一个参考系里的磁场，反之亦然. 电磁场不是独立的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$，而是统一的电磁场张量. 在非相对论极限 $v/c\ll 1$ 下，变换式为：

$$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} \tag{3.54}$$

3.4.3 电磁场的 Lorentz 不变量

利用电磁场张量，可以引入电磁场的两个很重要的 Lorentz 不变量. 第一个即为 $F^{\mu\nu}$ 与自身的缩并：

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=2\big(B_x^2+B_y^2+B_z^2\big)-2\frac{1}{c^2}\big(E_x^2+E_y^2+E_z^2\big)=2\bigg(B^2-\frac{E^2}{c^2}\bigg) \tag{3.55}$$

这说明电磁场大小的相对关系在不同参考系间保持不变.

为了引入第二个 Lorentz 不变量，首先介绍四阶 Levi-Civita 张量 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$：$\epsilon^{0123}=1$，交换任意两个指标会出现一个负号；如果有相同指标，则 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=0$. 利用该张量，定义电磁场张量的

Hodge 对偶张量:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

可以看到，Hodge 对偶张量相当于将电磁场张量中的 $\boldsymbol{E}/c$ 替换成 $\boldsymbol{B}$，将 $\boldsymbol{B}$ 替换成 $-\boldsymbol{E}/c$. 第二个 Lorentz 不变量即为 $\mathcal{F}^{\mu\nu}$ 与电磁场张量的缩并:

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{4}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \tag{3.57}$$

因此 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ 为一 Lorentz 不变量.

4 电磁场方程

4.1 场的最小作用量原理

在前面我们已经提到，分析力学乃至整个物理学最重要的原理便是最小作用量原理. 在选定广义坐标后，可以写出系统的拉氏量：

$$L = L(t, q, \dot{q}) = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}(t, q, \dot{q}) \tag{4.1}$$

其中 $\mathcal{L}(t, q, \dot{q})$ 称为系统的拉氏量密度. 写出拉氏量后，系统的作用量为：

$$S = \int \mathrm{d}t\, L(t, q, \dot{q}) \tag{4.2}$$

最小作用量原理要求作用量的变分为零:$\delta S = 0$.

接下来我们要将上面的内容推广至场论系统，此时将场 $\phi(t, \boldsymbol{x})$ 视为广义坐标，而位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 则降级为参数. 系统的作用量可写为：

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu) \tag{4.3}$$

其中 d^4x 为 Minkowski 时空的积分测度. 对作用量取变分，有：

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \mathrm{d}^4x\, \delta\mathcal{L} \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)\right] \\
&= \int \mathrm{d}^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] - \delta\phi\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right\} \\
&= \int \mathrm{d}^4x\, \delta\phi\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] + \int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

上式的第二项是四维时空中散度的体积分，利用 Gauss 公式，有：

$$\int \mathrm{d}^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] = \int_S \mathrm{d}\sigma_\mu\, \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \tag{4.5}$$

设定边界处场位形的变分为 0，则该积分为 0. 最终：

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x\, \delta\phi\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] = 0 \tag{4.6}$$

得到场的 Euler-Lagrange 方程：

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \tag{4.7}$$

可以考虑一个例子来练手，设标量场 $\phi(x^\mu)$ 具有如下形式的拉氏量：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{4.8}$$

代入 Euler-Lagrange 方程，得到：

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu\phi = \partial^\mu\phi,\ \ \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu\partial^\mu\phi = \Box\phi \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi \tag{4.10}$$

得到场满足的方程为:

$$(\Box + m^2)\phi = 0 \tag{4.11}$$

这便是非常著名的 Klein–Gordon 方程，是相对论性自由标量粒子的运动方程，描述自旋为 0 的粒子.

如果分析的场不是标量场，而是矢量场 $A^\nu = A^\nu(x^\mu)$，只需将式 (4.7) 中的 ϕ 换为 A^ν 即可:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = 0, \quad \nu = 0,1,2,3 \tag{4.12}$$

4.2 电磁场的场方程

4.2.1 无粒子存在下的场方程

下面我们将利用场的最小作用量原理，来得到电磁场所满足的方程. 首先需要构造电磁场的拉氏量，它应该满足一些基本要求，例如必须是一个四维标量、满足规范不变性、具有可叠加性等. 经历各种猜想与实验的验证，最终我们得到的电磁场拉氏量为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0 c} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{4.13}$$

利用 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$，可将拉氏量进行展开:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4\mu_0 c}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= -\frac{1}{4\mu_0 c}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) + (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\nu A^\mu)] \\
&= -\frac{1}{2\mu_0 c}[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu)]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

接下来的任务是代入 Euler-Lagrange 方程:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A^\beta)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta} = 0 \tag{4.15}$$

显然方程的第二项为 0，因此我们仅需计算第一项. 利用:

$$\partial_\mu A_\nu = \eta_{\nu\beta} \partial_\alpha A^\beta \delta^\alpha{}_\mu, \quad \partial^\mu A^\nu = \eta^{\mu\alpha} \partial_\alpha A^\beta \delta^\nu{}_\beta \tag{4.16}$$

可计算得到:

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A^\beta)}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) = \eta_{\nu\beta}\delta^\alpha{}_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu A_\nu \eta^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta = 2\partial^\alpha A_\beta \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A^\beta)}(\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu) = \eta_{\mu\beta}\delta^\alpha{}_\nu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \eta^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta = 2\partial_\beta A^\alpha \tag{4.18}$$

因此:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A^\beta)} = \frac{1}{\mu_0 c}(\partial_\beta A^\alpha - \partial^\alpha A_\beta) = \frac{1}{\mu_0 c} F_\beta{}^\alpha \tag{4.19}$$

相应的场方程为:

$$\partial_\alpha \frac{1}{\mu_0 c} F_\beta{}^\alpha = 0 \longrightarrow \partial^\mu F_{\nu\mu} = 0 \tag{4.20}$$

即:

$$\partial^\mu(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) = 0 \tag{4.21}$$

若选取 Lorenz 规范，则上式的第一项实际上等于 0:

$$\partial^\mu(\partial_\nu A_\mu) = \partial_\nu(\partial^\mu A_\mu) = 0 \tag{4.22}$$

则场方程可进一步化为:

$$-\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = 0 \longrightarrow \Box A_\nu = 0 \tag{4.23}$$

写成分量即为:

$$\Box\phi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = 0 \tag{4.24}$$

$$\Box\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} = 0 \tag{4.25}$$

此时电磁场满足波动方程，其波速为 c.

4.2.2 给定粒子分布下的场的方程

当存在带电粒子时，我们需要考虑粒子与场耦合的拉氏量密度. 我们已经知道耦合作用量为:

$$S_{pf} = -\int_a^b qA_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \tag{4.26}$$

其中 A_μ 是沿着粒子轨迹计算的，因此它应该是粒子位置的函数：$A_\mu = A_\mu(t, \boldsymbol{x}_p)$. 可以进一步将耦合作用量改写为:

$$S_{pf} = -\int_a^b qA_\mu(t, \boldsymbol{x}_p) \, \mathrm{d}x^\mu = -\int_a^b qA_\mu(t, \boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p) \, \mathrm{d}V \, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}(ct)} \, \mathrm{d}(ct) \tag{4.27}$$

因此如果存在一个带电粒子的话，耦合拉氏量密度应为:

$$\mathcal{L}_{pf} = -qA_\mu(t, \boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_p)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}(ct)} \tag{4.28}$$

若存在多个带电粒子，则表示为各带电粒子的求和:

$$\mathcal{L}_{pf} = -\sum_i q_i A_\mu(t, \boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}(ct)} \tag{4.29}$$

而电荷密度的定义为:

$$\rho = \sum_i q_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) \tag{4.30}$$

因此:

$$\mathcal{L}_{pf} = -\frac{1}{c}\rho A_\mu(t, \boldsymbol{x})\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \tag{4.31}$$

上式可以视为某一四维矢量与 A_μ 作标量积的结果，定义四维电流密度:

$$j^\mu \equiv \rho\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = (\rho c, \rho\boldsymbol{v}) = (\rho c, \boldsymbol{j}) \tag{4.32}$$

则:

$$\mathcal{L}_{pf} = -\frac{1}{c}j^\mu A_\mu(t, \boldsymbol{x}) \tag{4.33}$$

综上，存在带电粒子时，系统的拉氏量密度为:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_{pf} = -\frac{1}{4\mu_0 c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\mu A_\mu \tag{4.34}$$

接下来便是代入 Euler-Lagrange 方程:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A^\beta)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta} = 0 \tag{4.35}$$

由于 $\mathcal{L}_f$ 只与 $\partial_\alpha A^\beta$ 有关，$\mathcal{L}_{pf}$ 只与 A^β 有关，因此:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A^\beta)} = \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial(\partial_\alpha A^\beta)} = \frac{1}{\mu_0 c}\partial^\alpha F_{\beta\alpha} \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}_{pf}}{\partial A^\beta} = \frac{\partial}{\partial A^\beta}\left(-\frac{1}{c}j^\mu \eta_{\mu\beta} A^\beta\right) = -\frac{1}{c}j_\beta \tag{4.37}$$

最终整理得到场方程为:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu \tag{4.38}$$

若再次选用 Lorenz 规范，则方程写为:

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = \Box A_\nu = \mu_0 j_\nu \tag{4.39}$$

其各分量为:

$$\Box\phi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.40}$$

$$\Box \boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j} \tag{4.41}$$

这便是大家熟悉的电磁势所满足的 d’Alembert 方程，其解即为推迟势.

4.2.3 用电磁场量表达的场方程

上面的方程 (4.40) 和 (4.41) 是用电磁势表示的场方程，我们可以将其改写为熟悉的用 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 表示的方程. 首先从 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的定义出发:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \tag{4.42}$$

对 $\boldsymbol{E}$ 取旋度，得到:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\phi = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.43}$$

这称为 Faraday 电磁感应定律. 对 $\boldsymbol{B}$ 取散度，得到:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = 0 \tag{4.44}$$

这称为磁场 Gauss 定理. 这两个结论仅仅从 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的定义出发推导得到，因此无论存不存在带电粒子，它们都是成立的.

然后对于 Lorenz 规范:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{4.45}$$

在上面作用 ∂_t，得到:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{4.46}$$

将其代入 ϕ 满足的方程 (4.40)，得到:

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla^2\phi = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi\right) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.47}$$

这便是电场 Gauss 定理. 同时，在 Lorenz 规范表达式上作用 $\boldsymbol{\nabla}$，得到：

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\phi+\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})=0 \tag{4.48}$$

将其代入 $\boldsymbol{A}$ 满足的方程 (4.41)，得到：

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\boldsymbol{A}&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\phi+\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\\&=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\boldsymbol{\nabla}\phi\right)+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\\&=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}\end{aligned} \tag{4.49}$$

即：

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4.50}$$

这便是包含了位移电流的 Ampere 环路定理.

上面的四个方程，就是我们所熟知的 Maxwell 方程组：

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{4.52}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{4.53}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4.54}$$

4.3 Noether 定理

利用演绎法分析问题，通过系统的拉氏量所展现出的对称性，我们可以很方便地得到系统的守恒量. 此外，现代物理在分析基本粒子间的相互作用时，更是利用已知的守恒量获得系统应有的对称性，从而去限定拉氏量所具有的可能形式. 著名的 Noether 定理搭建了对称性和守恒量之间的桥梁，它告诉我们：对于系统的每一个连续对称性，都存在一个相应的守恒量. 接下来的任务，是将 Noether 定理推广至场论系统.

我们将对标量场 $\phi(x^\mu)$ 进行分析，这是为了数学上的方便，其结论可以直接推广至矢量场. 我们对时空坐标施行无穷小变换：

$$x^\mu\to x'^\mu\equiv x^\mu+\delta x^\mu \tag{4.55}$$

相应地会带来场的变化：

$$\phi(x^\mu)\to\phi'(x'^\mu)=\phi(x^\mu)+\delta\phi \tag{4.56}$$

定义 $\bar{\delta}$ 算符为同一时空坐标处场的变化：

$$\bar{\delta}\phi=\phi'(x^\mu)-\phi(x^\mu) \tag{4.57}$$

这样一来：

$$\delta\phi=\phi'(x'^\mu)-\phi(x^\mu)=\phi'(x'^\mu)-\phi'(x^\mu)+\phi'(x^\mu)-\phi(x^\mu)\approx\partial_\mu\phi\delta x^\mu+\bar{\delta}\phi \tag{4.58}$$

上式告诉我们场的总变化 $\delta\phi$ 由两部分组成：一部分来源于时空坐标的变化 (δx^μ)，另一部分来源于场本身的变化 ($\bar{\delta}\phi$). 因此：

$$\bar{\delta}\phi=\delta\phi-\partial_\mu\phi\delta x^\mu \tag{4.59}$$

如果系统在此时的无穷小变换下具有不变性，那么拉氏量密度应在形式上保持不变：

$$\mathcal{L}'\big[\phi'(x'^{\mu}),\partial'_{\mu}\phi',x'^{\mu}\big]=\mathcal{L}\big[\phi'(x'^{\mu}),\partial'_{\mu}\phi',x'^{\mu}\big] \tag{4.60}$$

进一步地要求体系的作用量保持不变：

$$S'=\int_{R'}\mathrm{d}^4x'\,\mathcal{L}\big[\phi'(x'^{\mu}),\partial'_{\mu}\phi',x'^{\mu}\big]=S=\int_{R}\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi(x^{\mu}),\partial_{\mu}\phi,x^{\mu}] \tag{4.61}$$

然后可以利用 $S'-S=0$ 去寻找相应的守恒量. 首先可以对 S' 的形式进行改写，利用坐标变换，将 S' 的积分域从 R' 变换到 R：

$$S'=\int_{R}\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}\big[\phi'(x'^{\mu}),\partial'_{\mu}\phi',x'^{\mu}\big]J \tag{4.62}$$

其中 J 是坐标变换的 Jacobi 行列式：$J=\det|\partial x'^{\nu}/\partial x^{\mu}|$. 将上式展开，保留至一阶项，使得自变量的形式为 x^{μ}. 我们有：

$$\phi'(x'^{\mu})=\phi'(x^{\mu}+\delta x^{\mu})\approx\phi'(x^{\mu})+\partial_{\mu}\phi'\cdot\delta x^{\mu} \tag{4.63}$$

以及：

$$\partial'_{\mu}\phi'(x'^{\alpha})=(\partial'_{\mu}x^{\nu})\partial_{\nu}\phi'(x'^{\alpha})=\big[\partial'_{\mu}(x'^{\nu}-\delta x^{\nu})\big]\partial_{\nu}\phi'(x'^{\alpha})=\big[\delta_{\mu}{}^{\nu}-\partial'_{\mu}\delta x^{\nu}\big]\partial_{\nu}\phi'(x'^{\alpha}) \tag{4.64}$$

利用式 (4.63)，得到：

$$\partial_{\nu}\phi'(x'^{\alpha})\approx\partial_{\nu}[\phi'(x^{\alpha})+\partial_{\alpha}\phi'\cdot\delta x^{\alpha}]=\partial_{\nu}\phi'(x^{\alpha})+\partial_{\nu}(\partial_{\alpha}\phi'\cdot\delta x^{\alpha}) \tag{4.65}$$

因此：

$$\begin{aligned}\partial'_{\mu}\phi'(x'^{\alpha})&=\big[\delta_{\mu}{}^{\nu}-\partial'_{\mu}\delta x^{\nu}\big][\partial_{\nu}\phi'(x^{\alpha})+\partial_{\nu}(\partial_{\alpha}\phi'\cdot\delta x^{\alpha})]\\&\approx\partial_{\mu}\phi'(x^{\alpha})+\partial_{\mu}(\partial_{\alpha}\phi'\cdot\delta x^{\alpha})-\partial'_{\mu}\delta x^{\nu}\cdot\partial_{\nu}\phi'(x^{\alpha})\\&\approx\partial_{\mu}\phi'(x^{\alpha})+\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\phi'\cdot\delta x^{\alpha}\end{aligned} \tag{4.66}$$

除了展开 $\phi'(x'^{\mu})$ 和 $\partial'_{\mu}\phi'(x'^{\alpha})$，我们还需要展开 Jacobi 行列式 J：

$$J=\det\left|\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(x^{\nu}+\delta x^{\nu})\right|=\det|\delta_{\mu}{}^{\nu}+\partial_{\mu}\delta x^{\nu}|\approx1+\mathrm{Tr}(\partial_{\mu}\delta x^{\nu})=1+\partial_{\mu}\delta x^{\mu} \tag{4.67}$$

最终，式 (4.62) 可写为：

$$\begin{aligned}S'&=\int_{R}\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi'(x^{\alpha})+\partial_{\alpha}\phi'\cdot\delta x^{\alpha},\partial_{\mu}\phi'(x^{\alpha})+\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\phi'\cdot\delta x^{\alpha},x^{\alpha}+\delta x^{\alpha}]\,(1+\partial_{\mu}\delta x^{\mu})\\&\approx\int_{R}\mathrm{d}^4x\left\{\mathcal{L}[\phi'(x^{\alpha}),\partial_{\mu}\phi',x^{\alpha}]+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'}\partial_{\alpha}\phi'\cdot\delta x^{\alpha}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi')}\partial_{\mu}\partial_{\alpha}\phi'\cdot\delta x^{\alpha}+\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}}\right|_{\phi',\partial_{\mu}\phi'}\delta x^{\alpha}\right\}(1+\partial_{\mu}\delta x^{\mu})\\&\approx\int_{R}\mathrm{d}^4x\,\{\mathcal{L}[\phi'(x^{\alpha}),\partial_{\mu}\phi',x^{\alpha}]+\partial_{\mu}\mathcal{L}\cdot\delta x^{\mu}+\mathcal{L}\partial_{\mu}\delta x^{\mu}\}\\&=\int_{R}\mathrm{d}^4x\,\{\mathcal{L}[\phi'(x^{\alpha}),\partial_{\mu}\phi',x^{\alpha}]+\partial_{\mu}(\mathcal{L}\delta x^{\mu})\}\end{aligned} \tag{4.68}$$

而 $\mathcal{L}[\phi'(x^{\alpha}),\partial_{\mu}\phi',x^{\alpha}]$ 又可进一步展开：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\phi'(x^{\alpha}),\partial_{\mu}\phi',x^{\alpha}]&=\mathcal{L}[\phi(x^{\alpha})+\bar{\delta}\phi,\partial_{\mu}\phi(x^{\alpha})+\partial_{\mu}\bar{\delta}\phi,x^{\alpha}]\\&\approx\mathcal{L}[\phi(x^{\alpha}),\partial_{\mu}\phi(x^{\alpha}),x^{\alpha}]+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\mu}\bar{\delta}\phi\\&=\mathcal{L}[\phi(x^{\alpha}),\partial_{\mu}\phi(x^{\alpha}),x^{\alpha}]+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\bar{\delta}\phi+\partial_{\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\bar{\delta}\phi\right]-\bar{\delta}\phi\partial_{\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right]\\&=\mathcal{L}[\phi(x^{\alpha}),\partial_{\mu}\phi(x^{\alpha}),x^{\alpha}]+\partial_{\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\bar{\delta}\phi\right]\end{aligned} \tag{4.69}$$

上面的步骤利用了 Euler-Lagrange 方程：

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}=0 \tag{4.70}$$

经过上面的展开与化简，得到：

$$S'-S=\int_R \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\bar{\delta}\phi+\mathcal{L}\delta x^\mu\right]=0 \tag{4.71}$$

利用式 (4.59)，上式写为：

$$\begin{aligned}S'-S&=\int_R \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\delta\phi-\partial_\nu\phi\delta x^\nu)+\mathcal{L}\delta x^\mu\right]\\&=\int_R \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\left\{\delta x^\nu\left[\mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi\right]+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right\}\end{aligned} \tag{4.72}$$

引入场的能动张量 $T^{\mu\nu}$：

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi-\eta^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{4.73}$$

则上式可写为：

$$\int_R \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi-T^{\mu\nu}\delta x_\nu\right]=0 \tag{4.74}$$

考虑无穷小变换为一无穷小常量的线性函数：

$$\delta x_\nu=\epsilon^\alpha\frac{\partial\delta x_\nu}{\partial\epsilon^\alpha},\quad \delta\phi=\epsilon^\alpha\frac{\partial\delta\phi}{\partial\epsilon^\alpha} \tag{4.75}$$

最终：

$$\int_R \mathrm{d}^4x\,\epsilon^\alpha\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\partial\delta\phi}{\partial\epsilon^\alpha}-T^{\mu\nu}\frac{\partial\delta x_\nu}{\partial\epsilon^\alpha}\right]=-\int_R \mathrm{d}^4x\,\epsilon^\alpha\partial_\mu(j^\mu)_\alpha=0 \tag{4.76}$$

其中守恒流 $(j^\mu)_\alpha$ 定义为：

$$(j^\mu)_\alpha=T^{\mu\nu}\frac{\partial\delta x_\nu}{\partial\epsilon^\alpha}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\partial\delta\phi}{\partial\epsilon^\alpha} \tag{4.77}$$

对于上面的写法 $(j^\mu)_\alpha$，α 对应不同分量的变换，$\alpha=0$ 对应时间平移，而 $\alpha=1,2,3$ 对应不同的空间分量.

由式 (4.76)，最终：

$$\partial_\mu(j^\mu)_\alpha=0 \tag{4.78}$$

也就是说守恒流的四维散度为 0. 令 $j^0=\rho c$，即 $j^\mu=(\rho c,\boldsymbol{j})$，则：

$$\partial_\mu j^\mu=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{4.79}$$

这便是所谓连续性方程，表明了该流所代表的物理量的局域守恒性，守恒量即为该流对应的守恒荷. 为了看清楚这一点，可将连续性方程对全空间积分：

$$\int_\infty\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V+\int_\infty\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}\,\mathrm{d}V=\int_\infty\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V+\int_\infty\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{4.80}$$

假定在无穷远边界处 $\boldsymbol{j}=0$，定义全空间的守恒荷的总量 Q:

$$Q=\int_\infty\rho\,\mathrm{d}V \tag{4.81}$$

则得到：

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\int_\infty\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V=0 \tag{4.82}$$

因此 Q 为守恒量.