理论力学讲义

傅林

2024 年初夏

想说的话

我在写这段文字时，我的理论力学成绩已经出来了，考的并不好。准确来说，它是我进大学以来考得最低的一门科目。可以想象我此时的心情是无比矛盾的，理论力学是我无比热爱的学科，我在它上面倾注了许多时间与心血，最终却没有在成绩上体现出来。

但是仔细想想会发现，我感到难过的根本原因，是因为我以成绩的高低来评判自己一门学科学的好不好的标准。自进入初中进入义务教育以来，这种唯成绩论的思想一直伴随着我，它在一定程度上鞭策着我努力，但更多时候是给我带来了无尽的焦虑与痛楚。仿佛只要成绩不好，就不配说自己真的热爱某一门学科。我不知道正阅读这份讲义的人，是否拥有过同样的烦恼。这是当今时代的一个通病，我们被各种指标所衡量着评价着，没有人会在意你过程中的辛酸与挣扎，他们只关心最终的结果。所以我们必须对自己好些，多给自己加加油。

这一学年我看待事情的心态变化了很多。曾经以为会让我的世界崩塌的挫折，最终倒也没有击垮我。我发现，我开始能够慢慢接受自身的不完美，慢慢能够明白自己的能力其实是非常有限的。我无法在所有方面都做到极致，我需要停下来，去感受我不长不短的一生。**活着，其实就是为了感受。**感受每一天的昼夜更替，感受蓝天白云，感受日常的生活作息，感受那些美好的友谊，感受令我难过的挫折，感受每一次挫折后的成长，感受获得，感受失去。我相信，人生的容错率并没有那么低，我们只管往前看，大胆地迈向想去的地方，不要过分衡量结果，大口呼吸，活出自己。

过几天就是我的 20 岁生日。如果人生是一本书的话，我这本书已经写完了基本的人物铺垫与情节引入，即将进入跌宕起伏的核心章节。多么想和过去的自己说再见呀，忘却所有的荣誉，也忘却所有的失去。你是傅林，你是你自己，而不是别人定义的种种。从一个新的起点出发，去重新追求自己想活出的人生。我相信，只有放下地足够彻底，未来才能获得更多。

这份理论力学讲义的作者，不是什么理论力学方面的专家，他只是一个对物理充满好奇与热爱的学生，他只是在以自己的方式记录他对物理的见解。希望你在翻阅这份讲义时，包容他的才疏学浅，感受他对知识的虔诚；如果可以，希望你能给他提一些建议，帮助他更好的成长。感激不尽！

傅林

2024 年 7 月 5 日

foreverlinlin2004@163.com

目录

Chapter 1

最小作用量原理

1.1 最速降线问题

我们要学习的这门课程，叫做理论力学 (你也可以叫它分析力学、经典力学等). 走进理论力学的世界，意味着我们要暂时和之前无比熟悉的牛顿力学告别了. 这是真的，如果不走出从前旧的思维模式，我们很难接受下面要学习的一套新的理论体系. 或许你在之前已经翻阅过一些理论力学的教材，我不知道你是否被一些高大上的名词 (如拉格朗日量、变分等) 弄得有点不知所措. 但不管怎么样，我希望大家在学习这门课程时是能够感受到它的有趣的，能够欣赏到理论的美感. 所以，我们要从一个看起来足够简单的问题谈起.

假设竖直平面内有 A,B 两个点，它们不在一条竖直线上，而且令 A 要高于 B. 我们要设计一条曲线轨道连通这两点，使得仅受重力作用且初速度为零的质点沿这条轨道从 A 运动到 B 所需的时间最短. 这就是大名鼎鼎的最速降线问题.

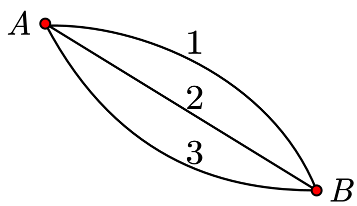

图 1.1: 哪一条路径能满足条件呢？

你或许会凭着直觉回答：这还不简单！两点之间直线最短，那肯定在直线上运动用时也最短啦. 也有人持不同看法，他们可能会给出其他不同的答案. 但不管怎样，我们可以大体把答案分为三类：位于直线上方的曲线、直线、位于直线下方的曲线，分别对应图1.1中的 1,2,3 号曲线. 我们可以大致把沿三条路径运动时质点的 $v-t$ 图画一下，如图1.2所示.

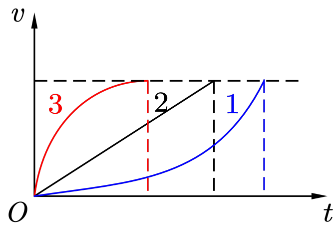

图 1.2: 三条路径的 $v-t$ 图

在 $v-t$ 图中曲线与 t 轴围成的面积便是位移，在该问题中无论沿哪条路径位移都应该是一样的，因为起点和终点是确定的，这就要求 1,2,3 三条路径对应的 $v-t$ 曲线与 t 轴围成的面积一样. 结合图1.2，我们很快就能确定 $t_3 < t_2 < t_1$. 也就是说，最终的答案应是**直线下方的某一条曲线**.

历史上，约翰·伯努利通过类比几何光学中的费马原理，巧妙地解决了这个问题. 那我们能不能直接从动力学出发，算出沿某一路径所需时间的表达式，然后求出这个表达式的极小值呢？

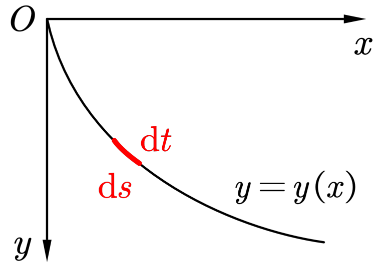

图 1.3: 尝试用动力学方法求出时间

我们在轨迹 $y = y(x)$ 上取一段极短的弧元 $\mathrm{d}s$，由高等数学的知识可知 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$. 且在这段弧元上质点的速度可近似看成不变，大小为 $v = \sqrt{2gy}$，则该弧元上的运动时间

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}} \tag{1.1}$$

对 $\mathrm{d}t$ 积分便得到全程的运动时间：

$$t = \int \mathrm{d}t = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{2gy}} \tag{1.2}$$

看起来马上就要迎来胜利的曙光了，但遗憾的是，式 (1.2) 这个积分我们是算不出来的，因为积分表达式里面含有 y, y'，而我们压根就不知道 y 的具体表达式，我们要求的正好就是时间最短时 y 的表达式呀. 在下一节我们将进一步深入讨论这个问题.

1.2 泛函与变分

我们来重新审视一下式 (1.2) 的积分，可将其一般化，变成下面的形式：

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{1.3}$$

我们只需要把 y 的表达式 $y(x)$ 输进去，式 (1.3) 的积分就能完全确定，从而计算出一个值. 它就像一台数学机器，**输入一个函数，返回一个数**，我们把它称为**泛函**，它是“函数的函数”. 事实上我们之前是接触过泛函这个东西的，例如：

- 空间中两点用任意曲线连接，曲线的长度就是关于曲线形状的泛函；
- 对于平面内一封闭曲线，其包围的面积就是曲线形状的泛函.

研究泛函的极值问题，便是所谓的**变分问题**. 为了快速抓住变分问题的内核，我们可以类比普通函数的极值问题. 对于一个普通函数 $f(x)$，在极值点处应有 $\mathrm{d}f(x) = 0$. 微分 $\mathrm{d}f(x)$ 指的是自变量 x 发生一个小变化 $\mathrm{d}x$ 所带来的函数值的变化.

类似地，泛函的变分指函数 $y(x)$ 发生了一个小变化 $\delta y(x)$，从而使得泛函的值发生了一个小变化 δJ. 泛函取极值时，应有 $\delta J = 0$.

为了解决变分问题，还需要补充几个变分的性质：

1. x 的变分应为 0.

$$\delta x \equiv 0 \tag{1.4}$$

这其实很好理解：变分来源于函数 $y(x)$ 本身的变化，而不是 x 的变化.

2. 在积分端点 (边界) 处函数的变分为 0.

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0 \tag{1.5}$$

就像最速降线问题，起点 A 和终点 B 是固定好的，任何一条路径都要经过这两点.

3. 变分和求导可以交换次序，即导数的变分 = 变分的导数.

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y) \tag{1.6}$$

武器已经全部准备好了，下面让我们正式分析式 (1.3) 取极值的条件. 设 $y(x)$ 经过一个小扰动后变成了 $\bar{y}(x)$，此时泛函 J 的值变成 $\int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}')\,\mathrm{d}x$. 对其作展开得到

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}')\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2}\left[F(x, y, y') + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

然后计算 J 的变分：

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}')\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x && \text{利用式 (1.7)}\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]\mathrm{d}x && \text{利用式 (1.6)}\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\right]\mathrm{d}x\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right) - \delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\mathrm{d}x && \text{利用式 (1.5)}\\
&= \int_{x_1}^{x_2}\delta y\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{1.8}$$

我们已经知道，泛函取极值应有 $\delta J = 0$，也就是要让式 (1.8) 等于 0，也就是式中的积分表达式要恒为 0. 由于 δy 是在函数 $y(x)$ 上加的扰动，它不能为 0，因此只能有

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{1.9}$$

式 (1.9) 便是变分问题的**欧拉-拉格朗日方程** (Euler-Lagrange equation)，它是泛函取极值的必要条件. 至此，本节的使命已经完成，我们得到了一个非常重要的方程，它将在后面的分析中发挥神奇的作用.

1.3 速度相空间

经历了上一节大篇幅的数学推导，读者或许有些疲倦了，甚至有些怨言：我们怎么跑偏题了？这是物理讲义啊，怎么光去讲数学了？所以现在是时候补充一些预备的物理知识了.

首先我们要明白，力学的基本问题，是要研究**力学系统的"位形"随时间的演化**. 位形 (configuration)，指力学系统中各个质点的空间位置，描述了系统中各点的空间分布. 例如，对于一个 N 个质点组成的质点系，给出 N 个质点的位矢

$$\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N\}$$

便给出了质点系的一个位形.

下面我们要思考一个问题：确定了系统的位形，是否就唯一确定了系统的状态？定性来分析：位置相同，可以有不同的速度；速度不同，会导致下一时刻的位置不同，所以当前位形是不能决定以后的位形的. 但如果位形和速度都确定了，我们就能推知其下一时刻的位形和速度. 也就是说，**位形与速度合在一起，构成了系统的状态**. 还是以 N 个质点组成的质点系为例，如果我们给出每个质点的位矢和速度

$$\left\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N; \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \cdots, \dot{\vec{r}}_N\right\}$$

也就给出了质点系的一个状态.

"位形 + 速度"构成的状态空间，称为**速度相空间**. 速度相空间中的一个点，便代表了系统的一种可能状态. 分析力学有两大形式：拉格朗日力学和哈密顿力学. 而**拉格朗日力学便是在速度相空间中研究问题**. 提前剧透一下也无妨：哈密顿力学则是在"相空间"中研究问题.

谈完了空间，下面我们来谈谈坐标. 坐标的本质，其实就是某种空间的参数化. 只要给定一组数，能够唯一确定空间中的一点，就可以把这组数叫做坐标. 以我们生活的三维空间为例，为了定量描述某个点的位置，我们可以用直角坐标、球坐标、柱坐标等. 为了参数化位形空间 (系统所有可能位形的集合)，我们可以引入**广义坐标** (generalized coordinates)，它是任何一组能够唯一确定系统位形的独立参量.

让我们以一个简单的单摆为例，来让大家感受什么是广义坐标. 假设摆长是固定的，我要确定这个小球的位置，很显然只需要摆角 θ 这一个参数就够了. 除此之外，其横坐标 x 也可以充当广义坐标的角色. 那它的纵坐标 y 能不能作为广义坐标呢？答案是不能，因为同一个 y 会对应两个左右对称的位置. 相信经过这个例子，大家应该能明白广义坐标有什么用了.

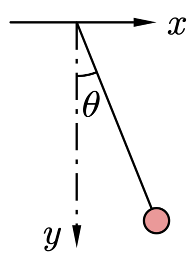

图 1.4: 单摆的广义坐标可以选 θ 或 x

上面的例子算得上是非常简单的物理系统了，如果情形再复杂一些，恐怕广义坐标就没有这么好选取了. 所以我们现在存在几个疑问：

- 一个力学系统究竟要几个广义坐标，才能完整描述其位形？
- 如何能够减少广义坐标的数目 (当然是数目越少越好分析)？

1.4 约束与自由度

想要解答上一节遗留的两个疑问，我们必须再学习一下约束 (constraint) 的概念. 其实这个概念很好理解：约束是对系统所能达到的状态所强加的“运动学”限制条件，也就是说状态空间 (速度相空间) 中有些地方是无法到达的，系统实际能够到达的只是状态空间的某个子空间.

举个例子，我在体育场跑步，理论上我可以到达这块场地的任何一个点. 但现在老师规定：只能在跑道上跑，不准越线. 于是我的活动空间就被限缩在了跑道上，跑道外的地方我是不能到达的，这就是一个约束.

下面我们给约束分类. 首先按照质点是否能够脱离约束，可将约束分为可解约束和不可解约束. 用杆连接的小球，这显然是一个不可解约束，因为杆具有不可压缩性，小球距离轴心的距离无论如何都是杆长 l. 设轴心为原点，则这个约束的数学表达式就是 $x^2+y^2+z^2=l^2$. 如果把杆换成一根绳子，那就变成了可解约束，因为当小球距轴心的距离小于绳长 l 时，绳子是没有张力的，小球完全感受不到自己身上绑了一根绳子. 这个约束的数学表达式为 $x^2+y^2+z^2\leqslant l^2$.

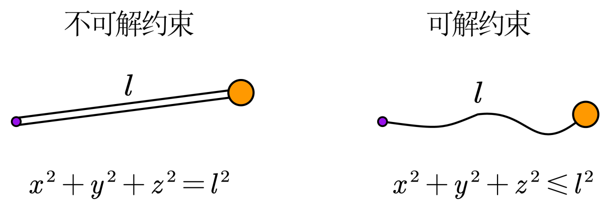

图 1.5: 直观理解可解与不可解约束

也就是说，不可解约束的数学表达式应是一个“等式”：

$$f\left(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_n;\dot{\vec{r}}_1,\cdots,\dot{\vec{r}}_n;t\right)=0 \tag{1.10}$$

而可解约束则是一个“不等式”：

$$f\left(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_n;\dot{\vec{r}}_1,\cdots,\dot{\vec{r}}_n;t\right)\leqslant 0 \tag{1.11}$$

很显然，不可解约束的“等式”要比可解约束的“不等式”好分析得多，所以我们对不可解约束进行更深入的研究. 如果仅仅对系统的“位形”进行约束，称为几何约束：

$$f\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n;t\right)=0 \tag{1.12}$$

如果同时约束了位形和速度，则称为微分约束：

$$f\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n;\dot{\vec{r}}_1,\dot{\vec{r}}_2,\cdots,\dot{\vec{r}}_n;t\right)=0 \tag{1.13}$$

乍一看好像觉得这样分类挺合理，但如果仔细想想就会发现问题：几何约束只约束了位形，但是约束位形必然会约束速度呀！比方说我把一个三维空间里的小球约束在 xOy 平面上，这看起来只约束了位形，但此时小球的速度只能位于平面内，不可能有 z 方向的速度分量，所以小球的速度也受到了约束. 为了进一步说明问题，我们可以把式 (1.12) 对时间求导：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=0\longrightarrow\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\vec{r}_k}\dot{\vec{r}}_k=0 \tag{1.14}$$

求导后式中明显出现了速度，所以**几何约束可以通过求导变成微分约束**.

那能不能反过来呢：微分约束是否一定可以通过积分变成几何约束？答案是否定的，如果二者可以畅通无阻地互换，那人们根本没必要把它们区分开来. 实际上，按照是否可积，我们还可以把微分约束分成可积分的和不可积分的.

- 可积分的微分约束：如 $\dot{x}-\dot{y}=0$，积分后得 $x-y=C$，顺利转化为了几何约束
- 不可积分的微分约束：如 $\dot{x}-\dot{y}z=0$，左右同时乘上 $\mathrm{d}t$ 得 $\mathrm{d}x-z\mathrm{d}y=0$. 如果想把它积出来，我们必须知道 z 随 y 的变化 $z(y)$，很显然这是不能做到的. 因为判断约束是在解题之前进行的，我们压根不知道系统怎么运动，所以也就不知道 $z(y)$ 的表达式了.

经历了前面大段的讨论，我们有了一个小结论：几何约束和可积分的微分约束实质上同时约束了系统的位形和速度，因此人们把它们统称为**完整约束**；完整约束之外的所有约束则称为不完整约束. 幸运的是，本课程只分析受完整约束的系统——完整系统.

最后的最后，按照约束表达式是否显含时间 t，还可以进行分类. 如果约束中不显含时间，则称为定常约束 (稳定约束)；反之则称为非定常约束 (不稳定约束).

好了，我们终于扯完了约束. 现在可以回答上一节遗留的问题了：力学系统需要多少个广义坐标才能完整描述其状态？这个问题涉及到系统的**自由度**问题. 自由度的定义是：确定一个系统运动状态所必须的、独立变化的物理量个数.

假设系统中现在有 N 个质点, 在三维空间中每个质点都需要 3 个坐标，所以理论上描述这堆质点的位置需要 $3N$ 个坐标. 但是分析力学较于牛顿力学的一个优势便是：约束能够大大简化问题. 具体一点，一个约束可以减少一个自由度. 设自由度为 s，所受完整约束的个数为 k，则应有

$$s=3N-k \tag{1.15}$$

在分析问题时，**广义坐标数就等于自由度**.

举个例子，一个二维平面中运动的质点，其自由度为 2，你需要找两个坐标才能描述它的位置 (直角坐标或极坐标). 但如果你给它加一个约束，比如说把它系在一根绳上构成一个单摆，那自由度就变成了 1，只需要一个坐标就可以了.

我之所以花大功夫向读者介绍约束与自由度，是因为它们是分析力学的基础知识，虽然看起来琐碎，但是在学一门新的课程时打牢基础是很有必要的. 之后再遇到这些专业名词时，我们就不至于一脸茫然不知所措了.

1.5 最小作用量原理

请读者重新看看式 (1.3) 那个积分式，它的地位可不一般. 绝大多数情况下，物理中所遇到的泛函都可以写成那样的积分形式. 只不过我们要把式中的字母变一下：

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L\left(t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha\right) \mathrm{d}t \tag{1.16}$$

式中 L 称为**拉格朗日量** (Lagrangian)，积分 S 称为**作用量** (action). 拉氏量 L 是广义坐标 q_α、广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 和时间 t 的函数，它描述了整个物理系统的动力状态. 分析力学的最高原理——最小作用量原理 (哈密顿原理) 表述如下：

最小作用量原理 *经典力学体系在时刻 t_1 和 t_2 之间的真实运动轨迹使得该体系的作用量 S 取极值.*

而我们又知道，泛函取极值的必要条件已经由式 (1.9) 给出了，我们只需要把式中的 F 换成 L，x 换成 t，y 换成 q_α，就可以得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \tag{1.17}$$

上式就是我们想要得到的运动微分方程，称为**拉格朗日方程**. 也就是说，想要分析一个力学系统的运动，我们的分析逻辑其实是相当清晰的：

1. 确定自由度，然后选择合适的广义坐标；
2. 写出系统的拉格朗日量
3. 代入拉格朗日方程 (1.17)，便得到了系统的运动学方程

于是后面学习的重点，自然就变成了如何才能写出力学系统的拉格朗日量. 这个我们将在下一章重点学习，接下来我想就如何理解这个最高原理——最小作用量原理，进行一些说明.

想象有一个叫哈密顿的人对牛顿力学一无所知，他现在在观察平抛运动. 设小球在同一点以不同水平速度出射，做了很多次实验，他发现了如下规律：

- 只要出射高度相同，那么落地的时间就是相同的
- 以不同水平速度出射，小球落地点的水平位置是不同的
- 小球的运动轨迹和落地点的位置是一一对应的，也就是说不可能抛出两条不同的轨迹，却有着相同的落地点

上面的第三点说明：*小球的轨迹可以被起点和终点的位置唯一确定！*如图1.6所示，其中实线是我们所能真正观察到的轨迹，而虚线是从来没有出现过的.

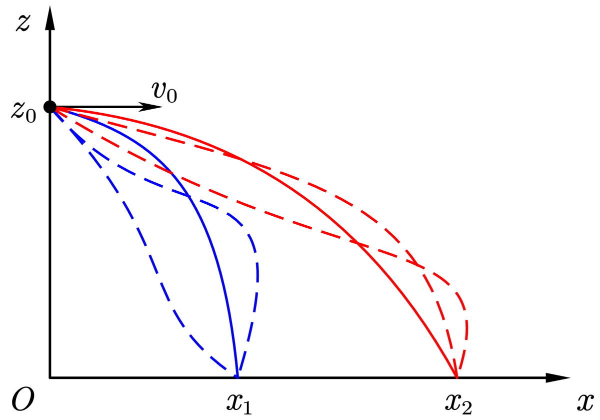

图 1.6: 小球的空间轨迹只能是实线

哈密顿自然没有放过这一点，他做了如下思考：上面的实线轨迹和虚线轨迹都满足相同的端点条件，为什么偏偏只有实线能够发生呢？这条轨迹到底有什么特殊之处呢？于是他就猜测：大自然一定存在某种法则，给每一条轨迹一个“指标”，只有这个“指标”取特殊值时对应的运动才能发生. 现在我们知道了，这个“指标”就叫做作用量，这个特殊的条件就是作用量必须取极小，这条法则就叫做最小作用量原理.

现在我们应该能够直观感受到最小作用量原理与牛顿力学在处理问题时的思路在本质上的不同了. 在牛顿力学中，我们如果知道某一时刻的位置与速度，运动微分方程就决定了下一时刻的位置和速度，然后又不断决定下下一时刻的状态，如此往复. 所以牛顿力学的思维方式是局域的、微分的. 而最小作用量原理是把所有可能的运动状态都交给大自然筛选，大自然会自动筛选出作用量最小的那一种运动情形.

朗道的《力学》正是基于最小作用量原理，推导出了整个分析力学体系. 本套讲义也将沿用这一逻辑，一开始就把这个最高原理交代清楚，它将迅速把我们带入分析力学的思维模式.

Chapter 2

拉格朗日力学

2.1 拉氏量的非唯一性

上一章我们基于最小作用量原理，得到了一个非常重要的微分方程——拉格朗日方程. 并且我们还提到，拉格朗日力学处理问题按照三步走就行了：(1) 确定自由度，选择广义坐标；(2) 写出力学系统的拉氏量；(3) 代入拉格朗日方程，得到运动方程. 所以现在问题的核心就是：怎么找到系统的拉氏量？

在现代的物理理论中，面对一个复杂的系统，我们很难说能够直接“算出”它的拉氏量，很多时候往往要结合对称性、物理定律、实验现象等“猜出”一个拉氏量. 只要最后你猜出来的这个答案，符合实验数据，那这个拉氏量就是对的，就是有效的. 换句话说：它怎么来的，who cares?

假如有两个人，分别得到了两个不同的拉氏量，最后一验证发现都是符合实际的，那是不是这两个人得到的拉氏量都是对的呢？没错，它们都是对的！所以我们首先要接受一个事实：**一个系统的拉氏量不是唯一的，而是可以有无穷多种写法**.

下面我们要证明一个结论：*拉氏量加上一个任意函数对时间的全导数后，仍然是原力学系统的拉氏量*. 转换成数学语言就是，假如现在已经有了一个 L 满足拉格朗日方程 (1.17)，设位形空间中有一个任意的函数 $f = f(q_1, \cdots, q_s; t)$，则 $L' = L + \dot{f}$ 依然满足方程 (1.17).

首先，f 对时间 t 的全导数为

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \tag{2.1}$$

要证明结论，也就是要证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_\alpha} \tag{2.2}$$

我们先计算上式的左半部分：

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha\right) = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \tag{2.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta \tag{2.4}$$

然后计算右半部分：

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta \tag{2.5}$$

我们看到,式 (2.4) 和 (2.5) 千真万确是相等的,所以式 (2.2) 得到了证明,也就是说 $L' = L + \dot{f}$ 确实也是系统的拉氏量.

2.2 拉氏量的一般形式

研究一个力学问题，必须要有参考系. 在之前的牛顿力学中，我们曾引入惯性参考系的概念，空间相对于它是均匀的各向同性的，时间相对于它是均匀的. 我们对于拉氏量的研究，将从惯性系开始.

考虑一个在惯性系中运动的**自由质点**，其满足的拉格朗日方程可写成：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{2.6}$$

由于时间和空间在惯性系中都是均匀的，所以 L 中不显含 t 和 $\vec{r}$；由于空间的各向同性，所以 L 也不能依赖于 $\vec{v}$ 的方向. 这样一来我们别无选择：L 只能是速度大小 v 的函数，我们况且令它是 v^2 的函数好了，即

$$L = L\left(v^2\right) \tag{2.7}$$

而我们又知道，相对于惯性系匀速运动的参考系还是惯性系. 我们设惯性系 K 以一个无穷小的速度 $\vec{\varepsilon}$ 相对于惯性系 K' 匀速运动，那么质点在 K' 中的速度应为 $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$. 设 K 中的拉氏量为 $L = L\left(v^2\right)$，在 K' 中的拉氏量为 $L' = L\left(v'^2\right)$. 由伽利略相对性原理，这两个惯性系中运动方程的形式应是相同的，所以 L' 和 L 只能相差一个时间的全导数. 于是：

$$L' = L\left(v'^2\right) = L\left(v^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} + \varepsilon^2\right) \tag{2.8}$$

把它展开成 $\vec{\varepsilon}$ 的幂级数并忽略高阶小量：

$$L\left(v'^2\right) = L\left(v^2\right) + 2\frac{\partial L}{\partial v^2}\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} \tag{2.9}$$

观察上式中标蓝的部分，只有当这一部分与速度 $\vec{v}$ 呈线性关系时，才能是时间的全微分. 所以 $\dfrac{\partial L}{\partial v^2}$ 得是一个常数，也就是 L 与 v^2 成正比. 我们可令

$$L = \frac{m}{2}v^2 \tag{2.10}$$

式中的 m 是一个常数，称为质点的**质量**.

我们还可以把式 (2.10) 的结论推广到质点系. 如果忽略质点间的相互作用，则质点系的拉氏量可写成

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} \tag{2.11}$$

但现实中的质点系往往不能忽略内部的相互作用. 现在我们考虑有内部相互作用的质点系，但它不受任何外部作用，称为**保守系统**. 设质点间的相互作用是关于坐标 (位置) 的函数，我们可以引入一个新函数 V 去刻画这种相互作用：

$$V = V\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n\right) \tag{2.12}$$

然后可以把拉氏量 L 修正为：

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} - V\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n\right) \tag{2.13}$$

将函数 V 称为质点系的**势能**，将 $T = \sum\limits_\alpha \dfrac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$ 称为质点系的**动能**. 因此保守系统的拉氏量等于动能与势能的差.

2.3 练习：写出拉氏量

总之前面那一节所有的话你都可以不记得，但是必须记住那最后一句话：保守系统的拉氏量等于动能减势能！所以写出一个力学系统的拉氏量并没有我们想的那么难 (当然了教科书上的情形都比较简单，实际问题就未必了)，你只要按照流程不急不躁，大概率是可以完成的. 下面我为大家介绍几个例子，帮助大家感受拉氏量的求解过程.

示例 1：平面双摆　该系统的自由度 $s=2$，选择 l_1 和 l_2 与竖直方向的夹角 ϕ_1 和 ϕ_2 为广义坐标. 对于质点 m_1，容易求得

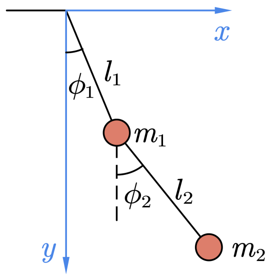

图 2.1: 平面双摆

$$T_1=\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\phi}_1^2\ ,\ V_1=-m_1gy_1=-m_1gl_1\cos\phi_1$$

对于质点 m_2，我们可以先把它的直角坐标用广义坐标表示：

$$x_2=l_1\sin\phi_1+l_2\sin\phi_2\ ,\ y_2=l_1\cos\phi_1+l_2\cos\phi_2$$

其动能

$$\begin{aligned}T_2&=\frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right)\\&=\frac{1}{2}m_2\left[\left(l_1\cos\phi_1\dot{\phi}_1+l_2\cos\phi_2\dot{\phi}_2\right)^2+\left(-l_1\sin\phi_1\dot{\phi}_1-l_2\sin\phi_2\dot{\phi}_2\right)^2\right]\\&=\frac{1}{2}m_2\left[l_1^2\dot{\phi}_1^2+l_2^2\dot{\phi}_2^2+2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)\right]\end{aligned}$$

势能

$$V_2=-m_2gy_2=-m_2g\left(l_1\cos\phi_1+l_2\cos\phi_2\right)$$

因此系统的拉氏量

$$\begin{aligned}&L=\left(T_1+T_2\right)-\left(V_1+V_2\right)=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)l_1^2\dot{\phi}_1^2+\frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\phi}_2^2+m_2l_1l_2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2\cos\left(\phi_1-\phi_2\right)\\&+\left(m_1+m_2\right)gl_1\cos\phi_1+m_2gl_2\cos\phi_2\end{aligned}$$

示例 2：离心节速器　如图2.2所示，质点 m_2 沿着竖直轴运动，整个系统以匀角速度 Ω 绕轴转动. 由于 m_1 与固定点 A 的距离保持 a 不变，因此用球坐标系分析会更方便些. 球坐标系下质点动能的表达式为：

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\tag{2.14}$$

式中 r 为质点径矢的长度；θ 是径矢与 z 轴间的夹角，叫做极角；φ 叫做方位角. 由于这个公式的推导稍微有些复杂，读者感兴趣的话可参阅附录A.1.

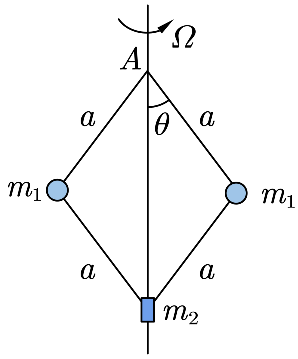

图 2.2: 离心节速器

该系统自由度 $s=1$，选择 θ 为广义坐标. 对于质点 m_1，在以 A 为原点的球坐标中 $r\equiv a, \dot{\varphi}\equiv \Omega$，代入式 (2.14) 得到动能为：

$$T_1=\frac{1}{2}m_1\left(a^2\dot{\theta}^2+a^2\sin^2\theta\Omega^2\right)$$

而质点 m_2 只能沿着竖直轴运动，且到 A 的距离 $r_2=2a\cos\theta$，因此动能为

$$T_2=\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2=2m_2a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$$

故整个系统的动能

$$T=2T_1+T_2=m_1\left(a^2\dot{\theta}^2+a^2\sin^2\theta\Omega^2\right)+2m_2a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$$

而系统的势能

$$V=-2\left(m_1+m_2\right)ga\cos\theta$$

因此拉氏量

$$\begin{aligned}L&=T-V\\&=m_1\left(a^2\dot{\theta}^2+a^2\sin^2\theta\Omega^2\right)+2m_2a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2+2\left(m_1+m_2\right)ga\cos\theta\end{aligned}$$

示例 3：滑轮组　　不可伸缩的柔软轻绳绕过两个定滑轮和一个动滑轮，滑轮的质量可忽略，质量为 m_1, m_2, m_3 的物体分别悬挂于绳的两端和动滑轮下.

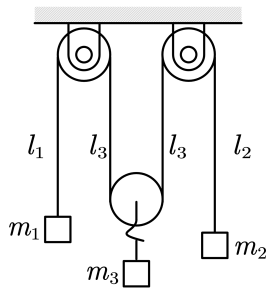

图 2.3: 滑轮组

该系统有三个质点做上下方向的一维运动，但由受到绳长度的限制，因此自由度 $s=2$. 选取 l_1 和 l_2 为广义坐标，设总绳长为 l，则 $l_3=\frac{1}{2}\left(l-l_1-l_2\right)$.

$$
\begin{aligned}
V &= -m_1gl_1 - m_2gl_2 - \frac{1}{2}m_3g\left(l-l_1-l_2\right) \\
T &= \frac{1}{2}m_1\dot{l}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{l}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\left[-\frac{1}{2}\left(\dot{l}_1+\dot{l}_2\right)\right]^2 \\
L = T - V &= \frac{1}{2}\left(m_1+\frac{1}{4}m_3\right)\dot{l}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2+\frac{1}{4}m_3\right)\dot{l}_2^2 + \frac{1}{4}m_3\dot{l}_1\dot{l}_2 \\
&+ \left(m_1-\frac{1}{2}m_3\right)gl_1 + \left(m_2-\frac{1}{2}m_3\right)gl_2 + \frac{1}{2}m_3gl
\end{aligned}
$$

这一节我们分析了三个例子，练习了如何写出一个系统的拉氏量. 读者可再多找一些例子自己练练，甚至对于同一个例子还可以试试选择不同的广义坐标，看看求解难度是否差异显著.

2.4 一般动力学问题的求解

写完了系统的拉氏量，下一步自然就是往拉格朗日方程里面代入，便可以求出系统的运动方程. 要注意的是，每个广义坐标都可以对应一个拉格朗日方程，所以最后你需要写出 s 个方程.

这一节我们会求解两个例题. 这两个例题都是牛顿力学里面的经典题，我们今天将用分析力学的方法解决它们. 读者在这一节将更加直观地感受到牛顿力学和分析力学在解决问题思路上的不同.

例题 1 质量 m_1 的质点沿质量为 m_2 的劈尖下滑，忽略所有摩擦. 求质点的水平加速度 $\ddot{x}_1$ 和劈尖的加速度 $\ddot{x}_2$.

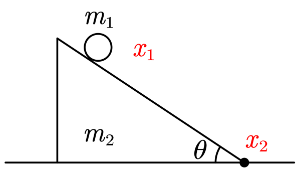

图 2.4: 质点沿劈尖下滑

系统的自由度 $s=2$，选择质点的横坐标 x_1 和劈尖底部尖端的横坐标 x_2 为广义坐标. 这样一来质点的纵坐标 $y_1=(x_2-x_1)\tan\theta$

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left[\dot{x}_1^2+\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2\tan^2\theta\right] + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\
V &= m_1gy_1 = m_1g\left(x_2-x_1\right)\tan\theta
\end{aligned}
$$

系统的拉氏量

$$
L = T - V = \frac{1}{2}m_1\left[\dot{x}_1^2+\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)^2\tan^2\theta\right] + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - m_1g\left(x_2-x_1\right)\tan\theta
$$

对于 x_1，代入 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0$. 首先我们可以先写出 $\dfrac{\partial L}{\partial x_1}$ 和 $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}$(这是好习惯！)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= m_1g\tan\theta \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} &= m_1\dot{x}_1 - m_1\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)\tan^2\theta
\end{aligned}
$$

代入拉格朗日方程有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m_1\dot{x}_1 - m_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\tan^2\theta\right] = m_1 g\tan\theta$$
$$m_1\ddot{x}_1 - m_1(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan^2\theta = m_1 g\tan\theta \tag{2.15}$$

对于 x_2，进行同样的操作，得到：

$$m_1(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\tan^2\theta + m_2\ddot{x}_2 = -m_1 g\tan\theta \tag{2.16}$$

联立式 (2.15) 和 (2.16)，解出

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2\sin\theta\cos\theta}{m_2 + m_1\sin^2\theta}g\ ,\ \ddot{x}_2 = -\frac{m_1\sin\theta\cos\theta}{m_2 + m_1\sin^2\theta}g$$

如果我没记错的话，牛顿力学中解这道题好像是以劈尖为参考系，引入惯性力，各种受力分析还是比较麻烦的. 但是分析力学完全不用考虑受力，我们要做的是计算能量，然后代入拉格朗日方程暴力求解就好了.

例题 2　有一根长为 l，质量为 m 的匀质绳，一半搁在光滑桌面上，另一半垂挂于桌外，绳无初速落下. 问在绳全部离开桌面的瞬间，绳的速度多大？

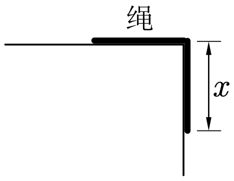

图 2.5: 绳无初速下滑

此时自由度 $s=1$，选择绳垂挂在外面的长度 x 为广义坐标，则

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$
$$V = -\frac{x}{l}mg\frac{x}{2} = -\frac{1}{2l}mgx^2$$
$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2l}mgx^2$$

代入拉格朗日方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$，得到

$$m\ddot{x} - \frac{1}{l}mgx = 0 \tag{2.17}$$

这道题让我们求的是速度 $\dot{x}$，所以我们应该找到 $\dot{x}$ 和 x 之间的函数关系. 对式 (2.17)，我们可以用凑微分法，这应该是牛顿力学中一个很常用的技巧：

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{l}gx$$
$$\dot{x}\mathrm{d}\dot{x} = \frac{1}{l}gx\mathrm{d}x \tag{2.18}$$

然后对式 (2.18) 两边同时积分得到

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2l}gx^2 + C$$

代入初始条件 $x=l/2, \dot{x}=0$，可得到 $C=-\frac{1}{4}gl$，因此

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2=\frac{1}{2l}gx^2-\frac{1}{4}gl$$

最后将 $x=l$ 代入上式，解出

$$\dot{x}=\frac{\sqrt{3gl}}{2}$$

2.5 非独立广义坐标

到目前为止，我们所描写的力学系统的所有广义坐标都是独立的. 但是如果约束非常复杂，那么想要找到完全独立的广义坐标可能就没有那么容易了. 比方说对于一个在三维空间中运动的质点，如果它受到非常多的约束，那么想要找到完全独立的广义坐标去描述它可能就比较难. 既然如此，我们为什么不能返璞归真，直接用它的直角坐标 (x,y,z) 去描述它呢？但问题是这三个直角坐标并不是相互独立的呀，我们之前讲的解题方法可能不能用了. 所以下面我们就要把最小作用量推广到非独立广义坐标的情形.

我们可以用高等数学中的**拉氏乘子法**来解决这类问题. 拉氏乘子法是一种求解约束下条件极值的方法，操作步骤如下：对于二元函数 $\Phi=\Phi(x,y)$，假设约束为 $f(x,y)=0$，可引入拉氏乘子 λ，并构造函数

$$\tilde{\Phi}(x,y,\lambda)=\Phi(x,y)+\lambda f(x,y) \tag{2.19}$$

然后写出下面的三个方程：

$$\begin{cases}\tilde{\Phi}_x=\Phi_x(x,y)+\lambda f_x(x,y)=0\\ \tilde{\Phi}_y=\Phi_y(x,y)+\lambda f_y(x,y)=0\\ f(x,y)=0\end{cases} \tag{2.20}$$

由这组方程解出 x,y,λ，这样得到的 (x,y) 便是 $\Phi=\Phi(x,y)$ 在约束 $f(x,y)=0$ 下的可能极值点.

下面我们分析约束下的最小作用量原理. 对于作用量 $S=\int L(t,q_\alpha,\dot{q}_\alpha)\,\mathrm{d}t$，由式 (1.8) 可知，其取极值要求

$$\delta S=\int \mathrm{d}t\sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right]\delta q_\alpha=0 \tag{2.21}$$

由于此时广义坐标之间不独立，因此我们并不能武断地要求 δq_α 前的系数为零，也就是无法推出 $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)=0$.

我们设广义坐标之间存在一个约束，约束方程为

$$f(t,q_\alpha)=0 \tag{2.22}$$

对 f 取变分有

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial t}\delta t+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\equiv 0 \tag{2.23}$$

要注意上面的推导利用了对时间变分为 $0(\delta t=0)$ 的结论. 引入拉氏乘子 $\lambda(t)$，有

$$\int \mathrm{d}t\lambda\delta f=\int \mathrm{d}t\lambda\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha=0 \tag{2.24}$$

将式 (2.24) 加到 (2.21) 上去，得到

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}t\,(\delta L+\lambda\delta f) &= \int \mathrm{d}t \sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha \\
&= \int \mathrm{d}t \sum_{\alpha=1}^{s}\left[\frac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]\delta q_\alpha
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

要注意，此时 δq_α 仍然不是独立的，所以还是得不到 $\dfrac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial q_\alpha}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial \dot{q}_\alpha}=0$

但是由于 $\lambda(t)$ 可以是任意的，所以我们可以通过合适地选择 $\lambda(t)$，使得对于某一个广义坐标满足. 比方说我们取 $\lambda(t)$ 让 q_s 满足:

$$
\frac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial \dot{q}_s}=0 \tag{2.26}
$$

这样一来式 (2.25) 中将不再出现 q_s，求和的上限将变成 $s-1$:

$$
\int \mathrm{d}t\,(\delta L+\lambda\delta f) = \int \mathrm{d}t \sum_{\alpha=1}^{s-1}\left[\frac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial \dot{q}_\alpha}\right]\delta q_\alpha \tag{2.27}
$$

由于 s 个广义坐标，1 个约束，我们已经想办法消去了 q_s，所以剩下 $s-1$ 个广义坐标之间当然就是相互独立的了. 于是我们可以名正言顺推出：

$$
\frac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial q_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\,(L+\lambda f)}{\partial \dot{q}_\alpha}=0\,(\alpha=1,2,\cdots,s-1) \tag{2.28}
$$

好了，我们发现，式 (2.26) 的 1 个方程，加上式 (2.28) 的 $s-1$ 个方程，再加上式 (2.22) 这个约束方程，共 $s+1$ 个方程，定出了这个约束问题的全部变量. 除此之外，我们还可以发现这 $s+1$ 个方程恰好就是新的作用量

$$
\tilde{S}\,(t,q_\alpha,\dot{q}_\alpha,\lambda)=\int \mathrm{d}t\,[L\,(t,q_\alpha,\dot{q}_\alpha)+\lambda\,(t)\,f\,(t,q_\alpha)] \tag{2.29}
$$

将 q_α 和 λ 全部视为独立变量时的欧拉-拉格朗日方程.

在解题时，我们可以把式 (2.28) 改写成

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=\lambda\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\,(\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{2.30}
$$

可以看到，非独立广义坐标下的拉格朗日方程，跟原来我们熟练运用的那个形式长得很像，只不过方程右边不再为 0 了，而是要加入约束的影响. 这一节的理论推导还蛮复杂的，如果你觉得暂时难以接受，请先将式 (2.30) 记住，我们将用它来解决一个例题.

纯滚动的圆环　一个质量为 M，半径为 R 的圆环在倾角为 ϕ 的斜坡上做纯滚动，求其加速度和角加速度.

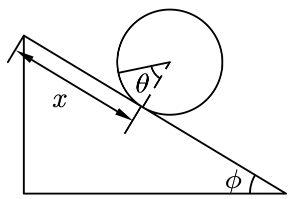

图 2.6: 纯滚动的圆环

选择在斜面上的滚动距离 x 和圆盘转角 θ 为广义坐标，则

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$
$$V=Mg\,(l-x)\sin\phi$$
$$L=T-V=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2-Mg\,(l-x)\sin\phi$$

由于圆环做纯滚动，所以滚动距离 x 和圆盘转角 θ 之间会存在约束关系：

$$f=x-R\theta=0 \tag{2.31}$$

代入 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=\lambda\frac{\partial f}{\partial x}$，得到

$$M\ddot{x}-Mg\sin\phi=\lambda \tag{2.32}$$

代入 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=\lambda\frac{\partial f}{\partial \theta}$，得到

$$MR^2\ddot{\theta}=-\lambda R \tag{2.33}$$

联立式 (2.31)-(2.33)，解得

$$\ddot{x}=\frac{g\sin\phi}{2},\ddot{\theta}=\frac{g\sin\phi}{2R},\lambda=-\frac{Mg\sin\phi}{2}$$

本题我们选择了两个广义坐标，但由于存在 1 个约束，所以系统的自由度 $s=1$. 但我们很难只用一个广义坐标去描述这个圆环的运动，所以此时干脆带着约束分析，反而更容易.

Chapter 3

守恒与对称

3.1 广义动量守恒

牛顿力学在处理问题时有一个大杀器——各种守恒定律的应用，如动量守恒、角动量守恒、能量守恒等. 现在我们学习分析力学，自然就想问：分析力学能不能也给出这些守恒定律呢？

我们将运动过程中的不变量，称为**运动积分** (integrals of motion). 本章的任务之一，是从分析力学出发得到运动积分. 我们依然可以从拉格朗日方程 (1.17) 入手，式中拉氏量 L 是广义坐标和广义速度的函数. 如果拉氏量不显含某个广义坐标 q_α，则此坐标称为**循环坐标** (cyclic coordinates). 对于 q_α，此时显然有

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \equiv 0 \tag{3.1}$$

因此拉格朗日方程变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = 0 \tag{3.2}$$

我们知道，如果一个东西对时间 t 的导数为 0，那么它就是不随时间而变的，也就是说它是守恒的. 这样一来我们立马得到了一个运动积分：

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \mathrm{const} \tag{3.3}$$

我们将 p_α 称为**广义动量**. 式 (3.3) 说明：*循环坐标对应的广义动量守恒*.

我们在牛顿力学中学的动量守恒和角动量守恒，其实已经被广义动量守恒包括进去了.

- 当 q_α 是普通直角坐标时，自由粒子的拉氏量可写成

  $$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$

  比方说 x 是循环坐标，则

  $$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mv_x = \mathrm{const}$$

  这便是动量守恒.

- 当 q_α 是角坐标时，自由粒子的拉氏量可写成

  $$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

  如果 θ 为循环坐标，则

  $$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = \mathrm{const}$$

  这便是角动量守恒.

3.2 广义能量守恒

我们把拉氏量 $L = L(t, q_\alpha, \dot{q}_\alpha)$ 对时间求全导数：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \ (\text{利用拉格朗日方程}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\dot{q}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

然后将式 (3.4) 改写为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.5}$$

定义**能量函数** (energy function)

$$h \equiv \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L \tag{3.6}$$

则式 (3.5) 可写为：

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{3.7}$$

我们看到，**如果拉氏量 L 不显含时间，则能量函数守恒.**

虽然得到了一个新的运动积分，但我们定义的这个能量函数，到底有着怎样的物理意义呢？它是系统的总能量吗？因此下面的工作是要弄清楚能量函数 h 到底代表什么. 我们知道拉氏量等于动能减势能，且势能仅仅是广义坐标的函数. 因此我们可以把式 (3.6) 化为

$$h = \sum_\alpha \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - T + V = \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - T + V \tag{3.8}$$

对于 N 个质点组成的系统，设每个质点的位矢为 $\vec{r}_i\,(i=1,\cdots,N)$. 由于 $\vec{r}_i$ 应为各广义坐标的函数，即

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t) \tag{3.9}$$

我们将其对时间求导：

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \tag{3.10}$$

这样一来，系统的动能：

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right) \\ &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} && (3.11) \\ &+ \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha && (3.12) \\ &+ \sum_i \frac{1}{2} m_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \cdot \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha && (3.13) \end{aligned}$$

注意看，式 (3.11) 中不含有广义速度，是广义速度的零次齐函数；式 (3.12) 是广义速度的一次齐函数；式 (3.13) 是广义速度的二次齐函数. 将它们简记为 T_0, T_1, T_2，则

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \tag{3.14}$$

式 (3.8) 中出现了动能 T 对广义速度 $\dot{q}_\alpha$ 的偏导，而 T 又是由 $\dot{q}_\alpha$ 的齐次函数相加而成的. 为此，下面补充一个重要的定理.

齐次函数的欧拉定理 若 $f = f(x_1, x_2, \cdots)$ 是 n 次齐次函数，则

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = nf \tag{3.15}$$

利用欧拉定理，我们可以轻而易举地求出

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha &= \sum_\alpha \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha \\ &= 0 \cdot T_0 + 1 \cdot T_1 + 2 \cdot T_2 \\ &= T_1 + 2T_2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

将式 (3.16) 代入式 (3.8)，得到

$$h = T_1 + 2T_2 - (T_0 + T_1 + T_2) + V = T_2 - T_0 + V \tag{3.17}$$

如果 $\vec{r}_i$ 不依赖于 t，由式 (3.11) 和 (3.12) 可知 $T_0 = T_1 = 0$，此时系统的动能 T 正好就是 T_2，式 (3.17) 变为：

$$h = T_2 + V = T + V = E \tag{3.18}$$

这便是系统的总能量.

我们可以把上面的分析总结为下面的话：*能量函数 h 不一定是系统的总能量，只有 $\vec{r}_i$ 不依赖于 t 才是 (定常约束系统).*

3.3 连续对称性

什么是对称性？这看上去似乎是一个相当抽象相当主观的问题. 不过在数学和物理中，我们一般把对称性定义为**某种变换下的不变性**. 举个例子，你把一个正方形绕其中心旋转一个角度，当转角为 $90°, 180°, 270° \cdots$ 这些值时，正方形保持不变 (也就是你看不出它是否被人旋转过). 不难看出，要想让正方形在转动后不变，转角只能取一些离散的值.

而如果是一个圆，情况就不一样了. 将一个圆绕其圆心旋转，转角取任意数值，都可以保证这个圆在旋转后是不变的. 也就是说此时变换参数 (旋转角) 可以取连续的值. 我们把这种性质叫做**连续对称性**. 数学上有专门研究连续对称的理论——李代数，感兴趣的读者可以参阅更加专业的书籍，它已经成为了现代物理学中非常重要的一个数学工具.

3.4 诺特定理

这一节我们揭示物理学中对称性与守恒律之间的关系. 有了上一节关于对称性的铺垫，我们可以把物理定律的对称性定义为**物理定律的形式在变换前后的不变性**.

在物理学中，对称性和守恒律是一一对应的. 例如：*空间平移对称对应于动量守恒定律，旋转对称对应于角动量守恒定律，时间平移对称对应于能量守恒定律.* 如果你觉得这样的语言过于生涩，我们可以换更加形象的语言来描述：

1. 时间平移对称，就是说如果物理定律不随时间变化，昨天、今天和明天的物理学都要是一样的，那么能量就守恒.
2. 空间平移对称，就是说我可以把分析的对象做任意整体平移，如果物理学在这里、那里、在所有的地方都一样，那么动量就守恒.
3. 旋转对称，就是说我可以让分析的对象做空间转动，如果转动之后对物理规律没有影响，那么角动量就守恒.

下面我们证明一下上面的三句话. 首先从空间平移对称来推导动量守恒. 为了简单且不失一般性，我们考虑一个二维的平移. 设系统发生下面的平移：

$$x' = x + \delta x \ , \ y' = y + \delta y \tag{3.19}$$

式中 $\delta x, \delta y$ 是与时间无关的小量，那么有

$$\dot{x}' = \dot{x} \ , \ \dot{y}' = \dot{y} \tag{3.20}$$

系统的拉氏量 L 也将随着平移发生如下变化：

$$L\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \longrightarrow L'\left(x + \delta x, y + \delta y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \tag{3.21}$$

我们可以把 L' 进行一阶泰勒展开：

$$L' = L + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + O\left(\delta x^2\right) + O\left(\delta y^2\right) \tag{3.22}$$

空间平移对称性要求 $L = L'$，那么由式 (3.22)，我们可以得到

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \tag{3.23}$$

上式告诉我们：x 和 y 都是循环坐标！由本章第 1 节的知识，我们马上可以得到其对应的广义动量 (在这里就是动量) 是守恒的：

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \mathrm{const}, p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \mathrm{const} \tag{3.24}$$

也就是说，空间平移对称性对应于动量守恒.

下面我们从空间旋转对称性推导角动量守恒. 为了方便，我们令系统绕 z 轴转过一个小角度 $\delta\theta$(系统中质点的 z 坐标不变，变的是 x, y 坐标). 当角度足够小时，便可以做近似：$\cos\delta\theta \approx 1, \sin\delta\theta \approx \delta\theta$. 转动前后坐标的变换关系如下 (推导见附录A.2)：

$$\begin{cases} x' = x\cos\delta\theta - y\sin\delta\theta \simeq x - y\delta\theta \\ y' = x\sin\delta\theta + y\cos\delta\theta \simeq y + x\delta\theta \end{cases} \tag{3.25}$$

经过微小旋转后，系统的拉氏量 L 发生如下变化：

$$L\left(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t\right) \longrightarrow L'\left(x - y\delta\theta, y + x\delta\theta, z, \dot{x} - \dot{y}\delta\theta, \dot{y} + \dot{x}\delta\theta, \dot{z}, t\right) \tag{3.26}$$

然后把 L' 做一阶泰勒展开，经历一系列处理得到：

$$\begin{aligned} L' &= L + \left[\left(x\frac{\partial L}{\partial y} - y\frac{\partial L}{\partial x}\right) + \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta\theta + O\left(\delta\theta^2\right) \\ &= L + \left\{\left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right] + \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\right\}\delta\theta + O\left(\delta\theta^2\right) \\ &= L + \delta\theta \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - y\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + O\left(\delta\theta^2\right) \\ &= L + \delta\theta \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(xp_y - yp_x\right) + O\left(\delta\theta^2\right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

而角动量的定义为

$$\vec{J}=\vec{r}\times\vec{p}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x&y&z\\p_x&p_y&p_z\end{vmatrix}\longrightarrow J_z=\begin{vmatrix}x&y\\p_x&p_y\end{vmatrix}=xp_y-yp_x \tag{3.28}$$

将式 (3.28) 代入 (3.27)，得

$$L'=L+\delta\theta\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t}+O\left(\delta\theta^2\right) \tag{3.29}$$

空间旋转对称性要求 $L'=L$，因此必然有

$$\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t}=0\longrightarrow J_z=\mathrm{const} \tag{3.30}$$

也就是说，旋转对称对应于角动量守恒.

至于时间平移对称性，此时拉氏量不显含时间 t. 由本章第 2 节可知，此时能量函数 h 是守恒的. 在一定条件下，能量函数就等于系统的总能量，因此便有能量守恒.

我们终于完成了三个结论的证明，现在我们已经感受到了对称性和守恒律之间千丝万缕的联系. 诺特定理 (Noether's theorem) 将这种联系总结成了一句凝练且优美的话：*对于每一种连续对称性，必然存在相应的守恒量*. 在证明诺特定理之前，我们还是先严谨地规定一下对称变换的概念：

对称变换 对系统某一个广义坐标 q_α 做如下变换：

$$q_\alpha\left(t\right)\longrightarrow Q_\alpha\left(s,t\right)\qquad s\in\mathbb{R} \tag{3.31}$$

式中 s 是变换参数，当 $s=0$ 时相当于没有做任何操作，即 $Q_\alpha\left(0,t\right)=q_\alpha\left(t\right)$. 如果这个变换能够让拉氏量 L 满足

$$\frac{\partial}{\partial s}L\left(t,Q_\alpha,\dot{Q}_\alpha\right)=0 \tag{3.32}$$

那么就称这个变换是连续对称的.

下面开始证明诺特定理. 我们假设系统对于 q_α 具有连续对称性，那么对其做对称变换，将变换后的拉氏量 L 对变换参数 s 求偏导：

$$\frac{\partial L}{\partial s}=\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_\alpha}\frac{\partial\dot{Q}_\alpha}{\partial s} \tag{3.33}$$

我们要证明，即使不做任何变换 $(s=0)$，也要存在一个守恒量. 因此进行如下处理：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial L}{\partial s}\right|_{s=0}&=\left.\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}+\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\frac{\partial\dot{Q}_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)\left.\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}+\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\frac{\partial\dot{Q}_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}\right)=0\end{aligned} \tag{3.34}$$

由式 (3.34)，我们得到

$$\left.\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\frac{\partial Q_\alpha}{\partial s}\right|_{s=0}=\mathrm{const} \tag{3.35}$$

这便是该连续对称性对应的守恒量.

Chapter 4

达朗贝尔原理

4.1 虚功原理

在第一章我们已经提到，最小作用量原理是分析力学的最高原理，通过它可以推出整个分析力学的理论体系. 基于最小作用量原理，我们得到了欧拉-拉格朗日方程，它在第二、三章的学习中发挥了极其重要的作用.

但在某些教材上，还有另一种引入拉格朗日方程的途径. 它从我们熟悉的牛顿第二定律出发，想办法将其改造成拉格朗日方程的形式. 这就是我们本章将要学习的达朗贝尔原理 (D'Alembert's principle). 但首先，我们要先学习一下虚功原理，掌握一些新的物理概念.

相信"位移"这个概念大家并不陌生. 设有一个 N 个质点组成的质点系，在 t 时刻的位形是 $\{\vec{r}_i\}, i=1,2,\cdots,N$. 假设时间发生了变化 $\mathrm{d}t$，各质点的位矢也发生了变化 $\mathrm{d}\vec{r}_i$，那么 $\mathrm{d}\vec{r}_i$ 就叫做 $\mathrm{d}t$ 时间段内的位移.

下面我们要介绍一个新概念，叫做**虚位移**. 它表示假设时间不变 $(\delta t=0)$，被约束所允许的、所有可能的、假想的位移，记为 $\delta\vec{r}_i$. 比方说我站在一条小吃街上，我在思考我身边 10m 半径范围内我能吃哪些东西. 我脑海里可能有很多种方案：奶茶、火锅、烤冷面...... 它们仅仅存在于我的脑海，是我可能做出的选择，这就是"虚位移". 如果下一时刻，我迈出了脚步，走向了其中一家店子，这就是真实发生的，就是"实位移".

我们可以总结一下：*虚位移的发生不需要时间 $(\delta t=0)$，系统所受的力和约束都是在 t 时刻的取值；而实位移的发生需要时间 $\mathrm{d}t$，且力和约束可能在这 $\mathrm{d}t$ 内发生变化.*

有了虚位移，我们可以很方便地定义虚功. 所谓功就是力与位移的点积，那么虚功就是力与虚位移的点积. 我们可以把系统所受的力分为**主动力**和**约束力**两类. 主动力记作 $\vec{F}$，它是和约束无关的力；约束力记作 $\vec{R}$，它是迫使系统遵守约束条件的力. 虚功由这两种力在虚位移下做的功相加而成：

$$\delta W=\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i+\vec{R}_i\right)\cdot\delta\vec{r}_i \tag{4.1}$$

一个系统所受的约束可能是很复杂的，所以计算约束力的虚功可不是一件容易事. 所以我们自然希望：如果系统所有约束力所做的虚功之和为零该多好啊！那我们压根就不用考虑约束力了. 满足

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{R}_i\cdot\delta\vec{r}_i=0 \tag{4.2}$$

的约束称为**理想约束** (ideal constraint)，它是美好且易于分析的. 幸运的是，在本讲义中我们只

讨论理想约束.

下面我们来分析一下理想约束系统的**平衡条件**. 在牛顿力学中，平衡说简单了就是所有力的矢量和为 0：

$$\sum_i \vec{F}_i + \vec{R}_i = 0 \tag{4.3}$$

将上式乘上虚位移 $\delta\vec{r}_i$，得到

$$\sum_i \left(\vec{F}_i + \vec{R}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i \xlongequal{\text{理想约束}} \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \tag{4.4}$$

式 (4.4) 就是所谓的**虚功原理** (principle of virtual work)，它指出：*理想约束系统的平衡条件是所有主动力的虚功之和为零*.

我们思考一下：由式 (4.4) 能否推出 $\vec{F}_i = 0$？这显然是不能的，因为约束的存在，导致 $\delta\vec{r}_i$ 之间并不独立. 但我们可以选择适当的彼此独立的广义坐标，然后把每个 $\vec{r}_i$ 用广义坐标表示：

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\left(q_1, q_2, \cdots, q_s; t\right) \tag{4.5}$$

对 $\vec{r}_i$ 求变分有

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\delta t = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \qquad (\text{利用}\delta t = 0) \tag{4.6}$$

将式 (4.6) 代入式 (4.4)，得到

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\delta q_\alpha = 0 \tag{4.7}$$

上面的计算交换了求和的次序 (在物理里面貌似默认求和的顺序是可交换的，学数学的别杠). 由于 q_α 是彼此独立的，现在我们可以名正言顺地要求 δq_α 前面的系数为 0：

$$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{4.8}$$

式中的 Q_α 被称为**广义力**，因此理想约束系统保持静平衡的充要条件是*所有的广义力都等于零*.

当作用在系统上的主动力全都是保守力时，还可以进一步改写. 我们知道保守力对应着一种势能：

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i} \tag{4.9}$$

代入式 (4.8)，得到

$$Q_\alpha = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial\vec{r}_i} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{4.10}$$

式 (4.10) 也称作**保守系统的虚功原理**，它表明：*保守系统平衡时，势能应取极值*.

4.2 利用虚功原理解决静力学问题

利用虚功原理解决静力学问题，要经历的步骤如下：

1. 确定系统的自由度，选择合适的广义坐标
2. 分析系统所受的主动力，写出虚功的表达式
3. 在确保虚功 δW 是由广义坐标 δq_α 表示后，令其系数为零就得到了平衡条件

下面我们分析两个经典例题，帮助大家掌握解题方法.

例题 1 长为 $2l$ 的匀质杆一端抵在光滑墙上，杆身斜靠在与墙相距 d 的光滑棱角上，求杆平衡位置与水平面所成角度 θ.

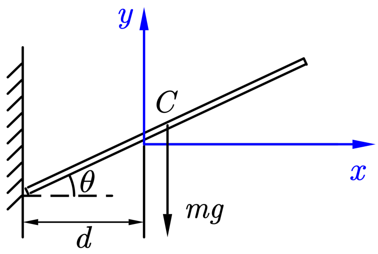

图 4.1: 靠在棱角上的杆

系统的自由度 $s=1$，取 θ 为广义坐标. 杆所受主动力只有重力 mg，且重力只在竖直方向的虚位移 δy 上有虚功，因此

$$\delta W = mg\delta y = 0$$

其中 y 是质心 C 的纵坐标，我们要想办法将其用 θ 表示出来. 由图中几何关系可得

$$y = l\sin\theta - d\tan\theta$$

对上式求变分得

$$\delta y = \left(l\cos\theta - d\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\delta\theta$$

代入虚功表达式：

$$\delta W = mg\left(l\cos\theta - d\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\delta\theta = 0$$

$$\longrightarrow l\cos\theta - d\frac{1}{\cos^2\theta} = 0\ ,\ \theta = \arccos\sqrt[3]{\frac{d}{l}}$$

除了上面这种方法，由于此时杆所受主动力是保守力，因此我们还可以利用保守系统的虚功原理. 系统的势能

$$V = mgy = mg\left(l\sin\theta - d\tan\theta\right)$$

由 $\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = 0$，得到

$$mg\left(l\cos\theta - d\frac{1}{\cos^2\theta}\right) = 0 \longrightarrow \theta = \arccos\sqrt[3]{\frac{d}{l}}$$

例题 2 相同的两个均质光滑球悬在结于定点 O 的两根绳子上，此两球同时又支持着一个等重的均质球，求 α 角及 β 角之间的关系.

如图4.2所示，球的位置可以由 α 唯一确定，因此自由度 $s=1$，取 α 为广义坐标. 给三个球编号，然后写出它们球心的直角坐标：

$$\begin{cases} x_1 = -2R\sin\beta = -(l+R)\sin\alpha, y_1 = (l+R)\cos\alpha \\ x_2 = 2R\sin\beta = (l+R)\sin\alpha, y_2 = (l+R)\cos\alpha \\ x_3 = 0, y_3 = (l+R)\cos\theta - 2R\cos\beta \end{cases}$$

首先对 x_1 取变分，可得到

$$\delta x_1 = -2R\cos\beta\delta\beta = -(l+R)\cos\alpha\delta\alpha \longrightarrow \frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{2R\cos\beta}{(l+R)\cos\alpha} \tag{4.11}$$

此时系统所受主动力为三个球的重力 mg，且其只在 y 方向上有虚功，因此由虚功原理：

$$\begin{aligned}\delta W &= mg\left(\delta y_1+\delta y_2+\delta y_3\right)\\ &= mg\left[-3\left(l+R\right)\sin\alpha\delta\alpha+2R\sin\beta\delta\beta\right]\\ &= mg\left[-3\left(l+R\right)\sin\alpha+2R\sin\beta\frac{\delta\beta}{\delta\alpha}\right]\delta\alpha=0\end{aligned}$$

得到

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\beta}=\frac{2R\sin\beta}{3\left(l+R\right)\sin\alpha} \tag{4.12}$$

联立式 (4.11) 和 (4.12)，便得到

$$\tan\beta=3\tan\alpha$$

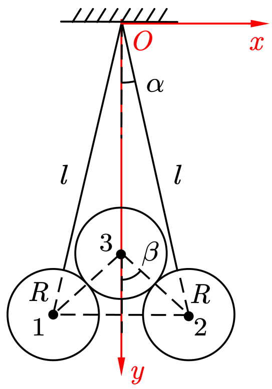

图 4.2: α 可唯一确定系统的位形

4.3 达朗贝尔原理推导拉格朗日方程

下面我们要见一见我们的老朋友——牛顿第二定律. 对于 N 个质点组成的质点系，我们可以对每一个质点都列出牛顿第二定律：

$$\vec{F}_\alpha+\vec{R}_\alpha=m_\alpha\ddot{\vec{r}}_\alpha\ ,\ \alpha=1,2,\cdots,N \tag{4.13}$$

稍微改动一下：

$$\vec{F}_\alpha+\vec{R}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{r}}_\alpha=0 \tag{4.14}$$

我们将式中 $m_\alpha\ddot{\vec{r}}_\alpha$ 称为达朗贝尔惯性力，简称惯性力，这样一来式 (4.14) 实际上表示**质点所受主动力、约束力和惯性力是平衡的**. 设虚位移为 $\delta\vec{r}_\alpha$，将其乘在式 (4.14) 上并求和：

$$\sum_\alpha\left(\vec{F}_\alpha+\vec{R}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{r}}_\alpha\right)\cdot\delta\vec{r}_\alpha=0 \tag{4.15}$$

假设系统所受约束为理想约束，所以有式 (4.2) 成立，因此

$$\sum_\alpha\left(\vec{F}_\alpha-m_\alpha\ddot{\vec{r}}_\alpha\right)\cdot\delta\vec{r}_\alpha=0 \tag{4.16}$$

这就是达朗贝尔原理，它指出：*理想约束系统所受主动力和惯性力产生的总虚功为零.*

仿照本章第一节推导广义力的思路：约束的存在使得式 (4.16) 中的各 $\delta\vec{r}_\alpha$ 并不独立，所以我们要想办法把它用广义坐标表示. 直接利用式 (4.6) 有

$$\delta\vec{r}_\alpha = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\delta q_k \tag{4.17}$$

将其代入式 (4.16)，得到

$$\sum_\alpha \left(\vec{F}_\alpha - m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha\right) \cdot \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\delta q_k = 0 \tag{4.18}$$

对其交换求和顺序：

$$\sum_k \left[\sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} - \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\right]\delta q_k = \sum_k \left[Q_k - \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\right]\delta q_k = 0 \tag{4.19}$$

上式的计算利用了广义力的定义式 (4.8). 令 δq_k 前面的系数为 0，便得到

$$Q_k - \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} = 0 \tag{4.20}$$

为了得到拉格朗日方程的形式，我们必须对 (4.20) 进行改写. 改写的过程要用到下面的两个数学结论 (证明见附录A.3)：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_k} \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \tag{4.22}$$

首先将式 (4.20) 改写成

$$Q_k - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\right) + \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\right) = 0 \tag{4.23}$$

再利用补充的两个结论，得到

$$Q_k - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_k}\right) + \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_k} = 0 \tag{4.24}$$

定义整个系统的动能

$$T = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha \tag{4.25}$$

因此

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_k} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_k} \tag{4.26}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} \tag{4.27}$$

代入式 (4.24)，便得到

$$Q_k - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0 \tag{4.28}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, 2, \cdots, s \tag{4.29}$$

式 (4.29) 也被称为**一般形式的拉格朗日方程**，它之所以更一般，是因为我们并没有规定这个系统是一个保守系统，所以它和我们前面学的拉格朗日方程看起来有一点点不太一样. 如果是保守系统，则可以将式 (4.29) 变成我们熟悉的样子.

我们已经讲过，保守系统的势能仅仅是广义坐标的函数，且广义力可以写成

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{4.30}$$

因此式 (4.29) 可改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial\left(T-V\right)}{\partial q_k} = 0 \tag{4.31}$$

定义拉氏量 $L = T - V$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, 2, \cdots, s \tag{4.32}$$

这便是我们所熟悉的保守系统的拉格朗日方程.

Chapter 5

小振动

5.1　拉氏量的建立

什么是小振动？在本讲义中，我们定义小振动是**完整、保守系统在稳定平衡位置附近的运动**. 很多时候我们只关心系统在平衡位置附近的运动，是因为一旦偏离平衡位置太远，意味着系统受到了较高能量的激发，此时系统处于高激发态，不便于观测. 对于小振动问题，人们发展了一系列专门的理论和方法去研究它. 我们会从拉格朗日力学入手，用相对轻松的方式去学习它们.

既然从拉格朗日力学出发，那第一步自然就是确定自由度和广义坐标. 对于一个一般的小振动，它可以有 s 个自由度，我们需要寻找 s 个广义坐标. 但是我们在此处要加一个限制：当

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_s = 0 \tag{5.1}$$

时，正好对应系统的稳定平衡位置，并且将此处取为势能零点. 举个例子，对于一个单摆，我们既可以选择摆绳与竖直方向的夹角 θ 为广义坐标，也可以选择与水平方向的夹角 φ. 但如果选择 φ，当 $\varphi = 0$ 时并不是系统的稳定平衡位置，因此它是不适合作为广义坐标的.

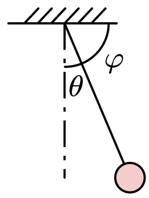

图 5.1: φ 不适合作为广义坐标

选择好广义坐标后，下一步就是写出拉氏量，也就是分别求出系统的动能和势能. 我们在第三章曾提到，对于定常约束，系统的动能是广义速度的二次齐次函数. 写出它的表达式：

$$\begin{aligned}
T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left(\sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta
\end{aligned} \tag{5.2}$$

式 (5.2) 中括号内的部分可以看成一个关于广义坐标的函数，人们将它在稳定平衡位置的取值

$$m_{\alpha\beta}=\sum_i m_i \left.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\alpha=0}\cdot\left.\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta}\right|_{q_\beta=0} \tag{5.3}$$

称为**质量系数**. 不难看出，质量系数有个很重要的性质：其下标的顺序可以交换，也就是 $m_{\alpha\beta}=m_{\beta\alpha}$. 引入质量系数后，动能可表示为

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta \tag{5.4}$$

下面分析系统的势能. 势能是仅仅关于广义坐标的函数：$V=V\left(q_1,q_2,\cdots,q_s\right)$. 我们可将其在稳定平衡位置做泰勒展开：

$$V=V\left(0,0,\cdots,0\right)+\sum_\alpha \left.\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\alpha=0} q_\alpha+\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right|_{q_\alpha=q_\beta=0} q_\alpha q_\beta+\text{余项} \tag{5.5}$$

由于稳定平衡位置势能为 0，所以可将右边第一项丢掉；由于 $\left.\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\alpha=0}$ 是广义力，在平衡位置广义力为 0，因此右边第二项也可丢掉. 再丢掉高阶余项，得

$$V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right|_{q_\alpha=q_\beta=0} q_\alpha q_\beta \tag{5.6}$$

引入**弹性系数**

$$c_{\alpha\beta}=\left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right|_{q_\alpha=q_\beta=0} \tag{5.7}$$

不难看出，弹性系数的下标也可交换，即 $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$. 引入弹性系数后，势能可表示为

$$V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta \tag{5.8}$$

式 (5.4) 和 (5.8) 告诉我们：动能是广义速度的正定二次型，势能是广义坐标的正定二次型. 有了动能和势能后，系统的拉氏量可写成

$$L=T-V=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta \tag{5.9}$$

5.2 运动微分方程

有了拉氏量 L 后，下一步自然是将其代入拉格朗日方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\gamma}=0 \tag{5.10}$$

首先可以计算 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\gamma} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\gamma}\left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_\gamma}\dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_\gamma} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\gamma}\dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\delta_{\beta\gamma} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\beta} m_{\gamma\beta}\dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_{\alpha\gamma}\dot{q}_\alpha \\
&= \sum_{\alpha} m_{\gamma\alpha}\dot{q}_\alpha
\end{aligned} \tag{5.11}$$

上面的计算引入了 Kronecker 符号，它的定义是：

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \tag{5.12}$$

利用一模一样的计算方法，可算出

$$\frac{\partial L}{\partial q_\gamma} = -\sum_\alpha c_{\gamma\alpha}q_\alpha \tag{5.13}$$

最后将式 (5.11) 和 (5.13) 代入拉格朗日方程，我们就得到了小振动问题的运动微分方程：

$$\sum_{\alpha=1}^{s} m_{\gamma\alpha}\ddot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} c_{\gamma\alpha}q_\alpha = 0\ ,\ \gamma = 1, 2, \cdots, s \tag{5.14}$$

这是一个复杂的微分方程组.

5.3 方程的求解

我们现在有一个好消息和一个坏消息. 好消息是：我们已经得到了最核心的运动微分方程 (5.14)；坏消息是：它可不是那么好求解的.

在 2.1 节曾经提过，物理学中很多东西其实要靠“猜”，只要你猜出来的东西是符合运动方程和实验现象的，那它就是对的，且是唯一的. 怎么猜呢？我们可以先把方程简化. 当系统只有一个自由度时，式 (5.14) 可以退化为

$$m_{11}\ddot{q}_1 + c_{11}q_1 = 0 \tag{5.15}$$

我相信大家都认识这个方程：这不就是简谐振动的微分方程嘛，解就是一个普普通通的三角函数：$q_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$. 现在自由度多了，不止一个了，我们可以先猜测：每个广义坐标都做频率相同的谐振动，只不过振幅不一样罢了. 这一猜测解可用矩阵来表示：

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}\cos(\omega t + \varphi) \tag{5.16}$$

可是很快人们就发现：这个猜测解好像并不符合实际的运动情况. 也就是说各广义坐标可能压根就不是做简谐振动这么简单. 不过不要气馁，我们有一个很厉害的数学武器——Fourier 展开. 即便不是简谐振动，我们也可以把它展开成很多个频率不同的谐振动的叠加，如下所示：

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{s1} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ \vdots \\ A_{s2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \cdots \tag{5.17}$$

写出了式 (5.17) 这个新的猜测解后，我们便要解决一系列问题：

- 这个解到底猜的对不对？
- 如果对了，那它到底要往后面加到第几项？
- 如何求出解中的一系列圆频率 ω，以及各振幅 A 之间的关系？

首先，如果我们要验证这个解是否正确，我们只需要把它代入式 (5.14) 就好. 但其实我们可以只代入试探解中的某一项就好，道理很简单：每一项的数学形式都是一样的，只要其中一项满足，那么其他的也都满足. 且由于式 (5.14) 是线性的微分方程组，所以这些项加起来还是方程的解. 所以我们不妨将先将式 (5.17) 右边第一项代入：

$$\left[\sum_\alpha m_{\gamma\alpha}\left(-\omega_1^2\right) A_{\alpha 1} + \sum_\alpha c_{\gamma\alpha} A_{\alpha 1}\right] \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = 0 \tag{5.18}$$

然后让 cos 前面的系数为 0：

$$\sum_\alpha \left(c_{\gamma\alpha} - m_{\gamma\alpha}\omega_1^2\right) A_{\alpha 1} = 0 \tag{5.19}$$

我们可以将上式写成矩阵乘法的形式：

$$\begin{pmatrix} c_{11} - m_{11}\omega_1^2 & c_{12} - m_{12}\omega_1^2 & \cdots & c_{1s} - m_{1s}\omega_1^2 \\ c_{21} - m_{21}\omega_1^2 & c_{22} - m_{22}\omega_1^2 & \cdots & c_{2s} - m_{2s}\omega_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} - m_{s1}\omega_1^2 & c_{s2} - m_{s2}\omega_1^2 & \cdots & c_{ss} - m_{ss}\omega_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{s1} \end{pmatrix} = 0 \tag{5.20}$$

式 (5.20) 实质上是关于 $A_{\alpha 1}$ 的齐次线性方程组. 如果要让方程有非零解 (振幅全为零就没有意义了)，我们要让系数行列式等于零：

$$\begin{vmatrix} c_{11} - m_{11}\omega_1^2 & c_{12} - m_{12}\omega_1^2 & \cdots & c_{1s} - m_{1s}\omega_1^2 \\ c_{21} - m_{21}\omega_1^2 & c_{22} - m_{22}\omega_1^2 & \cdots & c_{2s} - m_{2s}\omega_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s1} - m_{s1}\omega_1^2 & c_{s2} - m_{s2}\omega_1^2 & \cdots & c_{ss} - m_{ss}\omega_1^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.21}$$

式 (5.21) 称作自由度 s 小振动系统的**久期方程** (secular equation). 按照行列式的计算规则，如果我们把式 (5.21) 写开，它应该是关于 ω^2 的一个 s 次方程. 所以我们可以解出 s 个 ω^2 的值；开根号后只取正值，我们就得到了 s 个 ω：

$$\omega = \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_s \tag{5.22}$$

这 s 个圆频率，称为系统的**本征频率** (eigen-frequencies).

ω 存在 s 个解这件事告诉我们：式 (5.17) 右边一共有 s 项，这样一来我们的第二个疑问也解决了. 要解决第三个疑问，我们只需要把解出的 ω 再往式 (5.20) 里面代入，就可以得到振幅 A 之间的关系. 至此，我们前面的三个问题圆满解决，最终得到的小振动问题的解具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \vdots \\ A_{s1} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \cdots \begin{pmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \\ \vdots \\ A_{ss} \end{pmatrix} \cos(\omega_s t + \varphi_s) \tag{5.23}$$

5.4 简正坐标

我们的工作貌似已经结束了，但还没完全结束. 虽然得到了 (5.23) 这个一般解，但是它有一个很烦人的问题：每个广义坐标 q_α 的振动都不是简单的谐振动，而是很多个频率的叠加. 如果我们能找到一组新的广义坐标，使得每个广义坐标都以单一频率振动，那将会是一件多么好的事呀. 我们将满足上述条件的一组广义坐标称为**简正坐标** (normal coordinates)，可将其记为 $q_1', q_2', \cdots, q_s'$.

找简正坐标有一种思路是：我们之前讲了 $m_{\alpha\beta}$ 和 $c_{\alpha\beta}$ 是正定二次型的表示矩阵，如果能把它化为标准型 (对角阵)，那对应的广义坐标就是简正坐标. 但是这种方法的数学操作实在是过于麻烦，不太容易为初学者所接受，所以我们下面介绍一种较为简单的方法.

观察我们目前得到的那个解 (5.23)，我们可以将其进一步改写，变成两个矩阵相乘的形式：

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \vdots \\ \cos(\omega_s t + \varphi_s) \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

如果我们令

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ \vdots \\ q_s' \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

那么直接就有：

$$q_\alpha' = \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) \tag{5.26}$$

也就是说，利用式 (5.25) 得到的一组新广义坐标，每个广义坐标都在做一个单一频率的简谐振动，符合简正坐标的定义. 我们将原广义坐标组成的列矩阵记为 $\mathbf{q}$，简正坐标组成的列矩阵记为 $\mathbf{q}'$，各振幅组成的方阵记为 $\mathbf{A}$，则公式 (5.25) 可改写为

$$\mathbf{q}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{q} \tag{5.27}$$

5.5 例题：耦合摆

小振动问题的理论部分我们就算是讲完了，再讲下去恐怕大脑要过载了. 我们总结一下这一章到底干了啥：

- 引入质量系数和弹性系数，化简拉氏量

- 代入拉格朗日方程，得到运动微分方程
- 代入试探解
- 计算频率和振幅
- 得到简正坐标

下面我们通过一个经典的例子，来将本章所学的知识运用起来.

耦合摆 两相同的单摆，摆长为 l，摆锤的质量为 m，用劲度系数为 k 的弹簧相耦合. 弹簧的原长为 a_0 且等于两摆悬挂点之间的距离. 略去阻尼作用，试求解该体系的运动.

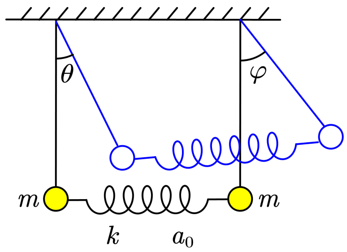

图 5.2: 耦合摆模型图

该体系自由度 $s=2$，选择两摆的摆角为广义坐标：$q_1=\theta, q_2=\varphi$. 易知系统的动能：

$$T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$

系统的势能分为两部分：重力势能和弹性势能. 取 $\theta=\varphi=0$ 时为势能零点，则重力势能的表达式

$$\begin{aligned} V_{\text{重}} &= mgl\left(1-\cos\theta\right)+mgl\left(1-\cos\varphi\right) \\ &\simeq \frac{1}{2}mgl\theta^2+\frac{1}{2}mgl\varphi^2 \end{aligned}$$

要计算弹性势能，我们要知道弹簧的形变量. 在小振动情形下我们可以做近似：用两摆锤水平距离的变化量来近似弹簧的形变量，即

$$\mathit{\Delta} x\simeq x_1-x_2=l\sin\theta-l\sin\varphi\simeq l\left(\theta-\varphi\right)$$

因此

$$\begin{aligned} V_{\text{弹}} &= \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2=\frac{1}{2}kl^2\left(\theta-\varphi\right)^2 \\ L &= T-\left(V_{\text{重}}+V_{\text{弹}}\right) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2-\frac{1}{2}mgl\theta^2-\frac{1}{2}mgl\varphi^2-\frac{1}{2}kl^2\left(\theta-\varphi\right)^2 \end{aligned} \tag{5.28}$$

将式 (5.28) 代入 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta}=0$，得到

$$ml^2\ddot{\theta}=-kl^2\left(\theta-\varphi\right)-mgl\theta \tag{5.29}$$

代入 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=0$，得到

$$ml^2\ddot{\varphi}=-kl^2\left(\varphi-\theta\right)-mgl\varphi \tag{5.30}$$

然后写出试探解：

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}\\ A_{21}\end{pmatrix}\cos\left(\omega_1 t+\phi_1\right)+\begin{pmatrix}A_{12}\\ A_{22}\end{pmatrix}\cos\left(\omega_2 t+\phi_2\right) \tag{5.31}$$

将式 (5.31) 右边的第一项

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{1}\\ A_{2}\end{pmatrix}\cos\left(\omega_1 t+\phi_1\right) \tag{5.32}$$

代入式 (5.29) 和 (5.30)，得到

$$\begin{cases}-ml^2\omega^2A_1+\left(kl^2+mgl\right)A_1-kl^2A_2=0\\ -ml^2\omega^2A_2+\left(kl^2+mgl\right)A_2-kl^2A_1=0\end{cases} \tag{5.33}$$

上式是关于 A_1, A_2 的齐次线性方程组，令其系数行列式为 0：

$$\begin{vmatrix}-ml^2\omega^2+kl^2+mgl & -kl^2\\ -kl^2 & -ml^2\omega^2+kl^2+mgl\end{vmatrix}=0 \tag{5.34}$$

式 (5.34) 便是耦合摆系统的久期方程. 我们不必要把行列式进行展开，而是可用一种更加取巧的方式. 当行列式的两行成比例时，行列式的值为 0，所以我们可以令

$$-ml^2\omega^2+kl^2+mgl=kl^2\longrightarrow\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}} \tag{5.35}$$

$$-ml^2\omega^2+kl^2+mgl=-kl^2\longrightarrow\omega_2=\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}} \tag{5.36}$$

我们成功求出来了两个本征频率，下一步是将它们代回 (5.33) 得到振幅的关系. 将 ω_1 代入，得到

$$A_{11}=A_{21} \tag{5.37}$$

将 ω_2 代入，得到

$$A_{12}=-A_{22} \tag{5.38}$$

最终，问题的解为

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}\\ A_{11}\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t+\phi_1\right)+\begin{pmatrix}A_{12}\\ -A_{12}\end{pmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}}t+\phi_2\right) \tag{5.39}$$

我们还可以写出该问题的简正坐标. 式 (5.39) 可进一步化为：

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{11} & -A_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\left(\omega_1 t+\phi_1\right)\\ \cos\left(\omega_2 t+\phi_2\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}\cos\left(\omega_1 t+\phi_1\right)\\ A_{12}\cos\left(\omega_2 t+\phi_2\right)\end{pmatrix} \tag{5.40}$$

令

$$\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1'\\ q_2'\end{pmatrix} \tag{5.41}$$

得到简正坐标为

$$q_1'=\frac{1}{2}\left(\theta+\varphi\right),q_2'=\frac{1}{2}\left(\theta-\varphi\right) \tag{5.42}$$

这两个简正坐标有着明确的物理意义.q_1' 描述了**体系质心的运动**，其振动频率 ω_1 中不含有弹簧的影响，因为弹簧弹力属于体系的内力，不会影响质心的运动；q_2' 描述了**两摆锤距离的变化**，这受到了弹簧的制约，因此 ω_2 中包含了弹簧的影响.

Chapter 6

哈密顿力学

6.1 勒让德变换

分析力学有两大形式：拉格朗日形式和哈密顿形式. 前面的章节我们详细学习了拉格朗日力学，明白了它处理问题的核心方程与一般步骤. 从本章开始，我们将学习分析力学的剩下一半——哈密顿力学.

首先我们要学习一个非常重要的数学工具：**勒让德变换** (Legendre transformation). 考虑一个任意的 n 元函数：

$$F = F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \tag{6.1}$$

对其求全微分得到

$$\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \tag{6.2}$$

现在我们想把变量由原来的 $\{x_i\}$ 换成一组全新的变量，定义

$$u_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \tag{6.3}$$

则式 (6.2) 可写成

$$\mathrm{d}F = \sum_{i=1}^{s} u_i \mathrm{d}x_i \tag{6.4}$$

然后我们构造一个新变量 $\{u_i\}$ 的函数

$$G = G\left(u_1, u_2, \cdots, u_n\right) = \sum_i x_i u_i - F \tag{6.5}$$

对其求全微分得到

$$\mathrm{d}G = \sum_i \frac{\partial G}{\partial u_i} \mathrm{d}u_i = \sum_i x_i \mathrm{d}u_i + \sum_i u_i \mathrm{d}x_i - \mathrm{d}F = \sum_i x_i \mathrm{d}u_i \tag{6.6}$$

观察上式有

$$x_i = \frac{\partial G}{\partial u_i} \tag{6.7}$$

况且将 $\{x_i\}$ 和 F 称为旧变量和旧函数，$\{u_i\}$ 和 G 称为新变量和新函数. 我们发现了一个很有意思的现象：如果关系式 (6.5) 成立，那么新变量等于旧函数对旧变量的偏导 (6.3)，旧变量等于新函数对新变量的偏导 (6.7)！这便是勒让德变换.

我们还可以将勒让德变换推广到替换部分变量的情况. 设原函数

$$F = F(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m) \tag{6.8}$$

假如现在只想把 x 全部换掉，而 y 不变，令 $u_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$，构造

$$G = G(u_1, \cdots, u_n; y_1, \cdots, y_m) = \sum_i x_i u_i - F \tag{6.9}$$

则此时依然有

$$x_i = \frac{\partial G}{\partial u_i} \tag{6.10}$$

而对于 F 和 G 的公共变量 $\{y_j\}$，则有

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = -\frac{\partial G}{\partial y_j} \tag{6.11}$$

6.2 哈密顿正则方程

让我们回顾一下拉格朗日力学. 系统的拉氏量 $L = L(q_1, \cdots, q_s; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_s; t)$ 是广义坐标和广义速度的函数，它是所谓“速度相空间”中的函数. 拉格朗日方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{6.12}$$

我们必须要直面一个问题：*拉格朗日方程实质上是二阶微分方程*. 因为 $\partial L/\partial \dot{q}_\alpha$ 本身是广义速度的函数，再对时间求一次导就会出现广义坐标对时间的二阶导数. 显然，二阶微分方程不如一阶好求解，所以我们得想个办法降阶.

上面问题的“罪魁祸首”在于 L 中含有广义速度 $\dot{q}_\alpha$，我们可以把它换掉. 利用勒让德变换，将 L 中的 $\dot{q}_\alpha$ 全部换成广义动量 $p_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$，然后构造一个新函数：

$$H = H(q_1, \cdots, q_s; p_1, \cdots, p_s; t) = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \tag{6.13}$$

这个函数叫做**哈密顿量** (Hamiltonian)，它的作用类似于拉格朗日力学中的拉氏量 L. 由勒让德变换中新旧变量和新旧函数的关系，我们可以得到

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \tag{6.14}$$

对于 L 和 H 的公共变量 $\{q_\alpha\}$，应有

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \tag{6.15}$$

由式 (6.14) 出发，我们将广义动量 p_α 对时间求导：

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) \xlongequal{\text{拉格朗日方程}} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \tag{6.16}$$

最终我们得到：

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\ ,\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, \cdots, s \tag{6.17}$$

这就是**哈密顿正则方程** (Hamilton's canonical equations). 从数学上来说，哈密顿正则方程和拉格朗日方程是完全等价的，只不过拉格朗日方程是 s 个二阶常微分方程，而哈密顿正则方程是 $2s$ 个一阶常微分方程.

我们将广义坐标和广义动量张成的 $2s$ 维空间 $(q_1, \cdots, q_s; p_1, \cdots, p_s)$ 称作**相空间**. 因此，*哈密顿力学是相空间上的理论*. 哈密顿力学解决问题的步骤和拉格朗日力学其实差不多：

- 分析问题，确定系统的自由度
- 写出系统的哈密顿量 H
- 将 H 代入哈密顿正则方程，得到系统的运动微分方程.

其中，关键步骤便是写出哈密顿量 H. 我们当然可以利用定义式 (6.13)，先写出拉氏量 L，然后算出每个广义坐标对应的广义动量，最后代入式子计算. 但除此之外，还有另外一种方法.

是否还记得我们在 3.2 节曾定义过一个能量函数 (3.6)？它的表达式如下：

$$h \equiv \sum_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L \tag{6.18}$$

如果我们把式中的 $\partial L/\partial \dot{q}_\alpha$ 换成 p_α，我们就直接得到了哈密顿量的表达式：

$$H = \sum_{\alpha} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \tag{6.19}$$

也就是说，能量函数 h 和哈密顿量 H 本质上是一个东西！由于 $h = T_2 - T_0 + V$，所以自然有

$$H = T_2 - T_0 + V \tag{6.20}$$

此外，若系统受到的约束是定常的，那么 H 直接就等于系统的总能量，即

$$H = T + V = E \tag{6.21}$$

6.3 应用例

本节我们通过几个例子，来帮助读者更好地掌握哈密顿正则方程的解题步骤.

例 1：一维谐振子　利用哈密顿正则方程求解一维谐振子的运动.

一维谐振子的拉氏量为

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

广义动量为

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

因此哈密顿量

$$H(x,p) = p\dot{x} - L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

将 H 代入正则方程 (6.17)，得到

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \,, \; \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

整理后便得

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

例 2　利用哈密顿力学，重解 2.4 节例题 2.

绳子的拉氏量为

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2l} mgx^2$$

广义动量为

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}$$

因此哈密顿量

$$H\left(x,p\right)=p\dot{x}-L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2l}mgx^2=\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{2l}mgx^2$$

代入正则方程，得到

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{m}\ ,\ \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{l}mgx$$

上式可整理为：

$$\ddot{x}=\frac{1}{l}gx=\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\longrightarrow \dot{x}\mathrm{d}\dot{x}=\frac{1}{l}gx\mathrm{d}x$$

两边同时积分得到

$$\dot{x}^2=\frac{1}{l}gx^2+C$$

初始条件为 $x=l/2,\dot{x}=0$，因此积分常数 $C=-\frac{1}{4}gl$，得

$$\dot{x}^2=\frac{1}{l}gx^2-\frac{1}{4}gl$$

代入 $x=l$，解出

$$\dot{x}=\frac{\sqrt{3gl}}{2}$$

感兴趣的读者，可以将拉格朗日力学中的全部例题都尝试用哈密顿力学再解一遍. 我们会发现：在解题的角度，哈密顿力学不比拉格朗日力学简便. 在哈密顿力学中，必须从拉氏量转到哈密顿量，才可写出哈密顿正则方程，这相当于绕了一个大圈子. 那哈密顿力学的优势在哪里呢？

哈密顿力学的优点之一是便于量子化，它是经典力学和量子力学之间的“跳板”. 其次，在后面我们会提到，相空间中 p_α 和 q_α 的地位是完全对等的，这为变量的变换带来了很大的灵活性.

6.4 哈密顿力学中的运动积分

我们在学习拉格朗日力学时，曾推导出了广义动量守恒和广义能量守恒等运动积分，它为问题的分析带来了很大的便利. 那么哈密顿力学中同样也有这些运动积分.

广义能量积分 如果哈密顿量中不显含 t，即 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$，那么 H 是守恒的.

证明：$H=H\left(q_\alpha,p_\alpha,t\right)$，将其对时间求导有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial t}\\&=-\dot{p}_\alpha\dot{q}_\alpha+\dot{q}_\alpha\dot{p}_\alpha+\frac{\partial H}{\partial t}\\&=\frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned}\tag{6.22}$$

因此 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ 时，$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$，即 H 守恒.

广义动量积分 若 H 中不含有某个广义坐标 q_α(循环坐标)，则其对应的广义动量 p_α 守恒.

证明：由于 q_α 是 L 和 H 的公共变量，由勒让德变换的性质有

$$\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\tag{6.23}$$

若 H 中不显含 q_α，那么 L 也不显含 q_α，故其广义动量 $p_\alpha=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ 守恒.

6.5 泊松括号与泊松定理

我们在前面曾提到：哈密顿力学是沟通经典力学和量子力学的“桥梁”. 下面我们将介绍一种特殊的数学运算，它在经典力学和量子力学中都起着非常重要的作用.

考虑一个相空间中的函数

$$f=f\left(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t\right) \tag{6.24}$$

将其对时间求导：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha \qquad \text{利用正则方程}\\&=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)\end{aligned} \tag{6.25}$$

我们可以将式中那一块冗杂的对偏导数的求和定义为一种新的数学运算：

$$[\varphi,\psi]=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha}\right) \tag{6.26}$$

它叫做**泊松括号** (Poisson bracket). 这样一来，式 (6.25) 可写为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H] \tag{6.27}$$

我们可以把上式的 f 换为哈密顿量 H，由泊松括号的定义易知 $[H,H]\equiv 0$，故

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{6.28}$$

我们得到了和上一节同样的结论，也就是广义能量积分.

泊松括号具有诸多性质，列举如下：

① $[c,\psi]=0\ (c\text{为常数})$ (6.29)

② $[\varphi,\psi]=-[\psi,\varphi]$ (6.30)

③ $[c\varphi,\psi]=c[\varphi,\psi]=[\varphi,c\psi]$ (6.31)

④ $[\varphi,\psi_1+\psi_2]=[\varphi,\psi_1]+[\varphi,\psi_2]$ (6.32)

⑤ $[\varphi,\psi_1\psi_2]=[\varphi,\psi_1]\psi_2+\psi_1[\varphi,\psi_2]$ (6.33)

⑥ $\dfrac{\partial}{\partial t}[\varphi,\psi]=\left[\dfrac{\partial \varphi}{\partial t},\psi\right]+\left[\varphi,\dfrac{\partial \psi}{\partial t}\right]$ (6.34)

⑦ $[q_\alpha,\psi]=\dfrac{\partial \psi}{\partial p_\alpha},[p_\alpha,\psi]=-\dfrac{\partial \psi}{\partial q_\alpha}$ (6.35)

⑧ $[q_\alpha,q_\beta]=[p_\alpha,p_\beta]\equiv 0,[q_\alpha,p_\beta]=\delta_{\alpha\beta}$ (6.36)

⑨ $[f,[\varphi,\psi]]+[\varphi,[\psi,f]]+[\psi,[f,\varphi]]=0$ (6.37)

想要证明这些结论，从泊松括号的定义出发就可以了. 下面我们对其中的几条进行说明：

- 如果将式 (6.35) 中的 ψ 换为哈密顿量 H，可得到

$$[q_\alpha, H] = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, [p_\alpha, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \tag{6.38}$$

  再利用正则方程，可将上式改写为

$$\dot{q}_\alpha = [q_\alpha, H]\ ,\ \dot{p}_\alpha = [p_\alpha, H] \tag{6.39}$$

  式 (6.39) 称为正则方程的泊松括号形式.

- 式 (6.36) 中的 $[q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$ 称为**基本泊松括号**，它在后面的一些运算中具有相当重要的作用.

- 式 (6.37) 称为**雅可比恒等式**，其证明是比较复杂的，感兴趣的读者可翻阅相关书籍.

讲了一大堆关于泊松括号的理论，那它到底有什么用呢？我们下面要介绍一个定理——**泊松定理** (Poisson theorem)，它为寻找运动积分提供了一种看起来不错的方法.

泊松定理　　若力学量 f 和 g 均是运动积分，则它们的泊松括号 $[f, g]$ 也是运动积分.

证明：利用式 (6.27)，我们可以写出

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0 \tag{6.40}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g}{\partial t} + [g, H] = 0 \tag{6.41}$$

然后再利用雅可比恒等式 (6.37)，有

$$[H, [f, g]] + [f, [g, H]] + [g, [H, f]] = 0 \tag{6.42}$$

将式 (6.40)(6.41) 代入上式，得到

$$\begin{aligned}
& [H, [f, g]] + \left[f, -\frac{\partial g}{\partial t}\right] + \left[g, \frac{\partial f}{\partial t}\right] = 0 \qquad \text{利用式 (6.30)} \\
\longrightarrow\ & [[f, g], H] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] = 0 \quad \text{利用式 (6.34)} \\
\longrightarrow\ & [[f, g], H] + \frac{\partial}{\partial t}[f, g] = 0 \\
\longrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f, g] = 0
\end{aligned} \tag{6.43}$$

因此，$[f, g]$ 为运动积分，证毕.

我之所以在前面说泊松定理寻找运动积分是一种“看起来不错”的方法，是因为它并没有我们想的那么万能. 在很多情况下，它只能给出现有运动积分的线性组合或恒等式，不能给出新的运动积分，所以在寻找运动积分时不能完全依赖于它.

Chapter 7

正则变换

7.1 相空间的优越性

我们现在已经知道：哈密顿力学是不同于拉格朗日力学的一套全新的力学体系. 但在我们之前的例题讲解中，我们发现哈密顿力学用来解题好像并不如拉格朗日力学简便，那人们为什么要创立哈密顿力学呢？它的优势体现在哪里呢？本章将为大家回答这个问题.

首先我们介绍一下位形空间中的**点变换** (point transformation). 我们知道在分析一个系统时，广义坐标有非常多的选择方案，不同的选择对应的分析难度可能有天壤之别. 假如我已经选择了一组广义坐标 $\{q_1, q_2, \cdots, q_s\}$，并且写出了拉氏量 L. 现在我想用新的广义坐标去分析问题，我可以做变换

$$Q_\alpha = Q_\alpha\left(q_1, q_2, \cdots, q_s; t\right) \tag{7.1}$$

在新的广义坐标下，拉氏量为

$$L' = L'\left(Q_1, \cdots, Q_s; \dot{Q}_1, \cdots, \dot{Q}_s; t\right) \tag{7.2}$$

如果新的拉氏量仍然满足拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L'}{\partial Q_\alpha} = 0 \tag{7.3}$$

那就说这个变换是合理的，是成功的. 我们将位形空间中这种广义坐标的变换就叫做点变换.

为什么要做点变换呢？因为*变换之后的广义坐标可能成为循环坐标，从而得到运动积分*. 举个例子，假设一个质点受到平方反比有心力的作用，势能与距中心的距离成反比：

$$V = k\frac{1}{r} \tag{7.4}$$

则若选择直角坐标 x 和 y 为广义坐标，拉氏量

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - k\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{7.5}$$

显然我们此时得不到运动积分. 如果以极坐标 r 和 θ 为广义坐标，即做变换

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \theta = \arctan\frac{y}{x} \tag{7.6}$$

那么拉氏量可以写成

$$L' = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - k\frac{1}{r} \tag{7.7}$$

我们发现，此时拉氏量 L' 中不显含 θ，所以 θ 对应的广义动量守恒，即

$$p_\theta=\frac{\partial L'}{\partial \dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta}=\text{const} \tag{7.8}$$

这便是角动量守恒.

利用点变换，我们貌似可以获得很多运动积分. 但不要忘了，拉格朗日力学是在位形空间中分析问题，它是 s 维的，意味着我们最多能得到 s 个运动积分. 此时哈密顿力学的优势就体现出来了：哈密顿力学是在相空间上分析问题，相空间具有更高的维度，它是 $2s$ 维的呀！

但也许有人会有疑问：相空间是由广义坐标 $\{q_\alpha\}$ 和广义动量 $\{p_\alpha\}$ 张成的，但是它们之间明明是一一对应的，也就是一旦确定了 q_α，p_α 就由 $\partial L/\partial\dot{q}_\alpha$ 确定下来了. 它们看起来并不是相互独立的，怎么能张成一个更高维的空间呢？

不要忘了我们曾在 2.1 节讲过：系统的拉氏量并不是唯一的，它们之间可以相差一个任意函数对时间的全导数. 由于拉氏量 L 有无穷多种情况，所以由 $\partial L/\partial\dot{q}_\alpha$ 定义的广义动量自然也有无穷多种情况. 这便说明了 $\{q_\alpha\}$ 与 $\{p_\alpha\}$ 之间其实是相互独立的.

现在我们终于看到了相空间的优越性：**它具有更高的维度，可获得更多的运动积分**. 而且在相空间中**坐标和动量的地位是平等的**，它们之间只是名字不同罢了，谁叫坐标谁叫动量其实都无所谓.

7.2 四类正则变换

我们的目的很明确：我们想在相空间中对坐标和动量施行某种变换，使哈密顿量 H 中出现更多的循环坐标，从而得到更多运动积分. 设变换的形式为：

$$\begin{cases}Q_\alpha=Q_\alpha\left(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t\right)\\ P_\alpha=P_\alpha\left(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t\right)\end{cases} \tag{7.9}$$

如果能够找到一个新的函数 $\tilde{H}$，使得变换之后正则方程的形式不变：

$$\dot{Q}_\alpha=\frac{\partial\tilde{H}}{\partial P_\alpha},\dot{P}_\alpha=-\frac{\partial\tilde{H}}{\partial Q_\alpha} \tag{7.10}$$

我们就将这种变换称为**正则变换** (canonical transformation).

在变换之前，最小作用量原理可写成

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha-H\right)\mathrm{d}t=0 \tag{7.11}$$

变换之后，最小作用量原理这个最高原理也一定要是成立的：

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_\alpha P_\alpha\dot{Q}_\alpha-\tilde{H}\right)\mathrm{d}t=0 \tag{7.12}$$

若想让式 (7.11) 和 (7.12) 同时成立，我们可以让两个式子的被积函数差一个对时间的全导数，即

$$\sum_\alpha p_\alpha\dot{q}_\alpha-H=\sum_\alpha P_\alpha\dot{Q}_\alpha-\tilde{H}+\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \tag{7.13}$$

这是因为 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t$ 可直接积分出来，变成区间端点的函数值之差；又因为在端点处变分为零，因此取变分后结果为零，对式子没有影响.

我们将式 (7.13) 中的 U 称为正则变换的**生成函数** (generating function)，也叫做母函数. 由于生成函数是维系新旧变量之间的桥梁，所以其函数式中必然同时含有新旧变量. 因此，我们可以写出下面四种类型的生成函数：

$$U_1 = U_1\left(q, Q, t\right), U_2 = U_2\left(q, P, t\right), U_3 = U_3\left(p, Q, t\right), U_4 = U_4\left(p, P, t\right) \tag{7.14}$$

我们的问题是：已知生成函数的形式后，如何确定正则变换的表达式？

我们可以将式 (7.13) 改写成如下形式：

$$\mathrm{d}U = \sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_\alpha P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \left(\tilde{H} - H\right)\mathrm{d}t \tag{7.15}$$

如果为第一类生成函数 $U_1 = U_1\left(q, Q, t\right)$，对其求微分有：

$$\mathrm{d}U_1 = \sum_\alpha \frac{\partial U_1}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial U_1}{\partial Q_\alpha}\mathrm{d}Q_\alpha + \frac{\partial U_1}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{7.16}$$

比较式 (7.15) 和 (7.16)，立即有

$$p_\alpha = \frac{\partial U_1}{\partial q_\alpha}\ ,\ P_\alpha = -\frac{\partial U_1}{\partial Q_\alpha}\ ,\ \tilde{H} = H + \frac{\partial U_1}{\partial t} \tag{7.17}$$

对于第二类生成函数 $U_2 = U_2\left(q, P, t\right)$，同样对其求微分有

$$\mathrm{d}U_2 = \sum_\alpha \frac{\partial U_2}{\partial q_\alpha}\mathrm{d}q_\alpha + \sum_\alpha \frac{\partial U_2}{\partial P_\alpha}\mathrm{d}P_\alpha + \frac{\partial U_2}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{7.18}$$

式 (7.15) 和 (7.18) 作比较，我们很快发现了问题：$\mathrm{d}q_\alpha$ 和 $\mathrm{d}t$ 是可以对上的，但 (7.15) 中的 $\mathrm{d}Q_\alpha$ 与 (7.18) 中的 $\mathrm{d}P_\alpha$ 此时对不上了. 不要怕，我们有秘密武器——勒让德变换，它赋予了我们随心所欲替换变量的能力. 如果想将式 (7.15) 中的 Q_α 换成 P_α，我们可以令

$$U' = U + \sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha \tag{7.19}$$

则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U\prime &= \sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha - \sum_\alpha P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \left(\tilde{H} - H\right)\mathrm{d}t + \sum_\alpha P_\alpha \mathrm{d}Q_\alpha + \sum_\alpha Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha \\ &= \sum_\alpha p_\alpha \mathrm{d}q_\alpha + \sum_\alpha Q_\alpha \mathrm{d}P_\alpha + \left(\tilde{H} - H\right)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{7.20}$$

再将式 (7.18) 和 (7.20) 相比较，我们得到

$$p_\alpha = \frac{\partial U_2}{\partial q_\alpha}\ ,\ Q_\alpha = \frac{\partial U_2}{\partial P_\alpha}\ ,\ \tilde{H} = H + \frac{\partial U_2}{\partial t} \tag{7.21}$$

对于第三类和第四类生成函数，推导方法和上面完全一样，下面直接给出结论：

$$U_3 = U_3\left(p, Q, t\right) : q_\alpha = -\frac{\partial U_3}{\partial p_\alpha}\ ,\ P_\alpha = -\frac{\partial U_3}{\partial Q_\alpha}\ ,\ \tilde{H} = H + \frac{\partial U_3}{\partial t} \tag{7.22}$$

$$U_4 = U_4\left(p, P, t\right) : q_\alpha = -\frac{\partial U_4}{\partial p_\alpha}\ ,\ Q_\alpha = \frac{\partial U_4}{\partial P_\alpha}\ ,\ \tilde{H} = H + \frac{\partial U_4}{\partial t} \tag{7.23}$$

7.3 利用正则变换解题

在题目给定生成函数的情况下，解题按下面的步骤来：

- 判断是第几类生成函数
- 列出相应的公式，得到 q, p 与 Q, P 之间的关系
- 写出新的哈密顿量 $\tilde{H} = \tilde{H}(Q, P, t)$，代入正则方程，得到关于 Q, P 的运动方程
- 最后再根据关系反解出 q 的运动规律即可

下面通过一道例题，让大家感受解题方法的应用.

例题　利用正则变换，由正则方程求竖直上抛的物体的运动规律. 本问题的母函数

$$U = mg\left(\frac{1}{6}gQ^3 + qQ\right)$$

式中 q 为确定物体位置的广义坐标，Q 为变换后的新的广义坐标.

解：本问题的生成函数是关于 q, Q 的函数，为第一类正则变换，因此

$$p = \frac{\partial U}{\partial q} = mgQ \tag{7.24}$$

$$P = -\frac{\partial U}{\partial Q} = -\frac{1}{2}mg^2Q^2 - mgq \tag{7.25}$$

$$\tilde{H} = H \tag{7.26}$$

新的哈密顿量为

$$\tilde{H} = \frac{p^2}{2m} + mgq = \frac{(mgQ)^2}{2m} - P - \frac{1}{2}mg^2Q^2 = -P \tag{7.27}$$

然后由正则方程，有

$$\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = -1 \longrightarrow Q = -t + C_1 \tag{7.28}$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0 \longrightarrow P = C_2 \tag{7.29}$$

初始条件为 $t = 0, q = 0, \dot{q} = v_0, p = mv_0$，代入 (7.28)(7.29)：

$$Q(0) = C_1 = \frac{p(0)}{mg} = \frac{v_0}{g} \tag{7.30}$$

$$P(0) = C_2 = -\frac{1}{2}mg^2Q^2(0) - mgq(0) = -\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{7.31}$$

最后由式 (7.25)，得到

$$\begin{aligned} q &= -\frac{1}{mg}\left(P + \frac{1}{2}mg^2Q^2\right) \\ &= -\frac{1}{mg}\left[-\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mg^2\left(-t + \frac{v_0}{g}\right)^2\right] \\ &= v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{7.32}$$

7.4 哈密顿-雅可比理论

我们知道，正则变换的目的是为了让变换后的新的哈密顿量 $\tilde{H}$ 尽可能少包含 Q_α, P_α，从而得到更多的运动积分. 但是正则变换效果的好坏，非常依赖于生成函数的形式. 生成函数选的好、选的恰当，那么便可以极大地简化问题. 我们本节的任务，是**寻找完美的正则变换**.

什么样才叫完美呢？如果做完正则变换后，我们能直接让 $\tilde{H}=0$，那么所有的新变量 Q_α, P_α 均为常数. 以第二类正则变换为例，我们想找到一个 $U=U(q,P,t)$，使得

$$\tilde{H}=H(q_1,\cdots,q_s;p_1,\cdots,p_s;t)+\frac{\partial U}{\partial t}=0 \tag{7.33}$$

由于 $\partial U/\partial t$ 中不包含 p_α，所以我们可以利用 $p_\alpha=\partial U/\partial q_\alpha$ 将 H 中的 p_α 全部换掉：

$$H\left(q_1,\cdots,q_s;\frac{\partial U}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial U}{\partial q_s};t\right)+\frac{\partial U}{\partial t}=0 \tag{7.34}$$

式 (7.34) 便是著名的**哈密顿-雅可比方程** (Hamilton-Jacobi equation)，它是关于 U 的一阶非线性偏微分方程. 想要完全求解它可不是一件容易的事，但我们可以做一些定性的分析.

观察一下，式 (7.34) 中含有 $s+1$ 个偏导数成分，因此最后的解 U 中必然含有 $s+1$ 个积分常数. 其中的某一个积分常数，我们设为最后一个好了，也就是 C_{s+1}，必然是以加法的形式出现在解中的. 因为 U 加上任意一个常数，必然也是原方程的解. 剩下 s 个积分常数可写在一个函数中，最终 U 的形式为：

$$U=C_{s+1}+f(q_1,\cdots,q_s;C_1,\cdots,C_s;t) \tag{7.35}$$

其实，剩下的 s 个积分常数正好就是 $P_1,\cdots,P_s$. 因为式 (7.34) 中只涉及了 U 对 q 的偏导，意味着我们要把 P 全部当做常数. 这样一来，问题得到了解决.

我们还要进一步思考一下：哈密顿-雅可比方程的解 U 到底有什么含义呢？观察式 (7.35) 可知，U 只是关于 q_α 和 t 的函数. 将 U 对时间求导可得：

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha \tag{7.36}$$

由 $\tilde{H}=H+\dfrac{\partial U}{\partial t}=0$，有

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-H \tag{7.37}$$

由第二类正则变换的性质，有

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}=p_\alpha \tag{7.38}$$

将 (7.37) 和 (7.38) 代入 (7.36)，得到

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=-H+\sum_{\alpha=1}^{s}p_\alpha\dot{q}_\alpha=L \tag{7.39}$$

因此

$$U=\int L\mathrm{d}t=S \tag{7.40}$$

我们发现，U **正好就是系统的作用量** S！

哈密顿-雅可比方程在量子力学的发展中也起到了重要的作用. 量子力学中的薛定谔方程，其经典极限就是哈密顿-雅可比方程；反过来把哈密顿-雅可比方程当拉氏量，对应的欧拉-拉格朗日方程就是薛定谔方程. 这种美妙，我想只有学物理的人才能 get 到吧！

附录 A

一些推导

A.1 球坐标系下质点动能表达式

三维空间中，质点 P 的球坐标用 (r,θ,φ) 表示. 其中 r 为 P 点矢径的大小，θ 是 OP 与 z 轴的夹角，φ 是 OP 在 xOy 面上的投影与 x 轴的夹角.

球坐标中的三个单位矢量为：

- $\vec{r}$：指向 r 增长的方向，它是背离原点向外的
- $\vec{\theta}$：与过 P 点的经线相切且指向 θ 增大的方向
- $\vec{\varphi}$：与过 P 点的纬线相切且指向 φ 增大的方向

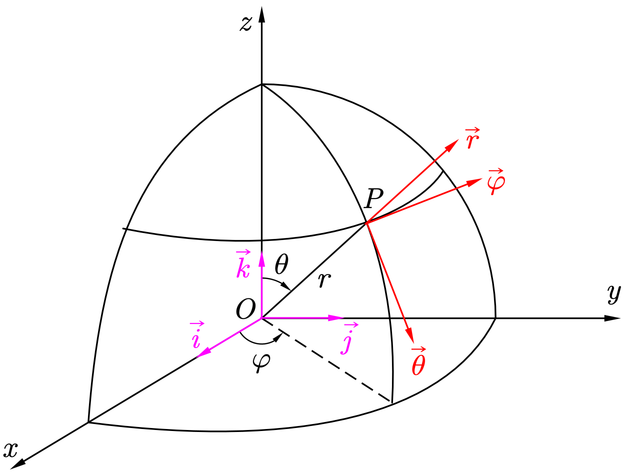

图 A.1: 球坐标系

直接计算质点的速度在球坐标系中的分量是非常麻烦的，我们可以先借助我们熟悉的笛卡尔坐标系用来过渡. 笛卡尔坐标系的基矢为 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，可将球坐标系的基矢用笛卡尔坐标系的基矢来表示：

$$\begin{cases} \vec{r} = \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} \\ \vec{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k} \\ \vec{\varphi} = -\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j} \end{cases} \tag{A.1}$$

将 $\vec{r}$ 对时间求导：

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \left(\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi\right)\vec{i} + \left(\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi\right)\vec{j} - \dot{\theta}\sin\theta\vec{k} \\ &= \dot{\theta}\left(\cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}\right) + \dot{\varphi}\sin\theta\left(-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\vec{j}\right) \\ &= \dot{\theta}\vec{\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{\varphi}\end{aligned} \tag{A.2}$$

同理可得

$$\dot{\vec{\theta}} = -\dot{\theta}\vec{r} + \dot{\varphi}\cos\theta\vec{\varphi} \tag{A.3}$$

$$\dot{\vec{\varphi}} = -\dot{\varphi}\sin\theta\vec{r} - \dot{\varphi}\cos\theta\vec{\theta} \tag{A.4}$$

设 P 的位矢为 $\vec{r}_P$，则 P 的速度为

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\vec{r}) &= \dot{r}\vec{r} + r\dot{\vec{r}} \\ &= \dot{r}\vec{r} + r\left(\dot{\theta}\vec{\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\vec{\varphi}\right) \\ &= \dot{r}\vec{r} + r\dot{\theta}\vec{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{\varphi}\end{aligned} \tag{A.5}$$

式 (A.5) 告诉了我们质点 P 的速度在球坐标下的三个分量：

$$v_r = \dot{r}\ ,\ v_\theta = r\dot{\theta}\ ,\ v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta \tag{A.6}$$

因此动能

$$T = \frac{1}{2}m\left(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) \tag{A.7}$$

有了质点的速度 (A.5)，读者还可以尝试计算质点的加速度在球坐标下的分量.

A.2 二维旋转的坐标变换公式

二维直角坐标系中的矢量 $\overrightarrow{OP} = (x, y)$，绕 O 点旋转 θ(以逆时针为正方向)，则旋转后的新矢量与原矢量存在如下的坐标变换关系：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

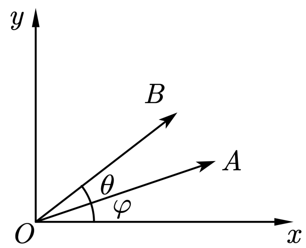

图 A.2: 单位矢量的旋转

要证明这个公式，我们可从最简单的单位矢量入手. 如图A.2所示，单位矢量 $\overrightarrow{OA}$ 绕 O 点旋转 θ 后得到 $\overrightarrow{OB}$，则

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

由式 (A.9)，我们立马可得旋转矩阵

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

证毕.

A.3 两个结论的证明

本节我们将给出下面两个公式的证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_k} \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \tag{A.12}$$

首先证明 (A.11). 由于 $\vec{r}_\alpha$ 是广义坐标与时间的函数，因此

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k \tag{A.13}$$

又 $\partial \vec{r}_\alpha / \partial q_k$ 同样也是广义坐标与时间的函数，因此

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\right) + \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_\beta}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}\right)\dot{q}_\beta \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right) \quad \text{代入式 (A.13)} \\ &= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_k} \end{aligned} \tag{A.14}$$

然后证明 (A.12). 将式 (A.13) 对 $\dot{q}_k$ 求偏导有：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right) \\ &= \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\beta}\frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{q}_k} \\ &= \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\beta}\delta_{\beta k} \\ &= \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \end{aligned} \tag{A.15}$$

证毕.

附录 B

参考资料

本讲义的编写过程中，参考过的书籍与资料列举如下：

- L. D. Landau, E. M. Lifshitz, 李俊峰译，《力学》(第五版)，高等教育出版社，2010
- 高显，《经典力学讲义》
- 梁昆淼，鞠国兴，施毅，《力学 (下册)》(第四版)，高等教育出版社，2009
- 赵亚溥，《力学讲义》，科学出版社，2018
- David Tong, Classical Dynamics
- 周衍柏，《理论力学教程》(第四版)，高等教育出版社，2018