從神經接駁仿生義肢到低正則性函數逼近：未來 cyberpunk 世界的一個機器學習原型構想

林承樸

2025 年 12 月 4 日

1　研究動機與未來情境

在許多科幻與 cyberpunk 類型的作品中，人類是什麼這個問題被重新定義：傳統上，我們會將人類與其生物性肉體綁在一起，但在這些未來世界裡，只要「意識」仍然存在，人類就被視為仍然存在。肉體可以被局部或全部替換，器官與四肢可以被仿生機械取代，甚至只剩下某種形式的意識與中樞神經核心。

在這樣的長遠願景之下，可以想像一個極端的終點：**只要保留意識，其餘肉體皆可替換**。然而，要達到這樣的終極狀態，勢必需要許多中間的階段性技術突破。本次作業的構想，選擇聚焦在其中一個相對「近未來」的環節：**神經接駁仿生義肢**。

具體來說，我們暫時不討論**全身皆可替換**的極端狀況，而是先考慮以下目標：設計一套系統，讓仿生義肢可以透過神經接駁介面，**正確解讀大腦所發出的神經訊號，並且在各種情緒與狀態下都能穩定地執行對應動作**。這樣的問題既是生物醫學與神經科學的挑戰，同時也包含了一個非常自然的問題：如何設計一個模型，將「大腦輸出的神經訊號」映射到「仿生義肢的控制指令」。

2　問題簡化

為了讓問題在作業範圍內可被處理，我先對原始願景進行多次且大量的簡化。

2.1　從完整賽博身體到神經接駁義肢

首先，在此文章裡，我們將只考慮相對人和的神經接駁的仿生義肢，不會去討論整個身體皆可替換的極端情境。簡單來看神經接駁的仿生義肢的問題，我們假設存在一個大腦或中樞神經系統，透過某種神經接駁介面，連接到一個或多個仿生義肢。這裡我們關心的問題是：

如何將大腦想做的事，透過神經訊號，清楚且穩定地傳達到仿生義肢上？

在粗略的分解以後，我們可以把整個系統視為以下訊號傳遞鏈：

1. 大腦產生神經訊號（可以視為某個函數）；
2. 神經接駁介面接收這些訊號；
3. 機器學習模型將接收到的訊號解讀並轉換成機器控制信號；
4. 仿生義肢根據控制信號產生實際動作。

2.2 平滑信號與不連續信號

在理想狀態下（例如心情平穩、專注狀態），我們可以將大腦輸出的想法或是神經訊號想像成一個平滑的函數；在這種情況下，現有許多關於平滑函數的逼近理論與神經網路近似結果，可以被用來設計解讀器，後續的機器控制訊號和動作的關聯性和設計暫且不提。

然而，現實的大腦訊號往往受到情緒與外在刺激的影響：例如難過、緊張、恐懼、興奮等狀態，都可能讓神經放電或是想法變得更為劇烈、帶有雜訊，這些的表現如果轉換成函數就像是不連續函數或低正則性函數。若我們只會學習「平滑函數」，那麼一旦大腦處於強烈情緒波動時，仿生義肢的行為可能變得不穩定，甚至失控。

因此，我嘗試將問題分為兩個部分：

- **情境 1：**大腦輸出信號為平滑函數；
- **情境 2：**大腦輸出信號具有尖峰、不連續或低正則性。

在兩種情境下，我們都希望利用機器學習模型，學習一個「由神經訊號到控制訊號」的映射，但第二種情境的難度顯然更高。

在機器學習的領域裡，對於平滑函數（例如屬於 $W^{k,\infty}$ 的函數）的近似已有不少研究，例如 De Ryck, Lanthaler, & Mishra (2021) *On the approximation of functions by tanh neural networks.* 使用 tanh 神經網路在 $W^{k,\infty}$ 範數下的近似能力。然而，**如何系統性地學習具有不連續或低正則性的函數**，目前相關文獻仍然相對較少，這就提供了一個有趣的切入點。

3 Sobolev 空間中的函數逼近構想

受到前述文獻的啟發，我希望將問題設定在更一般的 Sobolev 空間 $W^{k,p}(\Omega)$，特別考慮 $1 < p < n$ 的情況。此時，因為考慮的區域是在 n 維度空間裡，我們**無法再依賴 *Morrey's estimate*** 將函數視為 *Hölder* 連續函數，也就是說，目標函數可以有較差的正則性、更接近「不太好控制的神經訊號」。為了簡化分析，我進一步把問題化簡到 $W_0^{k,p}(\Omega)$，也就是在邊界上為零的 Sobolev 函數空間。我們都知道這類函數滿足

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \text{with} \quad \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx = 0. \tag{3.1}$$

對任意 $1 < p < \infty$。另外，當 $1 < p < n$ 時，我們還有 Sobolev 不等式

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C_2 \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad 1 + \frac{n}{q} = \frac{n}{p}. \tag{3.2}$$

在機器學習語言下，我可以把目標設定為：訓練一個參數化函數 u_θ，使其同時滿足：

1. 逼近某個目標函數 u（對應於理想的大腦訊號或控制訊號）；
2. 滿足平均值為零的條件 $\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_\theta = 0$；
3. 在訓練過程中加入類似 Poincaré 與 Sobolev 不等式的「受限結構」。

換句話說，我希望利用機器學習方法來「學習一個函數」，同時還必須滿足這個函數所滿足的幾個重要不等式與結構性約束」。這樣的受限函數逼近問題，未來有機會連結回神經接駁仿生義肢中「在強雜訊／強情緒下仍保持穩定解讀」的需求。

4 實作計畫與可能採用的機器學習方法

本節說明我打算如何把上述想法化簡成實際可做的問題。

4.1 整體實作方向

第一步，我會在一個簡單幾何區域（e.g. 單位圓或是立方體）上，人為設計一些具代表性的目標函數 u。接著，我會使用神經網路 u_θ 來近似這些函數，同時在 loss function 中加入：

- 資料逼近誤差（例如 L^2 或 L^p 範數下的誤差）；
- 平均值為零的懲罰項 $\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_\theta\right)^2$；
- 根據 Poincaré ／ Sobolev 不等式設計的「結構性懲罰」或正則化項。

透過比較不同訓練策略與網路架構在平滑／不連續目標上的表現，希望初步觀察「受限 Sobolev 訓練」在學習不連續函數時是否具有優勢。在模型選擇上，我目前考慮使用帶約束的神經網路訓練，之後再逐步放寬到分析更一般的區域。