线性代数笔记

Notes of Linear Algebra

改编自
怪怪的僵尸　北京大学　光华管理学院

2021 年 1 月 1 日

目录

第一章　线性方程组

1.1　数域

定义 1.1 (数域 Number Field)
设 K 是复数集的一个子集，如果 K 满足：

(1) $0, 1 \in K$

(2) 对于任意 $a, b \in K$，都有 $a \pm b, ab \in K$，并且 $b \neq 0$ 时，$\dfrac{a}{b} \in K$

那么称 K 是一个数域。

命题 1.2
$\mathbb{Q}$ 是最小的数域，$\mathbb{C}$ 是最大的数域。

1.2　高斯消元法

定义 1.3 (矩阵 Martix)
将 $s \cdot n$ 个数排成 s 行、n 列的一张表称为一个 $s \times n$ 矩阵。
特别地，如果 $s = n$，称其为 n 阶（级）方阵（矩阵）。

定义 1.4
线性方程组的系数按原来的次序排成一张表得到**系数矩阵**，包括常数项的称为**增广矩阵**。

定义 1.5 (矩阵的初等行变换)
矩阵（线性方程组）的初等行变换包括

(1) 把一行的倍数加到另一行上；

(2) 互换两行的位置；

(3) 用一个非零数乘某一行。

引理 1.6
对线性方程组做有限次初等行变换，所得方程组与原方程组同解。

解题方法 1 (高斯消元法)
对任意一个线性方程组，总可以通过初等行变换和必要的变量顺序交换，化为阶梯形。
若出现形如 $0 = d\,(d \neq 0)$，则原方程组无解；否则，有解，并进一步化为简化阶梯型。若非零行数目等于未知量数目，则原方程组有唯一解；否则有无穷多个解。

推论 1.7

n 元齐次线性方程组方程的数目 s 小于 n，则它一定有非零解。

第二章　行列式

2.1　排列

定义 2.1 (n 元排列)
n 个不同的自然数的一个全排列称为一个 n 元排列 σ。所有 n 元排列组成的集合记为 S_n。若某两个数大的在前，小的在后，此时这对数称为一个**逆序**，逆序的个数称为**逆序数**，记为 $\tau(\sigma)$，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**。把某两个数互换位置，其余的数不动，称为**对换**。

定理 2.2
对换改变排列的奇偶性。

定理 2.3
任意 n 元排列与排列 $12\cdots n$ 可以经过一系列的对换互变，并且所作对换的次数与此排列有相同的奇偶性。

命题 2.4
S_n 中奇排列、偶排列各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个。

2.2　行列式的定义

定义 2.5 (n 级行列式 Determinant)
数域 K 上的 n 级行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n}\left[(-1)^{\tau(\sigma)}\prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma_k}\right]$$

其中 $(-1)^{\tau(\sigma)}$ 称为**代数符号**。n 级行列式的展开式有 $n!$ 项。

命题 2.6 (上三角行列式)
上三角行列式的值等于主对角线上 n 个元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

定理 2.7 (行列地位对称性)
n 阶行列式也可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \left[(-1)^{\tau(\sigma)} \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma_k k} \right]$$

即：行列式的行与列的地位是对称的。

2.3 行列式的性质

性质 2.8 (行列对称性) 行列式转置 $a_{ij}=a_{ji}$
行列互换，行列式的值不变。即 $|A| = |A^{\mathrm{T}}|$

性质 2.9 (线性性)
行列式对于某一行 (列) 是线性的，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

某行(列)的公因子可以提到外面

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

某行(列)元素均是两个元素之和则可拆成两个行列式相加

推论 2.10
行列式有一行为 0，则行列式的值为 0。

推论 2.11
设 A 是 n 级矩阵，则 $|-A| = (-1)^n |A|$。

性质 2.12 (反对称性)
两行互换，行列式反号。
(列)

推论 2.13
两行全同，行列式为 0。

推论 2.14
两行成比例，行列式为 0。

性质 2.15 (初等行变换)
把一行的若干倍加到另一行上，行列式的值不变。

2.4　行列式按一行展开

定义 2.16 (代数余子式)
将 n 阶行列式的展开式中所有含有 a_{ij} 的项提出公因子 a_{ij} 后得到的 $(n-1)!$ 项称为位置 (i,j) 的代数余子式，记为 A_{ij}。

性质 2.17
代数余子式 A_{ij} 与第 i 行的项无关。

定义 2.18 (行列式按 i 行展开)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

引理 2.19 (张冠李戴引理)
行列式的一行元素与另一行对应位置元素的代数余子式的乘积之和为 0。即：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0 \quad (k \neq i)$$

定理 2.20
对于任意 n 级行列式 D，都有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = D\delta_{ik}$$

其中 δ_{ik} 是克罗内克记号，即

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

定义 2.21 (余子式)
n 阶行列式 $|A|$ 中，划去第 i 行和第 j 列，剩下的元素按照原来的次序组成的 $n-1$ 阶行列式称为 A 的 (i,j) 位置的余子式，记作 M_{ij}。

定理 2.22 (行列式按一行展开定理)
对于任意 n 阶行列式 $|A|$，

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}M_{ij}$$

定义 2.23 (范德蒙行列式)
下列行列式称为范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

定理 2.24
范德蒙行列式的值为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j)$$

推论 2.25 (范德蒙行列式不为零的条件)
如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 两两不等，则范德蒙行列式不等于 0。

2.5 克拉默法则

定理 2.26 (克拉默法则 Cramer's Law)
对于数域 K 上的 n 个方程 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果其系数矩阵

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组有唯一解

$$x_j = \frac{d_j}{d}$$

其中，d_j 表示将系数矩阵的第 j 列替换成常数项，即

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & b_2 & & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & b_n & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简化计算

解 $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2 \\ bcx+cay+abz=3abc \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & ac-bc & ab-bc \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ bc & -c & -b \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ bc & -c & c-b \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a+b+c & 1 & 1 \\ a^2+b^2+c & b & c \\ 3abc & ac & ab \end{vmatrix} = a(b-a)(c-a)(c-b)$$

同理 D_2, D_3.

推论 2.27 (齐次线性方程组的判别)充要条件
n 个方程的 n 元齐次线性方程组只有零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式不等于 0；
n 个方程的 n 元齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ 系数行列式等于 0。
(不止唯一解)

2.6 行列式按 k 行展开

定义 2.28 (子式)

n 级行列式 D 中选定 k 行、k 列，交点处的 k^2 个元素组成的行列式（次序不变）称为 D 的一个 k 阶子式，记为

$$M = D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

剩余的 $(n-k)$ 行、列交点处的 $(n-k)^2$ 个元素组成的行列式称为余子式，记为

$$M' = D\begin{pmatrix} i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_{n-k} \\ j'_1 & j'_2 & \cdots & j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

定义 2.29 (代数余子式)

n 阶行列式 D 的一个子式

$$M = D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

的代数余子式为

$$A = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} M'$$

定理 2.30 (拉普拉斯定理 Laplace's Theorem 行列式按 k 行展开)

在 n 阶行列式 D 中取定 k 行：第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行（$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$），则这 k 行元素形成的所有 k 阶子式与它们自己的代数余子式的乘积之和等于 D。即：

$$D = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < i_k \le n} D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \cdot (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} D\begin{pmatrix} i'_1 & i'_2 & \cdots & i'_{n-k} \\ j'_1 & j'_2 & \cdots & j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

推论 2.31

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

第三章　线性方程组的进一步理论

3.1　n 维向量空间

定义 3.1 (n 维向量空间)
取定数域 K 和正整数 n，集合

$$K^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n)\,|a_i \in K\}$$

规定加法运算和数乘运算，称为数域 K 上的一个 n 维向量空间。

性质 3.2 (向量空间的性质)
(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$　(交换律)

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$　(结合律)

(3) $\mathbf{0} + \alpha = \alpha + \mathbf{0} = \alpha$　(加法单位元)

(4) $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$　(加法逆元)

(5) $1\alpha = \alpha$　(乘法单位元)

(6) $(kl)\,\alpha = k\,(l\alpha)$　(数乘结合律)

(7) $(k + l)\,\alpha = k\alpha + l\alpha$　(分配律 1)

(8) $k\,(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$　(分配律 2)

定义 3.3 (线性组合)
在 K^n 中给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$；在 K 中给定一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，把

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

称为向量组的一个线性组合。

定义 3.4 (线性表出)
对于 $\beta \in K^n$，若存在 K 中的一组数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$

则称 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出。

命题 3.5　$AX=b$　$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n), b=\beta$
数域 K 上的线性方程组 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta$ 有解
$\Leftrightarrow \beta$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。$\Rightarrow R(A|b)=R(A)$

定义 3.6 (子空间)
K^n 的一个子集 U 若满足以下条件：

1 ° U 非空

2 ° $\alpha, \beta \in U \Rightarrow \alpha + \beta \in U$

3 ° $\alpha \in U, k \in K \Rightarrow k\alpha \in U$

则称 U 是 K^n 的一个线性子空间，简称**子空间**。

命题 3.7
向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的所有线性组合组成的集合

$$W = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s | k_i \in K\}$$

是 K^n 的一个子空间，称为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 生成的子空间，记为

$$\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \rangle$$

3.2 线性相关和线性无关

定义 3.8 (线性相关)
K^n 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 称为是**线性相关**的，如果有 K 中不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

定义 3.9 (线性无关)
K^n 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 称为是**线性无关**的，如果它不是线性相关的。即如果从方程

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$$

可以推出系数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 全为 0，则称向量组是线性无关的。

命题 3.10
包含零向量的向量组一定线性相关.

命题 3.11
单个向量 α 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\alpha = \mathbf{0}$

定义 3.12 (标准基)
向量组 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$，其中 $\eta_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$(第 i 个数为 1)，称为 K^n 的**标准基**。标准基是线性无关的。

定理 3.13 (线性相关的等价条件)
K^n 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性相关
$\Leftrightarrow$ 它们有系数不全为零的线性组合等于零向量；
$\Leftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其余向量线性表出；
$\Leftrightarrow$ 有 K 中不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$;
$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 有非零解；
$\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为列向量组的矩阵行列式等于零。

向量组的线性相关性与方程组的关系

给定列向量 A: $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$, $A=(a_1, a_2, \cdots a_m)$

向量组A线性相关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组：$AX=0$ 有非零解

向量组A线性相关 $\Leftrightarrow R(A)<m$

向量组A线性无关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组：$AX=0$ 只有零解

向量组A线性相关 $\Leftrightarrow R(A)=m$

定理 3.14 (线性无关的等价条件)
K^n 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关
$\Leftrightarrow$ 只有系数全为零的线性组合才等于零向量；
$\Leftrightarrow$ 其中每一个向量都不能由其余向量线性表出；
$\Leftrightarrow$ 从方程 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = \mathbf{0}$ 可以推出系数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 全为 0；
$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_s\alpha_s = 0$ 只有零解；
$\Leftrightarrow$ 以 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 为列向量组的矩阵行列式不等于零。

命题 3.15 (部分组)
部分组线性相关 $\Rightarrow$ 整个向量组线性相关。
向量组线性无关 $\Rightarrow$ 任何一个部分组线性无关。

定义 3.16 (延伸组和缩短组)
把 n 维向量组的每个向量都填上 m 个分量（所填分量的位置相同），得到的向量组称为原向量组的一个**延伸组**。
把 n 维向量组的每个向量都去掉 m 个分量（所填分量的位置相同），得到的向量组称为原向量组的一个**缩短组**。

命题 3.17
向量组线性无关 $\Rightarrow$ 延伸组线性无关。
向量组线性相关 $\Rightarrow$ 缩短组线性相关。

命题 3.18
K^n 中任意 $n+1$ 个向量线性相关。

定理 3.19
设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则：
β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性相关。

推论 3.20
设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，则：
β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta$ 线性无关。

命题 3.21 (*)
若向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，则表出方式唯一，当且仅当 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。

定理 3.22 (* 替换定理)
设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关，$\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_s\alpha_s$，如果系数 $b_i \neq 0$，那么用 β 替换 a_i 后所得的向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_s$ 仍线性无关。

定理 3.23 (*)
由非零向量组成的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$(s>1) 线性无关当且仅当每一个向量 $\alpha_i(1 < i \leq s)$ 都不能用它前面的向量线性表出，即每一个 α_i 都不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出。

3.3 向量组的秩

定义 3.24 (极大线性无关组)
向量组的一个部分组如果是线性无关的，同时，如果从向量组中的其余向量中再取一个添加进去，得到的新部分组是线性相关的，那么就称这个部分组是一个**极大线性无关组**。

定义 3.25 (向量组的线性表出)
称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 可以被向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表出，如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 中的每个向量都可以被向量组 $\beta_1, \cdots, \beta_r$ 线性表出。

定义 3.26 (等价)
如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 可以互相线性表出，则称它们**等价**，记为

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\}$$

秩相等
$R(B)=R(C)=R(B|C)$

向量组的等价关系具有反身性、对称性、传递性。

命题 3.27
向量组和它的极大线性无关组等价。

推论 3.28
向量组的任意两个极大线性无关组等价。

推论 3.29
β 可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出当且仅当 β 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的一个极大线性无关组线性表出。

引理 3.30 (线性相关性引理)
如果向量数量较多的向量组可以被一个较少的向量组线性表出，那么前者一定线性相关。即：如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，如果 $r > s$，那么 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 一定线性相关。

推论 3.31
如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关，而它可以由另一个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出，那么 $s \geq r$。

推论 3.32
等价的线性无关组所含向量个数相等。

由命题3.27和推论3.32得到：

推论 3.33
向量组的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相等。

矩阵的秩等于它的列向量组的秩 也等于行向量组的秩

从而可以定义：

定义 3.34 (向量组的秩)
向量组的秩是向量组的极大线性无关组所含向量的个数。
向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的秩记作 $\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$。

命题 3.35
向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} = s$

定理 3.36
如果向量组 (I) $\xrightarrow{\text{表出}}$ 向量组 (II)，那么 (I) 的秩 $\geq$ (II) 的秩。
秩较大的表出“能力”强。

推论 3.37
等价的向量组有相等的秩。

命题 3.38
若向量组的秩为 r，则向量组中任意 r 个线性无关的向量构成一个极大线性无关组。

定理 3.39 (扩充)
一个向量组的任何一个线性无关组可以扩充成一个极大线性无关组。

定理 3.40 (合并组的秩)
对于两个向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$，有：

$$\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\} \leq \operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} + \operatorname{rank}\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\}$$

定理 3.41
$\operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r\} \leq \operatorname{rank}\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}$
$\Leftrightarrow \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性表出。

3.4　子空间

定义 3.42 (基)
设 U 是 K^n 的一个子空间，如果向量组满足以下条件：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \in U$；

(2) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

(3) U 中每一个向量都可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出。

那么称 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是 U 的一个基。

定理 3.43 (化简)
设 $U = \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \rangle$，总可以从 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中去掉一些向量 (也可以去掉 0 个)，使得其余向量构成 U 的一个基。

定理 3.44 (扩充)
子空间 U 的任意一个线性无关的向量组都可以扩充成 U 的一个基。

由定理3.32知：

定义 3.45 (维数)
K^n 的非零子空间 U 的任意两个基所含向量的个数相等，向量的个数称为 U 的**维数**，记为 $\dim A$。

命题 3.46
设 $\dim U = r$，则 U 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关。

定理 3.47 (基的找法)
设 $\dim U = r$，则 U 中任意 r 个线性无关的向量都是 U 的一个基。

定理 3.48 (子空间维数的关系)
若 U, W 都是 K^n 的非零子空间，且 $U \subseteq W$，则 $\dim U \leq \dim W$。

定理 3.49 (子空间相等的条件)
设 U, W 都是 K^n 的非零子空间，且 $U \subseteq W$，则

$$\dim U = \dim V \ \Leftrightarrow U = W$$

定理 3.50 (秩和维数的关系)
向量组生成的子空间的维数等于向量组的秩。即：

$$\boxed{\dim \langle \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \rangle = \operatorname{rank} \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\}}$$

3.5 矩阵的秩

定义 3.51 (行秩和列秩)
矩阵的行向量组的秩称为行秩。矩阵的列向量组的秩称为列秩。

注：$A_{m\times n}$
(1) 零矩阵的秩为0
(2) $0 \leq R(A) \leq \min(m,n)$
(3) n阶方阵A可逆的充分必要条件为 $R(A)=n$

定理 3.52 (行秩等于列秩)
矩阵 A 的行秩等于列秩，统称为矩阵的**秩**，记为 $\operatorname{rank}(A)$。

定理 3.53 (初等变换不改变秩)
矩阵的初等行变换和初等列变换不改变矩阵的秩。

若矩阵A与B等价，则A与B的最高阶非零子式的阶数相同

定理 3.54 (秩的等价定义)
非零矩阵的秩等于其不为零的子式的最高阶数 (也称为**行列式秩**)。若非零矩阵存在一个 r 阶子式非零，而所有 $r-1$ 阶子式全为零，则矩阵的秩为 r。

命题 3.55
设 $s \times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则 A 的任意一个不为零的 r 阶子式所在的行构成 A 行向量组的一个极大线性无关组，所在的列构成 A 列向量组的一个极大线性无关组。

定义 3.56 (满秩)
若一个 n 阶方阵的秩等于 n，则称此矩阵**满秩**。

定义 3.57 (行满秩和列满秩)
如果矩阵的秩等于行数，则称此矩阵是**行满秩矩阵**。如果矩阵的秩等于列数，则称此矩阵是**列满秩矩阵**。

定理 3.58
设 $A \in K^{n\times n}$，则 A 满秩 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

以下是一些补充结论。

定理 3.59
矩阵的子矩阵的秩不超过矩阵的秩。

二、求矩阵的秩

1. 行阶梯形矩阵的秩

阶梯形矩阵的秩就是阶梯形矩阵的非零行数

2. 若矩阵A与B等价，则 $R(A)=R(B)$

3. 求 $R(A)$ 的方法

利用初等行变换 求出行阶梯矩阵

例. 设3阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 的秩为2，则有(C)

A. $a=b$ 且 $a+2b=0$　　B. $a=b$ 且 $a+2b\neq 0$

C. $a\neq b$ 且 $a+2b=0$　　D. $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

若 $a+2b\neq 0$，则

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$ ∵ A的秩为2，∴不满足

∴ $a+2b=0$

若 $a=b$，则

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ∴不满足

∴ $a\neq b$

综上：$a\neq b$ 且 $a+2b=0$

二、矩阵秩的性质

1. $0\leq R(A)\leq \min(m,n)$
2. $R(A^T)=R(A)$
3. 若矩阵A与B等价，则 $R(A)=R(B)$
4. 若矩阵P、Q为可逆矩阵，则 $R(PAQ)=R(A)$
5. $\max(R(A),R(B)) \leq R(A,B) \leq R(A)+R(B)$

   $R(A) \leq R(A|b) \leq R(A)+1$
6. $R(A+B) \leq R(A)+R(B)$
7. $R(AB) \leq \min(R(A),R(B))$
8. 若 $AB=0$，则 $R(A)+R(B)\leq n$

例. A为m×n矩阵, B为n×m矩阵, E为m阶单位阵, 且AB=E, 则(A)

(A) $R(A)=m$, $R(B)=m$ (B) $R(A)=m$, $R(B)=n$

(C) $R(A)=n$, $R(B)=m$, (D) $R(A)=n$, $R(B)=n$.

解: ∵ A为m×n矩阵.

∴ $R(A)\leq m$,

又 $AB=E$, $R(E)\leq \min(R(A), R(B))$

∴ $R(A)\geq m$

即 $R(A)=m$

∵ B为n×m矩阵.

∴ $R(B)\leq m$

又 $AB=E$,

∴ $R(B)\geq m$

即 $R(B)=m$

例. 若n阶方阵A满足: $A^2=E$, 求证: $R(A+E)+R(A-E)=n$

解: ∵ $A^2=E$

∴ $(A+E)(A-E)=0$

∴ $R(A+E)+R(A-E)\leq n$

∵ $(A+E)+(E-A)=2E$

∴ $R(A+E)+R(E-A)\geq R(2E)=n$

即 $R(A+E)+R(A-E)=n$

定理 3.60
$m \times n$ 矩阵的秩为 r，则它的任意 s 行组成的子矩阵的秩不小于 $r + s - m$。

定理 3.61 (分块对角矩阵的秩)

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

定理 3.62 (分块上三角矩阵的秩)

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

特别地，如果 A、B 都是行满秩矩阵，或都是列满秩矩阵，则等号成立。

方程组 行最简形矩阵

$\Downarrow$ $\uparrow$ 行

$A \xrightarrow[\text{变换}]{\text{初等行}}$ 行阶梯形 $\Rightarrow R(A)$ 与 n

$\Downarrow$

有 / 没有

$\downarrow$

求非零解

3.6 解空间

定理 3.63 (线性方程组有解判别定理)
线性方程组有解的充要条件是它的系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩。
在有解的情况下，如果系数矩阵的秩等于未知量的个数，则方程组有唯一解；如果系数矩阵的秩小于未知量的个数，则方程组有无穷多个解。

命题 3.64
齐次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数矩阵的秩小于未知量的个数。
齐次线性方程组无非零解的充要条件是它的系数矩阵的秩等于未知量的个数

定义 3.65 (解空间)
数域 K 上 n 元齐次线性方程组的所有解向量构成的集合 W 是 K^n 的一个子空间，称为方程组的**解空间**。

定义 3.66 (基础解系)
齐次线性方程组有非零解时，其解空间一定有基，它的一个基称为齐次线性方程组的一个**基础解系**。
即齐次线性方程组有非零解时，如果它的有限多个解 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性无关，而且每一个解都可以由 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 线性表出，则 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是齐次线性方程组的一个基础解系。

定理 3.67 (解空间的维数)
数域 K 上的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵为 A，解空间为 W，则

$$\boxed{\dim W = n - \operatorname{rank}(A)}$$

定理 3.68 (基础解系的找法)
数域 K 上的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 r，且 $r < n$，则方程任意 $n - r$ 个线性无关的解向量都是它的一个基础解系。

系数矩阵A $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形矩阵 ⟶ 求R(A)，判别方程组有无非零解

$\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行最简形矩阵 ⟶ 求方程组的非零解.

解题方法 2 (求齐次线性方程组基础解系的步骤)

设 $m\cdot n$ 矩阵A的秩 $R(A)=r$，则n元齐次线性方程 $AX=0$

例1. 求
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$$

步骤：(1) 写出系数矩阵
(2) 化为行阶梯形
(3) 求出R(A)
判别是否有非零解
(4) 化为行最简形
(5) 求出基础解系
(6) 求出通解

解：
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \xi_1=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例2. 设n阶方阵A的各行元素之和为零，且 $R(A)=n-1$，则 $AX=0$ 的通解为

解：$X=c(1\ 1\ 1\ 1\ \cdots 1)^T$

例3. 已知三阶方阵 $B\neq 0$，且B的每一个列向量都是齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \lambda=$$

非齐次线性方程组的求解

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_n \end{cases}$$

$AX=b$，系数矩阵：A

增广矩阵：$\bar{A}=(A|b)$

(1) 线性方程组有解的充要条件为：$R(\bar{A})=R(A)$

(2) 线性方程组有唯一解的充要条件为：$R(\bar{A})=R(A)=n$

(3) 线性方程组有无穷多解的充要条件为：$R(\bar{A})=R(A)<n$

求解方法

增广矩阵 $\bar{A}$ $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 行最简形矩阵

行阶梯形矩阵 ⟶ 求出R(A)与R($\bar{A}$) 判断方程组有无解

行最简形矩阵 ⟶ 求方程组的解

1. 非齐次线性方程组的解的性质

性质1：设 η_1，η_2 是非齐次线性方程组：$AX=b$ 的解，则 $\eta_1-\eta_2$ 是齐次线性方程组：$AX=0$ 的解

性质2：设 ξ 是 $AX=0$ 的解，η 是 $AX=b$ 的解，则 $\xi+\eta$ 是非齐次线性方程组：$AX=b$ 的解

2. 非齐次线性方程组通解的结构

通解结构：若齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}$，且 η 为非齐次线性方程组：$AX=b$ 的一个特解，则 $AX=b$ 的通解为：$c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-1}\xi_{n-1}+\eta$

例 求非齐次线性方程组：
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=2 \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=5 \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=16 \end{cases}$$
的通解

解：
$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & -7 & 3 & 1 & 16 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\therefore \xi_1=\begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \eta=\begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore X=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\eta$

步骤
(1) 写出增广矩阵
(2) 化为行阶梯形
(3) 求出R(A)，R($\bar{A}$)
判断是否有非零解
(4) 化为行最简形
(5) 求出基础解和特解
(6) 求出通解

例：常数 λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}$ 无解，有唯一解，有无穷多解？

解：

法一：$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda-\lambda^2-\lambda^3 \end{array}\right)$$

若 $2-\lambda-\lambda^2 \neq 0$ 即 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq -2$ 时，有 $R(\bar{A}) = R(A) = 3$，方程组有唯一解

若 $\lambda = 1$，则 $R(\bar{A}) = R(A) = 1 < 3$，方程组有无穷多解

若 $\lambda = 2$，则 $R(\bar{A}) = 3$，$R(A) = 2$，方程组无解多解

法二：克莱姆法则

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

若 $D \neq 0$，则 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 2$，唯一解

若 $D = 0$，则 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 2$，如法一分类讨论

1.齐次线性方程组解的性质

性质1：设 ξ 是齐次线性方程组：$AX=0$ 的解

则任取实数 k，$k\xi$ 也是齐次方程组的解，

性质2：设 ξ_1，ξ_2 是齐次线性方程组：$AX=0$ 的解

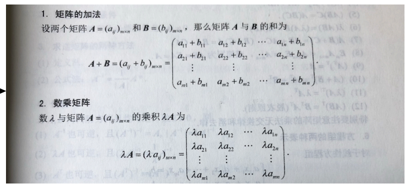
则 $\xi_1+\xi_2$ 也是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解

若 $AX=0$ 有非零解，则非零解一定有无数个

第四章　矩阵

4.1　矩阵的运算

定义 4.1 (矩阵的加法、减法和数乘)
略。



1. **矩阵的加法**

设两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. **数乘矩阵**

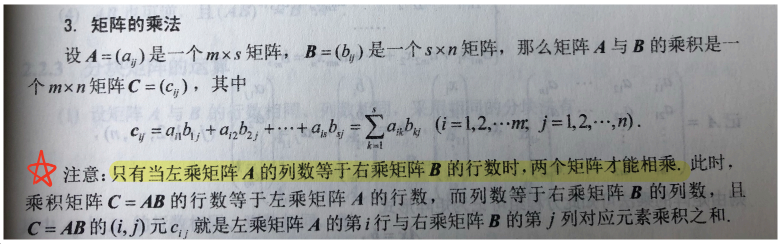
数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{A}$ 为

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

定义 4.2 (矩阵的乘法)
设 $A=(a_{ij})_{s\times n}$，$B=(n_{ij})_{n\times m}$，令矩阵 $C=(c_{ij})_{s\times m}$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

则矩阵 C 称为矩阵 A 与 B 的乘积，记为 $C=AB$，称为 B 左乘[1] A，或 A 右乘 B，或 “用 A 左乘 B” [2]，或 “用 B 右乘 A”。



3. **矩阵的乘法**

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad (i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,n).$$

注意：只有当左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，两个矩阵才能相乘. 此时，乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的行数等于左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，而列数等于右乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数，且 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 元 c_{ij} 就是左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与右乘矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和.

矩阵乘积定义的动机来自于线性变换的复合。

性质 4.3 (矩阵乘积的性质)
(1) 左矩阵的列数等于右矩阵的行数才能相乘

(2) 乘积的行数等于左矩阵的行数，列数等于右矩阵的列数。

命题 4.4 (乘积的运算律)
(1) **不适合交换律**。即使对于方阵，一般地，$AB\neq BA$。

(2) 结合律：$(AB)C=A(BC)$

(3) 左分配律：$(A+B)C=AC+BC$

(4) 右分配律：$A(B+C)=AB+AC$

$$\boxed{\begin{aligned} A\cdot E_k &= A \\ E_m\cdot A &= A \end{aligned}}\qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) **不适合消去律**。即 $AC=BC$ 且 $C\neq 0 \nRightarrow A=B$

(6) $AB=0 \nRightarrow A=0$ 或 $B=0$

(7) $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

(8) $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

(9) $(k\cdot A)^T=k\cdot A^T$

(10) $(A^T)^T=A$

定义 4.5 (可交换)
若 $AB=BA$，则称 A、B 可交换。

[1] 所谓左乘，是指在 $\cdots$ 的左边乘
[2] 左乘的接收者是后面的矩阵，所以是指在后面的那个矩阵的左边乘

定义 4.6 (单位矩阵)
主对角线上的元素为 1，其余元素为 0 的 n 级矩阵称为 n 级单位矩阵，记为 I_n。

定义 4.7 (矩阵的幂)
设 A 是 n 级方阵，定义 $A^0 = I$，$A^m = AA^{m-1}(m > 0)$。

性质 4.8 (幂的运算律)

$(E+B)(E-B)=E^2-B^2$

$A=(aE+B)$ (A为三角矩阵)

$\therefore A^n=(aE+B)^n=a^{n-1}E+C_n^1a^{n-1}B+C_n^2a^{n-2}B^2+C_n^3a^{n-3}a^3+\cdots+C_n^nB^n$

(1) $A^kA^l = A^{k+l}$

(2) $\left(A^K\right)^l = A^{kl}$

(3) 一般地，$(AB)^k \neq A^kB^k$

(4) 若 A, B 可交换，则 $(AB)^k = A^kB^k$

命题 4.9 (用矩阵乘法表示线性方程组)
对于数域 K 上的 s 个方程 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

其系数矩阵为 $s \times n$ 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

常数项构成 $s \times 1$ 矩阵 (列向量)

$$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_s)^{\mathrm{T}}$$

用 X 表示未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的列向量

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

则线性方程组可以写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

或写为

$$AX = \beta$$

齐次线性方程组可以写成

$$AX = 0$$

命题 4.10
列向量 η 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解 $\Leftrightarrow A\eta=0$。

命题 4.11 (矩阵右乘列向量)
$s\times n$ 矩阵 A 右乘 n 维列向量 $\beta\in K^n$，其结果是一个 s 维列向量，是 A 的各列以 β 中对应元素为权的线性组合。设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，其中 α_i 是一个 s 维向量，$\beta=(b_1,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，则

$$A\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$$

命题 4.12 (从列向量的角度看待矩阵乘法)
AB 的每一列是 A 的各列以 B 的对应列的元素为权的线性组合，即
设 $B=\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，则

$$AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)$$

也可以写为

$$\begin{aligned}AB&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1m}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&b_{nm}\end{pmatrix}\\&=(b_{11}\alpha_1+\cdots+b_{n1}\alpha_n,\cdots,b_{1m}\alpha_1+\cdots+b_{nm}\alpha_n)\end{aligned}$$

推论 4.13 (线性方程组与矩阵方程的关系)
设 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，则

$$AB=0\Leftrightarrow\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\text{都是齐次线性方程组}AX=0\text{的解。}$$

4.2　特殊矩阵

定义 4.14 (对角矩阵)
除了主对角线以外的元素全为零的矩阵称为对角矩阵，记为 $\operatorname{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$。

性质 4.15
用对角矩阵左乘矩阵 A，相当于用对角元分别乘 A 的每一行。
用对角矩阵右乘矩阵 A，相当于用对角元分别乘 A 的每一列。
两个对角矩阵的乘积还是对角矩阵，乘积是把对应的对角元相乘。

定义 4.16 (基本矩阵)
只有一个元素是 1，其余元素是 0 的矩阵称为基本矩阵，记为 E_{ij}。

定义 4.17 (上三角矩阵)
主对角线下方的元素全为 0 的矩阵称为上三角矩阵。

性质 4.18
两个 n 阶上三角矩阵的乘积仍是上三角矩阵，乘积的对角元是两个矩阵相应对角元的乘积。

定义 4.19 (数量矩阵)
矩阵 kI_n 称为 n 级数量矩阵。

命题 4.20

与所有 n 级矩阵可交换的矩阵一定是 n 级数量矩阵。

丘老师认为这一定理相当重要，应当熟记。

定义 4.21 (初等行矩阵)

由单位矩阵进行一次初等行变换得到的矩阵称为初等行矩阵，包括

(1) 第二类 $P(i(c))$: 将 i 行乘以 $c(c \neq 0)$;

(2) 第一类 $P(i,j)$: 将第 i,j 行互换;

(3) 第三类 $P(i,j(c))$: 将第 j 行的 c 倍加到第 i 行。

矩阵的行等价

若矩阵A经过有限次初等行变换变成矩阵B

则称矩阵A与矩阵B行等价

即 $A \xrightarrow{行} B$

同理 $A \xrightarrow{列} B$，$A \sim B$

矩阵等价的性质

反身性 $A \sim A$

对称性 $A \sim B$ 则 $B \sim A$

传递性 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$

定义 4.22 (初等列矩阵)

略。同行矩阵

定理 4.23 (初等变换的矩阵表示)

对 A 进行初等行变换，相当于 A 左乘相应的初等行矩阵；$B=PA$

对 A 进行初等列变换，相当于 A 右乘相应的初等列矩阵；$C=AP$

定理：A与B行等价 $\longleftrightarrow$ 存在可逆矩阵P，使 $B=PA$

A与B列等价 $\longleftrightarrow$ 存在可逆矩阵Q，使 $B=AQ$

A与B等价 $\longleftrightarrow$ 存在可逆矩阵P、Q，$B=PAQ$

定义 4.24 (对称矩阵)

$$A^{\mathrm{T}} = A$$

若A，$a_{ij}=a_{ji}$，则A为对称矩阵

命题 4.25

对于任意矩阵 A，都有 AA^{T}、$A^{\mathrm{T}}A$ 是对称矩阵。

定义 4.26 (斜对称矩阵)(反对称矩阵)

$$A^{\mathrm{T}} = -A$$

A = 对称矩阵 + 反对称矩阵

$$= \frac{A+A^T}{2} + \frac{A-A^T}{2}$$

命题 4.27

斜对称矩阵的秩一定是偶数。

补充：

方阵的行列式

$|kA|=k^n|A|$，$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$，$|A^T|=|A|$

定义 4.28 (移位矩阵)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

称为 n 级移位矩阵。

命题 4.29

用 H 左乘一个矩阵，相当于把该矩阵上移一行，最后一行补零；

用 H 右乘一个矩阵，相当于把该矩阵右移一列，第一列补零。

引入矩阵初等变换的目的

1. 将矩阵通过初等行变换化为行阶梯形矩阵

行阶梯形矩阵的概念：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

将矩阵化为行阶梯形矩阵　从第一阶梯开始

例. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{交换 1, 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\text{构造第一个阶梯}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -10 & 10 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2行}\times(-3)+\text{3行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{交换 2, 3 行, 构造第 2 个}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & -72 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 将行阶梯形矩阵通过初等行变换化为行最简形矩阵

行最简形矩阵的概念：

阶梯口为 1

列中其它为 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 将行最简形矩阵通过初等列变换化为标准形矩阵

标准形矩阵的概念：$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

初等矩阵

1. 初等矩阵定义

初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换所得的矩阵

2. 初等矩阵与初等变换的关系

↑ P_{22} 定理4.23

3. 初等矩阵与矩阵可逆的关系

初等矩阵都是可逆矩阵，且其逆矩阵仍为初等矩阵.

矩阵可逆的充分必要条件是该矩阵可以写成有限个初等矩阵的乘积

$$(A \,|\, E)_{n\times 2n} \xrightarrow{\text{行}} (E \,|\, A^{-1})$$

例. $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix}$

解: ∵ $|A|=\begin{vmatrix}1&3\\2&7\end{vmatrix}=1\neq 0$

∴ A可逆

$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&7\end{pmatrix} \xrightarrow{-2} B=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix} \rightarrow C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

∵ $B=P_1A$, $C=P_2B$

∴ $C=P_1P_2A$

$\Rightarrow A=P_1^{-1}P_2^{-1}E$

例 $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$, 求$A^{-1}$

解: $(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\3&1&5&0&1&0\\3&2&3&0&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&1&1&0&0\\0&-1&4&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow[r_2-4r_3]{r_1-r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&0&2&0&-1\\0&-1&0&3&1&-4\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$

$\xrightarrow{r_2\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc}3&2&0&2&0&-1\\0&1&0&-3&-1&4\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{r_1-2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&8&2&-9\\0&1&0&-3&-1&4\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right) \xrightarrow{r_1\times\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{8}{3}&\frac{2}{3}&-3\\0&1&0&-3&-1&4\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$

∴ $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}&\frac{2}{3}&-3\\-3&-1&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

利用初等行变换求解特殊的非齐次线性方程组

$AX=b$

∴ $X=A^{-1}b$

$(A \,|\, b) \longrightarrow A^{-1}(A \,|\, b) \longrightarrow (E \,|\, X)$

定义 4.30 (循环移位矩阵)

$$C=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&0&1\\1&0&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

称为 n 级循环移位矩阵。

命题 4.31
用 C 左乘一个矩阵，相当于把该矩阵上移一行，第一行移至最后一行；
用 C 右乘一个矩阵，相当于把该矩阵右移一列，最后一列移至第一列。

定义 4.32 (循环矩阵)
矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_n&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_2&a_3&a_4&\cdots&a_1\end{pmatrix}$$

称为循环矩阵。

命题 4.33
循环矩阵

$$A=a_1I+a_2C+a_3C^2+\cdots+a_nC^{n-1}$$

4.3　矩阵乘积的秩与行列式

定理 4.34 (矩阵乘积的秩)

$$\operatorname{rank}(AB)\leq\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$$

定理 4.35 (矩阵和转置乘积的秩)
对于**实数域上**的矩阵 A，

$$\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)=\operatorname{rank}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=\operatorname{rank}\left(AA^{\mathrm{T}}A\right)$$

在复数域上，上式不成立！

定理 4.36 (矩阵乘积的行列式)

$$|AB|=|A||B|$$

定理 4.37 (Binet-Cauchy 公式)
设 A 是 $s\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵。

(1) 如果 $s>n$，则 $|AB|=0$；

(2) 如果 $s \le n$，则 $|AB|$ 等于 A 的所有 s 阶子式和 B 的相应的 s 阶子式的乘积之和。即

$$|AB| = \sum_{1\leqslant v_1<v_2<\cdots<v_s\leqslant n} A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,s \\ v_1,v_2,\cdots,v_s \end{pmatrix} \cdot B\begin{pmatrix} v_1,v_2\cdots,v_s \\ 1,2,\cdots,s \end{pmatrix}$$

推论 4.38 (乘积矩阵的子式)

设 A 是 $s\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，设 $r \le s$。

(1) 如果 $r > n$，那么 AB 的所有 r 阶子式全为 0；

(2) 如果 $r \le n$，那么 AB 的任一 r 阶子式

$$AB\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_r \\ j_1,j_2,\cdots,j_r \end{pmatrix} = \sum_{1\leqslant v_1<v_2<\cdots<v_r\leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_r \\ v_1,v_2,\cdots,v_r \end{pmatrix} \cdot B\begin{pmatrix} v_1,v_2,\cdots,v_r \\ j_1,j_2,\cdots,j_r \end{pmatrix}$$

命题 4.39 (关于矩阵乘积的秩的一些不等式)

(1) 对于矩阵 A,B，

$$\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

(2) 对于矩阵 A,B，如果 $AB=0$，则 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \le n$

(3) (**西尔维斯特 (Sylvester) 秩不等式**)

对于数域 K 上的 $s\times n$ 矩阵 A 和 $n\times m$ 矩阵 B，

$$\operatorname{rank}(AB) \ge \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n$$

等号成立当且仅当

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{相抵等价}$$

(4) (**弗罗贝尼乌斯 (Frobenius) 秩不等式**)

对于数域 K 上的 $s\times n$ 矩阵 A、$n\times m$ 矩阵 B 和 $m\times t$ 矩阵 C，

$$\operatorname{rank}(ABC) \ge \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B)$$

等号成立当且仅当

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BC \end{pmatrix} \text{相抵等价}$$

4.4 可逆矩阵

定义 4.40 (可逆矩阵)(非奇异矩阵)

对于数域 K 上的矩阵 A，如果存在数域 K 上的矩阵 B，使得

$$AB = BA = E$$

则称 A 可逆，B 称为 A 的逆，记为 $B = A^{-1}$。可逆矩阵一定是方阵。

定理 4.41 (可逆的充要条件)

$|A| \ne 0 \Leftrightarrow A$ 可逆

定义 4.42 (伴随矩阵)

矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

$AA^*=A^*A=|A|E$

称为 A 的伴随矩阵，记为 A^* 其中 A_{ij} 是 (i,j) 位置的代数余子式。

定理 4.43 (求逆矩阵的伴随矩阵法)

对于数域 K 上的 n 级矩阵 A，若 $|A| \neq 0$，则 A 可逆，且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\therefore A^* = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

性质 4.44 (伴随矩阵的行列式与秩)

设 A 是 n 级矩阵 $(n \geq 2)$，则

(1) $|A^*| = |A|^{n-1}$

(2) $\operatorname{rank}(A^*) = \begin{cases} n, & \operatorname{rank}(A) = n, \\ 1, & \operatorname{rank}(A) = n-1, \\ 0, & \operatorname{rank}(A) < n-1. \end{cases}$

例8、求证：$R(A^*) = \begin{cases} n & R(A) = n \\ 1 & R(A) = n-1 \\ 0 & R(A) < n-1 \end{cases}$ 其中A为n阶方阵。

解：

因为 $AA^* = A^*A = |A|E$

若 $R(A)=n$，则 A 可逆　　所以 A^* 可逆，则 $R(A^*)=n$

若 $R(A)=n-1$，则 $AA^*=0$　　则 $R(A^*)\leq 1$

所以 $R(A^*)+R(A)\leq n$　　则 $R(A^*)=1$

若 $R(A)=n-1$，则 $A^*\neq 0$，所以 $R(A^*)>0$

若 $R(A)<n-1$，则 $A^*=0$　　则 $R(A^*)=0$

性质 4.45 (伴随的伴随)

$$(A^*)^* = \begin{cases} |A|^{n-2}A, & n \geq 3, \\ A, & n = 2. \end{cases}$$

性质 4.46 (伴随的乘积)

对于数域 K 上的 n 级矩阵 A 和 B $(n \geq 2)$，

$$(AB)^* = B^*A^*$$

定理 4.47 (判别逆矩阵的方法)

$AB = E$ 则 A, B 均可逆，并且 $A^{-1} = B, B^{-1} = A$。

命题 4.48 (可逆矩阵的性质)

(1) 若 A 可逆，则 A^{-1} 可逆，其逆等于 A

(2) 若 A, B 可逆，则 AB 可逆，

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(4)若kA可逆，则$(kA)^{-1} = \frac{A^{-1}}{k}$

(3) 若 A 可逆，则 A^{T} 可逆，

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

即转置的逆等于逆的转置。

$2B = AB - 4E$

定理 4.49 (可逆矩阵的初等表示)

矩阵 A 可逆的充分必要条件是它可以表示为一些初等矩阵的乘积。

定理 4.50 (可逆矩阵不改变秩)
用一个可逆矩阵左乘或右乘 A，不改变 A 的秩，即如果 B 可逆，则

$$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(A)$$

命题 4.51
可逆的对称矩阵、斜对称矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵的逆矩阵仍然是对称矩阵、斜对称矩阵、上三角矩阵、下三角矩阵。

定理 4.52 (初等变换法)
如果用一系列初等行变换把 A 化成了单位矩阵，那么 A 可逆，并且用同样的这些初等行变换将把 I 化成 A^{-1}。

解题方法 4 (求逆矩阵的初等变换法)
把 A 与 I 放在一起组成矩阵 (A, I)，则

$$(A, I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I, A^{-1})$$

例如设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

所以

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

4.5 分块矩阵

定义 4.53 (分块矩阵)
略

定理 4.54 (分块矩阵的乘法)
如果两个分块矩阵 A, B 满足 矩阵A的列的分块与矩阵B的行的分块一致

(1) A 的列组数等于 B 的行组数；

(2) A 的每个列组的列数等于 B 的相应行组的行数，

即可以写成以下形式：

$$
\begin{array}{c}
\\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_u
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_t \end{array} \\
\begin{pmatrix}
A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\
A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{u1} & A_{u2} & \cdots & A_{ut}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_v \end{array} \\
\begin{pmatrix}
B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1v} \\
B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2v} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tv}
\end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c}
\\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_t
\end{array}
$$

那么就可以按照普通矩阵的乘法法则来做乘法。

定义 4.55 (分块对角矩阵 准对角矩阵)
如果一个分块矩阵除了主对角线以外的所有块都是零矩阵，则称矩阵为**分块对角矩阵**或**准对角矩阵**。记为

$$A = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \cdots A_n\}$$

定理 4.56 (分块对角矩阵的运算)
对于两个有相同分块的分块对角矩阵 $A = \operatorname{diag}\{A_1, A_2, \cdots A_n\}$ 和 $B = \operatorname{diag}\{B_1, B_2, \cdots B_n\}$，如果每个块也是同阶的，那么

$$AB = \operatorname{diag}\{A_1B_1, A_2B_2, \cdots A_nB_n\}$$

转置运算

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$

$\therefore A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$

如果 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 都可逆，那么 A 可逆，

$$A^{-1} = \operatorname{diag}\{A_1^{-1}, A_2^{-1}, \cdots A_n^{-1}\}$$

定义 4.57 (分块初等行变换)
以下三个变换称为分块初等行变换。

(1) 把一个块行的左 P 倍加到另一块行上 (P 不要求是可逆的)；

(2) 两个块行互换位置；

(3) 用一个可逆矩阵左乘某一块行。

类似可定义分块初等行矩阵。

性质 4.58
分块初等行矩阵是可逆矩阵。

推论 4.59
分块初等行变换不改变矩阵的秩。

命题 4.60
设 A, B 分别是 $s \times n, n \times s$ 矩阵，则

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{vmatrix} = |I_s - AB| = |I_n - BA|$$

对于分块矩阵的问题，往往要通过分块初等行变换化为分块对角矩阵，再进行进一步的处理。

命题 4.61 (分块矩阵可逆的条件)

若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & B \\ 0 & A_{12} \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & A_{11}^{-1}BA_{12}^{-1} \\ 0 & A_{12}^{-1} \end{pmatrix}$

设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

若 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ B & A_{12} \end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ A_{12}^{-1}BA_{11}^{-1} & A_{12}^{-1} \end{pmatrix}$

其中 A_1 是 r 级矩阵，A_4 是 s 级矩阵，若

(1) A_1 可逆；

(2) $A_4-A_3A_1^{-1}A_2$ 可逆，

则 A 可逆，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1}+A_1^{-1}A_2\left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2\left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \\ -\left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1}A_3A_1^{-1} & \left(A_4-A_3A_1^{-1}A_2\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

4.6 正交矩阵

定义 4.62 (正交矩阵)

实数域上的方阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 如果满足

$$A^{\mathrm{T}}A=E$$

若 $A^{T}=A^{-1}$，则为正交矩阵

则称 A 是正交矩阵。

性质 4.63

(1) 正交矩阵可逆，转置是逆；

矩阵A为正交矩阵<=>A的列(行)向量组为正交的单位向量组

(2) 同级正交矩阵的乘积也是正交矩阵；

正交变换

设矩阵P为正交矩阵，$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

则称线性变换 $Y=PX$ 为正交变换

(3) 正交矩阵的逆 (即转置) 也是正交矩阵；

(4) 正交矩阵的行列式为 1 或 -1。

定理 4.64 (正交矩阵的元素满足的条件)

(1) A 为正交矩阵当且仅当 A 的行向量组满足

$$\gamma_i\gamma_j^{\mathrm{T}}=\begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

(2) A 为正交矩阵当且仅当 A 的列向量组满足

$$\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j=\begin{cases} 1, & i=j; \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

定义 4.65 (内积)

在 $\mathbb{R}^n$ 中，任给 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，规定

$$(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

是 $\mathbb{R}^n$ 的一个内积，这个内积称为**标准内积**。

注意此内积的定义仅限于实空间。

性质 4.66 (内积的性质)

(1) 内积具有对称性、线性性、正定性。

(2) (Cauchy-Schwarz 不等式)$\forall \alpha, \beta$，有

$$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$$

当且仅当 α 与 β 共线时取等号。

(3) (三角不等式)$\forall \alpha, \beta$，有

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$$

推论 4.67 (柯西不等式)

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$，则

$$\left(a_1 b_1+a_2 b_2+\cdots+a_n b_n\right)^2 \leq\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right)$$

取等号当且仅当存在 λ，$a_i=\lambda b_i$ 或 $b_i=0$。

定义 4.68 (向量的长度)

向量 α 的长度 $|\alpha|$ 规定为

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

定义 4.69 (正交)

如果 $(\alpha, \beta)=0$，则称 α, β 正交，记作 $\alpha \perp \beta$。

定义 4.70 (正交组)

由非零向量组成的向量组如果每两个不同的向量都正交 (即两两正交)，则称它们为正交向量组。

定义 4.71 (正交单位向量组)

如果正交向量组的每个向量都是单位向量，那么称为正交单位向量组或单位正交向量组。

定义 4.72 (正交基)

$\mathbb{R}^n$ 中 n 个向量组成的正交向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，称为正交基。如果每个向量都是单位向量，称为标准正交基。

定义 4.73 (正交矩阵的判断)

$\mathbb{R}$ 上的 n 级矩阵 A 是正交矩阵的充分必要条件为 A 的行 (列) 向量组是 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基。

定理 4.74 (* 正交变换的性质)

(1) 正交矩阵是**保距离**的。
设 A 是实数域上的 n 级矩阵，则 A 是等距同构 (即对于 $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$，都有 $|A\alpha|=|\alpha|$) 当且仅当 A 是正交矩阵。
事实上，若 $|A|=1$，则用 A 左乘 α 相当于将 α 旋转一定角度；若 $|A|=-1$，则用 A 左乘 α 相当于对 α 做镜面对称。

(2) 正交矩阵是**保内积**的。
设 A 是实数域上的 n 级矩阵，则 A 保内积 (即对于 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$，都有 $(A\alpha, A\beta)=(\alpha, \beta)$) 当且仅当 A 是正交矩阵。

解题方法 5 (Schmidt 正交化)
设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性无关的向量组，令

$$\beta_1 = \alpha_1$$
$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1$$
$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{|\beta_2|^2}\beta_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_i = \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\alpha_i, \beta_j)}{|\beta_j|^2}\beta_j$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_s = \alpha_s - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(\alpha_s, \beta_j)}{|\beta_j|^2}\beta_j$$

则向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 等价的正交向量组。再对每个 β_i 单位化得到 η_i，即得到正交单位向量组。

定理 4.75 (*QR 分解)
设 $m \times n$ 矩阵 A 是实数域上的列满秩矩阵，其中 $m \geq n$，则 A 可唯一地分解为

$$A = QR$$

其中 Q 是列向量组为单位正交向量组的 $m \times n$ 矩阵 (称为半正交矩阵)，R 是主对角元都为正数的 n 阶上三角矩阵。这一分解称为 QR 分解。

对方阵做 QR 分解的步骤：
设 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

(1) 用 Schmidt 正交化得到与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 等价的正交向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$

(2) 对正交向量组进行单位化，得到单位正交向量组 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$

(3) 把这个正交单位向量组排成一个矩阵 $Q = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$

(4) 由 $A = QR$，得 $R = Q^{-1}A = Q^{\mathrm{T}}A$

第五章　矩阵的相抵与相似

5.1　矩阵的相抵等价

定义 5.1 (相抵等价)
数域 K 上的矩阵 A 如果经过一系列的初等行列变换变成矩阵 B，则称 A 与 B 相抵等价。相抵等价具有反身性、对称性、传递性。

定理 5.2 (相抵等价的条件)
数域 K 上 $s \times n$ 矩阵 A 与 B 相抵
$\Leftrightarrow$ 存在 s 级可逆矩阵 P 和 n 级可逆矩阵 Q，使得

$$PAQ = B$$

$\Leftrightarrow A$ 和 B 的秩相等。

定义 5.3 (相抵标准形)
设矩阵 A 的秩为 r，若 $r > 0$，则 A 相抵于矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

此矩阵称为 A 的**相抵标准形**。

定义 5.4 (秩分解)
设数域 K 上的 $s \times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则存在 s 级可逆矩阵 P 和 n 级可逆矩阵 Q，使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

这种分解称为**秩分解**。

定义 5.5 (满秩分解)
设数域 K 上的 $s \times n$ 矩阵 A 的秩为 r，则存在 $s \times r$ 列满秩矩阵 B 和 $r \times n$ 行满秩矩阵 C，使得

$$A = BC$$

这种分解称为**满秩分解**。

5.2 矩阵的相似

定义 5.6 (相似)

设 A 与 B 都是数域 K 上的 n 级矩阵，如果存在数域 K 上的一个 n 级可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B$$ => A与B等价

则称 A 与 B 是**相似**的，记为 $A \sim B$。

定义 5.7 (迹)

n 级矩阵主对角线上所有元素的和记为 A 的**迹**，记为 $\mathrm{tr}(A)$。

性质 5.8 (矩阵的迹的性质)

(1) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

(2) $\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A)$

(3) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

性质 5.9 (相似矩阵的性质)

(1) 相似关系是等价关系，具有反身性、对称性、传递性；

(6) 具有相同的特征多项式
(7) 具有相同的特征值

(2) 相似的矩阵的行列式相等；

(3) 相似矩阵或者都可逆，或者都不可逆；如果可逆，则它们的逆也相似；

(4) 相似的矩阵有相等的秩；

(5) 相似的矩阵有相等的迹。

定义 5.10 (对角化 特征值分解 谱分解)

如果一个 n 级矩阵 A 能够相似于一个对角矩阵 D，则称 A **可对角化**，即存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 D，使得

$$P^{-1}AP = D$$

这种分解称为**特征值分解**或**谱分解**。

$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

$\therefore D^n = P^{-1}A^nP$

即 $A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^n\end{pmatrix}P^{-1}$

定理 5.11 (对角化的条件)

对于数域 K 上的 n 级矩阵 A，A 可对角化当且仅当 K^n 中有 n 个线性无关的列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 以及 K 中的 n 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 使得

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, \quad A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \quad \cdots, \quad A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n$$

此时令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

证：A与 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} = \Lambda$ 相似

$\therefore P^{-1}AP = \Lambda$

设 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$\therefore AP = P\Lambda$

$A(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

即 $A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$

对角阵不为一

5.3　特征值和特征向量

定义 5.12 (特征值 特征向量)
设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，如果 K^n 中存在**非零**列向量 α，使得

$$A\alpha = \lambda_0\alpha \quad (\lambda_0 \in K)$$

则称 λ_0 是 A 的一个**特征值** (本征值)，称 α 是 A 的属于特征值 λ_0 的一个**特征向量** (本征向量)。

定义 5.13 (特征多项式)
行列式 $|\lambda I - A|$ 是 λ 的多项式，称为**特征多项式** (本征多项式)。

定理 5.14 (特征值和特征向量的求法)
设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，则

(1) λ_0 是 A 的一个特征值 $\Leftrightarrow$ λ_0 是 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 在 K 中的一个根；

(2) α 是 A 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量
$\Leftrightarrow$ α 是齐次线性方程组 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的一个非零解。

定义 5.15 (特征值的重数)
设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，设 λ_0 是 A 的一个特征值，λ_0 作为 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$ 的根的重数称为特征值 λ_0 的**重数** (代数重数)。

命题 5.16
A 和 A^{T} 有相同的特征多项式和特征值。

命题 5.17
设 A, B 是数域 K 上的 n 级矩阵，则 AB 和 BA 有相同的特征多项式和特征值。

命题 5.18
如果可逆矩阵 A 有特征值 λ_0，则 $\lambda_0 \neq 0$，并且如果 λ_0 是 l 重特征值，那么 λ_0^{-1} 就是 A^{-1} 的一个 l 重特征值。

命题 5.19
正交矩阵如果有特征值，那么特征值是 1 或 -1。

命题 5.20
相似的矩阵有相等的特征多项式，从而它们有相同的特征值。

定义 5.21 (特征子空间)
设 λ_0 是 A 的一个特征值，齐次线性方程组 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的解空间称为 A 的属于 λ_0 的**特征子空间**。

定义 5.22 (几何重数)
设 λ_0 是 A 的一个特征值，A 的属于 λ_0 的特征子空间的维数 $\dim W$ 称为特征值 λ_0 的**几何重数**。
几何重数就是齐次线性方程组 $(\lambda_j I - A)X = 0$ 的一个基础解系中向量的个数。

定理 5.23 (几何重数不超过代数重数)
设 λ_0 是数域 K 上的 n 级矩阵 A 的一个特征值，则特征值 λ_0 的几何重数不超过它的代数重数。
例如，矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值 1 的代数重数为 2，几何重数为 1.

命题 5.24
设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，则 A 的所有特征值的代数重数都等于其几何重数的充要条件是 A 可对角化。

解题方法 6 (求矩阵全部特征值和特征向量的方法)
(1) 计算 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$，求它的所有根

(2) 若特征多项式 $|\lambda I-A|$ 在数域 K 内没有根，则矩阵没有特征值和特征向量；若有根，它的全部根就是矩阵的全部特征值

(3) 对于每个特征值 λ_j，用第16 页的解题方法2 的方法求出齐次线性方程组 $(\lambda_j I-A)X=0$ 的一个基础解系 $\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_t$

(4) A 的属于特征值 λ_j 的全部特征向量构成的集合是

$$\left\{k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t \mid k_i\in K, k_i \text{ 不全为 } 0\right\}$$

定义 5.25 (主子式)
对于 n 阶矩阵 A，设正整数 $k\leq n$，子式

$$A\begin{pmatrix} i_1,i_2,\cdots,i_k \\ i_1,i_2,\cdots,i_k \end{pmatrix}$$

称为 A 的一个 k 阶**主子式**。

定义 5.26 (顺序主子式)
对于 n 阶矩阵 A，设正整数 $k\leq n$，子式

$$A\begin{pmatrix} 1,2,\cdots,k \\ 1,2,\cdots,k \end{pmatrix}$$

称为 A 的 k 阶**顺序主子式**。
对于给定的 k，n 阶矩阵 A 的 k 阶顺序主子式只有一个。

定理 5.27 (特征多项式的系数结构)
设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，则 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|$ 是 λ 的 n 次多项式，其系数满足：

(1) λ^n 的系数是 1，即特征多项式是首一多项式；

(2) λ^{n-1} 的系数是 $-\operatorname{tr}(A)$；

(3) 常数项为 $(-1)^n|A|$；

(4) λ^{n-k} 的系数是 A 的所有 k 阶主子式的和乘 $(-1)^k$，其中 $1 \leq k < n$。

用韦达定理，容易得到以下结论：

定理 5.28 (迹的等价定义)
矩阵 A 的迹 $\operatorname{tr}(A)$ 也可定义为矩阵在 $\mathbb{C}$ 上的按重数重复的所有特征值的和。

定理 5.29 (行列式的等价定义)
矩阵 A 的行列式 $|A|$ 或 $\det A$ 也可定义为矩阵在 $\mathbb{C}$ 上的按重数重复的所有特征值的乘积。

推论 5.30 (* 行列式的几何意义)
矩阵 A 的行列式等于以 A 的列向量组为邻边的 n 维多面体的有向体积。

5.4　矩阵对角化的条件

定理 5.31 (对角化的条件)
对于数域 K 上的 n 级矩阵 A，A 可对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 此时令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

定理 5.32 (特征向量线性无关)
设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是数域 K 上 n 级矩阵的不同特征值，$a_{j1}, \cdots, a_{jr_j}$ 是属于 λ_j 的线性无关的特征向量，则把所有这些向量放在一起组成的向量组 $\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1r_1}, \cdots, \alpha_{m1}, \cdots, \alpha_{mr_m}$ 是线性无关的。

推论 5.33
矩阵属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

定理 5.34 (对角化的条件)
数域 K 上的 n 级矩阵 A 可对角化的充要条件是 A 的属于不同特征值的特征子空间的维数之和等于 n。

定理 5.35 (对角化的充分条件)
如果数域 K 上的 n 级矩阵 A 有 n 个特征值，那么 A 可对角化。

5.5　实对称矩阵的对角化

定义 5.36 (正交相似)
对于 n 级实矩阵 A, B，若存在一个 n 级正交矩阵 T，使得 $T^{-1}AT = B$，则称 A **正交相似于** B。

定理 5.37 (实对称矩阵有实特征值)
实对称矩阵的特征多项式在复数域中的每个根都是实数，它们就是这个实对称矩阵的特征值。

定理 5.38
实对称矩阵属于不同特征值的特征向量是正交的。

定理 5.39 (谱定理)

实对称矩阵一定存在正交矩阵使之相似于对角阵

实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵，即
对于任意实对称矩阵 A，一定存在正交矩阵 T 和对角矩阵 D，使得

$$T^{-1}AT = D$$

A 可分解为

$$A = TDT^{-1}$$

这种分解称为**正交特征分解** (正交谱分解)。

解题方法 7 (实对称矩阵对角化的步骤)

(1) 求 A 的特征多项式的 $|\lambda I - A|$，它的全部不同的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 都是实数，都是 A 的特征值；

(2) 对于每一个特征值，用第16 页的解题方法2 的方法求出齐次线性方程组 $(\lambda_j I - A)X = 0$ 的一个基础解系 $\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{jr_j}$

(3) 用第30 页的 Schmidt 正交化方法对 $\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{jr_j}$ 进行正交化，再进行单位化，得到与 $\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{jr_j}$ 等价的另一组特征向量 $\eta_{j1}, \cdots, \eta_{jr_j}$

(4) 把所有的特征向量排成矩阵

正交化：
对同一特征值的特征向量正交

$$T = (\eta_{11}, \cdots, \eta_{1r_1}, \cdots, \eta_{m1}, \cdots, \eta_{mr_m})$$

(5) 把所有按重数重复的特征值按顺序组成对角矩阵

$$D = \text{diag}\{\underbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}_{r_1\text{个}}, \cdots, \underbrace{\lambda_m, \cdots, \lambda_m}_{r_m\text{个}}\}$$

于是就将实对称矩阵进行了对角化

$$D = T^{-1}AT$$

或正交特征分解

$$A = TDT^{-1}$$

第六章　二次型

6.1　二次型和标准形

$f(x_1,x_2,x_3) = 1x_1^2+4x_2^2+6x_3^2$
$+5x_1x_2+3x_2x_3+8x_1x_3$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} & 4 \\ \frac{5}{2} & 4 & \frac{3}{2} \\ 4 & \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$

$f = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

定义 6.1 (二次型)
K 中的 n 元二次齐次多项式称为 K 上的一个 n 元二次型。

定义 6.2 (二次型的矩阵)
n 元二次型

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_ix_j \overset{a_{ij}=a_{ji}}{=\!=\!=} \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

$\therefore f(x_1,x_2,x_3)$
$= 1x_1^2+5x_2^2+9x_3^2$
$+6x_1x_2+10x_1x_3+14x_2x_3$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

因此

$$f(x_1,\cdots,x_n) \longleftrightarrow \text{对称矩阵} A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

命题 6.3 (二次型的矩阵表示)
设 $X = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，则二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 可写为

$$X^{\mathrm{T}}AX$$

A为n阶二次型实对阵矩阵

定义 6.4 (非退化线性替换)
设 $X = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}, Y = (y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 是 K^n 上的两个列向量，C 是数域 K 上的 n 级可逆矩阵，则 $K^n \to K^n$ 的线性变换

$$X = CY$$

称为**非退化线性替换**。

定义 6.5 (等价)
数域 K 上的两个 n 元二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 和 $Y^{\mathrm{T}}BY$，如果存在非退化线性替换 $X = CY$，把 $X^{\mathrm{T}}AX$ 变成 $Y^{\mathrm{T}}BY$，则称两个二次型**等价**，记为 $X^{\mathrm{T}}AX \cong Y^{\mathrm{T}}BY$。

定义 6.6 (矩阵的合同)
设 A,B 是数域 K 上的 n 级矩阵，若存在**可逆**矩阵 C，使得

$$B = C^{\mathrm{T}}AC$$

则称 A 与 B **合同**，记作 $A \simeq B$。

性质 6.7
合同关系是等价关系，具有反身性、对称性、传递性。

命题 6.8 (合同与非退化线性替换的关系)

$$
\begin{aligned}
& A \simeq B \\
\Leftrightarrow\ & \exists \text{可逆矩阵} C,\ C^{\mathrm{T}}AC = B \\
\Leftrightarrow\ & (CY)^{\mathrm{T}}A(CY) = Y^{\mathrm{T}}BY \\
\Leftrightarrow\ & \text{存在非退化线性替换 } X = CY,\ X^{\mathrm{T}}AX = Y^{\mathrm{T}}BY
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\text{合同}", "C^{\mathrm{T}}AC=B"'] & B \\
X \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "X=CY", "\text{替换}"'] & Y \arrow[u] \arrow[d] \\
X^{\mathrm{T}}AX \arrow[r, leftrightarrow, "\text{等价}"] & Y^{\mathrm{T}}BY
\end{tikzcd}
$$

定义 6.9 (二次型的标准形)
设二次型 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 经非退化线性替换 $X = CY$ 化为了一个只含平方项的二次型，这个二次型称为二次型的标准形。

$f = Y^{\mathrm{T}}AY$

定理 6.10
数域 K 上的任一二次型都可化为标准形。

解题方法 8 (用配方法将二次型化为标准形)
(1) 如果至少有一个平方项 $a_{ii}x_i^2$，把除了 x_i 这个变量之外的变量看作常数，进行强行配方

(2) 配方后如果产生了新的平方项，就重复步骤 1

(3) 如果至某一步没有了平方项，存在交叉项 $2a_{ij}x_ix_j$，那么可令 $x_i = z_i + z_j, x_j = z_i - z_j$，从而产生了两个新的平方项，重复步骤 1

(4) 直至化成 n 个完全平方的形式，得到 X 到 Y 的线性替换

(5) 反解出 Y 到 X 的线性替换，将各个系数排成矩阵，即得到非退化线性替换 $X = CY$ 中的矩阵 C

定理 6.11
数域 K 上的任一对称矩阵都合同于一个对角矩阵。

解题方法 9 (成对初等行变换法求矩阵的标准形)

(1) 对于数域 K 上的 n 元二次型 $X\mathrm{T}AX$，将矩阵 A 与单位矩阵 I_n 排成一个 $2n \times n$ 矩阵，然后做如下操作

$$\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对}I_n\text{只作其中的初等列变换}]{\text{对}A\text{作成对初等行列变换}} \begin{pmatrix} D \\ C \end{pmatrix}$$

其中 D 是对角矩阵 $\operatorname{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 从而

$$C^{\mathrm{T}}AC = D$$

(2) 令 $X = CY$，则得到标准形

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$$

定义 6.12 (二次型的秩)

二次型的标准形中的系数不为 0 的平方项的个数 r 称为二次型的**秩**。二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 的秩等于矩阵 A 的秩。

定义 6.13 (正交替换)

如果 T 是正交矩阵，那么变量替换 $X = TY$ 是正交替换。

定理 6.14 (用正交替换化实二次型为标准形)

实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 有一个标准形为

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$$

其中，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值。

用36 页的解题方法7 将实对称矩阵 A 进行对角化

$$D = T^{-1}AT$$

则正交替换 $X = TY$ 即可将 $X^{\mathrm{T}}AX$ 化为标准形 $Y^{\mathrm{T}}DY$，即

$$\lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$$

命题 6.15 (斜对称矩阵的" 合同标准形")

数域 K 上的斜对称矩阵一定合同于以下分块对角矩阵

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, (0), \cdots, (0)\right\}$$

推论 6.16

斜对称矩阵的秩是偶数。

命题 6.17 (二次型的取值范围)

设 n 级实对称矩阵 A 的全部特征值中最大的为 λ_M，最小的为 λ_m，则对于任一非零列向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$，都有

$$\lambda_m |\alpha|^2 \leq \alpha^{\mathrm{T}}A\alpha \leq \lambda_M |\alpha|^2$$

6.2 二次型的规范形

定义 6.18 (复二次型的规范形)
复数域 $\mathbb{C}$ 上的二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 经过非退化的线性替换 $X=CY$ 总可以化为 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 的形式，其中 r 是二次型的秩，因而是唯一的。$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 这一标准形称为复二次型的**规范形**。

$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$，其中r称为二次型的惯性指数，
p称为二次型的正惯性指数，
r-p称为二次型的负惯性指数

推论 6.19 (复二次型的合同规范形)
复数域 $\mathbb{C}$ 上的任一 n 阶对称矩阵 A 均合同于其**合同规范形**

$$A\simeq\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

其中 $r=\operatorname{rank}(A)$，因而合同规范形是唯一的。

$B=P^TAP$，P可逆 <=> A、B合同

标准

$$B=\begin{pmatrix}k_1 & & 0\\ & k_2 & \\ 0 & & \ddots\ k_n\end{pmatrix}-\Lambda$$

推论 6.20 (等价与合同的条件)
两个 n 元复二次型 X^TAX 和 Y^TBY 等价
$\Leftrightarrow$ 复对称矩阵 A 与 B 合同
$\Leftrightarrow$ 它们的秩相等。

定义 6.21 (实二次型的规范形)
$\mathbb{R}$ 上的 n 元二次型 (实二次型)X^TAX 均可以通过非退化的线性替换 $X=CY$ 化为

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

这一标准形称为实二次型的**规范形**，r 是二次型的秩，p 称为**正惯性指数**，$r-p$ 称为**负惯性指数**，$p-(r-p)$ 称为**符号差**。

定理 6.22 (惯性定理 Sylvester's Law of Inertia)
n 元实二次型 X^TXT 的规范形是唯一的。即正惯性指数 p 由 A 唯一决定。

定义 6.23 (实对称矩阵的合同规范形)
任一 n 级实对称矩阵 A 合同于如下**合同规范形**

$$\begin{pmatrix}I_p & & \\ & I_{r-p} & \\ & & O\end{pmatrix}$$

推论 6.24
n 级实对称矩阵的合同规范形唯一。

定理 6.25 (等价与合同的条件)
两个 n 元实二次型 X^TAX 和 Y^TBY 等价
$\Leftrightarrow$ 实对称矩阵 A 与 B 合同；
$\Leftrightarrow$ 它们的秩相等，正惯性指数也相等。

推论 6.26 (Witt 消去定理)
对任意两个实对称矩阵 X_1,X_2，若 $X_1\simeq X_2$，且 X_1,X_2 可写成

$$X_1=\begin{pmatrix}A & \\ & A_1\end{pmatrix},X_2=\begin{pmatrix}A & \\ & A_2\end{pmatrix}$$

其中 A 是 m 级矩阵，A_1, A_2 是 n 级矩阵，则

$$A_1 \simeq A_2$$

命题 6.27 (实二次型的“零点存在性定理”)
设 $X^{\mathrm{T}}AX$ 是一个 n 元二次型，如果 $\mathbb{R}^n$ 中有列向量 α_1, α_2 使得 $\alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_1 > 0$，$\alpha_2^{\mathrm{T}}A\alpha_2 < 0$，那么 $\mathbb{R}^n$ 中必有非零的列向量 α_3，使得 $\alpha_3^{\mathrm{T}}A\alpha_3 = 0$。

6.3　正定二次型

定义 6.28 (正定、半正定、负定二次型)
实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$，$\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$:

二次型	正定	半正定	负定	半负定	不定
定义	$\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha > 0$	$\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha \geq 0$	$\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha < 0$	$\alpha^{\mathrm{T}}A\alpha \leq 0$	既不正定又不负定

定义 6.29 (正定、半正定、负定矩阵)
实对称矩阵 A 正定 (半正定、负定、半负定、不定) 是指实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 (半正定、负定、半负定、不定)。

定理 6.30 (正定矩阵的刻画)
对于实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$(实对称矩阵 A) 下列**等价**:

(1) 实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 是正定二次型；

(2) 实对称矩阵 A 是正定矩阵；

(3) A 的正惯性指数 $p = n$；

(4) A 合同于单位矩阵，即 $A \simeq I_n$；

(5) A 的所有特征值均大于零；

(6) 存在可逆实对称矩阵 C，使得 $A = C^2$；

(7) 存在可逆实矩阵 C，使得 $A = C^{\mathrm{T}}C$；

(8) A 的所有主子式均大于 0；

(9) A 的所有顺序主子式均大于 0。

性质 6.31 (正定矩阵的性质)
(1) 正定矩阵的迹和行列式大于 0；

(2) 正定矩阵一定可逆，逆矩阵也是正定矩阵；

(3) 正定矩阵的伴随矩阵也是正定矩阵；

(4) 两个正定矩阵的和也是正定矩阵，正数乘正定矩阵得正定矩阵；

(5) 若 A, B 都是 n 级正定矩阵，则 ABA 和 BAB 都是 n 级正定矩阵。特别地
如果 A, B 都是 n 级正定矩阵，且 $AB = BA$，那么 AB 也是正定矩阵；

(6) 正定矩阵的任意正整数次幂都是正定矩阵；

(7) 正定矩阵的行列式

$$|A| \leq \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$

等号成立当且仅当 A 是对角矩阵。

定理 6.32 (半正定矩阵的刻画)
对于实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$(实对称矩阵 A) 下列**等价**：

(1) 实二次型 $X^{\mathrm{T}}AX$ 是半正定二次型；

(2) 实对称矩阵 A 是半正定矩阵；

(3) A 的负惯性指数为 0，正惯性指数 $p = r$，其中 r 是二次型的秩；

(4) $A \simeq \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$；

(5) A 的所有特征值非负；

(6) 存在 $r \times n$ 行满秩实矩阵 B，使得 $A = B^{\mathrm{T}}B$；

(7) 存在实矩阵 M，使得 $A = M^{\mathrm{T}}M$。换句话说，对于任一矩阵 M，都有 $M^{\mathrm{T}}M$ 是半正定矩阵；

(8) A 的所有主子式均非负；

(9) 对任意正数 ϵ，矩阵 $A_\epsilon = A + \epsilon I_n$ 是正定矩阵；

(10) 存在下三角矩阵 L，使得 $A = LL^{\mathrm{T}}$；

(11) 存在实对称矩阵 C，使得 $A = C^2$。

性质 6.33 (半正定矩阵的性质)

(1) 半正定矩阵的迹和行列式均非负；

(2) 半正定矩阵的伴随矩阵也是半正定矩阵；

(3) 两个半正定矩阵的和也是正定矩阵，非负数乘半正定矩阵得半正定矩阵；

(4) 正定矩阵和半正定矩阵的和是正定矩阵；

(5) 两个半正定矩阵的乘积是半正定矩阵；

(6) 半正定矩阵的任意正整数次幂都是半正定矩阵；

定理 6.34 (*Cauchy-Schwarz 不等式)
设任意的两个列向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ 则

(1) $\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}\right)^2 \leq \left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}\right)$

(2) 若 A 是半正定矩阵，则 $\left(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{y}\right)^2 \leq \left(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{y}\right)$

(3) 若 A 是正定矩阵，则 $\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}\right)^2 \leq \left(\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}\right)\left(\boldsymbol{y}^T A^{-1}\boldsymbol{y}\right)$

定理 6.35 (* 正定矩阵和半正定矩阵的算数平方根)

(1) 如果 A 是 n 级正定矩阵，那么存在**唯一**的正定矩阵 C，使得 $A=C^2$；

(2) 如果 A 是 n 级半正定矩阵，那么存在**唯一**的半正定矩阵 C，使得 $A=C^2$.

上文中的 C 称为正定矩阵 (半正定矩阵)A 的**算术平方根**，记为

$$C=\sqrt{A}$$

定理 6.36 (* 极分解定理)

对于任一实矩阵 A，一定存在正交矩阵 U 和半正定矩阵 P，使得

$$A=UP$$

这种分解是唯一的，并且 $P=\sqrt{A^{\mathrm{T}}A}$。这种分解称为 A 的**极分解**。
同时，对于这一实矩阵 A，还一定存在另一个半正定矩阵 S，使得

$$A=SU$$

这种分解是唯一的，并且 $U=\sqrt{AA^{\mathrm{T}}}$。这种分解称为 A 的左极分解或逆极分解。前一种极分解也称为右极分解。
特别地，如果矩阵 A 是可逆矩阵，那么 P 和 S 都是正定矩阵。

第七章　附录

7.1　矩阵之间的关系

定义 7.1 (逆矩阵)
对于数域 K 上的矩阵 A，如果存在数域 K 上的矩阵 B，使得

$$AB = BA = I$$

则称 A 可逆，B 称为 A 的逆，记为 $B = A^{-1}$。可逆矩阵一定是方阵。

定义 7.2 (相抵等价)
数域 K 上的矩阵 A 如果经过一系列的初等行列变换变成矩阵 B，则称 A 与 B 相抵等价。

定义 7.3 (相似)
设 A 与 B 都是数域 K 上的 n 级矩阵，如果存在数域 K 上的一个 n 级可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B$$

则称 A 与 B 是**相似**的，记为 $A \sim B$。

定义 7.4 (合同)
设 A, B 是数域 K 上的 n 级矩阵，若存在**可逆**矩阵 C，使得

$$C^{\mathrm{T}}AC = B$$

则称 A 与 B **合同**，记作 $A \simeq B$。

7.2　几种特殊矩阵

定义 7.5 (幂等矩阵)
数域 K 上的 n 级矩阵 A 称为**幂等矩阵**，如果

$$A^2 = A$$

性质 7.6 (幂等矩阵的性质)
(1) 幂等矩阵是可逆矩阵当且仅当它是单位矩阵；

(2) 幂等矩阵一定有特征值，它的特征值是 0 或 1；

(3) 幂等矩阵一定可对角化；

(4) 幂等矩阵的迹等于它的秩。

命题 7.7
数域 K 上的 n 级矩阵 A 是幂等矩阵，当且仅当

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I-A)=n$$

定义 7.8 (对合矩阵)
数域 K 上的 n 级矩阵 A 称为**对合矩阵**，如果

$$A^2=I$$

性质 7.9
(1) 对合矩阵的任意正整数次幂都是对合矩阵；

(2) 两个对合矩阵的乘积是对合矩阵当且仅当这两个对合矩阵可交换。

命题 7.10
数域 K 上的 n 级矩阵 A 是对合矩阵，当且仅当

$$\operatorname{rank}(A-I)+\operatorname{rank}(A+I)=n$$

定理 7.11 (幂等和对合矩阵一一对应的)
幂等矩阵和对合矩阵是一一对应的，即：
设 $A=\dfrac{1}{2}(B+I)$，则 A 是幂等矩阵当且仅当 B 是对合矩阵。

定义 7.12 (幂零矩阵)
数域 K 上的 n 级矩阵 A 称为**幂零矩阵**，如果存在正整数 l，使得 $A^l=0$；
使得 $A^l=0$ 的最小正整数称为 A 的**幂零指数**。

性质 7.13 (幂零矩阵的性质)
设 A 是数域 K 上的 n 级幂零矩阵。则

(1) A 的特征多项式为 λ^n；

(2) A 的行列式和迹都是 0；

(3) 对于任意正整数 k，$\operatorname{tr}(A^k)=0$；

(4) A 的唯一特征值是 0；

(5) 任一奇异矩阵 M 都可以写成若干幂零矩阵的乘积。

命题 7.14
n 级上 (下) 三角矩阵是幂零矩阵当且仅当它的主对角元全为 0(称为严格上 (下) 三角矩阵)。并且幂零指数 $l\leq n$。

命题 7.15
(1) 与幂等矩阵相似的矩阵仍是幂等矩阵；

(2) 与对合矩阵相似的矩阵仍是对合矩阵；

(3) 与幂零矩阵相似的矩阵仍是幂零矩阵，它们的幂零指数也相等。