Лабораторная работа

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Цель занятия - ознакомление и приобретение навыков разработки и отладки программы решения системы линейных уравнений методом Гаусса

1. *Постановка задачи*

Дана система из n линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Требуется получить решение системы линейных уравнения (4.1) при любых заданных коэффициентах a_{ij} и b_i

2. *Методы решения линейных уравнений*

Системы линейных уравнений вида (4.1) решаются точными и итерационными методами. Точные методы дают точное решение за конечное число операций, если все они выполнялись без погрешности. Число операций итерационных методов зависит от заданной погрешности вычислений. Метод Гаусса является точным методом решения системы линейных уравнений.

Метод Гаусса или метод последовательного исключения неизвестных основан на приведении матрицы коэффициентов $A=(a_{ij})$ к треугольному виду. При этом алгоритм решения системы линейных уравнений следующий:

1). С помощью двух циклов с управляющими переменными i=1,2,..,n и j=1,2,…,n организуется ввод коэффициентов $a_{i.j}$ и b_i образующих массивы $A=(a_{ij})$, $B=(b_i)$.

2). Делается прямой ход исключения переменных путем преобразования коэффициентов по формулам:

$a_{ij}=-a_{ij}/a_{ii}$; $a_{kj}=a_{kj}+a_{ij}a_{ik;}$ $b_i=b_i+a_{ij}b_i$, где

i=1,2,…,n-1; j=i+1,i+2,…,n; k=i+1,i+2,…,n.

В конце этих преобразований получается $x_n=b_n/a_{nn}$.

3. Организуется обратный ход (последовательное нахождение x_{n-1}, x_{n-2} ,…, x_2, x_1), проводя вычисления по формулам:

$h=b_i$, $h=h-x_ia_{ij}$, $x_i=h/a_{ii}$, где

i=n-1, n-2,…, 2, 1; j=i+1, i+2,…,n;

В результате формируется массив $X=(x_i)$ неизвестных x_n , x_{n-1} , …, x_2 , x_1.

Особенностью метода *Гаусса* является то, что при прямом ходе производится выбор элемента строки отличного от нуля, если элемент a_{ii}, стоящий на главной диагонали матрицы А, равен 0.

Этот выбор осуществляется путем перестановки соответствующих строк матрицы А. Это исключает деление на 0, если матрица $A=(a_{ij})$ содержит нулевые элементы на главной диагонали.

Варианты заданий

Варианты заданий к лабораторной работе

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
1.	$x_1 + 8x_2 + 6x_4 = -2$ $7x_1 + 4x_3 + x_4 = 8$ $x_2 + x_3 - 3x_4 = -10$ $x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 14$	11.	$x_2 + x_3 - 3x_4 = -10$ $x_1 + 8x_2 + 8x_4 = 2$ $7x_1 + 4x_3 + x_4 = 8$ $x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 14$
2.	$x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = -6$ $2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3$ $x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2$ $5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$	12.	$2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3$ $x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2$ $5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$ $x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = -6$
3.	$x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2$ $2x_2 - 15x_3 + 8x_4 = -4$ $8x_1 + 7x_2 - 15x_4 = -38$ $11x_1 + 3x_3 - 7x_4 = -15$	13.	$3x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2$ $7x_1 + 3x_3 - 7x_4 = -15$ $2x_2 - 15x_3 + 8x_4 = -4$ $6x_1 + 7x_2 - 15x_4 = -38$
4.	$-x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -6$ $8x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 13$ $x_1 + x_2 + 5x_4 = 3$ $5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3$	14.	$5x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3$ $-x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -6$ $8x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 13$ $x_1 + x_2 + 5x_4 = 3$
5.	$12x_2 - x_3 + 5x_4 = 3$ $-7x_1 + 2x_3 - 4x_4 = -7$ $2x_1 + x_2 + 3x_4 = 5$ $x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 8$	15.	$-8x_2 - x_3 + 5x_4 = 3$ $-3x_1 + 2x_3 - 4x_4 = -3$ $2x_1 + 5x_2 + 3x_4 = 5$ $x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 8$

6.	$2x_1+x_2-6x_3+x_4=1$ $5x_2+3x_3-3x_4=7$ $-3x_1+2x_2-x_3+2x_4=9$ $2x_2-6x_3-4x_4=0$	16.	$4x_1+x_2-6x_3+x_4=-1$ $5x_2+2x_3-3x_4=7$ $-3x_1+2x_2-6x_3+2x_4=9$ $2x_2-4x_3-4x_4=0$
7.	$10x_1-5x_2+3x_4=1$ $2x_1-6x_3+2x_4=10$ $-5x_1+x_2-8x_4=-15$ $x_1-4x_2+2x_3+x_4=-4$	17.	$2x_1-4x_2+2x_3+x_4=-4$ $3x_1-5x_2+3x_4=1$ $5x_1-6x_3+2x_4=10$ $-7x_1+x_2-8x_4=-15$
8.	$4x_2-3x_3+x_4=-1$ $-x_1+3x_3-2x_4=8$ $x_1+2x_2-4x_4=5$ $16x_1-2x_2-8x_3=-12$	18.	$6x_2-3x_3+x_4=3$ $-x_1+3x_3-5x_4=8$ $x_1+2x_2-2x_4=5$ $6x_1-2x_2-8x_3=-22$
9.	$4x_1+2x_2+x_3=11$ $x_1-3x_3+x_4=-8$ $2x_2+x_3-4x_4=7$ $x_1-3x_2+x_4=-5$	19.	$2x_2+x_3-x_4=7$ $4x_1+2x_2+x_3=11$ $x_1-3x_3+5x_4=-8$ $x_1-3x_2+2x_4=-5$
10.	$6x_1-2x_2+x_3=0$ $2x_1-5x_3+2x_4=-4$ $3x_2+2x_3+5x_4=22$ $2x_1-5x_2+2x_3=-1$	20.	$2x_1-5x_3+2x_4=-4$ $x_2+2x_3+x_4=10$ $-2x_1-5x_2+3x_3=1$ $8x_1-2x_2+x_3=0$