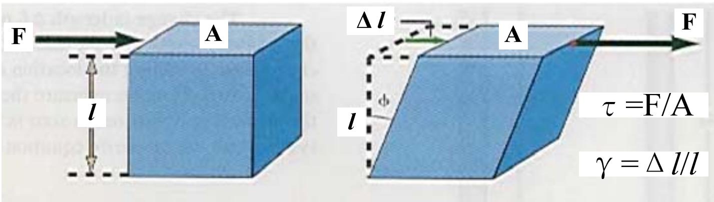
切变模量的测量

本实验利用扭摆法测量切变模量，同时了解扭摆的工作原理。

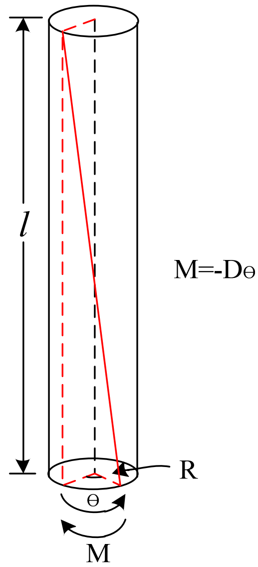
实验原理

材料在平行于其表面的力的作用下将发生剪切形变。切变模量 G 为剪切应力 τ 与剪切应变 γ 的比值。（与杨氏模量有什么不同？有什么联系？）材料的应变 γ 通常很小,难于测量。本实验采用扭摆法测量切变模量。



$$G = \frac{剪切应力}{剪切应变} = \frac{\tau}{\gamma} \tag{1}$$

金属丝一端固定，另一端悬挂有一定质量的物体（条状或盘状），即可构成一个扭摆。当扭转金属丝一个角度后释放，金属丝会恢复到原来的位置。于是，金属丝对悬挂的物体有一个力矩作用，使得物体来回转动。下面定量分析扭摆的运动过程。



下面将证明，当扭转角度足够小，金属丝形变处于弹性限度内，内部力矩与角度成正比。如图，当金属丝被扭过一定角度时，其横截面发生了剪切形变。且与轴线相同距离处，形变的大小相同，即扭转发生的剪切形变是轴对称的。在距离轴线 ρ 处，应变为：$\gamma=\rho\theta/l$。当扭转形变处于弹性限度内，金属丝内部的应力与应变成正比：$\tau=G\gamma$。相对轴线的单位面积的力矩为：$\tau\rho$。考虑整个横截面，金属丝内部的总力矩为：

$$M = \iint_{横截面} \tau\rho \times \mathrm{d}S = \int_0^R G\rho\frac{\theta}{l}\rho \times 2\pi\rho \mathrm{d}\rho = \frac{\pi R^4 G}{2l}\theta \tag{2}$$

采用矢量符号，方程（2）可写为：

$$\vec{\mathrm{M}} = -\frac{\pi R^4 G}{2l}\vec{\theta} \tag{3}$$

$\vec{\theta}$ 是角位移。内力矩与角位移的比例系数仅与金属丝尺寸和材料性质有关，称为扭转常数 *D*。因此，当金属丝扭转小角度时，内力矩的大小正比于角位移，方向与角位移相反。该力矩将使得金属丝恢复至原位置，叫恢复力矩。

$$D = \frac{\pi R^4 G}{2l} \tag{4}$$

当恢复力矩作用于悬挂的物体时，在忽略阻力的情况下，根据牛顿第二定律有：

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + D\theta = 0 \tag{5}$$

这是一个简谐运动的方程。因此物体在恢复力矩作用下将会来回转动。其周期为：

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \tag{6}$$

I_0为悬挂物体的转动惯量。因此，由（4）可见，切变模量可通过扭转常数的测量得到，而扭转常数可由扭摆的周期和悬挂物的转动惯量得到。

本实验测量对象是钢丝，一条状物悬挂于其下端构成扭摆。悬挂物的转动惯量不好计算。因此，我们在扭摆上再加一个圆环来改变扭摆的转动惯量，则扭摆周期变为为$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}}$。

I_1为圆环的转动惯量$I_1 = \frac{1}{2}m(r_{内}^2 + r_{外}^2)$。这样，联立两个方程，可以计算出扭转常数。最终得到钢丝的扭转常数 D 的计算公式为：

$$D = 4\pi^2 \frac{I_1}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{2\pi^2 m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{T_1^2 - T_0^2} \tag{7}$$

由（4）可得，切变模量 G

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} D = \frac{4\pi l m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)} \tag{8}$$

其中 m 为圆环质量，$r_{内}$和$r_{外}$分别为圆环内外径，T_0和T_1分别为未放上圆环和放上圆环的周期，l 为钢丝长度，R 为钢丝的半径。

实验内容

1、用千分尺测量钢丝直径。在钢丝的不同部位测量，测 3 次取平均值。

2、用米尺测钢丝的有效长度，用游标卡尺测圆环的内、外直径，测 3 次取平均值。

3、用电子天平测量测量圆环的质量，测 1 次。

4、测量扭摆的周期 T_0和 T_1。旋转扭摆上端，使钢丝绕竖直轴转动。尽量避免有非切向的力使扭摆晃动。10 个周期记一次时间, 各测 3 次取平均值。 注意：扭摆转动**角度控制在 90°左右**，以保证钢丝形变在弹性限度内，同时便于周期测量。

5、计算钢丝的扭转常数 D 和切变模量 G。

估算不确定度

当对不确定度计算要求不高时，可采用最大不确定度来估计实验误差。在设计实验时，也可以采用最大不确定度的方法评估实验方案的误差。

假设实验直接测量量为 x, y, z, 它们的不确定度分别为 Δx, Δy, Δz，待测量 q 满足函数形式 q=$\boldsymbol{q}$(x, y, z)。待测量 q 的不确定度为：

$$\Delta q=\sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2(\Delta x)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2(\Delta y)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2(\Delta z)^2}$$

其相对不确定度为

$$\frac{\Delta q}{q}=\sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\Delta x}{q}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\Delta y}{q}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\Delta z}{q}\right)^2}$$

任何情况下，相对不确定度都不会大于下面这个式子得到的结果，

$$\frac{\Delta q}{q}=\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\frac{\Delta x}{q}+\left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\frac{\Delta y}{q}+\left|\frac{\partial q}{\partial z}\right|\frac{\Delta z}{q}. \tag{9}$$

公式（9）称为 **q 的最大不确定度**。利用公式（9）更简便地进行不确定度的估算。根据公式（8），切变模量 G 的最大不确定度为：

$$\frac{\Delta G}{G}=\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta m}{m}+\frac{2r_{内}\Delta r_{内}}{r_{内}^2+r_{外}^2}+\frac{2r_{外}\Delta r_{外}}{r_{内}^2+r_{外}^2}+\frac{4\Delta R}{R}+\frac{2T_1\Delta T_1}{T_1^2-T_0^2}+\frac{2T_0\Delta T_0}{T_1^2-T_0^2} \tag{10}$$

下面，利用公式（10）进行以下计算：

(a) **确定主要误差项**。公式(10)右边的每一项表示某个测量对不确定度的贡献，分别写出它们的结果，找出你认为对不确定度影响最大的测量量。

(b) **估算不确定度**。计算$\frac{\Delta G}{G}$，通过$\Delta G=\frac{\Delta G}{G}\times G_{测量}$求出切变模量不确定度 ΔG。

这里，只需要考虑 **B 类不确定度**。各个待测量的 B 类不确定度如下：Δm=0. 1g(电子天平最大允差)，Δl=1mm（卷尺最大允差），$\Delta r_{内}=\Delta r_{外}$=0.01mm（游标卡尺的最大允差为 0.02mm），ΔR=0.002mm（千分尺的最大允差为 0.004mm）。当测量 n 个周期时，$\Delta T_1=\Delta T_0=\Delta t/n$，$\Delta t$=1ms（电子计时器最大允差）。

思考题

根据公式(7)写出扭转常数 D 的相对不确定度表达式(最大不确定度形式),计算其最大不确定度,并重新表述扭转常数的结果,即 D=($D_{平均}$±ΔD).

参考文献

1. Shear modulus, Halliday *et al*, Principles of Physics (9th Edition), chapter 12, pages 315-317.

2. Torsion pendulum, Halliday *et al*, Principles of Physics (9th Edition), chapter 15, pages 394-395.

3. 切变模量的测量, 吴泳华，霍剑青，浦其荣，大学物理实验（第一册 第二版），第 5 章，实验 5.1.2.

报告要求

实验名称

切变模量的测量

实验目的

利用扭摆法测量钢丝的切变模量。

实验仪器

扭摆(已装好待测钢丝)、圆环、千分尺、游标卡尺、卷尺、电子天平、电子计时器.

实验原理

阅读实验讲义，重点弄清以下问题。

1. 理解切变模量的定义及意义
2. 扭摆的工作原理.

实验内容

见讲义. 简要概括.

数据记录

表 1 切变模量测量数据表

千分尺零点误差 d_0=_______mm 游标卡尺零点误差 D_0=_______mm

测量次数 / 待测参数	1	2	3	平均值
钢丝直径 d/mm				
钢丝长度 l/mm				
圆环内径 $D_{内}$/mm				
圆环外径 $D_{外}$/mm				
圆环质量 m/g				
10 个周期 t_0/s				
10 个周期 t_1/s				

表 2 各待测量的值

$R=d/2$ /mm	$r_{内}=D_{内}/2$ /mm	$r_{外}=D_{外}/2$ /mm	$T_0=t_0/10$ /s	$T_1=t_1/10$ /s

数据处理

1. 计算各个测量量的平均值。

2. 计算钢丝的扭转常数 D 与切变模量 G。D 以 N.m/rad 为单位,保留 4 位有效数字。G 以 GPa(1 GPa=10^9 Pa)为单位，保留 3 位有效数字。

3. 按讲义要求分析切变模量的不确定度。计算非常简单,也很容易出错,请看清要求.

实验结论

简要表述实验目的,方法及结果。扭转常数 D=____N.m/rad， 切变模量 G=($G_{平均}$±ΔG) Gpa。ΔG 保留 2 位有效数字,$G_{平均}$小数位与ΔG 对齐。

将切变模量结果与参考值比较,分析实验结果是否合理。

分析可能的误差来源。

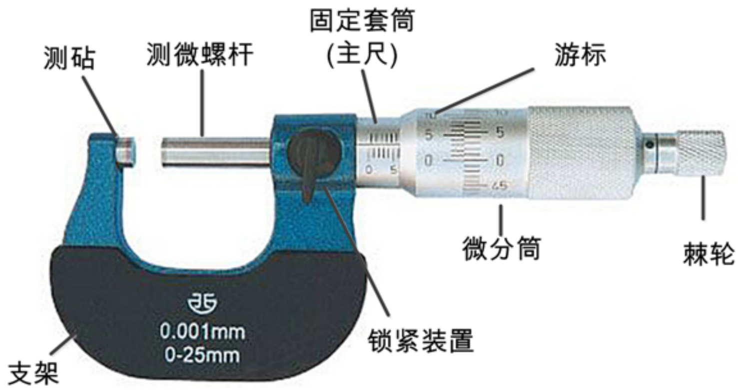
实验用不锈钢丝(304 不锈钢)切变模量的典型值：74~77 Gpa.

思考题

回答讲义中的思考题。

更新时间：2022 年 1 月。

千分尺的使用

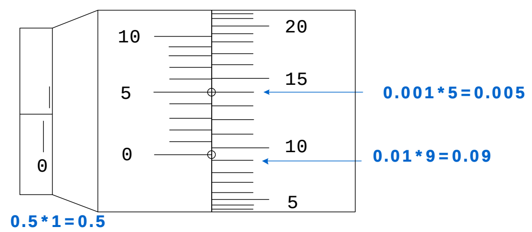


实验用千分尺由套筒，微分筒和游标构成，量程为 25 mm。套筒上的最小刻度为 0.5 mm，微分筒最小刻度为 0.01 mm，游标为 0.001 mm。

使用方法

使用前，未放置待测物，将测砧和螺杆紧贴确定<u>零点误差</u>。然后旋开测微螺杆，放入待测物，记录读数。

读数方法



上图是一个千分尺的读数。读数包含三部分，步骤如下：

1) 读主尺。固定套筒上有一条刻线露出，对应 0.5 mm *1 =0.5 mm.
2) 读微分筒。游标零位于微分筒刻线 9 和 10 之间，读数为 0.01 mm*9=0.09 mm.
3) 读游标。游标的第 5 条刻线与微分筒刻线重合，对应读数 0.001 mm*5=0.005mm.

最后，测量值为三部分之和，即 0.5+0.09+0.005=0.595 mm.

另一个例子

固定套筒: 0.5 mm*18=9mm

微分筒: 0.01 mm*18=0.18 mm

游标: 0.001 mm*2=0.002mm

最终读数： (9+0.18+0.002) mm= 9.182mm.

零点误差

当千分尺的测砧和螺杆紧贴时，游标的零与微分筒的零应重合。若不重合，此时的读数为零点误差。零点误差有正有负，如下图。

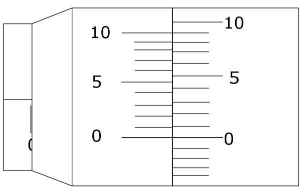
1) 正零点误差

如微分筒零在游标零以下，此时零误差为正。正零误差值=千分尺此时读数。

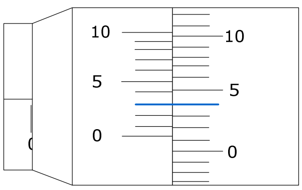
2) 负零点误差

如微分筒零在游标零以上，此时零误差为负。负零误差值= -0.5 + 千分尺此时读数。

注意：无论千分尺的零误差是正是负，待测量总需要<u>减去</u>零点误差。

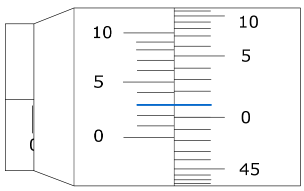


No zero error



Positive zero error

0.013 mm



Negative zero error

-0.5+0.483=-0.017 mm