Теория вероятностей (ФАКИ, 7 семестр)

Линдеманн Никита, МФТИ

3 декабря 2020 г.

Содержание

1 Программа **2**

2 Теория **3**

3 Первое задание **15**

4 Второе задание **35**

5 Итоговая контрольная работа **43**

6 Дополнительные задачи **47**

Литература **54**

1 Программа

1. Дискретное вероятностное пространство и классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Статистики Максвелла-Больцамана, Ферми-Дирака, Бозе-Эйнштейна. Геометрическая вероятность.

2. Исчисление вероятностей в дискретном случае. Теорема сложения для n событий. Условная вероятность. Формула полной вероятности и формула Байеса. Независимость событий. Некоторые классические дискретные вероятностные модели и связанные с ними распределения.

3. Случайные величины и их числовые характеристики. Независимость случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии, связанные с понятием независимости. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Ковариация двух случайных величин и ее связь с независимостью. Задача об оптимальном линейном прогнозе одной случайной величины по наблюдению другой.

4. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли и ее обобщения. Предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

5. Общее понятие вероятностного пространства. Аксиоматика Колмогорова. Примеры вероятностных пространств.

6. Общее определение случайной величины, ее функция распределения и плотность. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывных случайных величин.

7. Совместная функция распределения нескольких случайных величин. Критерий независимости. Многомерное нормальное распределение.

8. Характеристическая функция и ее свойства. Использование характеристической функции для исследований сумм независимых случайных величин.

9. Метод характеристических функций в доказательстве предельных теорем. Усиленная форма закона больших чисел. Центральная предельная теорема для суммы одинаково распределенных случайных величин с конечной диспресией. Ее многомерный вариант (без доказательства).

10. Цепи Маркова: основные понятия и свойства.

2 Теория

Определение 2.1. *Вероятностное пространство – это тройка* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, где:*

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ *– произвольное непустое множество элементарных исходов.*
2. $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ *– множество случайных событий, состоящее из подмножеств* Ω*, такое, что:*
   - (a) $\Omega \in \mathcal{F}$.
   - (b) $\forall\ A \in \mathcal{F} \hookrightarrow \Omega \setminus A = \overline{A} \in \mathcal{F}$.
   - (c) $\forall\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} \hookrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
3. $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *– функция, такая, что:*
   - (a) $P(\Omega) = 1$.
   - (b) $\forall\ \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F} : A_i \cap A_j = \varnothing\ \forall\ i \neq j\ \ \hookrightarrow P\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

При этом $\mathcal{F}$ *называется* σ*-алгеброй событий (так как это множество замкнуто относительно счетного объединения), а* P *–* σ*-аддитивной вероятностной мерой. Пару* $(\Omega, \mathcal{F})$*, состоящую из множества и сигма-алгебры его подмножеств, называют измеримым пространством, а элементы* $\mathcal{F}$ *измеримыми множествами.*

Теорема 2.1 (Первое неравенство Чебышева, неравенство Маркова). *Пусть* ξ *– неотрицательная случайная величина с конечным матожиданием. Тогда* $\forall\ c > 0$ *верно*

$$P(\xi \geq c) \leq \frac{E(\xi)}{c}.$$

Доказательство. Введем события $A_c = \{w_i \mid \xi(w_i) \geq c\}$. Ввиду неотрицательности случайной величины ξ можем записать:

$$\xi(w) \geq \xi(w) \cdot \mathbb{I}_{A_c} \geq c \cdot \mathbb{I}_{A_c}$$

Используя монотонность матожидания, получаем требуемое:

$$E(\xi) \geq c \cdot E(\mathbb{I}_{A_c}) = c \cdot P(A_c) = c \cdot P(\xi \geq c).$$

□

Теорема 2.2 (Второе неравенство Чебышева). *Пусть* ξ *– произвольная случайная величина с конечными матожиданием и дисперсией. Тогда* $\forall\ \varepsilon > 0$ *верно*

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Заметим, что $P(|\xi - E(\xi)|^2 \geq \varepsilon^2)$ равносильно $P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon)$. Тогда, вводя обозначение $|\xi - E(\xi)|^2 = \eta$, можем записать оцениваемое сверху выражение как $P(\eta \geq \varepsilon^2)$. Тогда по первому неравенству Чебышева получаем требуемое:

$$P(\eta \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\eta)}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

□

Теорема 2.3 (Неравенство Чернова). *Пусть ξ – произвольная случайная величина с конечными моментами вида $E(e^{\lambda\xi})$ для всех $\lambda > 0$. Тогда $\forall\, t > 0$ верно*

$$P(\xi \geq t) \leq \inf_{\lambda>0} \frac{E(e^{\lambda\xi})}{e^{\lambda t}}.$$

Определение 2.2. *Ковариация двух случайных величин ξ и η, определенных в одном и том же вероятностном пространстве – это*

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E[(\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))].$$

Утверждение 2.1. *Для ковариации справедливо следующее соотношение:*

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$

Доказательство. Как и в доказательстве аналогичного свойства для дисперсии, используем линейность матожидания:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E[(\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))] = E[\xi\eta - \xi E(\eta) - \eta E(\xi) + E(\xi)E(\eta)] =$$
$$E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) - E(\eta)E(\xi) + E(\xi)E(\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$

□

Определение 2.3. *Линейный коэффициент корреляции Пирсона двух случайных величин ξ и η – это*

$$r(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}.$$

Пусть в результате некоторого опыта мы, имея возможность наблюдать за случайной величиной ξ, хотим предсказывать другую случайную величину η, тоже связанную с этим эксперементом, то есть хотим построить оценку $\hat{\eta} = f(\xi)$. Чтобы найти лучшую оценку $\hat{\eta}$, логично в качестве функции ошибки выбрать $E((\hat{\eta} - \eta)^2)$, и минимизировать ее. В общем виде такая задача достаточно трудна, но если рассматривать в качестве f только линейные функции, то этот аналог вариационной задачи можно решить аналитически. Действительно, пусть $\hat{\eta} = f(\xi) = a\xi + b$, тогда функция ошибок будет иметь вид:

$$F(a,b) = E((a\xi + b - \eta)^2) = a^2E(\xi^2) + b^2 + E(\eta^2) + 2abE(\xi) - 2aE(\xi\eta) - 2bE(\eta).$$

Используя необходимое условие экстремума, запишем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 2aE(\xi^2) + 2bE(\xi) - 2E(\xi\eta) = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2b + 2aE(\xi) - 2E(\eta) = 0 \end{cases}$$

Решая систему, находим неизвестные параметры a и b:

$$a = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)}, \quad b = E(\eta) - aE(\xi).$$

Это решение обеспечивает минимум функционала $F(a,b)$ (это можно проверить, используя достаточное условие экстремума для функции нескольких переменных). Подставляя найденные коэффициенты в равенство $\hat{\eta} = a\xi + b$ и преобразуя, получим, что оптимальная оценка в классе линейных имеет вид:

$$\hat{\eta} = E(\eta) + \sigma(\eta)r(\xi,\eta)\frac{\xi - E(\xi)}{\sigma(\xi)}.$$

Теорема 2.4. *Пусть $\mathcal{E}$ – любой класс подмножеств множества Ω. Существует единственная σ-алгебра $\sigma(\mathcal{E})$, обладающая следующими свойствами:*

1. $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$
2. *$\sigma(\mathcal{E})$ – минимальная по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. То есть, если $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, такая что $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, то $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}$.*

Определение 2.4. *Пусть $(X, \mathcal{F})$ и $(Y, \mathcal{G})$ – измеримые пространства. Функция $f : X \to Y$ называется $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ измеримой, если $\forall\, B \in \mathcal{G} \hookrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, где $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) = B\}$ – полный прообраз множества B.*

Определение 2.5. *Топологией на множестве X называется система $\mathcal{T} = \{U_\alpha\}$ выделенных подмножеств в X, удовлетворяющая аксиомам топологии:*

1. $X \in \mathcal{T}$, $\varnothing \in \mathcal{T}$.
2. $\forall\, \{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \in \mathcal{T} \hookrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$.
3. $\forall\, \{U_k\}_{k=1}^{N} \in \mathcal{T} \hookrightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{N} U_k \in \mathcal{T}$.

Множества $U_\alpha \in \mathcal{T}$ называются открытыми, а их дополнения $\overline{U}_\alpha = X \setminus U_\alpha$ замкнутыми множествами.

Определение 2.6. *Борелевская σ-алгебра на множестве A – σ-алгебра, являющаяся пересечением всех σ-алгебр, содержащих все открытые подмножества множества A.*

Определение 2.7. *Отображение между двумя топологическими пространствами $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{P})$ называется борелевской функцией, если $\forall\, B \in \mathcal{B}(Y) \hookrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$, где $\mathcal{B}(X)$ и $\mathcal{B}(Y)$ – σ-алгебры на множествах X и Y соответственно.*

Определение 2.8. *Пусть задано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Случайной величиной называется $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ измеримая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – борелевская σ-алгебра на вещественной прямой.*

Заметим, что как только мы вводим на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ случайную величину ξ, естественно возникает еще одно вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\xi)$, где $P_\xi(B) = P(\xi \in B) = P(\xi^{-1}(B))\, \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (именно для того, чтобы $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, в определении случайной величины требуется $\mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ измеримость, так как иначе $P(\xi^{-1}(B))$ может быть неопределено для некоторых $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Это пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_\xi)$ называют вероятностным пространством, пораждённым случайной величиной ξ.

Определение 2.9. *Распределением называется вероятностная мера, определенная на измеримом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Определение 2.10. *Распределением случайной величины ξ называется распределение, индуцированное случайной величиной ξ.*

Определение 2.11. *Пусть ξ – случайная вличина, заданная на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, тогда $\sigma(\xi) = \mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{F}$ – σ-алгебра, порожденная случайной величиной ξ.*

Определение 2.12. *Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Две σ-подалгебры $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ σ-алгебры $\mathcal{F}$ называются независимыми, если независимы любые два события $A \in \mathcal{X}$ и $B \in \mathcal{Y}$, то есть $P(AB) = P(A)P(B)$.*

Определение 2.13. *Две случайные величины ξ и η, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, называются независмыми, если независимы порожденные ими σ-алгебры $\sigma(\xi)$ и $\sigma(\eta)$.*

Определение 2.14. *Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$ такая, что $F_\xi(x) = P(\xi^{-1}(-\infty, x]) = P(\xi \le x)$.*

Свойства функции распределения:

1. $P(\xi \in (a,b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.
2. $F_\xi(x)$ монотонно неубывающая функция.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$.
4. $F_\xi(x)$ непрерывна справа: $\forall\, x \in \mathbb{R} \lim\limits_{t\to x+0} F_\xi(t) = F_\xi(x)$.
5. $F_\xi(x)$ имеет предел слева.
6. $F_\xi(x)$ имеет разрывы только первого рода, и таких разрывов не более чем счетное количество.

Определение 2.15. *Распределение $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называется абсолютно непрерывным, если существует такая неотрицательная функция $\rho_\xi(x)$ (которая называется плотностью распределения или плотностью вероятности случайной величины ξ), что:*

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho_\xi(t)dt.$$

Свойства плотности вероятности:

1. Условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_\xi(x)dx = 1$.
2. Характеристическое свойство: $\int\limits_{a}^{b} \rho_\xi(x)dx = P(\xi \in \langle a, b\rangle)$.
3. Связь с функцией распределения: $\rho_\xi(x) = F'_\xi(x)$.

Теорема 2.5. *Пусть $\rho_\xi(x)$ – плотность вероятности абсолютно непрерывной случайной величины ξ, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелевская функция. Тогда*

$$E(f(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_\xi(x)dx.$$

Доказательство. Проведем доказательство в несколько этапов:

1. Докажем утверждение для простых (с конечным числом значений) функций. Для этого заметим, что каждая такая функция $g(x)$ представима в виде:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mathbb{I}_{A_k}(x).$$

А для индикаторов это утверждение очевидно: с одной стороны по свойству индикаторов $E(\mathbb{I}_A(\xi)) = P(\xi \in A)$, а с другой стороны по определению плотности вероятности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_A(x)\rho_\xi(x)dx = \int\limits_A \rho_\xi(x)dx = P(\xi \in A)$. Зачит, используя линейность матожидания и интерграла, получим требуемое для простых функций.

2. Следующим шагом докажем утверждение для произвольных неотрицательных борелевских функций. Для этого воспользуемся леммой, которая говорит, что любая неотрицательная борелевская функция $g(x)$ представима в виде $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, где $\{g_n\}$ – неубывающая последовательность простых функций. Тогда, используя теорему о монотонной сходимости, получим требуемое.
3. Наконец, любую борелевскую функцию можно представить в виде суперпозиции неотрицательных борелевских функций: $g = g_+ - g_-$, где $g_+(x) = \max\{g(x), 0\}$, $g_-(x) = \max\{-g(x), 0\}$. Ввиду единственности такого представления, используя доказанное во втором пункте для g_+ и g_-, получаем требуемое.

□

Теорема 2.6. *Пусть $\eta = f(\xi)$, где $f(x)$ – гладкая строго монотонная функция, а ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения $\rho_\xi(x)$. Тогда плотность распределения η имеет вид:*

$$\rho_\eta(y) = \rho_\xi(g(y)) \cdot |g'(y)|,$$

где $g(y) = f^{-1}(y)$ – обратная к $y = f(x)$ функция.

Доказательство. Сначала докажем утверждение для строго возастающей функции $f(x)$. Используя строгую монотонность $f(x)$ и $g(y)$, определение функции распределения, а также теорему о замене переменной в определенном интеграле, получим:

$$F_\eta(y) = P(f(\xi) \leq y) = P(\xi \leq g(y)) = \int\limits_{-\infty}^{g(y)} \rho_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\xi(g(y))g'(y)dy.$$

Далее, используя связь плотности вероятности и функции распределения и теорему о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом, получим требуемое:

$$\rho_\eta(y) = F'_\eta(y) = \frac{d}{dy}\left(\int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\xi(g(y))g'(y)dy\right) = \rho_\xi(g(y))g'(y).$$

Аналогично рассуждая, получим требуемое и для строго убывающей фнкции:

$$F_\eta(y) = P(f(\xi) \leq y) = P(\xi \geq g(y)) = \int\limits_{g(y)}^{+\infty} \rho_\xi(x)dx = \int\limits_{y}^{+\infty} \rho_\xi(g(y))g'(y)dy = 1 - \int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\xi(g(y))g'(y)dy.$$

$$\rho_\eta(y) = F'_\eta(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - \int\limits_{-\infty}^{y} \rho_\xi(g(y))g'(y)dy\right) = -\rho_\xi(g(y))g'(y).$$

□

Определение 2.16. *Последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$ *сходится в среднем порядка* $p > 0$ *к случайной величине* ξ, *что обозначается как* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$, *если*

$$E(|\xi_n - \xi|^p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 2.17. *Последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$ *сходится почти наверное (с вероятностью единица) к случайной величине* ξ, *что обозначается как* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$, *если*

$$P(\omega \mid \xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)) = 1.$$

Определение 2.18. *Последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$ *сходится по вероятности к случайной величине* ξ, *что обозначается как* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi$, *если* $\forall\ \varepsilon > 0$ *верно:*

$$P\left(|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 2.19. *Последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$ *слабо сходится (сходится по распределению, сходится в основном) к* ξ, *что обозначается как* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \xi^1$, *если*

$$F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_\xi(x)$$

во всех точках x *непрерывности функции* $F_\xi(x)$.

Утверждение 2.2 (**Равносильное определение слабой сходимости**). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \xi$.
2. $P(\xi_n \in A) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\xi \in A)\ \forall\ A \subseteq \mathbb{R} : P(\xi \in \partial A) = 0$.
3. $E(f(\xi_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(f(\xi))\ \forall\ f(x) \in C(\mathbb{R})$.

$$\begin{tikzcd}
\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi \arrow[dr] & & \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi \arrow[dl] \\
& \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \xi \arrow[d] & \\
& \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \xi &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: Связь разных типов сходимости случайных величин.

---

[1] Символ w от английского weak convergence. Так же часто обозначают символами d от анлийского distribution, или F от обозначения функции распределения, или стрелкой $\Rightarrow$.

Теорема 2.7 (**Закон Больших Чисел в форме Чебышева**). *Пусть* $\{\xi_n\}$ *– последовательность независимых случайных величин с одинаковыми конечными математическими ожиданиями* μ *и дисперсиями* σ^2*. Тогда*

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu.$$

Доказательство. Ввиду линейности математического ожидания:

$$E(\eta) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k) = \mu.$$

Ввиду независимости случайных величин:

$$D(\eta) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}D(\xi_k) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Применяя второе неравенство Чебышева к случайной величине η, получим оценку скорости сходимости, чем и докажем теорему:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ P(|\eta - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = O\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Определение 2.20. *Производящая фукнциия целочисленной неотрицательной случайной величины* ξ *– это:*

$$g_\xi(z) = E(z^\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{x_k}p_k = \sum_{k=1}^{\infty} z^{x_k}P(\xi = x_k).$$

Свойства производящей функции:

1. $g_\xi(0) = p_0 = P(\xi = 0)$, $g_\xi(1) = 1$.
2. $g_\xi^{(k)}(0) = k!\cdot p_k = k!\cdot P(\xi = k)$.
3. $g'_\xi(1) = E(\xi)$, $D(\xi) = g''_\xi(1) + g'_\xi(1) - \left[g'_\xi(1)\right]^2$.
4. Производящая функция однозначно задает распределение случайной величины.

Теорема 2.8. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *– независимые в совокупности случайные величины, то*

$$g_{\sum\limits_{k=1}^{n}}(z) = \prod_{k=1}^{n} g_{\xi_k}(z).$$

Определение 2.21. *Характеристическая функция случайной величины* ξ *– это:*

$$\varphi_\xi(t) = E(e^{it\xi}).$$

Свойства характеристической функции:

1. Характеристическая функция в нуле равна единице: $\varphi_\xi(0) = 1$.
2. Характеристическая функция ограничена: $|\varphi_\xi(t)| \leq 1\ \forall\ t \in \mathbb{R}$.

3. Характеристическая функция равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.
4. Для случайной величины ξ с абсолютно непрерывным распределением $\varphi_\xi(t) = \operatorname{Re}\varphi_\xi(t)$ тогда и только тогда, когда плотность $\rho_\xi(x)$ четная функция, то есть $\rho_\xi(-x) = \rho_\xi(x)$.
5. Характеристическая функция однозначно задает распределение случайной величины.

Для дискретной случайной величины ξ, которая принимает значения $x_1, x_2, \ldots$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, \ldots$, характеристическая фукнция будет иметь вид

$$\varphi_\xi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k.$$

Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $\rho_\xi(x)$ характеристическая фукнция будет иметь вид

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \rho_\xi(x) dx,$$

то есть характеристическая фукнция непрерывной случайной величины это (с точностью до множителя) преобразование Фурье плотности распределения этой случайной величины.

Утверждение 2.3. *Если для случайной величины ξ выполнено $E(|\xi^n|) < +\infty$, то для всех моментов $k \leq n$ верно*

$$E(\xi^k) = \frac{1}{i^k} \cdot \left.\frac{d^k \varphi_\xi(t)}{dt^k}\right|_{t=0}.$$

Теорема 2.9. *Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимые в совокупности случайные величины, то*

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t).$$

Доказательство. Докажем данное утверждение для двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2 (для n слагаемых проводится аналогичное доказательство по индукции). Ввиду независимости получим:

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = E(e^{it(\xi_1+\xi_2)}) = E(e^{it\xi_1} e^{it\xi_2}) = E(e^{it\xi_1}) E(e^{it\xi_2}) = \varphi_{\xi_1}(t) \varphi_{\xi_2}(t).$$

□

Теорема 2.10 (Формула обращения). *Если $a < b$ – точки непрерывности функции распределения $F_\xi(x)$, то*

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-c}^{+c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_\xi(t) dt.$$

Если при этом распределение $F_\xi(x)$ абсолютно непрерывно (то есть существует плотность распределения $\rho_\xi(x)$), то

$$\rho_\xi(x) = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-c}^{+c} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt.$$

Теорема 2.11 (**Леви о непрерывности**).

1. *Пусть* $\{\xi_n\}$ *– последовательность случайных величин такая, что для всех* $t \in \mathbb{R}$ *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{\xi_n}(t) = \psi(t) \neq \pm\infty$ *и функция* $\psi(t)$ *непрерывна в точке* $t = 0$. *Тогда существует случайная величина* ξ *такая, что* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \xi$ *и* $\psi(t) = \varphi_\xi(t)$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$.

2. *Если* $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \xi$, *то* $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_\xi$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.12 (**Единственности**). *Если для случайных величин* ξ *и* η *выполнено, что* $\varphi_\xi = \varphi_\eta$, *то распределения* ξ *и* η *совпадают.*

Теорема 2.13 (**Закон Больших Чисел в форме Хинчина**). *Пусть* $\{\xi_n\}$ *– последовательность независимых случайных величин с одинаковыми конечными математическими ожиданиями* μ. *Тогда*

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu.$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \xi_\mu$, где $\xi_\mu(\omega) = \mu \ \forall\, \omega$. По свойству характеристической функции:

$$\varphi_{\eta_n}(t) = E\left(e^{\frac{it}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}\right) = \varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k}\left(\frac{t}{n}\right) = \varphi_\xi^n\left(\frac{t}{n}\right).$$

Ввиду того, что существует $E(\xi)$ и что $\varphi_\xi(0) = 1$, следует, что $\varphi_\xi(t)$ дифференцируема в нуле. Разложим функцию $\varphi_\xi(t)$ в окрестности нуля по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$\varphi_\xi(t) = \varphi_\xi(0) + \varphi_\xi'(0)t + o(t) = 1 + iE(\xi)t + o(t) = 1 + i\mu t + o(t).$$

Тогда, используя второй замечательный предел, получим:

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \varphi_\xi^n\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1 + i\mu\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{i\mu t} = \varphi_{\xi_\mu}(t).$$

Следовательно, в силу теоремы непрерывности, $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \xi_\mu$.

Чтобы закончить доказательство теоремы, покажем, что в нашем случае из слабой сходимости следует сходимость по вероятности (на самом деле эти сходимости эквивалентны, если предельная случайная величина является константой, а если предельная случайная величина не вырождена, то следствие верно только в одну сторону: из сходимости по вероятности следует слабая сходимость). По определению $\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \xi_\mu$ значит, что $F_{\eta_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_{\xi_\mu}(x)$ во всех точках непрерывности функции $F_{\xi_\mu}(x)$, то есть во всех точках $x \neq \mu \in \mathbb{R}$. Так как каждая функция $F_{\eta_k}(x)$ имеет не более чем счетное число разрывов, то последовательность функций $\{F_{\eta_n}(x)\}$ тоже будет иметь не более чем счетное число точек разрыва. Если рассмотреть вещественную прямую без всех этих точек разрыва последовательности функций $\{F_{\eta_n}(x)\}$, то для любого ε будет выполнено, что $F_{\eta_n}(x)$ не будет иметь разрывов в точках $x = \mu \pm \varepsilon$. Тогда, устремляя $n \to \infty$, получим:

$$P(|\eta_n - \xi_\mu| \le \varepsilon) = 1 - P\big(\eta_n \in (\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon)\big) = 1 - \big(F_{\eta_n}(\mu+\varepsilon) - F_{\eta_n}(\mu-\varepsilon)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - (1-0) = 1,$$

следовательно, $P(|\eta_n - \xi_\mu| > \varepsilon) = 0$, что по определению и означает, что η_n сходится по вероятности к $\xi_\mu = \mu$. □

Теорема 2.14 (**Закон Больших Чисел в форме Колмогорова**). *Пусть* $\{\xi_n\}$ *– последовательность одинаково распределенных и независимых в совокупности случайных величин с конечными матожиданиями:* $E(\xi_1) < +\infty$. *Тогда для* $\{\xi_n\}$ *выполняется усиленный закон больших чисел, то есть*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} 0.$$

Теорема 2.15 (**Маркова**). *Пусть последовательность случайных величин* $\{\xi_n\}$ *такова, что*

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тогда для $\{\xi_n\}$ *выполняется закон больших чисел, то есть*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Теорема 2.16 (**Центральная предельная теорема**). *Пусть* $\{\xi_n\}$ *– последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными математическими ожиданиями* μ *и дисперсиями* $\sigma^2 > 0$. *Тогда для последовательности случайных величин* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ *верно:*

$$\eta_n = \frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{w} \mathcal{N}(0,1).$$

Доказательство. В силу теоремы непрерывности, достаточно показать, что при всех $t \in \mathbb{R}$ характеристическая функция $\varphi_{\eta_n}(t)$ сходится к характеристической функции нормального распределения $\mathcal{N}(0,1)$, то есть $\varphi_{\eta_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$. Рассмотрим центровку случайной величины ξ, то есть случайную величину $\alpha = \xi - E(\xi) = \xi - \mu$, тогда

$$\eta_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.$$

В силу независимости случайных величин $\{\alpha_n\}$ (их независимость следует из независимости $\{\xi_n\}$):

$$\varphi_{\eta_n}(t) = E\left(\exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\right) = \varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \varphi_\alpha^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Так как второй момент $D(\xi) = \sigma^2$ конечен, то второй момент центровки тоже конечен (очевидно, что они равны), тогда, раскладывая характеристическую функцию $\varphi_\alpha(t)$ по формуле Маклорена, получим:

$$\varphi_\alpha(t) = 1 + \varphi_\alpha'(0)t + \frac{t^2}{2}\varphi_\alpha''(0) + o(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2).$$

Используя второй замечательный предел, получим требуемое:

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \varphi_\alpha^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2n\sigma^2} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

□

Теорема 2.17 (Неравенство Берри-Эссеена). *Пусть* $\{\xi_n\}$ *– последовательность одинаково распределенных и независимых в совокупности случайных величин таких, что* $E(\xi_1) = \mu$, $D(\xi_1) = \sigma^2$ *и* $E(|\xi_1|^3) < +\infty$. *Обозначим* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, *тогда*

$$|F_{\eta_n}(x) - \Phi(x)| \leq \frac{E(|\xi_1 - \mu|^3)}{\sqrt{n}\sigma^3},$$

где

$$\eta_n = \frac{S_n - \mu n}{\sigma\sqrt{n}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Определение 2.22. *Две случайные величины* ξ *и* η, *заданные на одном и том же вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *называются эквивалентными, что записывается как* $\xi \sim \eta$, *если* $P(\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = \eta(\omega)) = 1$.

Определение 2.23. *Вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *называется полным, если для любого события* $A \in \mathcal{F}$, *такого, что* $P(A) = 0$, *верно:* $\forall\ B \subset A \hookrightarrow P(B) = 0$.

Теорема 2.18. *Любое неполное вероятностное пространство можно пополнить.*

Определение 2.24. *Пусть на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *задана случайная величина* ξ, *и* σ*-подалгебра* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. *Условное математическое ожидание* ξ *относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{C}$ *– это случайная величина* $E(\xi \mid \mathcal{C})$, *обладающая слежующими свойствами:*

1. *Случайная величина* $E(\xi \mid \mathcal{C})$ *является* $\mathcal{C}$*-измеримой.*
2. *Для всех* $A \in \mathcal{C}$ *выполнено, что* $E(\xi I_A) = E\big(E(\xi \mid \mathcal{C}) I_A\big)$, *то есть*

$$\int\limits_A \xi dP = \int\limits_A E(\xi \mid \mathcal{C}) dP.$$

Определение 2.25. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *– вероятностное пространство. Заряд (мера со знаком) – это* σ*-аддитивная функция* $\nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *такая, что* $\sup\limits_{A \in \mathcal{F}} |\nu(A)| < +\infty$.

Определение 2.26. *Заряд* ν, *заданный на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *абослютно непрерывен относительно меры* P, *если* $\forall\ A \in \mathcal{F} : P(A) = 0 \hookrightarrow \nu(A) = 0$.

Теорема 2.19 (Радона-Никодима). *Пусть* ν *– аболютно непрерывный относительно меры* P *заряд на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Тогда существует и единственна (с точностью до множества меры нуль) случайная величина* $\eta \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *такая, что для всех* $A \in \mathcal{F}$ *выполнено*

$$\nu(A) = E(\eta I_A) = \int\limits_A \eta dP.$$

Определение 2.27. *Функция* η, *существование которой гарантируется теоремой Радона — Никодима, называется производной Радона — Никодима меры* ν *относительно меры* P *и обозначается как* $\eta = \dfrac{d\nu}{dP}$.

Теорема 2.20 (Существование и единственность условного математического ожидания). *Пусть задано вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *и* σ*-подалгебра* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$. *Если для случайной величины* ξ *выполнено* $E(|\xi|) < +\infty$, *то* $E(\xi \mid \mathcal{C})$ *существует и единственно (с точностью до множества меры нуль).*

Доказательство. Для произвольного $A \in \mathcal{C}$ определим заряд

$$\nu(A) = E(\xi I_A) = \int\limits_A \xi dP.$$

Если $P(A) = 0$, то $I_A = 0$ почти всюду, а значит и $\xi I_A = 0$ почти всюду, следовательно и $\nu(A) = E(\xi I_A) = 0$ почти наверное. Таким образом, введенный заряд ν является абсолютно непрерывным относительно меры P. Тогда теорема Радона-Никодима гарантирует, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ существует и единственна (с точностью до множества меры нуль) случайная величина η такая, что для любого $A \in \mathcal{C}$ выполнено

$$\nu(A) = E(\eta I_A) = \int\limits_A \eta dP.$$

Так как функция η является $\mathcal{C}$-измеримой и для нее выполнено интегральное свойство, то η и является условным математическим ожиданием ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{C}$.

Единственность условного математического ожидания $E(\xi \mid \mathcal{C}) = \eta$ следует из свойств математического ожидания. Если бы существовало другое условное математическое ожидание η', то для всех $A \in \mathcal{C}$ выполнялось бы $E(\eta I_A) = E(\eta' I_A)$, откуда следует, что $\eta = \eta'$ почти всюду. ☐

Определение 2.28. *Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ заданы случайные величины ξ и η. Условное математическое ожидание ξ относительно η – это условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно σ-алгебры, порожденной η, то есть*

$$E(\xi \mid \eta) = E(\xi \mid \mathcal{F}_\eta), \quad \mathcal{F}_\eta = \{\eta^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \subset \mathcal{F}.$$

3 Первое задание

Задача 3.1. Пусть A, B и C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что:

1. произошло только событие A: $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;
2. произошли A и B, а C не произошло: $A \cap B \cap \overline{C}$;
3. все три события произошли: $A \cap B \cap C$;
4. произошло по крайней мере одно из событий: $A \cup B \cup C$;
5. ни одно из событий не произошло: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

Задача 3.2. Проверить справедливость следующих равенств:

1. $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$x \in \overline{AB} \Leftrightarrow x \notin AB \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \overline{A} \\ x \in \overline{B} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

2. $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$.

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \;\; \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \overline{A}\,\overline{B}.$$

3. $(A \cup B)C = AC \cup BC$.

$$x \in (A \cup B)C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in C \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \;x \in C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \\ \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in AC \cup BC.$$

4. $(A \cup B)\overline{AB} = A\overline{B} \cup \overline{A}B$.
   Используя доказанные выше свойства, получим:

$$(A \cup B)\overline{AB} = A\overline{AB} \cup B\overline{AB} = A(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup B(\overline{A} \cup \overline{B}) = A\overline{A} \cup A\overline{B} \cup B\overline{A} \cup B\overline{B} = A\overline{B} \cup \overline{A}B.$$

Задача 3.3. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке 9.

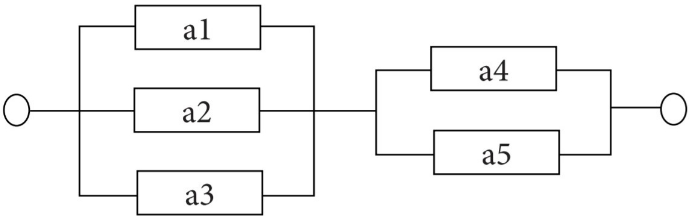


Рис. 2: Схема.

Событие A_i состоит в том, что вышел из строя участок a_i. Записать выражение для события C, заключающегося в том, что цепь разомкнута.

Решение. Очевидно, что цепь будет разомкнута только тогда, когда полностью выйдет из строя первый блок (участки a_1, a_2 и a_3) или второй (участки a_4 и a_5). Значит

$$C = A_1A_2A_3 \cup A_4A_5.$$

□

Задача 3.4. Упростить выражения для заданных событий:

1. $(A\cup B)\cap(A\cup \overline{B}) = AA\cup A\overline{B}\cup BA\cup B\overline{B} = A\cup A\overline{B}\cup AB = A\cup A(\overline{B}\cup B) = A\cup A = A.$
2. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = AB \cup AC \cup BB \cup BC = B \cup AC.$
3. $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup\overline{B}) = (A\overline{A}\cup A\overline{B}\cup B\overline{A}\cup B\overline{B})(A\cup\overline{B}) = A\overline{B}A\cup A\overline{B}\,\overline{B}\cup B\overline{A}A\cup B\overline{A}\,\overline{B} = A\overline{B} \cup A\overline{B} = A\overline{B}.$

Задача 3.5. Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ – произвольное семейство подмножеств некоторого множества. Доказать законы де Моргана:

1. $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I} \overline{A_i}.$

$$x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \notin A_i\ \forall\, i \in I \Leftrightarrow x \in \overline{A_i}\ \forall\, i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

2. $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I} \overline{A_i}.$

$$x \in \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists\, j \in I : x \notin A_j \Leftrightarrow \exists\, j \in I : x \in \overline{A_j} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Задача 3.6. Пусть $\{A_n\}$ – произвольная последовательность подмножеств некоторого множества. Пусть A_* – подмножество, состоящее из элементов, которые принадлежат бесконечно многим подмножествам последовательности $\{A_n\}$, A^* – подмножество, состоящее из элементов, которые принадлежат всем подмножествам последовательности $\{A_n\}$, кроме конечного их числа. Выразить A_* и A^* через подмножества $\{A_n\}$ с помощью теоретико-множественных операций.

Задача 3.7. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника:

1. 3 партии из 4-х или 5 из 8-ми?

   Так как испытания реализуются по схеме Бернулли, то вероятность выиграть ровно k партий из n при вероятности выигрыша p, может быть вычислена как $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$. Следовательно:

$$P(3|4) = C_4^3\frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}, \quad P(5|8) = C_8^5\frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}.$$

2. не менее 3-х партий из 4-х или не менее 5 из 8-ми?

$$P(3 \geq |4) = C_4^3\frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^4\frac{4!}{4!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}.$$

$$P(5 \geq |8) = C_8^5\frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^6\frac{8!}{6!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7\frac{8!}{7!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^8\frac{8!}{8!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{89}{256}.$$

Задача 3.8. На полке в случайном порядке расставлены 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти три тома стоят в порядке возрастания слева направо (не обязательно рядом).

Решение. Вероятность удачного расположения трех книг (событие A) можно найти по классической формуле (так как вероятностное пространство однородно):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Мощность Ω, очевидно, равна 40!, так как именно столько есть способов расставить 40 разных книг на полку. Чтобы найти $|A|$, сначала (мысленно) расставим на полке в правильном порядке три книги Пушкина, а остальные 37 книг расставим случайным образом. Тогда очевидно, что есть 37! способов расставить остальные книги при каждой заданной правильной расстановке трех книг Пушкина. Количество таких правильных расстановок можно найти, если представить, что между (либо до или после) правильно расставленными томами Пушкина нам надо поставить еще 37 книг, что эквивалентно задаче размещения 37 неразличимых шаров по 4 ящикам, при условии, что каждый ящик может вместить любое количество (от 0 до 37) шаров. Решение этой задачи известно и равно C_{40}^{37}, следовательно, искомая вероятность будет такая же, как при расстановке трехтомника без других книг:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{37!}{40!} C_{40}^{37} = \frac{1}{6}.$$

□

Задача 3.9. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года (учесть, что число дней в разных месяцах различно).

Решение. В предоположении, что дни рождения могут приходится на все месяцы равновероятно, ответ будет равен $\frac{12!}{12^{12}}$. Однако, в году 7 месяцев с 31 днем, 4 месяца по 30 дней и 1 месяц с 28 днями, а значит нам надо решить следующую задачу: есть n лунок и n шаров, каждый шар может попасть в лунку k с вероятностью p_k, какова вероятность того, что все шарики попадут в разные лунки? Докажем по индукции, что вероятность такого события равна

$$P(n) = n! \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Действительно, при $n = 2$ всего 4 исхода: оба шара попали в первую лунку ($p = p_1^2$); оба попали во вторую лунку ($p = p_2^2$); первый шар попал в первую лунку, а второй во воторую ($p = p_1 p_2$); первый шар попал во вторую лунку, а второй в первую ($p = p_2 p_1$). База доказана.

Пусть есть $n+1$ шаров и лунок, и вероятность того, что n шаров попадут в разные лунки равна $P(n) = n! \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$. Рассмотрим первые n шаров, которые с вероятностью $P(n)$ закатятся каждый в свою лунку, тогда, чтобы испытание закончилось успехом, необходимо, чтобы последний шар закатился в последнюю свободную лунку. Это произойдет с вероятностью p_{k_i} (в зависимости от того, в какие лунки закатились первые n шаров), при этом мы можем выбрать первые n шаров $C_{n+1}^{n} = n+1$ способами. Значит, вероятность того, что все $n+1$ шаров закатятся каждый в свою лунку равна $P(n+1) = (n+1)n! \prod\limits_{k=1}^{n+1} p_k = (n+1)! \prod\limits_{k=1}^{n+1} p_k$. Шаг индукции доказан.

Итого, ответ на задачу будет следующим:

$$P = 12! \cdot \left(\frac{31}{365}\right)^7 \cdot \left(\frac{30}{365}\right)^4 \cdot \frac{28}{365}.$$

□

Задача 3.10. Ребенок играет с десятью буквами разрезанной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что он случайно составит слово МАТЕМАТИКА?

Решение. Всего количество различных слов, которые можно составить из этих букв, равно $\frac{10!}{3!2!2!}$, так как всего 10! способов переставить 10 букв, но при этом у нас есть 3 одинаковые буквы А и по две буквы М и Т, следовательно, переставляя их, мы не будем получать новые слова. Из этого набора нам нужно только одно слово, следовательно вероятность равна

$$P = \frac{3!2!2!}{10!}.$$

Можно рассуждать по-другому: чтобы составить слово МАТЕМАТИКА, нам нужно на первое место поставить букву М, это произойдет с вероятностью $\frac{2}{10}$. Далее должна идти буква А, вероятность чего равна $\frac{3}{9}$. Рассуждая далее аналогично, ввиду независимости выбора букв, получим:

$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3!2!2!}{10!}.$$

□

Задача 3.11. Из колоды 52 карт наудачу выбирается 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут карты всех четырех мастей?

Решение. Всего способов выбрать 6 карт из колоды 52 карт C_{52}^6. Чтобы найти количество способов выбрать из колоды 6 карт так, чтобы среди них были карты всех 4 мастей, рассмотрим разбиение на события A_1 и A_2, которые заключаются в том, что среди выбранных 6 карт первые 4 все разной масти, а последние две разной и одинаковой масти соответсвенно. $N(A_1) = C_{13}^2 \cdot C_{13}^2 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_4^2$, так как именно столько есть способов выбрать по две карты двух выделенных мастей и по одной карте из двух оставшихся мастей (множитель C_4^2 нужен, так как это количество способов выделить 2 масти из 4). $N(A_2) = C_{13}^3 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_4^1$, так как именно столько есть способов выбрать три карты выделенной масти и три карты по одной из оставшихся мастей (множитель C_4^1 отвечает за количество способыв выбрать 1 выделенную масть из 4). Итого:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(A_1) + N(A_2)}{N(\Omega)} = \frac{C_{13}^2 \cdot C_{13}^2 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_4^2 + C_{13}^3 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^6}.$$

□

Задача 3.12. Для работы выделено 12 человек. Сколькими способами их можно разделить на пары?

Решение. Выстроим всех людей в шеренгу и занумеруем. Будем разбивать людей по парам с начала шеренги (рисунок 3).

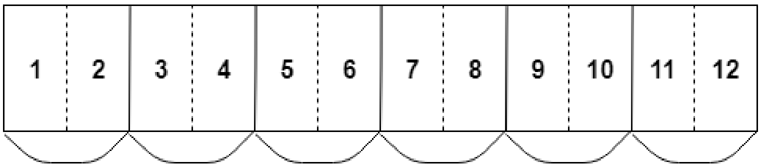


Рис. 3: Разбиение людей на пары.

Всего таких построений 12!, но перестановка в каждой паре двух людей даст то же разбиение на пары, следовательно, всего пар $\frac{12!}{2^6}$. Таким образом мы нашли количество упорядоченных пар (так как изначально мы начали с перестановок людей, то порядок важен), но так как нас интересует количество неупорядоченных пар, то надо поделить на количество перестановок на множестве из 6 элементов, следовательно, ответ равен $\frac{12!}{6!\cdot 2^6}$. □

Задача 3.13. В задаче №3 найти $P(C)$, если события A_i, $i = \overline{1,5}$ независимы в совокупности и $P(A_k) = \frac{1}{k+1}$.

Решение.

$$P(C) = P(A_1A_2A_3 \cup A_4A_5) = P(A_1A_2A_3) + P(A_4A_5) - P(A_1A_2A_3 \cap A_4A_5) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_4)P(A_5) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{53}{6!}.$$

□

Задача 3.14. (Сумашедший почтальон) В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти p_n – вероятность того, что что хотя бы одно письмо дойдет до своего адресата. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Решение. Очевидно, что в данном случае вероятность того, что к конкретному адресату попадет именного его письмо, равна $\frac{1}{n}$.

Расссмотрим события A_k, заключающиеся в том, что k-ое письмо пришло по правильному адресу. Легко подсчитать вероятность того, что ровно k писем пришли по правильному адресу:

$$P(A_{i_1}\dots A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Чтобы найти вероятность события, при котором все письма попадут по правильным адресам, то есть вероятность события $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, используем известную формулу включения исключений, которая для вероятности имеет вид:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i\cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i\cap A_j\cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Подставляя значения в формулу, получим ответ:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - C_n^2\frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3\frac{(n-3)}{n!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n} \approx \frac{1}{e}.$$

□

Задача 3.15. Группа из $2n$ девушек и $2n$ юношей делится на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число юношей и девушек?

Решение. Количество способов разделить $4n$ человек на две равные группы, очевидно, равно C_{4n}^{2n}. При этом количество таких разбиений, при которм в каждой подгруппе окажется равное количество юношей и девушек равно $C_{2n}^n \cdot C_{2n}^n$, так как в таком случае в каждой подгруппе будет по n девушек и юношей, и количество способов независимо отобрать n из $2n$ девушек и n из $2n$ юношей равно $C_{2n}^n \cdot C_{2n}^n$. Итого, ответ:

$$P = \frac{(C_{2n}^n)^2}{C_{4n}^{2n}}.$$

☐

Задача 3.16. n мужчин и n женщин случайно рассаживаются вокруг круглого стола. Какова вероятность того, что за столом мужчины и женщины будут чередоваться?

Задача 3.17. В первом ящике 2 белых и 4 черных шара, а во втором – 3 белых и 1 черный шар. Из первого ящика переложили во второй два шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второго ящика после перекладывания, окажется белым.

Решение. Пусть A – интересующее нас событие. Рассмотрим разбиение: $B_1 = \{ЧЧ\}$, $B_2 = \{ЧБ\}$, $B_3 = \{ББ\}$ – события, при которых из первого ящика переложили во второй 2 черных шара, черный и белый, 2 белых шара соответственно. Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3).$$

Так как, чтобы произошло событие B_1, необходимо выбрать 2 белых шара из 2 белых, а всего способов выбрать два шара из первого ящика C_6^2, то

$$P(B_1) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

Аналогично:

$$P(B_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{15}.$$

$$P(B_3) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = 1 - P(B_1) - P(B_2) = \frac{6}{15}.$$

Итого:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{15} + \frac{2}{6} \cdot \frac{8}{15} + \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{15} = \frac{7}{18}.$$

☐

Задача 3.18. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трех костях выпали разные грани?

Решение. Рассмотрим два случая:

1. Кости не различимы. Обозначим $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i = \overline{1,6},\ \omega_i \neq \omega_j\ \forall\ i \neq j\}$, A – событие, при котором на всех трех костях выпали разные грани. Тогда $|\Omega| = \frac{6 \cdot 5 \cdot 3}{3!} = 20$ так как на первом месте может стоять любая из 6 цифр, на втором – любая из оставшихся 5, а на третьем месте любая из 3 оставшихся, делим на 3! ввиду неупорядоченности набора (кости не различимы). $|A| = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10$ так как можно зафиксировать на

первом месте цифру 1, тогда на втором месте может стоять любая из 5 цифр, а на третьем – любая из 4 оставшихся, так же надо поделить на количество перестановок на множестве из двух элементов ввиду неупорядоченности набора. Итого:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

2. Кости различимы. Тогда $|\Omega| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, $|A| = C_3^1 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ так как мы можем зафиксировать одно из трех место для единицы, на первое оставшееся место поставить любую из 5 цифр, а на последнее свободное место можем поставить еще любую из 4 цифр. Итого:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

Ради интереса посчитаем, какова априорная вероятность того, что при бросании трех костей хотя бы на одной выпадет единица. Эта вероятность равна:

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0{,}42$$

так как вероятность того, что при независимом бросании трех игральных костей ни разу не выпадет единица равна $\left(\frac{5}{6}\right)^3$. ☐

Задача 3.19. Стрелки А, В, С поражают мишень с вероятностями 0,6, 0,5 и 0,7 соответственно. Стрелки дали залп по мешени и две пули попали в цель. Найти вероятность того, что стрелок С попал в мишень.

Решение. Рассмотрим два способа решения:

1. Введем событие D, которое заключается в том, что при залпе стрелков 2 пули из 3 попали в мешень. Тогда, искомая вроятность равна:

$$P(C|D) = \frac{P(CD)}{P(D)}.$$

Событие CD заключается в том, что при залпе стрелков 2 пули из 3 попали в мешень и при этом попал стрелок C. Эта вероятность равна $P(CD) = P(\overline{A})P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C) = 0{,}35$. Аналогично находится $P(D) = P(\overline{A})P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(A)P(B)P(\overline{C}) = 0{,}44$. Следовательно, ответ равен:

$$P(C|D) = \frac{0{,}35}{0{,}44} \approx 0{,}795.$$

2. Введем событие D, которое заключается в том, что при залпе стрелков 2 пули из 3 попали в мешень. После того, как нам стало известно, что при залпе стрелков 2 пули из 3 попали в мешень, исходное вероятностное пространство изменилось. Рассмотрим события в этом новом вероятностном пространстве: $\Sigma_1 = \{AB\}$, $\Sigma_2 = \{AC\}$, $\Sigma_3 = \{BC\}$ – события, состоящие в том, что в мешень попали стрелки A и B, стрелки A и C, стрелки B и C соответсвенно.

   Заметим, что $P(\Sigma_1) + P(\Sigma_2) + P(\Sigma_3) = 0{,}44 \neq 1$, а значит это не разбиение. Чтобы сделать Σ_1, Σ_2, Σ_3 разбиением, необходима перенормировка (переход в другое вероятностное пространство), то есть нужно поделить вероятности $P(\Sigma_i)$ на их сумму.

   Тогда вероятность события D, состоящего в том, что при попадании двух из трех пуль в мешень попал стрелок C, может быть вычислена следующим образом:

$$P(D) = \frac{P(D|\Sigma_1)P(\Sigma_1) + P(D|\Sigma_2)P(\Sigma_2) + P(D|\Sigma_3)P(\Sigma_3)}{P(\Sigma_1) + P(\Sigma_2) + P(\Sigma_3)} = \frac{0{,}35}{0{,}44} \approx 0{,}795.$$

□

Задача 3.20. По каналу связи может быть вередана одна из последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$. Известно, что (априорные) вероятности каждой из трех последовательностей равны соответственно 0,3, 0,4 и 0,3. В результате шумов каждая буква принимается правильно с вероятностью 0,6, а с вероятностями 0,2 и 0,2 вместо нее принимаются две другие. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

Решение. Обозначим за A и B события, обозначающие соответсвенно, что была передана последовательность AAAA и что получена последовательность ABCA. Так же введем разбиение C_1, C_2, C_3 – события, при которых переданы последовательности AAAA, BBBB и CCCC соответственно. Тогда, по формуле Байеса:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2) + P(B|C_3)P(C_3)}.$$

Ввиду независимости передачи букв $P(B|A) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 36 \cdot 4 \cdot 10^{-4}$. По условию $P(A) = 0{,}3$. Остается только найти знаменатель:

$$P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2) + P(B|C_3)P(C_3) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 768 \cdot 10^{-5}.$$

Итого:

$$P(A|B) = \frac{36 \cdot 4 \cdot 3}{768} = 0{,}5625.$$

□

Задача 3.21. Пусть в урне N белых и M черных шаров. Из нее случайно потеряли K шаров. После этого достали шар. Какова вероятность того, что он будет белый?

Решение. Пусть после того, как мы потеряли K шаров, в урне осталось n белых и m черных шаров. Тогда вероятность вытащить белый шар равна:

$$P = \frac{n}{n+m} = \frac{n}{N+M-K}.$$

Пусть $K = k_1 + k_2$, где k_1 – количество потерянных белых шаров, а k_2 – количество потерянных черных шаров. Чем больше в мешке белых шаров, тем больше белых шаров мы потеряем, если будем терять случайные шары из мешка. Это соображение позволяет запистиь систему:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = K, \\ \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{N}{M} \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что $n = N - k_1$, находим:

$$n = N\frac{M+N-K}{M+N} \Rightarrow P = \frac{N}{N+M}.$$

□

Задача 3.22. На связке N ключей. Мы берем наудачу любой ключ. Если он не открывает дверь, то мы откладываем его в сторону. Найти вероятность того, что мы откроем дверь с K-ой попытки, если к двери подходит ровно один ключ.

Решение. Если мы открыли дверь с К-ой попытки попытки, то это значит, то все предыдущие попытки мы выбирали неподходящие ключи, и только на К-ый раз смогли угадать. Значит, ввиду независимости попыток:

$$P = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdot \ldots \cdot \frac{N-K+1}{N-K+2} \cdot \frac{1}{N-K+1} = \frac{1}{N}.$$

☐

Задача 3.23. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на первой кости выпало меньше очков, чем на второй.

Решение. В данном случае легко явно задать пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i = \overline{1{,}6},\ \omega_1 < \omega_2\}.$$

Нетрудно подсчитать, что $|\Omega| = 15$, а благоприятных исходов всего три: (3,6), (3,5), (3,4). Следовательно:

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

☐

Задача 3.24. Пусть A, B и A, C образуют пары независимых событий, причем $C \subset B$. Показать, что события A и $B \setminus C$ также независимы.

Решение. Действительно, если $P(AB) = P(A)P(B)$ и $P(AC) = P(A)P(C)$, то $P(A \cap (B \setminus C)) = P(AB \setminus AC) = P(AB) - P(AC) = P(A)P(B) - P(A)P(C) = P(A)(P(B) - P(C)) = P(A)P(B \setminus C)$. ☐

Задача 3.25. Человек с вероятностью p делает шаг вправо, а с вероятностью $1-p$ – влево. С какой вероятностью он упадет, если он находится на расстоянии $n \geq 0$ шагов слева от края пропасти?

Задача 3.26. Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент времени $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента времени t, испытает столкновение в промежуток времени $(t, t+h)$, равна $\lambda h + o(h)$, $h \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

Задача 3.27. (Задача о встрече) Девушка и юноша условились встретиться в определенном месте от полудня до часу дня. Пришедший(ая) первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встрчи, если приход каждого из них в течение часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

Решение. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи. Пусть t_1 – время (в часах), прошедшее после 12:00 до прихода юноши, а t_2 – время, прошедшее после 12:00 до прихода девушки. Тогда время прихода обоих можно задать точкой в квадрате $[0{,}1] \times [0{,}1]$: первая координата будет задавать t_1, а вторая – t_2. Заметим, что встреча произойдет, если $|t_1 - t_2| \leq \frac{1}{3}$. Данное неравенство задает «полоску» на плоскости, которая пересекает наш квадрат по зеленой области (рисунок 4). Площадь данной фигуры и равна вероятности встречи:

$$P = S = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}.$$

☐

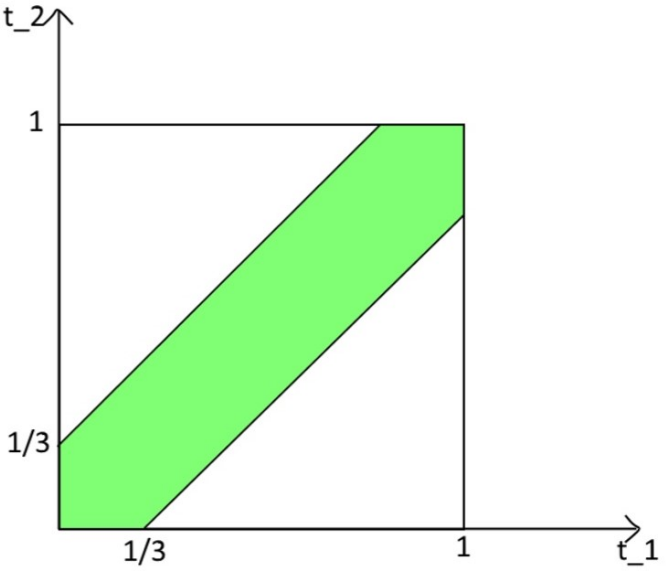
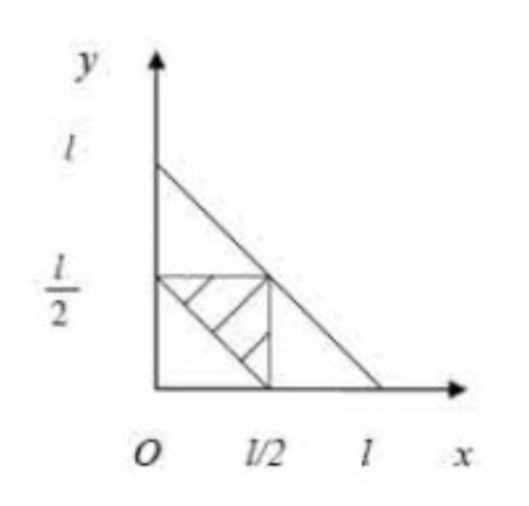


Рис. 4: Иллюстрация к задаче о встрече.

Задача 3.28. Стержень длины l разломан в двух надачу выбранных точках. Найти вероятность того, что из полученных кусков можно составить треугольник.

Решение. Обозначим за x и y длинны первых двух кусков разломанного стержня, тогда длина третьего $l-x-y$. Пространство элементарных исходов – пары x и y такие, что $x+y < l$. Чтобы из трех отрезков можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства треугольника. Они будут задавать в координатах x, y следующую фигуру:



Значит, искомая вероятность:

$$P = \frac{\frac{l}{2}\frac{l}{2}\frac{1}{2}}{l \cdot l \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

□

Задача 3.29. (Игла Бюффона) На плоскость, разлинованную линиями, расстояние между которыми равно $2a$, бросили иглу длинной $2l$ ($a > l$). Найти вероятность того, что она пересечет хотя бы одну линию.

Решение. Задать положение случайно брошенной иглы можно с помощью расстояния от центра иглы до ближайшей прямой и углом наклона иглы относительно этой прямой (рисунок 5).

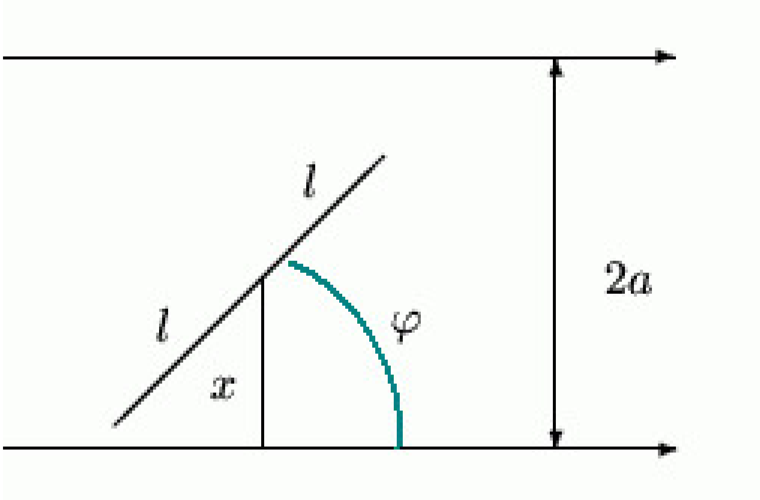


Рис. 5: Игла Бюффона.

Очевидно, что игла пересечет ближайшую к ней линию, если $x < l \sin\varphi$. При этом x и φ независимо меняются от 0 до a и от 0 до π соответственно. Тогда очевидно, что искомая вероятность будет равна отношению заштрихованной площади к площади прямоугольника на графике 6.

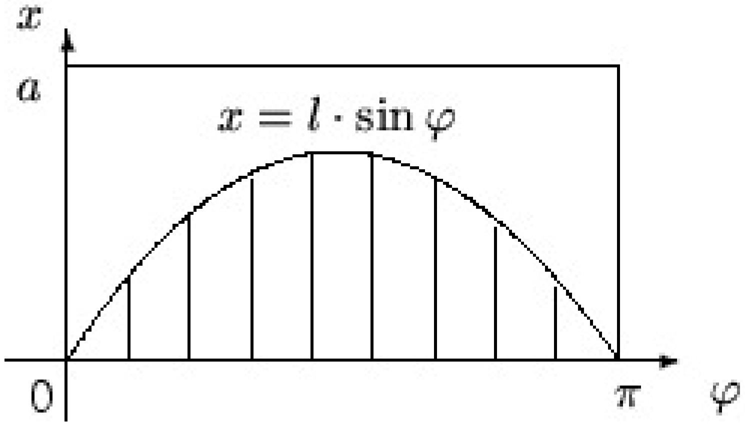


Рис. 6: К вычислению вероятности в задаче про иглу Бюффона.

Значит, искомая вероятность:

$$P = \frac{1}{a\pi} \int\limits_0^\pi l \sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

□

Задача 3.30. На отрезке [0,1] наудачу выбираются точки ξ, η. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + \xi x + \eta = 0$ имеет действительные корни одного знака?

Решение. Так как корни квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4\eta}}{2},$$

то, чтобы они были вещественными и одного знака, ввиду того, что ξ и η неотрицальны, необходимо, чтобы были выполнены неравенства:

$$\begin{cases} \xi^2 - 4\eta \geq 0, \\ \xi \geq \sqrt{\xi^2 - 4\eta} \end{cases}$$

Заметим, что ввиду неотрицательности ξ и η система эквивалентна первому неравенству, которое в координатах ξ и η задает область под параболой, площадь которой легко найти:

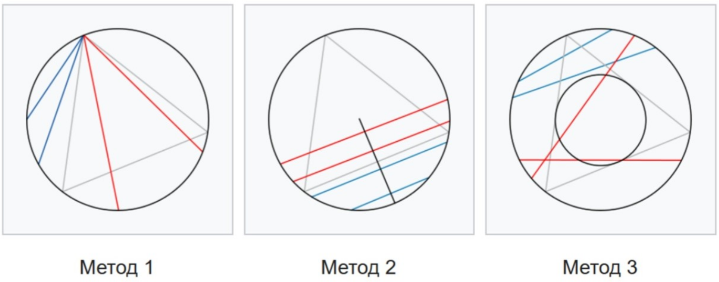
$$S = \int\limits_0^1 \frac{\xi^2}{4} d\xi = \frac{1}{12}.$$

Так как выбор конкретных ξ и η определяет точку в единичном квадрате в координатах ξ и η, то, используя геометрическое определение вероятности, находим:

$$P = S = \frac{1}{12}.$$

□

Задача 3.31. (Парадокс Бертрана) На окружности случайным образом провели хорду. Найти вероятность того, что ее длина будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность.


Метод 1

Метод 2

Метод 3

Рис. 7: Иллюстрация к парадоксу Бертрана.

Решение. Эта задача называется парадоксом, так как можно предложить несколько правдоподобных решений, которые будут давать разные ответы (рисунок 7).

1. Метод «случайных концов»: наудачу выберем две точки на окружности, через которые и проведем хорду. Впишем правильный треугольник так, чтобы одна из его вершин находилась в одном из концов хорды. Заметим, что если другой конец хорды лежит на дуге между двумя другими вершинами треугольника, то длина хорды больше стороны треугольника. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

2. Метод «случайного радиуса»: наудачу выберем точку на зафиксированном радиусе. Построим хорду, перпендикулярную зафиксированному радиусу, проходящую через выбранную точку. Чтобы найти вероятность того, что длина построенной хорды

больше стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, построим треугольник так, чтобы одна из его сторон была перпендикулярна зафиксированному радиусу. Хорда длинее стороны треугольника, если ее центр ближе к центру окружности, чем точка пересечения треугольника с зафиксированным радиусом. Сторона треугольника делит пополам радиус, следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

3. Метод «случайного центра»: выберем наудачу точку внутри круга и построим хорду с центром в этой точке. Построенная хорда будет длинее стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, если выбранная точка находится внутри круга, вписанного в треугольник. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{4}$.

На самом деле, конечно же, никакого парадокса тут нет – все рассуждения правильны, и ответ зависит от того, что мы понимаем под проведенной наудачу хордой. ☐

Задача 3.32. Из ящика, содержащего m белых и n черных шаров, извлекают с возращением шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

Решение. Зададим случайную величину ξ как количество извлеченных шаров до появления первого белога шара. Обозначим через $p = \frac{m}{n+m}$ и $q = \frac{n}{n+m}$ вероятности достать белый или черный шар соответственно. Тогда можно составить закон распределения случайной величины ξ:

ξ_i	1	2	3	...	k	...
$P(\xi_i)$	p	pq	pq^2	...	pq^{k-1}	...

Тогда, по определению математического ожидания:

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi P(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}.$$

Чтобы найти сумму данного ряда, используем тот факт, что $kq^{k-1} = (q^k)'$. Тогда мы можем записать:

$$E(\xi) = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)' = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Так как члены исходного ряда имеют непрерывные производные на (0,1), то, чтобы обосновать корректность подобного перехода, осталось убедиться, что ряд из производных сходится равномерно, а исходный ряд сходится хотя бы в одной точке, что не составляет труда. ☐

Задача 3.33. Случайная величина ξ принимает значения -1, 0, 1 с вероятностями 1/3, 1/6, 1/2 соответственно. Найти:

1. Распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi^2$.

ξ	-1	0	1
$P(\xi)$	1/3	1/6	1/2

$\Rightarrow$

η	0	1
$P(\eta)$	1/6	5/6

$$E(\eta) = \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{5}{6}\cdot 1 = \frac{5}{6}.$$

$$D(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) = \frac{5}{6} - \frac{25}{36} = \frac{5}{36}.$$

2. Совместное распределение и ковариацию случайных величин ξ и η.

   По определению ковариация двух случайных величин ξ и η есть ни что иное как матожидание произведения их центровок:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi_c\eta_c) = E[(\xi - E(\xi))(\eta - E(\eta))] = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = \frac{5}{36} - \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = 0.$$

   Матожидание произведения находится из таблицы:

$\xi\eta$	-1	0	1
$P(\xi\eta)$	5/18	11/36	5/12

   Совместное распределение задается следующим образом:

$$P_{\xi\eta} = \begin{pmatrix} 1/18 & 5/18 \\ 1/36 & 5/36 \\ 1/12 & 5/12 \end{pmatrix}$$

Задача 3.34. (Петербургский парадокс) Рассматривается следующая игра. Игрок покупает входной билет за N рублей и начинает бросать правильную монету. Если герб первый раз выпал на n-ом шаге, игрок получает 2^n рублей и уходит. При какой стоимости входного билета казино будет выгодна такая игра, если:

1. Размер разовой выплаты неограничен.

   Если размер выйгрыша неограничен, то вероятность выиграть 2^n рублей равна 2^{-n}. Тогда матожидание выйгрыша ξ:

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2^{-n} \to \infty.$$

   Это означает, что при любой цене на входной билет казино разорится.

2. Разовый размер выйгрыша не привосходит 1 000 000 рублей.

   Если же размер выйгрыша ограничен, то, приблизительно считая $10^6 \approx 2^{20}$, закон распределения выйгрыша ξ будет иметь вид:

ξ	2^1	2^2	$\dots$	2^{19}	2^{20}	2^{20}	2^{20}	$\dots$
$P(\xi)$	2^{-1}	2^{-2}	$\dots$	2^{-19}	2^{-20}	2^{-21}	2^{-22}	$\dots$

   В таком случае казино не разорится, если цена входного билета будет больше 21 рубля:

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{20} 2^k \cdot 2^{-k} + \sum_{k=21}^{\infty} 2^{20} 2^{-k} = 20 + 1 = 21.$$

Задача 3.35. Бросаются две игральные кости. Пусть X_i – число очков (от 1 до 6), выпавшее на i-ой кости $i = 1, 2$. Найти совместное распределение случайных величин $Y = \min\{X_1, X_2\}$ и $Z = X_2$, их математическое ожидание, дисперсию и ковариацию. Написать формулу оптимального линейного прогноза величины Y по наблюдению величины Z.

Решение. Таблица (матрица) P_{YZ} совместного распределения Y и Z имеет следующий вид:

Y \Z	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Σ
1	**6/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	11/36
2	**0**	**5/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	9/36
3	**0**	**0**	**4/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	7/36
4	**0**	**0**	**0**	**3/36**	**1/36**	**1/36**	5/36
5	**0**	**0**	**0**	**0**	**2/36**	**1/36**	3/36
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1/36**	1/36
Σ	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Последние строка и столбец представляют собой маргинальные распределения Y и Z, а значит для этих случайных величин легко ищутся матожидание и дисперсия:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{6} P(Y_i)Y_i = \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{91}{36} \approx 2{,}56.$$

$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{2555}{1296} \approx 1{,}97.$$

$$E(Z) = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

$$D(Z) = \frac{497}{36} \approx 13{,}81.$$

Чтобы найти ковариацию, используем формулу:

$$\operatorname{cov}(Y, Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = Y^T P_{YZ} Z - E(Y)E(Z) \approx 10{,}31 - 2{,}56 \cdot 3{,}5 = 1{,}35.$$

Теперь можно вычислить оптимальный линейный прогноз величины Y по наблюдению величины Z:

$$\hat{Y} = E(Y) + \operatorname{cov}(Y,Z) \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{D(Z)}} = 2{,}56 + 0{,}36 \cdot (Z - 3{,}5) = 0{,}36 \cdot Z + 1{,}3.$$

$\square$

Задача 3.36. Закон распределения случайной величиины ξ определяется формулами:

$$P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = a, \quad P(\xi = 0) = 1 - 2a.$$

Сравнить точное значение вероятности $P(|\xi| \geq 1)$ с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

Решение. Рассмотрим случайную величину $\eta = |\xi|$, ее распределение имеет вид:

η	0	1
$P(\eta)$	$1 - 2a$	$2a$

По неравенству Чебышева:

$$P(\eta \geq 1) \leq \frac{E(\eta)}{1} = 2a.$$

Точная же оценка:

$$P(\eta \geq 1) = 2a.$$

$\square$

Задача 3.37. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p. Найти:

1. $P(\xi = \eta)$.

   Рассмотрим событие $A = \{\xi = 1, \eta = 1\} + \{\xi = 2, \eta = 2\} + \ldots$. Тогда $P(\xi = \eta) = P(A)$. Ввиду независимости ξ и η:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = k)P(\eta = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2(k-1)}p^2 = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}.$$

2. $P(\xi > \eta)$.

   Используя условие нормировки вероятности, а так же тот факт, что величины ξ и η равноправны, можем запистсь систему, из которой легко находится нужная вероятность:

$$\begin{cases} P(\xi = \eta) + P(\xi > \eta) + P(\xi < \eta) = 1, \\ P(\xi > \eta) = P(\xi < \eta) \end{cases}$$

$$P(\xi > \eta) = \frac{1}{2}\left(1 - P(\xi = \eta)\right) = \frac{q}{1+q}.$$

   К этому же ответу можно было прийти другим путем: представим событие $\{\xi > \eta\}$ в виде суммы событий:

$$\{\xi > \eta\} = \{\xi = 2, \eta = 1\} + \{\xi = 3, \eta = 1\} + \ldots +$$

$$\{\xi = 3, \eta = 2\} + \{\xi = 4, \eta = 2\} + \ldots +$$

$$+ \ldots\ldots$$

   Ввиду независимости событий можно записать:

$$P(\xi > \eta) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(pq^j \sum_{k=j+1}^{\infty} pq^k\right) = p\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k+1} = \frac{q}{1+q}.$$

3. $P(\xi + \eta = k)$.

   Снова представим событие в виде суммы и воспользуемся условием независимости:

$$P(\xi + \eta = k) = P(\xi = 1, \eta = k-1) + P(\xi = 2, \eta = k-2) + \ldots + P(\xi = k-1, \eta = 1) =$$

$$= ppq^{k-1} + pqpq^{k-1} + \ldots + pq^{k-2}p = (k-1)p^2q^{k-2}.$$

4. $P(\xi = l \mid \xi + \eta = k)$.

   По определению условной вероятности и ввиду независимости величин ξ и η:

$$P(\xi = l \mid \xi + \eta = k) = \frac{P(\xi = l, \xi + \eta = k)}{P(\xi + \eta = k)} = \frac{P(\xi = l, \eta = k - l)}{P(\xi + \eta = k)} = \frac{p^2q^{k-2}}{(k-1)p^2q^{k-2}} = \frac{1}{k-1}.$$

5. $P(\xi = k \mid \xi = \eta)$.

   По определению условной вероятности и ввиду независимости величин ξ и η:

$$P(\xi = k \mid \xi = \eta) = \frac{P(\xi = k, \xi = \eta)}{P(\xi = \eta)} = \frac{P(\xi = k, \eta = k)}{P(\xi = \eta)} = \frac{p^2q^{2(k-1)}}{\frac{p}{1+q}} = p(1+q)q^{2(k-1)}.$$

Задача 3.38. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k).$$

Доказательство. Пусть без ограничения общности (некоторые P_i, возможно, равны нулю) ξ имеет распределение:

ξ	1	2	3	...
$P(\xi)$	P_1	P_2	P_3	...

Рассмотрим сумму:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k) = P(\xi \geq 1) + P(\xi \geq 2) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} P_k + \sum_{k=2}^{\infty} P_k + \ldots$$

Таким образом видно, что в этой сумме слагаемое P_1 встретится один раз, P_2 два раза и так далее, то есть эта сумма равна $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k P(\xi_k)$, что является определением математического ожидания случайной величины ξ. □

Задача 3.39. В N ячеек случайно размещается n неразличимых шаров. Найти матожидание и дисперсию числа пустых ячеек.

Решение. Введем вспомогательную случайную величину:

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, \text{если } k\text{-ая ячейка пуста} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \;\Rightarrow\; E(\xi) = \sum_{k=1}^{N} E(\alpha_k).$$

$E(\alpha_k) = p -$ это вероятность того, что k-ая ячейка пуста (так как каждая ячейка может быть пуста с вероятностью p или же с вероятностью $1-p$ в ячейке будет хотя бы один шар). Так как всего способов разложить n шаров по N ячейкам равно C_{n+N-1}^{n}, то

$$E(\alpha_k) = p = \frac{C_{n+(N-1)-1}^{n}}{C_{n+N-1}^{n}} = \frac{N-1}{(n+N-1)} \;\Rightarrow\; E(\xi) = \frac{N(N-1)}{(n+N-1)}.$$

Чтобы найти дисперсию ξ необходимо вычислить $E(\xi^2)$:

$$E(\xi^2) = E\left(\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j\right) = \sum_{i,j} E(\alpha_i \alpha_j) = \sum_{i=1}^{N} E(\alpha_i^2) + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j = \sum_{i=1}^{N} E(\alpha_i) + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j.$$

Так как $E(\alpha_1 \alpha_2)$ равно вероятности того, что одновременно пусты первая и вторая ячейки, то:

$$\sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j = E(\alpha_1 \alpha_2)(N^2 - N) = (N^2 - N)\frac{C_{n+(N-2)-1}^{n}}{C_{n+N-1}^{n}} = \frac{N(N-1)^2(N-2)}{(n+N-2)(n+N-1)}.$$

Значит, дисперсия равна

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{N(N-1)^2(N-2)}{(n+N-2)(n+N-1)}.$$

□

Задача 3.40. Пусть ξ и η – числа появлений единицы и шестерки при n бросаниях игральной кости соответсвенно. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

Решение. Рассмотрим индикаторы событий:

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, \text{на } k\text{-ом шаге выпала } 1 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}, \quad \beta_k = \begin{cases} 1, \text{на } k\text{-ом шаге выпала } 6 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$ и $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k$, следовательно ввиду симметрии $E(\xi) = E(\eta) = \sum\limits_{k=1}^{n} E(\alpha_k) = \frac{n}{6}$.

Чтобы найти ковариацию необходимо также найти

$$E(\xi\eta) = E\left(\sum_{k,j} \alpha_k\beta_j\right) = \sum_{k,j} E(\alpha_k\beta_j) = \sum_{k}^{n} E(\alpha_k\beta_k) + \sum_{k\neq j} E(\alpha_k\beta_j) = \sum_{k\neq j} E(\alpha_k)E(\beta_j) =$$

$$= n(n-1)E(\alpha_1)E(\beta_2) = \frac{n^2-n}{36}.$$

Чтобы найти дисперсии ξ и η, воспользуемся тем, что α_k независимы:

$$D(\xi) = D(\eta) = \sum_{k=1}^{n} D(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} (E(\alpha_k^2) - E^2(\alpha_k)) = \sum_{k=1}^{n} (E(\alpha_k) - E^2(\alpha_k)) = \frac{5n}{36}.$$

Итого:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = \frac{n^2-n}{36} - \frac{n^2}{36} = -\frac{n}{36}.$$

$$r(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} = -\frac{1}{5}.$$

□

Задача 3.41. Кидают несимметричную монету. Найти

1. Математическое ожидание количества бросаний до выпадения первого герба.

   Пусть p – вероятность выпадения герба, а $q = 1 - p$ – вероятность выпадения решки. Если мы обозначим за ξ количество бросаний монеты до выпадения первого герба, то закон распределения ξ будет иметь следующий вид:

ξ	1	2	3	...	k	...
$P(\xi)$	p	pq	pq^2	...	pq^{k-1}	...

   Тогда, по определению математического ожидания:

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k P(\xi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{p}.$$

   Можно рассуждать по-другому: пусть x – искомое матожидание (среднее количество бросков до выпадения первого герба). Так как исходов броска всего два, то с вероятностью p нам повезет, и герб выпадет после первого же броска. Но с вероятностью q первой выпадет решка, после чего мы дожны будем начинать эксперимент сначала (тогда среднее число бросков до выпадения первого герба увличится на единицу). Эти рассуждения позволяют записать уравнение

$$x = p \cdot 1 + q \cdot (1 + x),$$

откуда, учитывая, что $q = 1 - p$, находим, что $x = \dfrac{1}{p}$.

2. Математическое ожидание количества бросаний до выпадения двух гербов подряд.

   Проведем рассуждение, аналогичное второму в предыдущем пункте. Пусть y – искомое среднее количество бросков монеты до выпадания двух гербов подряд. Тогда, после выпадения одного герба, с вероятностью p нам может повезти и сразу же выпадет второй герб, либо, с вероятностью q выпадет решка, и нам придется снова ждать выпадения герба (тогда среднее число бросков до выпадения двух гербов подряд увличится на единицу). Эти рассуждения позволяют записать уравнение

$$y = p \cdot x + q \cdot (1 + y).$$

   Так как x, среднее количество бросков до выпадения первого герба, мы уже нашли, то получаем:

$$y(1 - q) = 1 + q \;\; \Rightarrow \;\; y = \frac{1 + q}{p}.$$

   Заметим, что если α_n – среднее количество бросков нашей монеты до выпадения n гербов подряд, то

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{q}{p}.$$

   Замечая, что полученная формула является арифметической прогрессией, получаем аналитическую формулу среднего количества бросков нашей монеты до выпадения n гербов подряд:

$$\alpha_n = \frac{1 + q(n-1)}{p}.$$

Задача 3.42. Игральная кость бросается до тех пор, пока хотя бы один раз не выпали все грани. Найти матожидание числа бросков.

Решение. Прежде чем решать, вспомним факт (см. задачу 3.32), что, если $p + q = 1$ и $p \in (0, 1)$, то

$$p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{p}$$

Введем случайные величины α_k – количество бросков игральной кости до тех пор, пока не выпадут k различных граней. Очевидно, что $E(\alpha_1) = 1$. Введем так же случайные величины β_k – количество бросков игральной кости до первого выпадения любой грани, корме выделенных k. Тогда мы можем записать: $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1$, где β_1 – количество бросков игральной кости до первого выпадения любой грани, корме той, что выпала первой. Нетрудно составить таблицу распределения для β_1:

β_1	1	2	...	k	...
$P(\beta_1)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	...	$\left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \frac{5}{6}$	...

Тогда очевидно, что

$$E(\alpha_2) = E(\alpha_1) + E(\beta_1) = 1 + \frac{5}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} = 1 + \frac{6}{5} = \frac{11}{5}.$$

Далее рассуждаем аналогично: чтобы выпали три разных грани, необходимо, чтобы сначала выпали две разных грани, а потом выпала любая грань, кроме тех двух, что выпадали раньше, то есть $\alpha_3 = \alpha_2 + \beta_2$. Уже легко понять, что это правило обобщается следующим образом:

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + \beta_{k-1}, \ k = \overline{2, 6}.$$

Значит, нам остается найти:

$$E(\beta_2) = \frac{4}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{2}{6}\right)^{k-1} = \frac{3}{2}, \quad E(\beta_3) = \frac{3}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{3}{6}\right)^{k-1} = 2,$$

$$E(\beta_4) = \frac{2}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} = 3, \quad E(\beta_5) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 6.$$

Итого, ответ:

$$E(\alpha_6) = E(\alpha_1) + \sum_{k=1}^{5} E(\beta_k) = 1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 + 3 + 6 = 14{,}7.$$

□

Задача 3.43. Пусть ξ и η – две случайные величины с $E(\xi) = E(\eta) = 0$, $D(\xi) = D(\eta) = 1$ и коэффициентом корреляции $r = r(\xi, \eta)$. Показать, что

$$E(\max(\xi^2, \eta^2)) \leq 1 + \sqrt{1 - r^2}.$$

Используя данный результат для произвольных случайных величин ξ и η, получить двумерный аналог неравенства Чебышева:

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\xi)}, \quad |\eta - E(\eta)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\eta)}) \leq \frac{1 + \sqrt{1 - r^2(\xi, \eta)}}{\varepsilon^2}.$$

4 Второе задание

Задача 4.1. Длина круга равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

Решение. Пусть x – радиус круга, тогда по условию: $L = 2\pi x \sim \mathcal{U}([0,1])$, следовательно, длина окружности имеет плотность распределения:

$$\rho_L(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [0,1] \\ 0, \ x \notin [0,1] \end{cases}$$

Так как площадь круга может быть выражена через длину как $S = \dfrac{L^2}{4\pi}$, то легко найти:

$$E(S) = \frac{1}{4\pi}E(L^2) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\rho_L(x)dx = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^1 x^2dx = \frac{1}{12\pi}.$$

$$E(S^2) = \frac{1}{16\pi^2}E(L^4) = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4\rho_L(x)dx = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_0^1 x^4dx = \frac{1}{80\pi^2}.$$

$$D(S) = E(S^2) - E^2(S) = \frac{1}{80\pi^2} - \frac{1}{144\pi^2} = \frac{1}{180\pi^2}$$

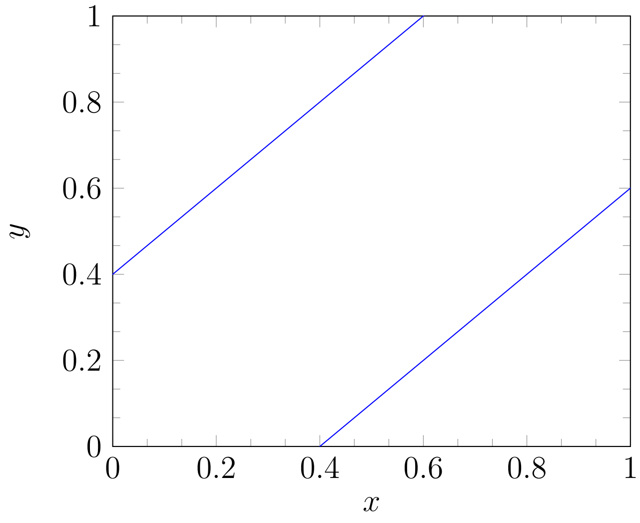
□

Задача 4.2. Координаты двух случайных точек на прямой независимы и равномерно распределены на отрезке [0,1]. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояний между точками.

Решение. По условию у нас есть две равномерно распределенные на отрезке [0,1] случайные величины $\xi, \eta \sim \mathcal{U}([0,1])$, и нам необходимо найти $E(\gamma)$ и $D(\gamma)$, где $\gamma = |\xi - \eta|$. Чтобы это сделать, найдем плотность распределения $\rho_\gamma(z) = F'_\gamma(z)$, которая очевидно равна нулю при $z \geq 1$ и при $z \leq 0$. По определению функции распределения:

$$F_\gamma(z) = P(|\xi - \eta| \leq z).$$

Ввиду того, что величины ξ и η равномерно распределенны на отрезке [0,1], легко видеть, что искомая вероятность равна площади шестиугольника, который задается в единичном квадрате в координатах x, y неравенствами $y \leq x + z$ и $y \geq x - z$:



Следовательно:

$$\rho_\gamma(z) = F'_\gamma(z) = (1-(1-z)^2)' = \begin{cases} 2(1-z), & z \in [0,1] \\ 0, & z \notin [0,1] \end{cases}.$$

Значит, используя известные формулы, находим:

$$E(\gamma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z\rho_\gamma(z)dz = 2\int\limits_0^1 z(1-z)dz = \frac{1}{3}.$$

$$E(\gamma^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2\rho_\gamma(z)dz = 2\int\limits_0^1 z^2(1-z)dz = \frac{1}{6}.$$

$$D(\gamma) = E(\gamma^2) - E^2(\gamma) = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

☐

Задача 4.3. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $\rho_\xi(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = f(\xi)$, если:

1. $\rho_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}, \quad f(x) = -\ln(1-x).$

   Ввиду того, что $f(x) = -\ln(1-x)$ простая функция, алгебраическими преобразованиями находим обратную к ней: $f^{-1}(y) = g(y) = 1 - e^{-y}$. Используя формулу замены плотности, получаем:

   $$\rho_\eta(y) = \rho_\xi(g(y)) \cdot |g'(y)| = \begin{cases} e^{-y}, & 1-e^{-y} \in [0,1] \\ 0, & 1-e^{-y} \notin [0,1] \end{cases}$$

   Окончательно получаем, что η имеет показательное распределение с параметром 1:

   $$\rho_\eta(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

2. $\rho_\xi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = \ln(x).$

   Очевидно, что $f^{-1}(y) = g(y) = e^y$. Следовательно:

   $$\rho_\eta(y) = \begin{cases} e^{-e^y} \cdot e^y, & e^y \geq 0 \\ 0, & e^y < 0 \end{cases}$$

   То есть, ответ:

   $$\rho_\eta(y) = e^{y-e^y}.$$

3. $\rho_\xi(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = \{x\}$ (дробная часть x).

4. $\rho_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad f(x) = \dfrac{1}{x}.$

   Легко находятся $f^{-1}(y) = g(y) = \dfrac{1}{y}$ и $g'(y) = -\dfrac{1}{y^2}$. Следовательно, получаем, что преобразование $f(x)$ переводит случайную величину, с распределением Коши в другую случайную величину, но с тем же распределением:

$$\rho_\eta(y) = \frac{1}{\pi(1+\frac{1}{y^2})} \cdot \left|-\frac{1}{y^2}\right| = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

5. $\rho_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}.$

Задача 4.4. Пусть $F(x)$ – непрерывная строго возрастающая функция распределения случайной величины ξ. Найти распределение и математическое ожидание случайной величины $\eta = F(\xi)$.

Решение. Заметим, что ввиду строгой монотонности $\eta = F(\xi) \subset (0{,}1)$. Следовательно, функция распределения $F_\eta(y)$ имеет вид:

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ t, & x \in [0{,}1] \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Чтобы найти параметр t, опять воспользуемся тем, что функция $F(x)$ строго возрастает, из чего следует, что у нее существует обратная функция:

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(F(\xi) \leq y) = P(\xi \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

Следовательно, плотность случайной величины η имеет вид:

$$\rho_\eta(x) = F'_\eta(x) \begin{cases} 1, & x \in [0{,}1] \\ 0, & x \notin [0{,}1] \end{cases}$$

Тогда очевидно, что:

$$E(\eta) = \int\limits_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

□

Задача 4.5. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и одинаково распределены с плотностью $\rho(x)$. Найти распределение случайных величин $\alpha = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ и $\beta = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \xi_k$.

Решение. Так как все случайные величины одинаково распределены, то у всех у них одна и та же функция распределения, обозначим ее $F(x)$.

1. По определению функции распределения и ввиду независимости случайных величин:

$$F_\alpha(x) = P\left(\min_{1 \leq k \leq n} \xi_k \leq x\right) = 1 - P\left(\min_{1 \leq k \leq n} \xi_k > x\right) = 1 - P(\xi_1 > x, \xi_2 > x, \ldots, \xi_n > x) =$$

$$1 - \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k > x) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - P(\xi_k \leq x)) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - F(x)) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

2. По определению функции распределения и ввиду независимости случайных величин:

$$F_\beta(x) = P\left(\max_{1\le k\le n} \xi_k \le x\right) = P(\xi_1 \le x, \xi_2 \le x, \dots, \xi_n \le x) = \prod_{k=1}^{n} P(\xi_k \le x) = F^n(x).$$

□

Задача 4.6. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и равномерно распределены на $[a,b]$. Найти математическое ожидание, диспресию и взаимную ковариацию случайных величин $\alpha = \min\limits_{1\le k\le n} \xi_k$ и $\beta = \max\limits_{1\le k\le n} \xi_k$.

Задача 4.7. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одну и ту же плотность распределения $\rho(x)$. Найти совместную плотность распределения полярных координат (r, φ) точки (ξ, η). Считать, что $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Решение. Пусть пара случайных величин (ξ, η) принамает значения (x,y) в декартовых координатах и (u, v) в полярных. Ввиду независимости:

$$\rho_{\xi,\eta}(x, y) = \rho_\xi(x) p_\eta(y) = \rho(x)\rho(y).$$

Так как обратное преобразование координат и его якобиан равны

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \end{cases}, \quad \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = u,$$

то, используя формулу замены координат

$$\rho_{\alpha,\beta}(u, v) = \rho_{\xi,\eta}(x(u,v), y(u,v)) \cdot \left|\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x(u,v),y(u,v))}\right)\right|^{-1},$$

получим ответ:

$$\rho_{r,\varphi}(u,v) = \rho(u\cos v)\rho(u\sin v)u.$$

□

Задача 4.8. Случайные независимые величины ξ и η равномерно распределены на отрезке $[0, a]$. Найти плотность распределения случайных величин:

1. $\chi = \xi + \eta$.
2. $\chi = \xi - \eta$.
3. $\chi = \xi\eta$.
4. $\chi = \dfrac{\xi}{\eta}$.

Задача 4.9. Случайные величины ξ и η независимы. Пусть ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$, а $P(\eta = -1) = P(\eta = 0) = P(\eta = 1) = \frac{1}{3}$. Какое распределение имеют $\xi + \eta$ и $\xi\eta$?

Задача 4.10. Пусть ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Найти $P(\xi > k|\xi > l)$.

Задача 4.11. Плотность совместного распределения вероятностей случайных величин ξ, η имеет вид:

$$\rho_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} C(x+y), & 0 \le x \le 1 \text{ и } 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Найти:

1. Постоянную C.

   Из условия нормировки находим:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1} C(x+y)dxdy = C\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{1}(x+y)dx = C\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}+y\right)dy = C.$$

2. Одномерные плотности распределения ξ и η.

   Так как, чтобы найти одномерную плотность, необходимо проинтегрировать одну случайную величину по другой, то:

$$\rho_{\xi}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\xi,\eta}(x,y)dy = \int\limits_{0}^{1}(x+y)dy = x + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; p_{\xi}(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\rho_{\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\xi,\eta}(x,y)dx = \int\limits_{0}^{1}(x+y)dx = y + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; p_{\eta}(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Плотность распределения случайной величины $\gamma = \max(\xi, \eta)$.

   По определению функции распределения:

$$F_{\gamma}(z) = P(\max(\xi,\eta) \le z) = P(\xi \le z, \eta \le z) = F_{\xi,\eta}(z,z) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{z}\int\limits_{-\infty}^{z} p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{z}\int\limits_{0}^{z}(x+y)dxdy = z^3.$$

   Так как $\gamma \in [0,1]$, то ее плотность имеет вид:

$$\rho_{\gamma}(z) = \begin{cases} 3z^2, & 0 \le z \le 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Задача 4.12 (Метод Монте-Карло). Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке [0,1] случайных величин. Показать, что

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - \int\limits_{0}^{1} f(x)dx\right| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{n\varepsilon^2}\left(\int\limits_{0}^{1} f^2(x)dx - \left[\int\limits_{0}^{1} f(x)dx\right]^2\right)$$

для любой интегрируемой на отрезке [0,1] функции $f(x)$.

Задача 4.13. Найти характеристические функции:

1. Нормального распределения с параметрами (μ, σ^2).

   Воспользуемся тем фактом, что, если $\eta = f(\xi)$, то
   $$E(f(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_\xi(x)dx.$$
   Так как $\varphi_\xi(t) = E(e^{it\xi})$, то для нормального распределения:
   $$?????????\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{itx}dx.$$

2. Равномерного распределения на отрезке $[a, b]$.

   Пользуясь формулой для матожидания, получим:
   $$\varphi_\xi(t) = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx}dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

3. Распределения Пуассона с параметром λ.

4. Распределение с плотностью
   $$\rho_\alpha(x) = \frac{C_\alpha}{x^2}\left(1 - \cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right),$$
   где C_α – параметр, который надо определить.

Задача 4.14. Найти распределение вероятностей случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

1. $\varphi(t) = \cos t$.
2. $\varphi(t) = e^{it}\cos t$.
3. $\varphi(t) = \dfrac{1}{2 - e^{it}}$.
4. $\varphi(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos t}{2} + i\dfrac{\sin t}{6}$.

Задача 4.15. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

1. $\varphi(t) = \dfrac{4}{t^2}\cos t \cdot \sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

   Воспользуемся тем фактом, что
   $$E(\xi^k) = \frac{1}{i^k} \cdot \left.\frac{d^k\varphi_\xi(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$$
   Значит, нам необходимо найти значения первой и второй производных характеристической функции в нуле.
   $$\varphi'(t) = -\frac{8}{t^3}\cos t \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{4}{t^2}\sin t \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{4}{t^2}\cos t \cdot 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}.$$

$$i \cdot E(\xi) = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin 2t}{t^2} - \frac{8}{t^3}\cos t \cdot \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \lim_{t\to 0}\left(\sin t \cdot \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{2t + o(t^2)}{t^2} - 8\cos t \cdot \frac{\left(\frac{t}{2} + o(t^2)\right)^2}{t^3}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{2}{t} - \cos t \cdot \frac{2}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{2}{t}\left(1 - 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = 0.$$

2. $\varphi(t) = \dfrac{1}{(1-it)^p} \cdot \dfrac{1}{(1-it)^p}, \quad p,q > 0.$

3. $\varphi(t) = \dfrac{\arcsin(\theta e^{it})}{\arcsin\theta}, \quad 0 < \theta < 1.$

Задача 4.16. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной диспресией. Распределение случайной величины

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$$

наывается χ^2-распределением с n степенями свободы.

1. Найти функцию распределения и характеристическую функцию χ^2-распределения с двумя степенями свободы.
2. Найти характеристическую функцию и формулы для моментов любого порядка χ^2-распределения с n степенями свободы.

Задача 4.17. Пусть $\xi_{m,n}$, $m = \overline{1,n}$ – независимые случайные величины с функцией распределения

$$F_n(x) = P(\xi_{m,n} \le x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha_n x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (\alpha_n = \lambda n,\ \lambda > 0).$$

Найти предельное распределение при $n \to +\infty$ случайной величины $\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,x} + \ldots + \xi_{n,n}$.

Задача 4.18. Случайная величина π_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} P\left(\dfrac{\pi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right)$.

Задача 4.19. Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ принимает значения в $\mathbb{R}^n$ и имеет матрицу ковариации $C = (c_{ij})$. Доказать, что:

1. Матрица C неотрицательно определена, то есть $(\vec{x}, C\vec{x}) = \sum\limits_{i,j} c_{ij}x_ix_j \ge 0$ для всех $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. Если $\operatorname{rg} C = r$, то существует r-мерная гиперплоскость $L_r \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $P(\vec{\xi} \in L_r) = 1$ и $P(\vec{\xi} \in L_{r-1}) < 1$ для любой $r-1$-мерной плоскости в $\mathbb{R}^n$.

Задача 4.20. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одно и тоже нормальное распределение с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2. Найти распределение выборочного средего $\alpha = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ и выборочной дисперсии $\beta = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \alpha)^2$.

Задача 4.21. В условиях предыдущей задачи доказать независимость случайных величин α и β.

Задача 4.22. Пусть в книге из 500 страниц содержится 10 опечаток. Используя биномиальный закон распределения и его наилучшее в данном случае приближение, оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице будет не менее двух опечаток.

Задача 4.23. Найти вероятность того, что среди 10000 новорожденных будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

Задача 4.24. Пусть ξ_n – случайная величина, равная сумме очков, выпавших при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы $P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{7}{2}\right|\geq 0{,}1\right)\leq 0{,}1$.

Задача 4.25. Матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с тремя состояниями имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Распределение по состояниям в момент времени $t=0$ определяется вектором $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$. Найти:

1. Распределение по состояниям в момент вермени $t=2$.
2. Вероятность того, что в моменты $t=0,1,2,3$ состояниями цепи будут соответственно $1,3,3,2$.
3. Стационарное распределение.

Задача 4.26. Частица движется по целым точкам прямой. Из точки k за единицу времени частица переходит с вероятностью p в точку $k+1$ и с вероятностью $q=1-p$ в точку $k-1$ независимо от прошлого движения. Найти вероятность того, что через t единиц времени частица будет находится в точке m, если в начальный момент времени она находилась в точке 0.

5 Итоговая контрольная работа

Задача 5.1. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано таблицей:

$\xi\diagdown\eta$	-1	0	1
-1	0	1/2	0
2	1/4	0	1/4

Найти одномерные распределения ξ и η, их матожидания и дисперсии, а так же ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

Решение. Так как, чтобы получить одномерное рспределение необходимо просто просуммировать одну случайную величину по другой, то легко находятся распределения:

ξ	-1	2
$P(\xi)$	1/2	1/2

η	-1	0	1
$P(\eta)$	1/4	1/2	1/4

Зная одномерные распределения легко находим матожидания и дисперсии:

$$E(\xi) = -1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad E(\xi^2) = (-1)^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$E(\eta) = -1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} = 0, \quad E(\eta^2) = (-1)^2\cdot\frac{1}{4} + 0^2\cdot\frac{1}{2} + 1^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$D(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Чтобы найти ковариацию, нам необходимо вычислить матожидание произведения случайных величин ξ и η:

$$E(\xi\eta) = -2\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 0.$$

Наконец находим:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = 0 - 0\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

$$r(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} = 0.$$

□

Задача 5.2. α и β – независимые случайные величины, равномерно распределенные на цифрах $\{0,1,\ldots,9\}$. Найти матрицу совместного распределения случайных величин

$$\xi = \left[\frac{\alpha+\beta}{2}\right]^2, \quad \eta = \alpha + \beta - 2\xi,$$

и исследовать их на независимость.

---

[2] $[x]$ – целая часть числа x

Решение. Для начала запишем одномерные распределения ξ и η. Проделаем это сначала для ξ: очевидно, что эта случайная величина принимает значения от 0 до 9. Ввиду того, что α и β равномерно распределенные на цифрах $\{0, 1, \ldots, 9\}$, вероятность того, что ξ примет значение 0 равна $\frac{3}{100}$. Действительно, есть только три пары натуральных чисел a и b таких, что $[a+b] = 0$ – это (0,0), (0,1) и (1,0), а так как вероятность появления каждой пары (ввиду независимости α и β) равна $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$, то мы и получаем что $P(\xi = 0) = \frac{3}{100}$. Рассуждая далее аналогично, получим:

ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(\xi)$	3/100	7/100	11/100	15/100	19/100	17/100	13/100	9/100	5/100	1/100

Так как η – остаток от деления $\alpha + \beta$ на два, то очевидно, что она принимает всего два значения: ноль и один. Причем нетрудно убедиться, что ровно в половине случаев остаток ноль, следовательно:

η	0	1
$P(\eta)$	1/2	1/2

Теперь легко составить матрицу совместного распределения ξ и η. Например, $P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{100}$ и $P(\xi = 0, \eta = 1) = \frac{2}{100}$, так как сумма чисел в парах (0,1) и (1,0) дает один в остатке при делении на два, а (0,0) – ноль. Рассуждая далее аналогично, получим:

$\eta \diagdown \xi$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1/100	3/100	5/100	7/100	9/100	9/100	7/100	5/100	3/100	1/100
1	2/100	4/100	6/100	8/100	10/100	8/100	6/100	4/100	2/100	0

Нетрудно заметить, что случайные величины ξ и η зависимы. Действительно:

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{100} \neq P(\xi = 0) \cdot P(\eta = 0) = \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{200}.$$

□

Задача 5.3. ξ – равномерно распределенная на отрезке [−1,1] случайная величина. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = f(\xi)$, где $f(x) = \sin(\pi x)$.

Решение. Приведем несколько способов решения задачи:

1. Ввиду того, что функция $f(x) = \sin(\pi x)$ не является монотонной, то, чтобы воспользоваться формулой

$$p_\eta(y) = p_\xi(g(y)) \cdot |g'(y)|, \;\; g(y) = f^{-1}(y),$$

разобьем функцию на участки монотоннисти: $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. На каждом из этих участков применим формулу замены плотности, например, для первого участка $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$:

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \;\; \dfrac{1}{\pi} \arcsin y \in [-1, 1] \\ 0, \;\; y \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Так как функция $\frac{1}{\pi}\arcsin y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, то

$$p_\eta(y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Ввиду того, что для остальных двух участков значения плотности такие же, то, суммируя, получаем ответ:

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & y \in [-1,1] \\ 0, & y \notin [-1,1] \end{cases}$$

2. Где ошибка?????? там, где участки убывания, плотность должна быть с минусом, но почему?

   Можно рассуждать по-другому: опять разобьем функцию на участки монотонности $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Рассмотрим первый участок $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$:

$$F_\eta(y) = P(\sin(\pi\xi) \leq y) = P\left(\xi \in \left[\frac{1}{\pi}\arcsin y, -\frac{1}{2}\right]\right) = F_\xi\left(-\frac{1}{2}\right) - F_\xi\left(\frac{1}{\pi}\arcsin y\right).$$

   Для участка $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$F_\eta(y) = P(\sin(\pi\xi) \leq y) = P\left(\xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{\pi}\arcsin y\right]\right) = F_\xi\left(\frac{1}{\pi}\arcsin y\right) - F_\xi\left(-\frac{1}{2}\right).$$

   И, наконец, для $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$:

$$F_\eta(y) = P(\sin(\pi\xi) \leq y) = P\left(\xi \in \left[\frac{1}{\pi}\arcsin y, 1\right]\right) = F_\xi(1) - F_\xi\left(\frac{1}{\pi}\arcsin y\right).$$

   Дифференцируя и складывая функции распределения, получим ответ:

   ??????

☐

Задача 5.4. Случайные величины ξ и η независимы и имеют плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $\gamma = \dfrac{\xi+\eta}{\xi}$.

Решение. ☐

Задача 5.5. На заводе детали выпускают три станка: A, B и C. Доли выпускаемой продукции у станков равны 50%, 30% и 20% соответственно, причем известно, что доли брака у станков равны 3%, 2% и 1% соответственно. Отделом контроля качества была забракована очередная деталь, какова вероятность того, что эту деталь произвели на станке A?

Решение. Пусть событие D заключаеся в том, что деталь бракована. Тогда, по условию задачи, нам необходимо найти $P(A|D)$. Воспользуемся теоремой Байеса:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}.$$

Чтобы записать ответ, осталось найти $P(D)$, что легко сделать по формуле полной вероятности:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) = 0{,}03 \cdot 0{,}5 + 0{,}02 \cdot 0{,}3 + 0{,}01 \cdot 0{,}2 = 23 \cdot 10^{-3}.$$

Следовательно, ответ равен:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}5}{23 \cdot 10^{-3}} = \frac{15}{23}.$$

□

6 Дополнительные задачи

Задача 6.1. Какова вероятность того, что корни квадартного уравнения $x^2 + 2bx + c = 0$ вещественны, если:

1. b и c независимо выбираются из отрезка $[0; 1]$.
2. никаких ограничений на b и c нет.

Задача 6.2. На окружность случайным образом независимо друг от друга бросают n точек. Найти вероятность того, что эти точки лежат на одной полуокружности.

Задача 6.3. Дано множество $N = \{1,2,\ldots,n\}$. Из множества всех его подмножеств 2^N независимо выбираются два элемента X и Y. Найдите вероятность того, что они не пересекаются.

Решение. Всего способов выбрать два элемента из 2^N это $2^n \cdot (2^n - 1)$. Пусть множество X состоит из k элементов, тогда, чтобы множства X и Y не пересекались, Y не должно включать в себя те элементы, которые есть в X. Всего таких множеств – 2^{n-k}. При этом k может меняться от 0 до n, значит всего таких случаев $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{n-k}$.

Следовательно, ответ равен

$$P = \frac{1}{2^n \cdot (2^n - 1)} \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}.$$

☐

Задача 6.4. Пусть X – случайная величина, принимающая значения $[0, 1]$. Найти матожидание X, если известно, что $P(X = \frac{n}{n+2}) = \frac{1}{n(n+1)}$ при $n = 1, 2, \ldots$

Решение. По определению матожидания имеем:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n P(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.$$

☐

Задача 6.5. Студент решает тест, в котором надо сопоставить каждому из 10 вопросов один из 10 ответов. Найти вероятность того, что при расстановке ответов на удачу, студент верно ответит ровно на

1. 9 вопросов?

   Если студент сопоставил 9 вопросам 9 правильных ответов, то последнему ответу ничего не остается, кроме как быть сопоставленым правильному вопросу. Следовательно, вероятность ответить правильно ровно на 9 вопросов равна 0.

2. 5 вопросов?

Задача 6.6. Честную монетку подбрасывают $2n$ раз. Какова вероятность того, что количество выпавших орлов четно?

Задача 6.7. Пусть X – неотрицательная случайная величина с конечным числом значений. Доказать, что выполняются неравенства:

$$E(X) \leq E(X^2)^{\frac{1}{2}} \leq E(X^3)^{\frac{1}{3}} \leq \ldots$$

Задача 6.8. Пусть ξ и η – независимые случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией. Что можно сказать про $E(\xi\eta)$ и $D(\xi\eta)$?

Задача 6.9. Для трех событий A, B, C известно, что $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$. Можно ли из этого сделать вывод, что эти события независимы в совокупности?

Решение. Нет, этого условия недостаточно. Рассмотрим следующие три события при бросании двух игральных костей:

$$A = \{\text{на первой кости выпала 1 или 2 или 5}\},$$

$$B = \{\text{на первой кости выпала 4 или 5 или 6}\},$$

$$C = \{\text{сумма выпавших очков на двух игральных костях равна 9}\}.$$

В этом случае $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, но, как легко убедиться, нет попарной независимости, например:

$$P(AB) = \frac{1}{6} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

□

Задача 6.10. Доказать, что σ-алгебра, порожденная всеми отрезками или полуинтервалами совпадает с борелевской σ-алгеброй на прямой.

Задача 6.11. Пусть $\Theta = (\eta_{ij})$ – матрица, составленная из случайных величин, а A и B – детерминированные (константные) матрицы. Доказать, что $E(A\Theta B) = AE(\Theta)B$.

Задача 6.12. В комнате стоит стол. Известно, что с вероятностью p в комнате находится письмо, причем, если письмо в комнате, то оно равновероятно лежит в одном из ящиков стола. Наблюдатель открывает первые 4 ящика и обнаруживает, что в них письма нет. Какова вероятность того, что в пятом ящике есть письмо?

Решение. Введем следующие события: A – в столе есть письмо, B – в первых четырех ящиках письма нет, A_k – письмо в k-ом ящике стола.

Задача сводится к нахождению вероятности того, что письмо в пятом ящике, если известно, что его нет в первых четырех ящиках. Так как $A = \sum\limits_{k=1}^{5} A_k$ и $P(A) = p$, то $P(A_k) = \frac{p}{5}$.

Таким образом:

$$P(A_5 \mid B) = \frac{P(A_5 B)}{P(B)} = \frac{P(A_5)}{P(A_5 + \overline{A})} = \frac{p}{5 - 4p}.$$

Заметим, что интуитивный ответ p верен только тогда, когда $p = 0$ или $p = 1$, а так же, что $P(A_5) \leq P(A_5 \mid B) \leq P(A)$. □

Задача 6.13. Привести пример, когда из попарной независимости событий не следут их независимость в совокупности.

Решение. Оказывается, что даже для трех событий A, B, C их попарная независимость не достаточна, чтобы утверждать о том, что эти события независимы в совокупности. Классический пример – тетраэдр Бернштейна. Это правильный тетраэдр, у которого одна грань покрашена в красный, одна в синий, одна в зеленый цвета, а на последней четвертой грани есть все три цвета (рисунок 8).

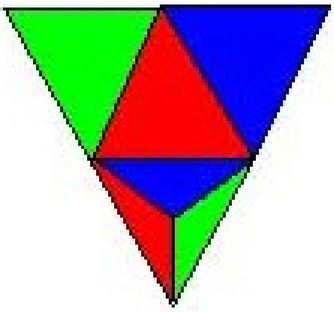


Рис. 8: Развертка тетраэдра Бернштейна.

Рассмотрим события A – на выпавшей грани есть красный цвет, B – на на выпавшей грани есть зеленый цвет, C – на выпавшей грани есть синий цвет. Очевидно, что $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Легко убедиться, что все события попарно независимы:

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Однако эти события не являются независимыми в совокупности:

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

☐

Задача 6.14. Доказать, что если события A и B независимы, то их индикаторы I_A и I_B тоже независимы.

Задача 6.15. Пусть случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n$ независимы в совокупности. Доказать, что случайные величины $\alpha = f(\xi_1, \dots, \xi_k)$ и $\beta = g(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ тоже независимы. Какие условия должны налагаться на функции f и g?

Задача 6.16. Доказать, что непрерывная вещественнозначная функция от конечного числа случайных величин является случайной величиной.

Задача 6.17. Доказать, что топология не является алгеброй.

Доказательство. Действительно, определение топологии очень похоже на определение алгебры: топология – это семейство подмножеств с еденицей, замкнутое относительно конечных пересечений и объединений. Однако дополнения к элементам топологии (к открытым множествам) не принадлежат этой системе, так как это по определению замкнутые множества. Значит, топология не является алгеброй, так как это семейство подмножеств не замкнуто относительно дополнения. ☐

Задача 6.18. Доказать, что точка является борелевским множеством (то есть принадлежит борелевской σ-алгебре на прямой).

Доказательство. Зафиксируем точку $x \in \mathbb{R}$. Тогда по теореме Кантора-Коши о системе вложенных отрезков, длина которых стремится к нулю, получим:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right] = \{x\}.$$

Так как отрезки являются борелевскими множествами и борелевская σ-алгебра замкнута относительно счетного перечечения, то это значит, что $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ☐

Задача 6.19. Пусть $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, доказать, что при $c = \mathrm{const}$ верно, что $B+c = \{b+c \mid b \in B\}$ и $Bc = \{bc \mid b \in B\}$ – борелевские множества.

Задача 6.20. Независимые случайные величины ξ и η с равными вероятностями принимают целочисленные значения соответственно $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$. Найти распределение случайной величины $\xi - \eta$.

Задача 6.21. Игральную кость бросают 8 раз. Найти вероятности событий:

1. все грани выпадут хотя бы по одному разу.

2. хотя бы одна грань не выпадет ни разу.

   Так как все грани одинаковы, то найдем вероятность того, что за 8 бросков ни разу не выпадет грань с единицей. Все броски независимы и вероятность того, что при новом броске не выпададет грань с единицей равна 5/6, значит искомая вероятность:

$$P = \left(\frac{5}{6}\right)^8.$$

Задача 6.22. Генерируется последовательность случайных чисел, равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$, пока их сумма не станет больше 1. Пусть X – случайная величина, равная количеству чисел в сгенирированной последовательности. Найти натуральное число n, для которого вероятность $P(X \geq n) = \dfrac{1}{720}$.

Задача 6.23. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ и задана гладкая ограниченная функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Доказть, что

$$E[(\xi - \mu)f(\xi)] = \sigma^2 E[f'(\xi)].$$

Задача 6.24. Пусть случайная величина ξ принимает неотрицательные значения. Доказать, что

$$P(\xi = 0) \leq \frac{D(\xi)}{E(\xi^2).}$$

Задача 6.25. Студент и преподаватель играют в игру: они подбрасывают монету до тех пор, пока не встретится последовательность РРО (победа преподавателя) или РОО (победа студента). Является ли игра честной (вероятность выиграша каждого игрока равна 0,5)?

Задача 6.26. Из множества $\{1, \ldots, 2n\}$ случайным образом выбирается $n + 1$ элемент. С какой вероятностью среди них найдутся два два взаимно простых числа?

Задача 6.27. В самолете n мест. Есть n пассажиров, выстроившихся друг за другом в очередь. Во главе очереди – «заяц». У всех, кроме «зайца», есть билет, на котором указан номер посадочного места. Так как «заяц» входит первым, он случайным образом занимает некоторое место. Каждый следующий пассажир, входящий в салон самолета, действует по такому принципу: если его место свободно, то садится на него, если занято, то занимает с равной вероятностью любое свободное. Найдите вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место.

Задача 6.28 (Одно из неравенств Бонферрони). Имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$. Доказать, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Задача 6.29. Равнобедренный треугольник на плоскости образован единичным вектором в направлении оси абсцисс и единичным вектором, имеющим случайное равномерно распределённое направление. Найти распределение длины третьей стороны треугольника.

Задача 6.30. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = [0,1]^2$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств Ω, P – мера Лебега. Обозначим координаты ω_1 и ω_2. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\xi + \eta$, если

1. $\xi = \omega_1 + \omega_2$, $\eta = \omega_1 - \omega_2$.
2. $\xi = \omega_1$, $\eta = \omega_2$.
3. $\xi = \begin{cases} 1, & \omega_1 = \omega_2, \\ 0, & \omega_1 \neq \omega_2. \end{cases} \qquad \eta = \omega_1\omega_2.$

Задача 6.31. На первом этаже 17-этажного здания в лифт зашли n человек. Найти математическое ожидание и дисперсию числа остановок лифта, если каждый из вошедших (независимо от остальных) может с равной вероятностью жить на любом из 16 этажей (указание: воспользоваться индикаторами случайных событий).

Задача 6.32. Будем говорить, что случайная величина ξ имеет решетчатое распределение, если существуют числа $a, h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ такие, что ξ почти наверное принимает значение из множества $\{a + kh\}_{k\in\mathbb{Z}}$, то есть $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} P(\xi = a + kh) = 1$. Доказать, что ξ имеет решетчатое распределение тогда и только тогда, когда $\left|\varphi_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right| = 1$ для некоторого $h > 0$.

Доказательство. Пусть ξ имеет решетчатое распределение, тогда

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k e^{i(a+kh)t} = e^{iat} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k e^{ikht} \Rightarrow \varphi_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right) = e^{\frac{2\pi i a}{h}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k e^{2\pi i k} =$$

$$= e^{\frac{2\pi i a}{h}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k = e^{\frac{2\pi i a}{h}} \Rightarrow \left|\varphi_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right| = |e^{\frac{2\pi i a}{h}}| = 1.$$

Обратно, если $\left|\varphi_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right| = 1$, то $\varphi_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right) = e^{\frac{2\pi i a}{h}}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int \exp\left(\frac{2\pi i(x-a)}{h}\right) dF_\xi(x) = 1 \Leftrightarrow \int \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi(x-a)}{h}\right)\right] dF_\xi(x) = 0.$$

Так как в последнем равенстве подынтегральная функция неотрицательна, то это означает, что мера множества $\left\{x : 1 - \cos\left(\frac{2\pi(x-a)}{h}\right) > 0\right\}$ равна нулю. Следовательно, функция $F_\xi(x)$ может иметь своими точками роста лишь точки вида $\{a + kh\}$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Задача 6.33. Пусть ξ и η – независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $\varphi(t)$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi - \eta$.

Решение. Для решения используем то свойство, что если ξ и η – независимые случайные величины, то для их характеристических функций справедливо равенство $\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(t)$. А так же воспользуемся тем, что характеристическая функция случайной величины ξ связана с характеристической функцией случайной величины $a+b\xi$ равенством $\varphi_{a+b\xi}(t) = e^{ita}\varphi_\xi(bt)$. Тогда получим:

$$\varphi_{\xi-\eta}(t) = \varphi_{\xi+(-\eta)}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_{-\eta}(t) = \varphi_\xi(t)\varphi_\eta(-t) = \varphi(t)\varphi(-t).$$

□

Задача 6.34. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, представляющем собой отрезок $[0,1]$ с σ-алгеброй борелевских множеств и мерой Лебега, определена случайная величина $\xi(\omega)$. Найти ее характеристическую функцию, если:

a) $\xi(\omega) = \begin{cases} 2\omega, \ 0 \le \omega \le \dfrac{1}{2} \\ 2\omega - 1, \ \dfrac{1}{2} < \omega \le 1 \end{cases}$

На рисунке 9 построено значение ξ в зависимости от ω. Из этого графика легко найти, что при $x \in [0,1]$ выполнено $F_\xi(x) = P(\xi < x) = 2 \cdot \dfrac{x}{2} = x$.

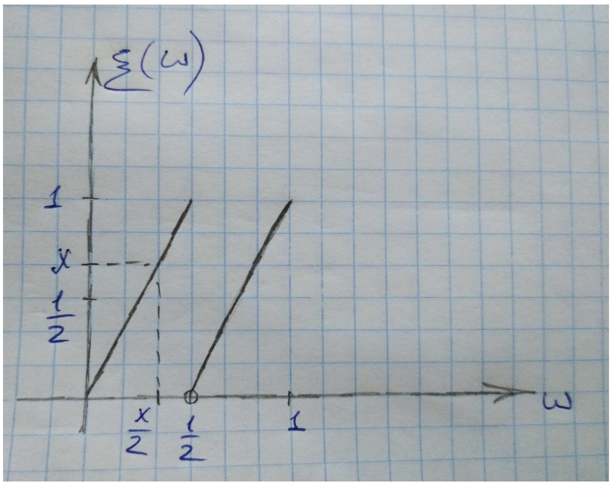


Рис. 9

Значит функция распределения $F_\xi(x)$ имеет вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ x, \ 0 \le x \le 1, \\ 1, \ x > 1, \end{cases}$$

Следовательно, плотность распределения $\rho_\xi(x) = 1$ при $0 \le x \le 1$ и $\rho_\xi(x) = 0$ иначе. Используем тот факт, что если $\rho_\xi(x)$ – плотность вероятности абсолютно непрерывной случайной величины ξ, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – борелевская функция, то математическое ожиданиее случайной величины $f(\xi)$ равно

$$E(f(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_\xi(x)dx.$$

Тогда получим требуемое

$$\varphi_\xi(t) = E(e^{it\xi}) = \int\limits_0^1 e^{itx}dx = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

Заметим, что ответ можно было написать сразу после нахождения функции $F_\xi(x)$, так как характеристическая функция равномерного распределения известна.

b) $\xi(\omega) = \begin{cases} \ln\omega, & \omega > 0 \\ 0, & \omega = 0 \end{cases}$

Аналогично предыдущему пункту найдем $F_\xi(x) = P(\xi < x) = e^x$, значит плотность вероятности равна

$$\rho_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ e^x, & x \leq 0, \end{cases}$$

Следовательно:

$$\varphi_\xi(t) = E(e^{it\xi}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\rho_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{x(1+it)}dx = \frac{1}{1+it}.$$

c) $\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3} < \omega < \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} \leq \omega \leq 1 \end{cases}$

Заданная случайная величина является дискретной, ее можно задать таблицей:

ξ	0	1
$P(\xi)$	1/3	2/3

Тогда легко найти

$$E(e^{it\xi}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{it}.$$

Задача 6.35. Три точки по очереди, независимо и равномерно бросаются на отрезок. Найти вероятность того, что третья по счету точка оказалась между двумя первыми.

Задача 6.36. Случайная величина ξ имеет дискретное распределение $P(\xi = k) = \dfrac{C}{k(k+1)}$ для $k \in \mathbb{N}$. Найти C и выразить $P(n_1 \leq \xi \leq n_2)$.

Задача 6.37. Про случайную величину ξ известно, что

$$E(\xi) = a, \quad E(|\xi|) = b, \quad P(\xi > 0) = \alpha, \quad P(\xi < 0) = \beta.$$

Найти $\operatorname{cov}(\xi, \operatorname{sign}\xi)$.

Задача 6.38. Пусть случайные величины ξ и η имеют распределение Бернулли (возможно, с разными параметрами). Доказать, что если выполнено $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$, то ξ и η независимы.

Задача 6.39. Даны независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2, имеющие экспоненциальное распределение с параметром λ. Доказать, что случайные величины $\max(\xi_1, \xi_2)$ и $\xi_1 + \dfrac{\xi_2}{2}$ имеют одинаковое распределение.

Список литературы

[1] М.Е. Широков. Курс видеолекций «Теория вероятностей». https://www.youtube.com/playlist?list=PLyBWNG-pZKx7kLBRcNW3HXG05BDUrTQVr.

[2] И.Г. Эрлих. Курс видеолекций «Теория меры». https://www.youtube.com/playlist?list=PL4_hYwCyhAvaQSfrR_z5njK8rnTXcdQiv.

[3] Д.А. Шабанов. Курс видеолекций «Случайные процессы». https://www.youtube.com/playlist?list=PLU2SDCh6kZwUS5H2tNP7xmqdpJrsnbhpO.

[4] Н.О. Бузун, А.В. Гасников, Ф.О. Гончаров, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Е.А. Крымова, А.А. Натан, Е.О. Черноусова. Стахостический анализ в задачах. Под редакцией А.В. Гасникова. Часть 1.

[5] А.Н. Ширяев. Вероятность.

[6] А.И. Кибзун. Е.Р. Горяинова, А.В. Наумов, А.Н. Сиротин. Теория вероятностей и математическая статистика.

[7] М.Е. Широков. О некоторых понятиях теории вероятностей.

[8] А. Шень. Вероятность: примеры и задачи.

[9] А.В. Булинский. Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения.