Контрольная работа №1 по функциональному анализу (ФУПМ, 5 семестр). Вариант 7.

Линдеманн Никита, МФТИ

26 октября 2020 г.

Рассматривается линейное пространство

$$X = \left\{ x : (0,1) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \exists \int\limits_0^1 \frac{|x(t)|}{t^2} dt < +\infty \right\}$$

с нормой

$$||x|| = \int\limits_0^1 t^2 |x(t)| dt.$$

а) Доказать неполноту пространства $(X, ||\cdot||)$.

Доказательство. Заметим, что функция $x(t) \equiv 1$ не принадлежит X. Построим последовательность функций $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, сходящуюся к функции x по заданной норме. Пусть

$$x_n(t) = \begin{cases} n^2 t^2, \;\; 0 < t \le \dfrac{1}{n}, \\ 1, \;\; \dfrac{1}{n} \le t < 1. \end{cases}$$

Тогда норма разности

$$||x_n - x|| = \int\limits_0^{1/n} t^2 (1 - n^2 t^2) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{n^2 t^5}{5} \right) \Bigg|_0^{1/n} = \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{5n^3} = \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{n^3} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Значит последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ действительно сходится к функции $x(t)$, следовательно, она фундаментальна: из сходимости $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ имеем $\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, n \ge N \hookrightarrow ||x_n - x|| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда

$$||x_n - x_m|| \le ||x_n - x + x - x_m|| \le ||x_n - x|| + ||x_m - x|| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

При этом эта фундаментальная последовательность не имеет предела в X (так как предельная функция $x(t) \equiv 1$ не принадлежит X, а предел единственен), откуда можно заключить, что пространство $(X, ||\cdot||)$ не полно. □

б) Доказательно построить пополнение пространства $(X, ||\cdot||)$.

Решение. Рассмотрим множество

$$X_0 = \left\{ x : (0,1) \to \mathbb{C} \;\middle|\; \exists \int\limits_0^1 t^2 |x(t)| dt < +\infty,\ x(t) \text{ измерима} \right\}.$$

Рассмотрим произвольную функцию $x \in X_0$ и построим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} n^2 t^2, & 0 < t < \dfrac{1}{n}, \\ x(t), & \dfrac{1}{n} \le t < 1. \end{cases}$$

Эта последовательность принадлежит X:

$$\int\limits_0^1 \frac{|x(t)|}{t^2} dt \le n + n^4 \int\limits_{1/n}^1 t^2 |x(t)| dt < +\infty$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега:

$$||x_n - x|| = \int\limits_0^1 t^2 (x(t) - n^2 t^2) = \int\limits_0^{1/n} t^2 x(t) dt - \left(-\frac{n^2 t^5}{5} \right) \Bigg|_0^{1/n} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Значит x – предел некоторой фундаментальной последовательности из X.

Обратно, любая фундаментальная последовательность из X имеет предел в X_0 по норме

$$||x|| = \int\limits_0^1 t^2 |x(t)| dt = \int\limits_0^1 t^2 |x(t)| d\left(\frac{t^3}{3}\right) = \int\limits_0^1 t^2 |x(t)| d\mu, \quad \mu(E) = \int\limits_E t^2 dt,$$

то есть в пространстве $\mathbb{L}([0,1],\mu)$, так как для любой абсолютно непрерывной σ-аддитивной меры μ пространство $\mathbb{L}([0,1],\mu)$ полно (факт из теории меры). Поэтому X_0 – наименьшее полное пространство, содержащее X, а это означает, что X_0 – искомое пополнение. □

в) Исследовать сепарабельность пространства $(X, ||\cdot||)$.

Доказательство. Из теории известно, что пространство $\mathbb{L}((a,b),\lambda)$ (здесь λ – стандартная мера Лебега на прямой) сепарабельно, например, всюду плотным множеством в $\mathbb{L}(a,b)$ может быть семейство всевозможных тригонометрических многочленов с рациональными коэффициентами. Если найдется изоморфизм $\varphi : X_0 \to \mathbb{L}(a,b)$ из найденного пополнения X_0 в сепарабельное пространство $\mathbb{L}((a,b),\lambda)$, то мы докажем требуемое, так как если два пространства изоморфны и одно из них сепарабельно, то второе тогда тоже сепарабельно и любое подмножество X сепарабельного пространства X_0 тоже является сепарабельным пространством. Так как

$$||x||_{X_0} = \int\limits_0^1 t^2 |x(t)| dt = \int\limits_0^1 t^2 |x(t)| d\left(\frac{t^3}{3}\right) = \int\limits_0^{1/3} |x(3^{1/3}\xi^{1/3})| d\xi = ||y||_{\mathbb{L}},$$

то такой изоморфизм $\varphi : X_0 \to \mathbb{L}\left(0, \frac{1}{3}\right)$ действительно можно задать правилом

$$\varphi(x) = x(3^{1/3}\xi^{1/3}).$$

□

г) Исследовать ограниченность и замкнутость множества

$$S = \left\{ x \in X \;\middle|\; \int\limits_0^1 |x(t)|dt \le 1 \right\}$$

в пространстве $(X, ||\cdot||)$.

Решение. Очевидно, что S ограничено: если $x \in S$, то

$$||x|| = \int\limits_0^1 t^2 |x(t)|dt \le \int\limits_0^1 |x(t)|dt \le 1,$$

что означает, что S содержится в единичном шаре пространства $(X, ||\cdot||)$.

Допустим, что у множества S есть некоторая предельная точка x, то есть существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$, такая, что

$$||x - x_n|| = \int\limits_0^1 t^2 |x(t) - x_n(t)|dt \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_\varepsilon^1 |x_n(t) - x(t)|dt = \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{\varepsilon^2}{t^2} \cdot t^2 |x_n(t) - x(t)|dt \le \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_0^1 t^2 |x_n(t) - x(t)|dt \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

$$\int\limits_\varepsilon^1 |x(t)|dt \le \int\limits_\varepsilon^1 |x_n(t)|dt + \int\limits_\varepsilon^1 |x_n(t) - x(t)|dt \le 1 + \int\limits_\varepsilon^1 |x_n(t) - x(t)|dt.$$

Так как левая часть последнего неравенства не зависит от n, то можно заключить, что

$$\int\limits_\varepsilon^1 |x(t)|dt \le 1 \;\; \forall \;\varepsilon > 0.$$

Далее запишем

$$\int\limits_0^1 |x(t)|dt = \int\limits_0^\varepsilon |x(t)|dt + \int\limits_\varepsilon^1 |x(t)|dt \le 1 + \int\limits_0^\varepsilon |x(t)|dt.$$

Из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^\varepsilon |x(t)|dt = 0,$$

а значит, устремляя в последнем неравенстве ε к нулю, получим:

$$\int\limits_0^1 |x(t)|dt \le 1.$$

Это означает, что $x \in S$, то есть S замкнуто. $\square$

д) Исследовать открытость множества

$$S = \left\{ x \in X \;\middle|\; \int\limits_0^1 |x(t)|dt < 1 \right\}$$

в пространстве $(X, ||\cdot||)$.

Решение. Пусть $x \in S$, тогда

$$\int\limits_0^1 |x(t)|dt < 1.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} n^4 t^2, \;\; 0 < t < \dfrac{1}{n}, \\ 0, \;\; \dfrac{1}{n} \le t < 1. \end{cases}$$

Эта последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ лежит в S и

$$||x_n|| = \int\limits_0^{1/n} n^4 t^2 dt = \frac{1}{5n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

При этом

$$\int\limits_0^1 |x(t) + x_n(t)|dt \ge \int\limits_0^1 |x_n(t)|dt - \int\limits_0^1 |x(t)|dt =$$

$$= n^4 \int\limits_0^1 t^2 dt - \int\limits_0^1 |x(t)|dt > \frac{n}{3} - 1 > 1 \;\; \forall \;\; n > 6.$$

Значит, в любом шаре с центром в x найдется элемент $x + x_n$, не принадлежащий S. Следовательно, S не является открытым. □

е) Исследовать ограниченность и открытость множества

$$S = \left\{ x \in X \;\middle|\; \int\limits_0^1 \frac{|x(t)|}{t} dt < 1 \right\}$$

в пространстве $(X, ||\cdot||)$.

Решение. Опять же, ограниченность очевидна: если $x \in S$, то

$$||x|| = \int\limits_0^1 t^2 |x(t)|dt = \int\limits_0^1 t^3 \frac{|x(t)|}{t} dt \le \max_{t\in[0,1]} t^3 \cdot \int\limits_0^1 \frac{|x(t)|}{t} dt < 1,$$

что означает, что S содержится в единичном шаре пространства $(X, ||\cdot||)$.

Чтобы исследовать S на открытость, аналогично предыдущему пунткту, рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} n^4 t^2,\ \ 0 < t < \dfrac{1}{n}, \\ 0,\ \ \dfrac{1}{n} \leq t < 1. \end{cases}$$

которая, как было уже показано, обладает тем свойством, что $||x_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Тогда для $x \in S$ выполнено

$$\int\limits_0^1 \frac{|x_n(t) + x(t)|}{t} dt \geq \int\limits_0^1 \frac{|x_n(t)|}{t} dt - \int\limits_0^1 \frac{|x(t)|}{t} dt =$$

$$= n^4 \int\limits_0^1 t dt - \int\limits_0^1 \frac{|x(t)|}{t} dt > \frac{n^2}{2} - 1 > 1\ \forall\ n > 3.$$

Поэтому в любом шаре с центром в x найдется элемент $x + x_n$, не принадлежащий S: множество S не открыто. $\square$