Теория функций комплексного переменного (ФУПМ, 5 семестр)

Линдеманн Никита, МФТИ

7 декабря 2020 г.

Содержание

1 Программа

1. Комплексные числа. Последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана и стереографичекая прокеция. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.

2. Комплексная дифференцируемость функции комплексного переменного и условия Коши-Римана. Понятие функциии, регулярной в области. Понятие гармонической функции двух переменных, связь с регулярной функцией.

3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, экспонента и тригонометрические, их свойства. Теорема об обратной функции. Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Главные регулярные ветви логарифмической функции и корня n-ой степени.

4. Комплексное интегрирование. Интеграл и его свойства. Первообразна и полный дифференциал в области. Условия независимости интеграла от формы пути.

5. Лемма Гурса и интегральная теорема Коши для односвязной области. Обобщенная интегральная теорема Коши по границе области (доказательство для звездной области).

6. Интеграл Коши и его свойства. Интегральная формула Коши и бесконечная дифференцируемость регулярной функции. Интегральная формула Коши для производных.

7. Степенные ряды, первая теорема Абеля. Радиус и круг схоимоости. Ряд Тейлора. Разложение в степенной ряд функциии, регулярной в круге. Теоремы Вейерштрасса для локально равномерно содящихся рядов из регулярных функций.

8. Нули регулярной функции и теорема единственности. Теорема Морера и теорема о стирании разреза. Взаимосвязь первообразных регуляной функции.

9. Ряд Лорана и его кольцо скодимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце, его единственность.

10. Изолированные особые точки. Связь их классификации с видом ряда Лорана.

11. Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.

12. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства. Приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль непрерывного контура. Общий вид регулярных ветвей многозначыных функций Lnz и $\sqrt[n]{z}$ в односвязной области, не содержащей нуля.

13. Теорема о существовании регулярной ветви логаифма регуляной в области функции. Теорема о существовании ргеулярной ветви корня регулярной в области функциии. Разложение в ряды регулярных ветсвей логарифма и корня. Вычисление интегралов с использованием регулярных ветвей.

14. Целые функции. Теорема Лиувилля, теорема Сокоцкого и теорема Пикара (последняя без доказательства) для целых функций.

15. Мероморфные функции. Теорема о представлении мероморфной функции в виде ряда элементарных дробей. Разложение котангенса в вие суммы элементарных дробей.

16. Аналитическое продолжение. Аналитические продолжения элементов с помощью конечной цепочки областей и вдоль пути, эквивалентность этих понятий. Единственность аналитического продолжения. Понятие о (полной) аналитической функции и ее римановой поверхности. Теорема о монодромии (без доказательства).

17. Особые точки аналитических функций. Точки ветвления. Теорема Коши-Адамара.

18. Принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема алгебы. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолистность и локальная однолистность. Принцип максимума модуля регулярной функции и лемма Шварца. Принцип максимума и минимума гармонической функции. Теорема о среднем для гармонической функции.

19. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конфорность отображения и критерий конформности в точке. Конфорность в расширенной комплексной плоскости.

20. Элементарные конформные отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства: конформность групповое, круговое и принцип смметрии.

21. Конформные отображения с использованием степинной и эспоненциальной функций. Функция Жуковского и ее свойства. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (доказательсво единственности). Теорема о соответствиии грниц при конфорном отображении (без доказательства).

22. Принцип симметрии при конформнык отображениях.

23. Классическая и общая задачи Дирикле на плоскости. Теорема единственности решения общей задачи Дирихле. Конформная инвариантность гармонической функции. Интеграл Пуассона и решение задачи Дирихле в круге.

2 Теория

Определение 2.1. *Корнем n-ой степени из комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ называется такое число y, что $z = y^n$, то есть это набор из n чисел:*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{|z|} \cdot \exp\left(\frac{\arg z + 2\pi k}{n} \cdot i \right) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Определение 2.2. *Натуральный логарифм из комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ – это такое число y, что $e^y = z$, то есть это множество чисел:*

$$\operatorname{Ln} z = \big\{ \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) \mid k \in \mathbb{Z} \big\}.$$

Определение 2.3. *Функция $u : G \to \mathbb{C}$, заданная в области $G \subset \mathbb{R}^2$, называется гармонической, если $u \in C^2(G)$ и $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ для всех $(x, y) \in G$.*

Теорема 2.1. *Пусть в области $G \subset \mathbb{C}$ задана регулярная функция $f : G \to \mathbb{C}$, причем $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ гармонические в G.*

Определение 2.4. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности конечной точки $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$. Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 называется интеграл*

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\rho} f(z)dz,$$

где Γ_ρ – окружность с центром в точке z_0 и радиусом $\rho < r$.

Вычет в бесконечности определяется аналогично

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_R} f(z)dz,$$

где Γ_R – такая окружность с центром в точке 0 и радиусом R, что все особые точки функции $f(z)$ (кроме бесконечности) лежат внутри этой окружности.

Теорема 2.2 (О вычетах). *Если функция $f(z)$ регулярна в $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек z_k, $k = \overline{1, n}$, тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 0.$$

3 Первое задание

§1, №1(4) Вычислить

$$\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}.$$

Решение. Раскрывая скобки, а затем домножая дробь на комплексно сопряженное знаменателю число, получим:

$$\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}=\frac{1+4i-4-(1-3i-3+i)}{27+54i-36-8i-(4+4i-1)}=\frac{-1+6i}{-12+42i}=\frac{(-1+6i)(-12-42i)}{(-12+42i)(-12-42i)}=$$

$$=\frac{12+42i-72i+252}{12^2+42^2}=\frac{264-30i}{1908}=\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i.$$

□

§1, №4(2) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}|z^2-2i|=4,\\ |z+1+i|=|z-1-i|.\end{cases}$$

Решение. Пусть $z=x+iy$, тогда из первого уравнения получим:

$$|(x+iy)^2-2i|=(x^2-y^2)^2+4(xy-1)^2=16.$$

Из второго:

$$|(x+1)+i(y+1)|=|(x-1)+i(y-1)|\Rightarrow(x+1)^2+(y+1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2\Rightarrow x=-y.$$

Подставляя $y=-x$ в полученное из первого уравнение равенство, найдем

$$x^4+2x^2-3=0\Rightarrow x=\pm1.$$

Получаем, что решение системы – два числа: $z_1=1-i$, $z_2=-1+i$. □

§1, №9(2) Выяснить, какая линия на плоскости задается уравнением

$$\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}=0.$$

Решение. Представляя $z=x+iy$ и преобразуя дробь, получим:

$$\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}=\operatorname{Re}\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}=\operatorname{Re}\frac{[(x-1)+iy]\cdot[(x+1)-iy]}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}=0\Rightarrow x^2+y^2=1.$$

Значит, данное уравнение задает окружность единичного радиуса с центром в точке $z=0$ с выколотой точкой $z=-1$. □

§1, №19 Доказать, что точка ξ лежит на отрезке, соединяющем точки z_1 и z_2, в том и только том случае, когда существует такое число $\alpha\in[0,1]$, что $\xi=\alpha z_1+(1-\alpha)z_2$.

Доказательство. □

§2, №1(3) Найти предел последовательности

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi},\ \ \varphi \in (0, 2\pi)$$

Решение. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получим:

$$a_n = \frac{1}{n}\frac{e^{i(n+1)\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

T1 Покажите, что при сетреографической проекции окружность на сфере Римана соответсвует в комплексной плоскости окружность или прямая.

Доказательство. □

§3, №12(1) Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать, что $\operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \operatorname{ch} y$.

Доказательство. Расписывав синус суммы и учитывая связь с гиперболическими функциями ($\operatorname{sh} x = -i\sin(ix)$, $\operatorname{ch} x = \cos(ix)$), получим:

$$\operatorname{Re}(\sin z) = \operatorname{Re}(\sin(x+iy)) = \operatorname{Re}[\sin x\cos(iy)+\cos x\sin(iy)] = \operatorname{Re}(\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y) = \sin x \operatorname{ch} y.$$

□

§3, №13(1) Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать, что $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$.

Доказательство. Используя результаты предыдущей задачи и применняя основное гиперболическое тождество $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, получим:

$$|\sin(z)| = |\sin(x+iy)| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{(1-\cos^2 x)\operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$= \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y)} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}.$$

□

§3, №17 Найти все решения следующих уравнений:

3) $\cos z = \dfrac{3i}{4}$.

$$e^{iz} + e^{-iz} = \frac{3i}{2} \Rightarrow (e^{iz})^2 - \frac{3i}{2}e^{iz} + 1 = 0,$$

$$e^{iz} = \frac{3i/2 + \sqrt{(3i/2)^2 - 4}}{2} \Rightarrow e^{iz}_1 = 2i, e^{iz}_2 = -\frac{1}{2}i.$$

Логарифмируя, получаем две серии решений:

$$z_1 = \left\{-i\ln 2 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}, z_2 = \left\{i\ln 2 + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

4) $\cos z = \dfrac{3+i}{4}$.

$$e^{iz} + e^{-iz} = \frac{3+i}{2} \Rightarrow (e^{iz})^2 - \frac{3+i}{2} e^{iz} + 1 = 0,$$

$$e^{iz} = \frac{3+i}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3+i}{2}\right)^2 - 4} = \frac{3+i}{4} \pm \frac{3i+1}{4} \Rightarrow e_1^{iz} = i+1, e_2^{iz} = -\frac{1-i}{2}.$$

Логарифмируя, получаем две серии решений:

$$z_1 = \left\{ -\frac{i}{2}\ln 2 + \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}, z_2 = \left\{ \frac{i}{2}\ln 2 + \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

§3, №22(1) Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать неравенство

$$\frac{2e^{-2y}}{1+e^{-2y}} \leq |\operatorname{tg} z - i| \leq \frac{2e^{-2y}}{1-e^{-2y}}, \ \ y > 0.$$

Доказательство. □

§4, №6(4) Доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(nz)$$

на множестве $E = \{z : |\operatorname{Im} z| \leq \delta < \ln 2\}$.

Доказательство. □

§5, №1 Найти все точки $z = x + iy$, в которых дифференцируемы функции

2) $f(z) = |\overline{z}|^2 = |z|^2 = x^2 + y^2$.

Заметим, что $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = x^2 + y^2 \in C(\mathbb{R}^2)$ и $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y) = 0 \in C(\mathbb{R}^2)$. Проверим выполнимость условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Как видно, необходимые условия дифференцируемости выполнены лишь в одной точке $z = 0$.

5) $f(z) = x - y + i(x + y)$.

Полиномы – дифференцируемые функции, проверим, что выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1 = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти условия выполнены во всей плоскости, значит заданная функция дифференцируема на $\mathbb{C}$.

§5, №7 Выяснить, где дифференцируемы функции и найти их производные.

3) $f(z) = \dfrac{e^z+2}{e^z-2}$.

Так как функция представляет собой отношение двух дифференцируемых функций, то она будет дифференцируема всюду, где определена. А не определена она лишь на множестве $z = \operatorname{Ln} 2 = \{\ln 2 + 2\pi k i \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Используя правила дифференцирования, получим:

$$f'(z) = \frac{e^z(e^z-2) - e^z(e^z+2)}{(e^z-2)^2} = \frac{-4e^z}{(e^z-2)^2}.$$

4) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}$.

Сперва найдем множество точек комлексной плокости, где знаменатель функции обращается в ноль:

$$\operatorname{tg} z + \frac{1}{\operatorname{tg} z} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 z = -1 \Rightarrow \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} = -1 \Rightarrow \sin^2 z + \cos^2 z = 0.$$

Так как для комплексного значения переменной z верно основное тригонометрическое тождество, то знаменатель всегда отличен от нуля, а значит заданная функция дифференцируема всюду, кроме точек $\left\{\dfrac{\pi k}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ так как в этих точках не определена функция $\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z$.

Производная функции равна:

$$f'(z) = -\frac{1/\cos^2 z - 1/\sin^2 z}{(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z)^2} = \cos(2z).$$

§5, №17 Восстановить реуглярную функцию $f(z) = f(x+iy)$ по условию

2) $\operatorname{Re} f(z) = x \sin x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y \cos x$, $f(0) = 0$.

Так как функция $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z) = u(z) + iv(z)$ по условию регулярна, значит она дифференцируема. Используя условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

восстановим мнимую часть функции $f(z)$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \sin x \operatorname{ch} y + x \cos x \operatorname{ch} y + y \operatorname{sh} y \sin x \Rightarrow v = x \cos x \operatorname{sh} y + y \sin x \operatorname{ch} y + C(x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow x \sin x \operatorname{sh} y - \operatorname{sh} y \cos x - y \operatorname{ch} y \cos x = -\cos x \operatorname{sh} y + x \sin x \operatorname{sh} y - y \cos x \operatorname{ch} y - C'(x).$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = C \Rightarrow v = x \cos x \operatorname{sh} y + y \sin x \operatorname{ch} y - C.$$

Используя условие $f(0) = 0$, получим, что $C = 0$, значит искомая функция имеет вид

$$f(z) = x \sin x \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh} y \cos x + i(x \cos x \operatorname{sh} y + y \sin x \operatorname{ch} y) = \sin x \operatorname{ch} y (x+iy) + i \operatorname{sh} y \cos x (x+iy) =$$

$$= z(\sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x) = z \sin z.$$

6) $\operatorname{Re} f(z) = xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y,\ f(0) = i.$

Так как функция дифференцируема, то, используя условия Коши-Римана

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

можно восстановить мнимую часть функции $f(z)$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + xe^x \cos y - (y+1)\sin y \Rightarrow v = xe^x \sin y + (y+1)e^x \cos y + C(x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -xe^x \sin y - e^x \sin y - (y+1)e^x \cos y = -e^x \sin y - xe^x \sin y - ye^x \cos y - e^x \cos y - C'(x).$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = C \Rightarrow v = xe^x \sin y + (y+1)e^x \cos y + C.$$

Используя условие $f(0) = i$, получим, что $C = 0$, значит искомая функция имеет вид

$$f(z) = xe^x \cos y - ye^x \sin y - e^x \sin y + i(xe^x \sin y + ye^x \cos y + e^x \cos y) = e^x \cos y(x + iy) +$$

$$+ e^x \sin y(ix - y) + e^x(i\cos y - \sin y) = ze^x(\cos y + i\sin y) + ie^z = e^z(z + i).$$

7) $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^x.$

T2 Найти области, в которых функция $f(z) = 2|xy| + i|x^2 - y^2|$, $z = x + iy$, является регулярной.

Решение. □

T3 Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, является регулярной в области G функцией. Докажите, что $|\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} v|$ во всех точках области G.

Доказательство. Для регулярной в области G функции выполняются условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Используя их, легко показать требуемое:

$$|\operatorname{grad} u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

$$|\operatorname{grad} v|^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.$$

□

§7, №3 Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функцию

8) $f(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}$.

Используя метод неопределенных коэффициентов, разложим функцию на сумму дробей:

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2(z-1)} + \frac{z-1}{2(z^2+1)} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)} + \frac{1+i}{4}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{1-i}{4}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

Пользуясь известными разложениями, получим:

$$f(z) = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} - \frac{1+i}{4i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{i}} + \frac{1-i}{4i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{i}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1+i}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n + \frac{1-i}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{i}\right)^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^n\left(\frac{1-i}{4i^{n+1}}(-1)^n + \frac{1+i}{4i^{n+1}} - \frac{1}{2}\right).$$

8) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$.

Сперва найдем корни знаменателя:

$$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \ z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Раскладывая функцию на сумму дробей и применяя известные разложения, получим:

$$f(z) = \frac{2i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-z_2} - \frac{1}{z-z_1}\right) = \frac{2i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z_1\left(1-\frac{z}{z_1}\right)} - \frac{1}{z_2\left(1-\frac{z}{z_2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n - \frac{1}{z_2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^n\right] = \frac{2i}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\left[\left(\frac{2}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{-1-i\sqrt{3}}\right)^{n+1}\right].$$

§7, №4 Разложить функцию

$$f(z) = \frac{2z^2+2z-7}{z^2+z-2}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = -1$.

Решение. Преобразуем дробь и сделаем замену $z + 1 = t$:

$$f(z) = \frac{2z^2+2z-4-3}{z^2+z-2} = 2 - \frac{3}{z^2+z-2} = 2 - \frac{3}{(z-1)(z+2)} = 2 - \frac{1}{(t-2)(t+1)} = 2 + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-2}.$$

Искомое разложение имеет вид:

$$f(z) = 2 + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2\left(1-\frac{t}{2}\right)} = 2 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n = 2 + \sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n + 2^{-(n+1)})(z-1)^n.$$

□

§7, №6(4) Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функцию

$$f(z) = \cos^2 z + \operatorname{ch}^2 z.$$

Решение. Понизив степень, сразу же запишем ответ, используя готовые разложения функций $\cos z$ и $\operatorname{ch} z$:

$$f(z) = \frac{1+\cos 2z}{2} + \frac{1+\operatorname{ch} 2z}{2} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n-1} z^{2n} \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!} + \frac{1}{(2n)!} \right).$$

□

§7, №7 Разложить функцию

$$f(z) = (z^2 - 4z + 5)e^{4z - z^2}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 2$.

Решение. Делая замену $t = z - 2$, получим:

$$f(z) = (t^2+1)e^{4-t^2} = e^4(t^2 e^{-t^2} + e^{-t^2}) = e^4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2(n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \right) =$$

$$= e^4 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \right).$$

□

§7, №12(2) Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции $f(z)$, довлетворяющей условию $(1+z^2)f'(z) = 1,\ f(0) = 0$.

Решение. Используя условие $f(0) = 0$, получим:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2} \Rightarrow f(z) = \operatorname{arctg} z.$$

Разложение арктангенса имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} z^{2n-1}.$$

□

T4 Найти все значения выражений

1. 2^i.

   Если $z, p \in \mathbb{C}$, то

   $$z^p = e^{\operatorname{Ln} z \cdot p} = e^{[\ln|z| + (\arg z + 2\pi k)i]p}, \ \ k \in \mathbb{Z}.$$

   Следовательно

   $$2^i = e^{(\ln 2 + 2\pi k i)i} = e^{-2\pi k + i \ln 2} = e^{2\pi n}(\cos \ln 2 + i \sin \ln 2), \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

2. i^i.

$$i^i = e^{(i\frac{\pi}{2}+2\pi k)i} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n},\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

3. $(-1)^{2i}$.

$$(-1)^{2i} = e^{[(\pi+2\pi k)i]\cdot 2i} = e^{-2\pi+4\pi n} = e^{2\pi(2n-1)},\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

§9, №2 Существует ли функция $f(z)$, регулярная в некоторой окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющая одному из следующих условий (для всех $n \in \mathbb{N}$)

5) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n + \cos \pi n}$.

7) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n + 1}$.

8) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^{-n}$.

T5 Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено равенство $f^n(z) = 0$. Доказать, что f – полином степени меньше n.

Доказательство. □

T6 Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть для любой точки $z \in G$ существует натуральное число n такое, что $f^{(n)}(z) = 0$. Является ли f полиномом?

§11, №4(4) Разложить в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

по степеням $z - 1$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 2i$.

Решение. Преобразуем функцию и сделаем замену $t = z - 1$:

$$f(z) = \frac{z^2 + 1 - 2}{z^2 + 1} = 1 - \frac{2}{z^2 + 1} = 1 - \frac{2}{t^2 + 2t + 2} = 1 + \frac{i}{t + 1 - i} - \frac{i}{t + 1 + i}.$$

Полученная функция $\varphi(t)$ регулярна во всей комплексной плоскости кроме точек $t = -1+i$ и $t = -1 - i$, значит ее можно разложить в ряд Лорана в областях $|t| < \sqrt{2}$ и $|t| > \sqrt{2}$. Так как $t_0 = -1 + 2i \in \{t \in \mathbb{C} \mid |t| > \sqrt{2}\}$, то раскладывать необходимо во внешнем кольце.

$$f(z) = 1 + \frac{i}{t\left(1 - \frac{-1+i}{t}\right)} - \frac{i}{t\left(1 - \frac{-1-i}{t}\right)} = 1 + \frac{i}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1+i}{t}\right)^n - \frac{i}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1-i}{t}\right)^n =$$

$$= 1 + i\sum_{n=0}^{\infty}[(-1+i)^n - (-1-i)^n]t^{-n-1}.$$

□

§11, №5(5) Разложить функцию

$$f(z) = \frac{3z+1}{2z^2+z} - \frac{z}{z^2+5}$$

в ряд Лорана по степеням z в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 1$. Указать границы кольца сходимости.

Решение. Методом неопределенных коэффициентов разложим функцию в сумму дробей:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z+1} + \frac{i}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{z-i\sqrt{5}} - \frac{1}{z+i\sqrt{5}}\right).$$

Данная функция регулярна во всей комплексной плоскости кроме четырех точек $z = 0$, $z = -0{,}5$ и $z = \pm i\sqrt{5}$, значит ее можно разложить в ряд Лорана в областях $0 < |z| < 0{,}5$, $0{,}5 < |z| < \sqrt{5}$ и $|z| > \sqrt{5}$. Так как $z_0 = 1 \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0{,}5 < |z| < \sqrt{5}\}$, то раскладывать необходимо именно в этом кольце.

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2z}\right)} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{-z}{i\sqrt{5}}\right)} + \frac{1}{1-\frac{z}{i\sqrt{5}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{2z}\right)^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{i\sqrt{5}}\right)^n - \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i\sqrt{5}}\right)^n.$$

Ряд Лорана сходится в кольце $0{,}5 < |z| < \sqrt{5}$. □

§11, №7(4) Разложить функцию

$$f(z) = \frac{4z}{(z-1)(z^2-1)}$$

по степеням $z+1$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = -2$.

Решение. Сделаем замену $t = z+1$ и представим функцию в виде суммы дробей:

$$f(z) = \frac{4z}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{4t-4}{(t-2)^2 t} = \frac{1}{t-2} + \frac{2}{(t-2)^2} - \frac{1}{t}.$$

Функция регулярна во всей комплексной плоскости кроме точек $z = 0$ и $z = 2$, значит ее можно разложить в ряд Лорана в областях $0 < |z| < 2$ и $|z| > 2$. Так как $t_0 = z_0 + 1 = -1 \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 2\}$, то раскладывать необходимо именно в этом кольце.

$$f(z) = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{t}{2}\right)} + \left(\frac{1}{1-\frac{t}{2}}\right)' = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n\right)' =$$

$$= -\frac{1}{z+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^{n-1}\frac{n}{2^n}.$$

□

§11, №9(1) Разложить функцию

$$f(z) = \frac{-4+2i}{(z-1-2i)(z-5)}$$

по степеням $z-1$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = 1+6i$.

Решение. Сделаем замену $t = z-1$ и представим функцию в виде суммы дробей:

$$f(z) = \frac{-4+2i}{(z-1-2i)(z-5)} = \frac{-4+2i}{(t-2i)(t-4)} = \frac{1}{t-2i} - \frac{1}{t-4}.$$

Функция регулярна во всей комплексной плоскости кроме точек $z = 2i$ и $z = 4$, значит ее можно разложить в ряд Лорана в областях $|z| < 2$, $2 < |z| < 4$ и $|z| > 4$. Так как $t_0 = z_0 - 1 = 6i \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 4\}$, то раскладывать необходимо именно в этом кольце.

$$f(z) = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{2i}{t}} - \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{t}} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{t}\right)^n - \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{t}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n - 4^n}{(z+1)^{n+1}}.$$

□

§11, №10(10) Разложить функцию

$$f(z) = \frac{6z+8+8i}{z^2+2z(2+i)+8i} - \frac{3z-2i}{z^2+4}$$

по степеням $z-1-i$ в кольце, которому принадлежит точка $z_0 = -1$.

Решение. Преобразуем функцию и сделаем замену $t = z-1-i$:

$$f(z) = \frac{6z+8+8i}{(z+2i)(z+4)} - \frac{3z-2i}{(z-2i)(z+2i)} = \frac{2}{z+2i} + \frac{4}{z+4} - \frac{1}{z-2i} - \frac{2}{z+2i} =$$

$$= \frac{4}{z+4} - \frac{1}{z-2i} = \frac{4}{t+5+i} - \frac{1}{t+1-i}.$$

Полученная функция $\varphi(t)$ регулярна во всей комплексной плоскости кроме точек $t = -5-i$ и $t = -1+i$, значит ее можно разложить в ряд Лорана в областях $|t| < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < |t| < \sqrt{26}$ и $|t| > \sqrt{26}$. Так как $t_0 = z_0 - 1 - i = -2 - i \in \{t \in \mathbb{C} \mid \sqrt{2} < |t| < \sqrt{26}\}$, то раскладывать необходимо в этом кольце, указав, что при $z = -2i$ ряд не равен заданной функции $f(z)$, так как исходная функция не регулярна в этой точке.

$$f(z) = \frac{4}{t+5+i} - \frac{1}{t+1-i} = \frac{1}{5+i}\cdot\frac{4}{1-\frac{-t}{5+i}} - \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{-1+i}{t}} =$$

$$= \frac{4}{5+i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-t}{5+i}\right)^n - \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1+i}{t}\right)^n = \frac{4}{5+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5+i)^n}(z-1-i)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1+i)^n}{(z-1-i)^{n+1}}.$$

□

§12, №8 Найти все изолированные особые точки однозначного характера и определить их тип для функций

4) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}\cos\left(\dfrac{\pi z}{z+1}\right)$.

   Всего три претендента на особые точки: $z = \pm 1$, $z = \infty$. При z стремящимся к 1 предел $f(z)$ существует и равен $-\frac{\pi}{8}$, значит $z = 1$ – устранимая особая точка. Рассмотрев последовательность $z_k = -1 + \frac{1}{k}$ имеющую предел -1, получим, что предел $f(z_k)$ не существует, откуда следует, что -1 – существенная особая точка. Наконец, при $z \to \infty$ заданная функция эквивалентна $-\frac{1}{z^2} \to 0$, значит, $z = \infty$ – устранимая особая точка.

7) $f(z) = e^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}}$.

   Так как $\operatorname{ctg}\pi k$ не определен, то рассмотрим точки вида $z_k = \frac{1}{k}$, к каждой такой точке можно приближаться слева или справа, отчего будет зависить предел функции $f(z_k)$ (будет ли это 0 или $+\infty$), следовательно точки вида $z_k = \frac{1}{k}$ - существенные особенности, а их предел, точка $z = 0$, – не изолированная особая точка. К точке $z = \infty$ можно приближаться последовательностями $z_n = n$ и $z_m = -m$, которые дают разные значения предела функции, а занчит бесконечность – существенная особенность.

§12, №15(5) Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{6\operatorname{sh} z - z(6+z^2)}{(e^z-1)^5}$$

и определить их вид.

Решение. В данном случае особые точки имеют вид $z_k = 2\pi k i$ – полюса 5-го порядка при всех $k \in \mathbb{Z}$, кроме $k = 0$. $z = 0$ – ноль пятого порядка для числителя и знаменателя дроби, значит $z = 0$ – устранимая особая точка. Бесконечность – неизолированная особенность. □

§12, №17(4) Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^2+4z-12}{1+\sin\left(\frac{3\pi}{z}\right)}$$

и определить их вид.

Решение. Сперва найдем нули числителя: $z_1 = -6$, $z_2 = 2$. Одну серию особых точек найдем уз условия

$$1 + \sin\left(\frac{3\pi}{z}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{z} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow z_k = \frac{6}{3+4k},\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Эти z_k – полюса второго порядка при всех $k \neq 0$ и $k \neq -1$, $z = 2$ – полюс первого порядка, так как двойка так же ноль числителя, и по той же причине $z = -6$ – тоже полюс первого порядка. Так как $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$, то $z = 0$ – неизолированная особая точка. При $z \to \infty$ функция $f(z)$ ведет себя как z^2. □

§12, №20(7)

Решение. □

T7 Найти и исследовать все особые точки функции (для полюсов указать порядок)

$$f(z) = \frac{z^2 + 2iz + 3}{1 + \operatorname{ch} \pi z} e^{\frac{1}{z-i}}.$$

Решение. □

T8 Пусть дана регулярная в кольце $G = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ функция $f(z)$ такая, что найдутся действительные числа $A > 0$, $B > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$, при которых справедливы неравенства

$$\frac{A}{|z|^\alpha} \le |f(z)| \le \frac{B}{|z|^{\alpha+1}}, \ \forall z \in G.$$

Определить при различных значениях α тип особой точки 0 функции $f(z)$.

Решение. □

4 Второе задание

§13, №1(6) Вычислить
$$\operatorname*{res}_{z=1} ze^{1/(z-1)}.$$

Решение. Воспользуемся тем свойством, что если функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности конечной точки a, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1},$$

где c_k – коэффициенты в разложении функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-a)$.

Разложим функцию, вычет которой нам нужно найти, в ряд Лорана по степеням $z-1$:

$$ze^{1/(z-1)} = z\left(1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} + \dots\right) = z + \frac{z-1+1}{z-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z-1+1}{(z-1)^2} + \dots =$$

$$= z+1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\dots = (z-1)+2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\dots \Rightarrow c_{-1} = \frac{3}{2}.$$

Значит искомый вычет равен
$$\operatorname*{res}_{z=1} ze^{1/(z-1)} = c_{-1} = \frac{3}{2}.$$

□

§13, №3(3) Найти $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)$, если

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right), \ \ a = 0.$$

Решение. Можно легко решить задачу аналогично предыдущему пункту: разложить функцию в ряд Лорана по степеням z, и найти, что $c_{-1} = 1$. А можно пойти другим путем: функция, вычет которой нам надо найти, регулярна в области $0 < |z| < \infty$, а значит по теореме о вычетах $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname*{res}_{\infty} f(z)$. А вычет в бесконечности найдем, используя свойство, что если функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, где функция $\varphi(\xi)$ регулярна в точке $\xi = 0$, то $\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\varphi'(0)$.

Так как функция $\varphi(\xi) = \sin(\xi)$ регулярна в нуле, то

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\varphi'(0) = -1 \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1.$$

□

§13, №5(6) Найти вычет функции $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$ во всех особых точках и в бесконечности.

Решение. Представим функцию в виде $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z+i)^2(z-i)^2}$. Тогда очевидно, что кроме бесконечности (которая является существенной осоенностью ввиду того, что для разных последовательностей стремящихся к бесконечности предел $f(z)$ будет разный) есть еще две особые точки – это $\pm i$, причем обе полюсы второго порядка.

Чтобы найти вычеты в этих точках, воспользуемся тем фактом, что если точка a полюс m-го порядка ($m > 1$) и функция $f(z)$ представима в виде $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z-a)^m}$, где $h(z)$ регулярная функция такая, что $h(a) \neq 0$, то вычет функции $f(z)$ в точке a равен

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{h^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

Сперва рассмотрим особую точку $z = i$, тогда

$$h(z) = \frac{\cos z}{(z+i)^2} \Rightarrow h'(z) = -\frac{2\cos z + (z+i)\sin z}{(z+i)^3} \Rightarrow h'(i) = -\frac{i}{4e} \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{h'(i)}{1!} = -\frac{i}{4e}.$$

Аналогично найдем вычет в точке $z = -i$:

$$h(z) = \frac{\cos z}{(z-i)^2} \Rightarrow h'(z) = -\frac{2\cos z + (z-i)\sin z}{(z-i)^3} \Rightarrow h'(i) = \frac{i}{4e} \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \frac{h'(i)}{1!} = \frac{i}{4e}.$$

Вычет в бесконечности легко находится, если воспользоваться тем фактом, что сумма вычетов во всех особых точках и в бесконечности равна нулю:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -\left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-i} f(z)\right) = -\left(\frac{i}{4e} - \frac{i}{4e}\right) = 0.$$

□

§14, №1(6) Вычислить интеграл от рациональной функции

$$\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2-7z+12)}.$$

Решение. Для нахождения этого интеграла воспользуемся теоремой Коши о вычетах, которая гласит, что если D – область в $\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой границей Γ, а функция $f(z)$ регулярна в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in D$, $k = \overline{1,n}$ (к их числу относится и точка $z = \infty$, если $\infty \in D$) и функция $f(z)$ непрерывна вплоть до границы Γ области D, то

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z),$$

где Γ^+ – положительно ориентированная относительно области D кривая Γ.

Контур Γ, задаваемый равенством $|z+i| = 2$ представляет собой окружность радиуса 2 с центром в точке $-i$, внутрь которого попадает только одна особая точка подынтегральной функции $z = 0$ – полюс второго порядка. Тогда искомое значение интеграла будет равно произведению $2\pi i$ на вычет подынтегральной функции в точке 0. Вычет найдем по формуле для полюса второго порядка:

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{z^2(z^2-7z+12)} = \left(\frac{1}{z^2-7z+12}\right)'\Bigg|_{z=0} = \frac{7}{144}.$$

Тогда ответ:

$$\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2-7z+12)} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{z^2(z^2-7z+12)} = \frac{7\pi i}{72}.$$

□

§14, №2 Вычислить интегралы

7) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{z\operatorname{tg} z}{(z^2-1)^2}dz.$

Внутрь контура $|z| = 3/2$ попадают две особые точки подынтегральной функции – это $z = 1$ и $z = -1$, обе полюсы второго порядка. Значит по теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{z\operatorname{tg} z}{(z^2-1)^2}dz = \oint\limits_{|z|=3/2} f(z)dz = 2\pi i\Big(\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-1} f(z)\Big).$$

Найдем вычеты в полюсах:

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \left(\frac{z\operatorname{tg} z}{(z+1)^2}\right)'\bigg|_{z=1} = \frac{1}{4\cos^2 1}, \quad \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \left(\frac{z\operatorname{tg} z}{(z-1)^2}\right)'\bigg|_{z=-1} = -\frac{1}{4\cos^2 1}.$$

Значит ответ

$$\oint\limits_{|z|=3/2} \frac{z\operatorname{tg} z}{(z^2-1)^2}dz = 0.$$

8) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5/2} \frac{z^2}{z-3}\sin\left(\frac{z}{z-2}\right)dz.$

Внутрь контура $|z| = 5/2$ попадает всего одна особая точка подынтегральной функции $f(z)$, но эта точка $z = 2$ является существенной особой точкой, поэтому, используя теорему о вычетах и теорему Коши, запишем:

$$\oint\limits_{|z|=5/2} \frac{z^2}{z-3}\sin\left(\frac{z}{z-2}\right)dz = \oint\limits_{|z|=5/2} f(z)dz = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -2\pi i\cdot\Big(\operatorname*{res}_{z=3} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z)\Big).$$

Вычет в точке $z = 3$ найдем по формуле для вычета в полюсе первого порядка:

$$\operatorname*{res}_{z=3} f(z) = \left(z^2\sin\frac{z}{z-2}\right)\bigg|_{z=3} = 9\sin 3.$$

Для нахождения вычета функции $f(z)$ в бесконечности воспользуемся тем фактом, что этот вычет равен $-c_{-1}$, где c_k – коэффициенты разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z. Разложим $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = z\frac{1}{1-3/z}\sin\left(\frac{1}{1-2/z}\right) = z\left(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\ldots\right)\sin\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\ldots\right) =$$

$$= z\left(1+\frac{3}{z}+\frac{9}{z^2}+\ldots\right)\left[\sin 1\cdot\cos\left(\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\ldots\right)+\cos 1\cdot\sin\left(\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\ldots\right)\right] =$$

$$= \left(z+3+\frac{9}{z}+\ldots\right)\left(\sin 1-\frac{2\sin 1}{z^2}+\frac{2\cos 1}{z}+\frac{4\cos 1}{z^2}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\Big(-2\sin 1+4\cos 1+6\cos 1+9\sin 1\Big)+\ldots = \frac{1}{z}\Big(7\sin 1+10\cos 1\Big)+\ldots$$

Значит вычет в бесконечности равен:

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_{-1} = -7\sin 1-10\cos 1.$$

Таким образом, искомый интеграл равен:

$$\oint\limits_{|z|=5/2} \frac{z^2}{z-3}\sin\left(\frac{z}{z-2}\right)dz = 2\pi i\cdot\big(7\sin 1 + 10\cos 1 - 9\sin 3\big).$$

18) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z+1)\cos\dfrac{i}{z}}{(2i-z)^2}dz.$

Ввиду того, что внутри контура $|z|=1$ лежит одна существенно особая точка $z=0$ подынтегральной функции $f(z)$, запишем:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z+1)\cos\dfrac{i}{z}}{(2i-z)^2}dz = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -2\pi i\cdot\left(\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(z)\right).$$

Оба вычета находятся с использованием соответсвующих формул для вычетов в бесконечно удаленной точке и в полюсе второго порядка:

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \left((z+1)\cos\frac{i}{z}\right)'\Bigg|_{z=2i} = \cos\frac{1}{2} + \frac{2-i}{4}\sin\frac{1}{2}.$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty}\Big[z\big(f(\infty)-f(z)\big)\Big] = -\lim_{z\to\infty}\frac{z(z+1)\cos\dfrac{i}{z}}{(2i-z)^2} = -1.$$

Тогда ответ:

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z+1)\cos\dfrac{i}{z}}{(2i-z)^2}dz = 2\pi i\cdot\left(1+\frac{i-2}{4}\sin\frac{1}{2} - \cos\frac{1}{2}\right).$$

23) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1-i|=2} \frac{z+i}{(z-i)\operatorname{sh}\dfrac{1}{2z}}dz.$

Внутри контура $|z+1-i|=2$ (это окружность на комплексной плоскости с центром в точке $(-1,1)$ радиуса 2) лежат слежующие особые точки подынтегральной функции: $z=i$ – полюс первого порядка, $z=0$ – неизолированная особая точка, так как к ней сходится последовательность особых точек $z_k=\dfrac{1}{2\pi i k}$. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{|z+1-i|=2} \frac{z+i}{(z-i)\operatorname{sh}\dfrac{1}{2z}}dz = \oint\limits_{|z+1-i|=2} f(z)dz = -2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{\infty} f(z).$$

Чтобы найти вычет функции $f(z)$ в бесконечности, разложим эту функцию в ряд Лорана:

$$f(z) = \left(1+\frac{i}{z}\right)\cdot\frac{1}{1-i/z}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}(1/2z)} = \left(1+\frac{i}{z}\right)\cdot\left(1+\frac{i}{z}-\frac{1}{z^2}+\ldots\right)\cdot\frac{1}{1/2z+1/48z^3+\ldots} =$$

$$= 2z\left(1+\frac{i}{z}\right)\cdot\left(1+\frac{i}{z}-\frac{1}{z^2}+\ldots\right)\cdot\frac{1}{1+1/24z^2+\ldots} =$$
$$(2z+2i)\cdot\left(1+\frac{i}{z}-\frac{1}{z^2}+\ldots\right)\cdot\left(1-\frac{1}{24z^2}+\ldots\right) = -\frac{49}{12}\cdot\frac{1}{z}+\ldots$$

Тогда коэффициент ряда Лорана равен $c_{-1} = -\dfrac{49}{12}$, значит ответ:

$$\oint\limits_{|z+1-i|=2} \frac{z+i}{(z-i)\operatorname{sh}\dfrac{1}{2z}}dz = -2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = 2\pi i\cdot c_{-1} = -\frac{49\pi i}{6}.$$

§14, №3(2) Сделав соответствующую замену переменной, свести данный интеграл к интегралу по замкнутому контуру в $\mathbb{C}$ и вычислить его:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} \qquad (a>b>0).$$

§23, №1 Вычислить интегралы:

5) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx.$

Рассмотрим интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{z^4+1}{z^6+1}dz = \int\limits_{\Gamma_R} \frac{z^4+1}{z^6+1}dz + \int\limits_{-R}^{R} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx,$$

где $\Gamma_R = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$ и $\gamma = \Gamma_R \cup [-R,R]$. Так как подынтегральная функция $f(z) = \dfrac{z^4+1}{z^6+1}$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq 1\}$ и

$$\lim_{R\to+\infty} R\cdot M(R) = 0, \text{ где } M(R) = \max_{z\in\Gamma_R}|f(z)|, \text{ то } \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{z^4+1}{z^6+1}dz = 0.$$

Тогда, так как исходный интеграл сходится, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \oint\limits_{\gamma} \frac{z^4+1}{z^6+1}dz = 2\pi i\cdot\sum_{\operatorname{Im} z_k\geq 0}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Особые точки функции $f(z)$ – это $\{\sqrt[6]{-1}\} = \left\{\exp\left(\dfrac{\arg(-1)+2\pi k}{6}\right) \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\} = \{e^{-\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{\pi}{6}i}, e^{\frac{\pi}{2}i}, e^{\frac{5\pi}{6}i}, e^{\frac{7\pi}{6}i}, e^{\frac{3\pi}{2}i}\}$. При этом в верхней полуплоскости лежат всего три из них: $z_1 = e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i}$ и $z_3 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$. Так как все эти особые точки являются полюсами первого порядка для функции $f(z)$, которая представима в виде $f(z) = \dfrac{z^4+1}{z^6+1} = \dfrac{h(z)}{g(z)}$, где $h(z) = z^4+1$ и $g(z) = z^6+1$ регулярные функции такие, что $g(z_k) = 0$ и $g'(z_k) \neq 0$, то вычеты в этих точках можно найти по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{h(z_k)}{g'(z_k)} = \frac{z_k^4+1}{6z_k^5} = \frac{1}{6z_k} + \frac{1}{6z_k^5}.$$

Значит ответ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx = \frac{2\pi i}{6} \cdot \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{1}{z_k} + \frac{1}{z_k^5} \right) = \frac{2\pi i}{3} \big(e^{-\frac{\pi}{6}i} + e^{-\frac{\pi}{2}i} + e^{-\frac{5\pi}{6}i} \big) =$$

$$= \frac{2\pi i}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} - i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = \frac{4\pi}{3}.$$

7) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+16)}.$

Аналогично предыдущему номеру, представим искомый интеграл в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+16)} = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+16)} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+9)(z^2+16)} - \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+9)(z^2+16)} \right] = 2\pi i \cdot \sum_{\operatorname{Im} z_k \geq 0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Здесь

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+9)(z^2+16)}, \quad \Gamma_R = \{ z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R \}, \;\; \gamma = \Gamma_R \cup [-R, R].$$

У функции $f(z)$ в верхней полуплоскости две особые точки – это $z_1 = 3i$ и $z_2 = 4i$. Так как эти особые точки являются полюсами первого порядка для функции $f(z)$, которая представима в виде $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+9)(z^2+16)} = \dfrac{h(z)}{g(z)}$, где $h(z) = 1$ и $g(z) = (z^2+9)(z^2+16)$ регулярные функции такие, что $g(z_k) = 0$ и $g'(z_k) \neq 0$, то вычеты в этих точках можно найти по формуле

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{h(z_k)}{g'(z_k)} = \frac{1}{2z_k(z_k^2+16) + 2z_k(z_k^2+9)}.$$

Таким образом, искомый интеграл равен

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+16)} = 2\pi i \left(\frac{1}{6i(16-9)} + \frac{1}{8i(9-16)} \right) = \frac{\pi}{84}.$$

§23, №2 Вычислить интегралы

8) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5} dx.$

Ввиду сходимости заданного интеграла, его можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5} dx = \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5} dx =$$

$$= \operatorname{Im}\left[\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-3)}{x^2+4x+5}e^{i(x-1)}dx\right] = \operatorname{Im}\left[e^{-i}\cdot\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-3)}{x^2+4x+5}e^{ix}dx\right].$$

Пусть $\Gamma_R = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| = R\}$ и $\gamma = \Gamma_R \cup [-R, R]$, тогда

$$\int\limits_{-R}^{R}\frac{(x-3)e^{ix}}{x^2+4x+5}dx = \oint\limits_{\gamma}\frac{(z-3)e^{iz}}{z^2+4z+5}dz - \int\limits_{\Gamma_R}\frac{(z-3)e^{iz}}{z^2+4z+5}dz = 2\pi i\cdot\sum_{\operatorname{Im} z_k\geq 0}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z),$$

где $f(z) = \dfrac{(z-3)e^{iz}}{z^2+4z+5} = g(z)e^{iz}$. Так как функция $g(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq \sqrt{5}\}$ и $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = 0$, где $M(R) = \max\limits_{z\in\Gamma_R}|g(z)|$, то лемма Жордана гарантирует, что

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{(z-3)e^{iz}}{z^2+4z+5}dz = 0.$$

Таким образом, устремляя R в бесконечность, найдем:

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-3)}{x^2+4x+5}e^{ix}dx = 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=-2+i} f(z) = \frac{\pi}{e}(i-5)e^{-2i} \Rightarrow$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5}dx = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{e}(i-5)e^{-3i}\right) = \frac{\pi}{e}(\cos 3 + 5\sin 3).$$

16) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(1-2x)}{x^2+4}dx.$

Аналогично пердыдущему пункту, используем лемму Жордана:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(1-2x)}{x^2+4}dx = \operatorname{Re}\left[\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{i(2x-1)}}{x^2+4}dx\right] = \operatorname{Re}\left[e^{-i}\cdot\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{2ix}}{x^2+4}dx\right] =$$

$$= \operatorname{Re}\left(e^{-i}\cdot 2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{z=2i} f(z)\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{e^4}\cdot i(\cos 1 - i\sin 1)\right) = \frac{\pi}{e^4}\sin 1.$$

20) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin(2-x)}{(x^2+2)^2}dx.$

Снова воспользуемся леммой Жордана:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin(2-x)}{(x^2+2)^2}dx = -\operatorname{Im}\left[e^{-2i}\cdot\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{ix}}{(x^2+2)^2}dx\right] = -\operatorname{Im}\left[2\pi i\cdot e^{-2i}\cdot\operatorname*{res}_{z=\sqrt{2}i} f(z)\right] =$$

$$-\operatorname{Im}\left[2\pi i\cdot e^{-2i}\cdot\left(\frac{z^3e^{iz}}{(z+\sqrt{2}i)^2}\right)'\Bigg|_{z=\sqrt{2}i}\right] = \frac{(\sqrt{2}-2)\pi\cos 2}{2e^{\sqrt{2}}}.$$

T1 Вычислить интеграл
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-3ix+4}dx.$$

Решение. Этот интеграл можно вычислить двумя способами. Первый из них заключается в домножении числителя и знаменателя подынтегральной функции на выражение, сопряженное знаменателю, таким образом мы сведем задачу к той, которую уже решали:
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-3ix+4}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+4)+3i}{(x^2+4)^2+9x^2}\sin x\cdot dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+4)^2+9x^2}\sin x\cdot dx +$$
$$+3i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+4)^2+9x^2}dx = \operatorname{Im}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+4)e^{ix}}{(x^2+4)^2+9x^2}dx\right] + 3i\cdot\operatorname{Im}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+4)^2+9x^2}dx\right].$$

Второй способ заключается в представлении синуса через мнимые экспоненты, а затем использовании леммы Жордана:
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-3ix+4}dx = \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-3ix+4}dx - \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2-3ix+4}dx =$$
$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-3ix+4}dx - \frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+3ix+4}dx = \frac{2\pi i}{2i}\cdot\operatorname*{res}_{z=4i}\frac{e^{ix}}{x^2-3ix+4} -$$
$$-\frac{2\pi i}{2i}\cdot\operatorname*{res}_{z=i}\frac{e^{ix}}{x^2+3ix+4} = \frac{\pi i}{5}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^4}\right).$$

□

T2 Используя равенство $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, вычислить интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-ix^2}dx$.

§16, №3 Вычислить приращение аргумента функции $f(z)=z^2+1$ вдоль ориентированной кривой γ, заданной в виде $z(t)=x(t)+iy(t)$, где
$$x(t)=5\cos t,\quad y(t)=2\sin t,\qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Решение. Используя логарифмическое свойство приращения аргумента функции вдоль кривой, получим:
$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg(z+i)(z-i) = \Delta_\gamma \arg(z-i) + \Delta_\gamma \arg\big(z-(-i)\big).$$

Приращение $\Delta_\gamma \arg(z-i)$ представляет собой угол, который образуют два вектора: один с началом в точке i и концом в точке кривой γ при $t=0$ и второй с началом в точке i и концом в точке кривой γ при $t=\dfrac{\pi}{2}$, причем, так как кривая ориентирована, то этот угол необходимо взять с правильным знаком, соответствующим изменению параметра t от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Кривая γ представляет собой эллипс, следовательно этот угол равен $\pi-\operatorname{arctg}5$. Аналогично приращение $\Delta_\gamma \arg\big(z-(-i)\big)$ представляет собой угол, который образуют два вектора: один с началом в точке $-i$ и концом в точке кривой γ при $t = 0$ и второй с началом в точке $-i$ и концом в точке кривой γ при $t = \dfrac{\pi}{2}$, это приращение равно $\operatorname{arctg} 5$. Складывая найденные приращения, получим ответ:

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg(z-i) + \Delta_\gamma \arg\big(z-(-i)\big) = \pi - \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} 5 = \pi.$$

$\square$

§16, №5 Вычислить приращение аргумента функции $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-4}$ вдоль ориентированной кривой γ, заданной в виде $z(t) = x(t) + iy(t)$, где

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = 2\sin t, \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Решение. Используя логарифмическое свойство приращения аргумента функции вдоль кривой, получим:

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg \frac{(z-i)(z+i)}{(z-2)(z+2)} = \Delta_\gamma \arg(z-i) + \Delta_\gamma \arg\big(z-(-i)\big) - \Delta_\gamma \arg(z-2) - \Delta_\gamma \arg\big(z-(-2)\big).$$

Кривая γ представляет собой эллипс. Аналогично предыдущей задаче, найдем все приращения:

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg \frac{(z-i)(z+i)}{(z-2)(z+2)} = \Delta_\gamma \arg(z-i) + \Delta_\gamma \arg\big(z-(-i)\big) - \Delta_\gamma \arg(z-2) + \Delta_\gamma \arg\big(z-(-2)\big) =$$

$$= \pi + \pi - \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi.$$

$\square$

§16, №7 Вычислить приращение аргумента функции $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch}^2 z}{z}$ вдоль ориентированной замкнутой кривой, задаваемой уравнением $|x| + |y| = 3$, при однократном ее обходе по часовой стрелке.

§17, №3 Существуют ли регулярные ветви в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ у многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2 + z)$?

Решение. Воспользуемся следующим критерием существования регулярных ветвей многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$. Если функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна и $f(z) \neq 0, \forall\, z \in G$, то для существования в области G регулярных ветвей многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\mathring{\gamma} \subset G$ выполнялось условие $\Delta_{\mathring{\gamma}} \arg f(z) = 0$.

В качестве замкнутой кусочно-гладкой кривой $\mathring{\gamma} \subset G$ рассмотрим положительно ориентированную окружность радиуса $R > 1$ с центром в нуле. Функция $f(z) = z(z+1) \neq 0$ и регулярна в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Тогда

$$\Delta_{\mathring{\gamma}} \arg f(z) = \Delta_{\mathring{\gamma}} \arg z + \Delta_{\mathring{\gamma}} \arg(z+1) = 2\pi + 2\pi = 4\pi \neq 0.$$

Следовательно, можно заключить, что у многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2 + z)$ не существует регулярных ветвей в области $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ так как не выполнено необходимое условие существования регулярных ветвей многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$. $\square$

§17, №4 Существуют ли регулярные ветви в области $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ у многозначной функции $\{\sqrt{z^2+z}\}$?

Решение. Воспользуемся следующим критерием существования регулярных ветвей многозначной функции $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$. Если функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна и $f(z) \neq 0$, $\forall\ z \in G$, то для существования в области G регулярных ветвей многозначной функции $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$ существовало целое число $k(\overset{\circ}{\gamma})$ такое, что $\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = 2\pi n \cdot k(\overset{\circ}{\gamma})$.

В качестве замкнутой кусочно-гладкой кривой $\overset{\circ}{\gamma} \subset G$ рассмотрим положительно ориентированную окружность радиуса $R > 1$ с центром в нуле. Функция $f(z) = z(z+1) \neq 0$ и регулярна в области $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Тогда

$$\Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg f(z) = \Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg z + \Delta_{\overset{\circ}{\gamma}} \arg(z+1) = 2\pi + 2\pi = 4\pi = 2\pi n \cdot k,\ \ k = 2.$$

Следовательно, можно заключить, что у многозначной функции $\{\sqrt{z^2+z}\}$ существуют регулярные ветви в области $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ так как выполнено достаточное условие существования регулярных ветвей многозначной функции $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$. □

§17, №8 Существуют ли регулярные ветви в области $G = \mathbb{C} \setminus [0,+\infty)$ у многозначной функции $\{z^z\}$?

§18, №9 Пусть $\varphi(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[3]{1-z^2}\}$ в области G, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = 1$. Найти значение $\varphi(-3)$ в случаях, когда область G:

1) Вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[1,+\infty]$ и $[-1,-1+i\infty]$.

   Чтобы найти значение регулярной ветви многозначной функции $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ в точке, воспользуемся следующим утверждением. Пусть в области G задана регулярная функция $f : G \to \mathbb{C}$ такая, что $f(z) \neq 0$, $\forall\ z \in G$, если в области G существуют регулярные ветви $\varphi(z) \in \{\sqrt[n]{f(z)}\}$, то для любых точек $a, b \in G$ справедливо выражение

   $$\varphi(b) = \varphi(a) \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|} \cdot \exp\left(\frac{i}{n} \cdot \Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z)\right),$$

   где γ_{ab} – произвольная, лежащая в области G кусочно-гладкая ориентированная кривая с началом в точке a и концом в точке b.

   Функция $f(z) = 1 - z^2$ регулярна и не обращается в ноль области G, значит действительно можно воспользоваться сформулированным утверждением. В качестве кривой $\gamma_{ab} = \gamma$ рассмотрим полуокружность, находящуюся в нижней полуплоскости с центром в точке $-1{,}5$ и радиуса $1{,}5$, эта кривая будет принадлежать области G и будет соединять точки $a = 0$ и $b = -3$. Тогда

   $$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg(1-z^2) = \Delta_\gamma \arg(z-1) + \Delta_\gamma \arg(z+1) = 0 + (-\pi) = -\pi.$$

   По выписанной выше формуле найдем

   $$\varphi(-3) = \varphi(1) \cdot \sqrt[3]{\left|\frac{f(-3)}{f(1)}\right|} \cdot \exp\left(\frac{i}{3}\Delta_\gamma \arg f(z)\right) = \sqrt[3]{8} \cdot \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

3) Вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[1, 1 - i\infty]$ и $[-1, -1 - i\infty]$.

Аналогично предыдущему пункту, воспользуемся формулой

$$\varphi(b) = \varphi(a) \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|} \cdot \exp\left(\frac{i}{n} \cdot \Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z)\right).$$

Но теперь, так как область G другая, в качестве кривой $\gamma_{ab} = \gamma$ выберем полуокружность, находящуюся в верхней полуплоскости с центром в точке $-1{,}5$ и радиуса $1{,}5$, эта кривая будет принадлежать области G и будет соединять точки $a = 0$ и $b = -3$. Тогда изменение аргумента будет равно

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg(1 - z^2) = \Delta_\gamma \arg(z - 1) + \Delta_\gamma \arg(z + 1) = 0 + \pi = \pi.$$

Следовательно, искомое значение равно

$$\varphi(-3) = \varphi(1) \cdot \sqrt[3]{\left|\frac{f(-3)}{f(1)}\right|} \cdot \exp\left(\frac{i}{3}\Delta_\gamma \arg f(z)\right) = \sqrt[3]{8} \cdot \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

§18, №24 Пусть $\varphi(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ в области, изображенной на рисунке 1, удовлетворяющая условию $\varphi(1) = 0$. Найти $\varphi'(2)$. Разложить функцию $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = -3$ по степеням $z + 3$.

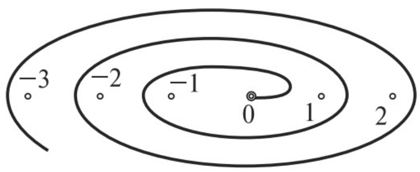

Рис. 1

Решение. Для нахождения значения $\varphi'(2)$ не важно, на какой именно ветви многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ мы находимся, так как для всех ветвей функции $\operatorname{Ln} f(z)$ производная вычисляется одинаково:

$$\big(\operatorname{Ln} f(z)\big)' = \frac{f'(z)}{f(z)} \Rightarrow (\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z} \Rightarrow \varphi'(2) = \frac{1}{2}.$$

Чтобы найти разложение в ряд Тейлора функции $\varphi(z)$ в окрестности точки $z = -3$ по степеням $z + 3$, сперва разложим $\varphi'(z)$, так как эту функцию мы уже нашли:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{-3 + (z + 3)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z+3}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 3)^n}{3^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 3)^n}{3^{n+1}}.$$

Полученный ряд сходится при $|z + 3| < 3$, то есть область сходимости представляет собой круг радиуса 3 с центром в точке -3. В круге сходимости можно почленно проинтегрировать ряд, тогда получим:

$$\varphi(z) = C - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 3)^{n+1}}{3^{n+1}(n + 1)} \Rightarrow C = \varphi(-3).$$

Чтобы найти значение регулярной ветви многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$ в точке, воспользуемся следующим утверждением. Пусть в области G задана регулярная функция $f : G \to \mathbb{C}$ такая, что $f(z) \neq 0$, $\forall\ z \in G$, если в области G существуют регулярные ветви $\varphi(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$, то для любых точек $a, b \in G$ справедливо выражение

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right| + i \cdot \Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z),$$

где γ_{ab} – произвольная, лежащая в области G кусочно-гладкая ориентированная кривая с началом в точке a и концом в точке b.

Выберем в качестве кривой $\gamma_{ab} = \gamma$ лежащей в заданной области и соединяющей точки $a = 1$ и $b = -3$ спираль. Тогда

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg z = 3\pi \Rightarrow \varphi(-3) = \ln 3 + 3i\pi.$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$\varphi(z) = \ln 3 + 3i\pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{3^n n}.$$

При этом стоит отметить, что функция $\varphi(z)$ совпадает с найденным рядом не во всем круге сходимости ряда, а на меньшей области. $\square$

§18, №25 Пусть $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[3]{z}\}$ в области, изображенной на рисунке 1, такая, что $g(-1) = -1$. Найти $g(-2)$ и $g'(-3)$. Разложить $g(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 2$ по степеням $z - 2$.

Решение. По формуле для нахождения значения регулярной ветви многозначной функции $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ в точке найдем:

$$g(b) = g(a) \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|} \cdot \exp\left(\frac{i}{n} \cdot \Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z)\right) \Rightarrow g(-2) = -\sqrt[3]{2} e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

здесь γ_{ab} – кривая, лежащая в заданной в условии области и соединяющая точки $a = -1$ и $b = -2$, а $f(z) = z$.

Найдем занчение производной функции $g(z)$ в точке -3:

$$g'(-3) = \frac{f'(-3)}{3g^2(-3)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} e^{-\frac{8\pi i}{3}}.$$

Далее разложим функцию $g(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 2$ по степеням $z - 2$:

$$g(z) = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2 + (z-2)} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{z-2}{2}} =$$

$$= g(2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/3}^n \frac{(z-2)^n}{2^n} = -\sqrt[3]{2} e^{i\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_{1/3}^n \frac{(z-2)^n}{2^n}.$$

$\square$

§18, №27 Пусть $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[4]{z}\}$ в плоскости с разрезом по лучу $[0,+\infty)$ такая, что $g(1+i\cdot 0)=1$. Найти $g(1-i\cdot 0)$, $g(16-i\cdot 0)$, $g(-16)$, $g'(-16)$, $g''(-16)$.

Решение. Используя формулу для вычисления значения регулярной ветви многозначной функции $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ в точке, получим:

$$g(1-i\cdot 0)=\exp\left(\frac{2\pi i}{4}\right)=i,\quad g(16-i\cdot 0)=\sqrt[4]{16}\exp\left(\frac{2\pi i}{4}\right)=2i.$$

$$g(-16)=\sqrt[4]{16}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)=2\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2},\quad g'(-16)=\frac{1}{4g^3(-16)}=\frac{1}{32}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right).$$

$$g''(z)=\big(g'(z)\big)'=-\frac{3}{4}\cdot\frac{g'(z)}{g^4(z)}\Rightarrow g''(-16)=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{32}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right)\cdot\frac{1}{16}e^{-\pi i}=\frac{3}{2^{11}}\exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right).$$

□

§18, №36 Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}(2-z)$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $z=2e^{it}$, $0\le t\le\frac{3\pi}{2}$, и лучу $z=-2i+t$, $t\ge 0$, такая, что $\mathrm{Im}\,h(-3)=0$. Вычислить $h(-2-0)$, $h(-2+0)$, $h(2+i)$, $h'(0)$. Разложить функцию $h(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z=-1$ и найти радиус сходимости этого ряда. Нарисовать наибольшую область, в которой ряд сходится к функции $h(z)$.

Решение. Так как для $h(z)\in\mathrm{Ln}\,f(z)$ верно

$$h(z)=\ln|f(z)|+i(\arg f(z)+2\pi k),$$

то, используя условие $\mathrm{Im}\,h(-3)=0$, найдем значение k, которое определяет конкретную ветвь функции $\mathrm{Ln}(z-2)$

$$\mathrm{Im}\,h(-3)=\mathrm{Im}\,\big(\ln 5+i(\arg 5+2\pi k)\big)=\arg 5+2\pi k=2\pi k=0\Rightarrow k=0,$$

следовательно

$$h(-3)=\ln|f(-3)|+i\big(\arg f(-3)+2\pi k\big)=\ln 5+i\cdot(0+2\pi\cdot 0)=\ln 5.$$

Далее, аналогично предыдущим номерам, используя формулу для нахождения значения регулярной ветви многозначной функции $\mathrm{Ln}\,f(z)$ в точке, получим:

$$h(-2-0)=\ln 5+\ln\left(\frac{4}{5}\right)+i\cdot 0=\ln 4,\quad h(-2+0)=\ln 5+\ln\left(\frac{4}{5}\right)+i\cdot(-2\pi)=\ln 4-2\pi i.$$

$$h(2+i)=\ln 5+\ln\left(\frac{1}{5}\right)+i\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}i,\quad h'(0)=-\frac{1}{2-z}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{2}.$$

Разложим $h(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z=-1$:

$$\mathrm{Ln}(2-z)=\mathrm{Ln}\,\big(3-(z+1)\big)=\mathrm{Ln}\,3+\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z+1}{3}\right)=h(3)+\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z+1}{3}\right)=$$

$$=\ln 3-2\pi i-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n\cdot n}.$$

Ряд сходится при $\left|\frac{z+1}{3}\right|<1$, значит радиус сходимости равен $R=3$. □

§18, №37 Пусть $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной фукнции $\{\sqrt[3]{z(2-z)^2}\}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[0,2]$, такая, что $g(1+i\cdot 0)=1$. Найти $g(1-i\cdot 0)$, $g(-3)$, $g'(3)$. Разложить $g(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z=\infty$.

Решение. Выпишем а общем виде приращение аргумента функции $f(z)=z(2-z)^2$:

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = \Delta_\gamma \arg z + 2\Delta_\gamma \arg(z-2).$$

Далее найдем

$$g(1-i\cdot 0) = 1\cdot 1\cdot \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right), \quad g(-3) = \sqrt[3]{75}\exp\left(\frac{\pi i}{3}\right).$$

$$g'(z) = \frac{\left(z(2-z)^2\right)'}{3g^2(z)} \Rightarrow g'(3) = \frac{1+6}{\sqrt[3]{9}e^{-\frac{4\pi i}{3}}} = \frac{7\sqrt[3]{3}}{9}\exp\left(\frac{4\pi i}{3}\right).$$

□

§18, №38 Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{z-3}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1,3]$, такая, что $h(1+i\cdot 0)=0$. Найти $h(1-i\cdot 0)$, $g(2)$, $g'(-3)$. Разложить $h(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z=5$ и в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z=\infty$. Найти области сходимости этих рядов.

§18, №46 Пусть $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной фукнции $\{\sqrt[6]{z^4+4}\}$ в плоскости с разрезами по лучам $\{z \mid z=i+t, t\geq 1\}$ и $\{z \mid z=-i+t, t\leq 1\}$, выделяемая условием $g(\sqrt{2}i)=-\sqrt{2}$. Найти $g(0)$. Разложить $g(z)$ в ряд Тейлора с центром в точке $z=0$ и найти радиус сходимости этого ряда. Вычислить отношение суммы ряда к $g(z)$ при $z=-\dfrac{6}{5}i$.

T3 Доказать, что функция

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{z}}\,dt, \;\; \operatorname{Re} z > 0$$

является регулярной ветвью многозначной функции $\{\sqrt{\pi z}\}$. Разложить $F(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=1$ и указать радиус сходимости этого ряда.

§19, №1(4) Для всех регулярных в области $G=\{z:|z|>1\}$ ветвей $g_k(z)\in\{\sqrt{4z^2+4z+3}\}$ вычислить интеграл по положительно ориентированной границе ∂G области G

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{dz}{g_k(z)}.$$

Решение. Точки ветвления функции $g(z)$ – это нули квадратного трехчлена, то есть точки

$$4z^2+4z+3=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i \in G.$$

Внутри единичного круга в цетром в нуле есть точки ветвления функции $g(z)$, то есть есть особенности неоднозначного характера. Значит, для вычисления интегралов по замкнутому контуру от регулярных ветвей функции $\{\sqrt{4z^2+4z+3}\}$ необходимо вычислять вычеты вне этого круга, то есть в области G.

Так как заданая функция является квадратным корнем, то у нее существует равно две регулярные ветви, отличающиеся лишь знаком. Рассмотрим эти ветви на действительной оси при $x > 1$:

$$g_1(x) = \sqrt{4x^2+4x+3}, \quad g_2(x) = -\sqrt{4x^2+4x+3}.$$

Сперва рассмотрим функцию $g_1(z)$. Ввиду того, что в области G у обеих ветвей нет никаких особенностей, то, по теореме Коши о вычетах:

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{dz}{g_1(z)} = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\infty} \frac{1}{g_1(z)} = 2\pi i \cdot c_{-1},$$

где c_{-1} – коэффициент при $\dfrac{1}{z}$ в разложении $\dfrac{1}{g_1(z)}$ в ряд Лорана. Разложим функцию $\dfrac{1}{g_1(x)}$ в ряд Тейлора при $x \to +\infty$:

$$\frac{1}{g_1(x)} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+3}} = \frac{1}{2x}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x} \cdot \left(1 - \frac{1}{2x} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \ldots$$

В силу теоремы единственности, получим, что коэффициент при $\dfrac{1}{z}$ в разложении функции $\dfrac{1}{g_1(z)}$ в ряд Лорана в области G равен $\dfrac{1}{2}$. Значит

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{dz}{g_1(z)} = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\infty} \frac{1}{g_1(z)} = 2\pi i \cdot c_{-1} = \pi i.$$

Так как функция $g_2(z)$ отличается от $g_1(z)$ только знаком, то, проведя аналогичные рассуждения, получим:

$$\oint\limits_{\partial G} \frac{dz}{g_2(z)} = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\infty} \frac{1}{g_2(z)} = 2\pi i \cdot c_{-1} = -\pi i.$$

□

§19, №8 Пусть $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z+5)$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\left\{z \mid z = 5e^{it}, -\dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi\right\}$ и лучу $\{z \mid z = -5i - t, t \ge 0\}$, такая, что $\operatorname{Im} g(6) = -2\pi$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=4,5} \frac{g(z)}{z^2(z+4)} dz.$$

§19, №11 Пусть $g(z)$, $g(0) = \ln 4 - i\pi$, – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z-4)$ в плоскости с разрезом по отрезку $[3, 4]$ и лучу $\{z \mid z = 3 + it, 0 \le t < +\infty\}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-7|=2,5} \frac{zg(z)}{(z-6)(z-5)} dz.$$

§19, №24 Пусть $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt{2z^2+1}\}$ в плоскости с разрезом по дуге $\left\{z : |z| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{Re} z \geq 0\right\}$ такая, что $g(0) = 1$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-7|=2{,}5} \frac{zdz}{(z+2)(g(3)+3)}.$$

Решение. □

§19, №25 Пусть $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{2i-z}{2i+z}$ в плоскости с разрезом по дуге $\{z : |z| = 2, \operatorname{Re} z \leq 0\}$ такая, что $g(2) = \dfrac{\pi i}{2}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z+4i)(3g(z)+2\pi i)}.$$

§19, №42 Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\dfrac{3+z}{iz-3}$ в плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \left\{z : |z| = 3, -\dfrac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi\right\}$ такая, что $h(\infty) = -\dfrac{5}{2}\pi i$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(h^2(z)+\pi^2)^2}.$$

§19, №46 Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(z^2-1)$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z : |z| = 1, -\pi \leq \arg z \leq 0\}$ и $\gamma_2 = \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 1\}$, причем $\operatorname{Im} h(-2i) = 3\pi$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-3i|=22/7} z\left(\frac{h(z)}{h(z)-\pi i}\right)^2 dz.$$

§19, №47 Пусть $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt[4]{z^2-1}\}$ в комплексной плоскости с разрезом по кривой $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где $\gamma_1 = \{z : |z| = 1, \pi \leq \arg z \leq 2\pi\}$ и $\gamma_2 = \{z : \operatorname{Im} z \leq -1, \operatorname{Re} z = 0\}$, причем $g(2) = \sqrt[4]{3}$. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z-i|=5/4} z\left(\frac{g(z)}{g(z)-e^{\pi i/4}}\right)^2 dz.$$

§23, №5 Вычислить интегралы:

3) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-3)^2\sqrt{x-x^2}}.$

5) $\displaystyle\int\limits_0^5 \frac{\sqrt[4]{x(5-x)^7}}{x^2-5x-6}dx.$

§23, №6 Вычислить интегралы:

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}dx.$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}(x+1)^2}.$

8) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x-2)}{(x^2-1)\sqrt{x-2}}dx.$

§23, №7 Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx.$

7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}dx.$

§15, №1 Найти число корней уравнений в указанных областях:

2) $2z^4 - 5z + 2 = 0$, $\{z : |z| < 1\}$.

3) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$, $\{z : |z| < 1\}$.

7) $z^6 - 6z + 10 = 0$, $\{z : |z| > 1\}$.

8) $z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0$, $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

§15, №4 Доказать, что при $\lambda > 1$ уравнение $z = \lambda - e^{-z}$ имеет в верхней полуплоскости $\{z \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$ ровно один корень (и к тому же действительный).

T4 Найти число корней многочлена $2z^6 + 2z^3 - 5z - 2$ в круге $|z| < 1$.

T5 Применяя теорему Руше и теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} z^6 \left(\frac{1}{3z^4 + z + 1}\right) dz.$$

5 Третье задание

§26, №3 Пусть $n \geq 2$ – целое число, а α – произвольное действительное число. Доказать, что отображение $z^n + ne^{i\alpha}z$ конформно в круге $\{z : |z| < 1\}$.

§26, №4 Доказать, что отображение $z^2 + az$ конформно в полуплоскости $\{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ в том и только том случае, когда выполняется неравенство $\operatorname{Im} a \geq 0$.

§26, №10 Доказать, что для конформности квадратного трехчлена $az^2 + bz + c$ в выпуклой области D необходимо и достаточно, чтобы этот трехчлен был конформным в каждой точке области D (воспользоваться тем, что что середина отрезка, соединяющего любые две точки области D, также лежит в области D).

§27, №3(2) Найти образ круга $\{z : |z-1| < 2\}$ при отображении $w = \dfrac{2iz}{z+3}$.

Доказательство. Заданное отображение является дробно-линейным, значит образ границы заданной области будет прямая или окружность. Рассмотрим три точки на границе области: $z_1 = -1$, $z_2 = 3$ и $z_3 = 1 - 2i$. Образами этих точек будут точки

$$w_1 = w(z_1) = -i, \;\; w_2 = w(z_2) = i, \;\; w_3 = w(z_3) = 1.$$

Следовательно, граница новой области – окружность радиуса 1 с центром в точке 0. Чтобы выяснить, какая именно область с найденной границей будет ответом (внутренность или внешность круга), рассмотрим точку, лежащую внутри заданной области, например $z_4 = 0$, тогда точка $w_4 = w(z_4) = 0$ лежит внутри круга, а значит искомый образ круга $\{z : |z-1| < 2\}$ – это множество $\{w : |w| < 1\}$. □

§27, №6(2) Найти дробно-линейную функцию $w(z)$, удовлетворяющую условию $w(0) = 0$, $w(1+i) = 2+2i$, $w(2i) = 4$. Найти образ круга $\{z : |z-i| < 1\}$ при отображении, которое задается этой функцией.

§27, №7(3) Отыскать дробно-линейную функцию $w(z)$, удовлетвоющую условиям $w(i) = -2$, $w(\infty) = 2i$, $w(-i) = 2$. Найти образ полуплоскости $\{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ при отображении, которое задается этой функцией.

§27, №8 Найти функцию $w(z)$, конформно отображающую область D на область D_1 и удовлетворяющую указанным условиям:

2) $D = \{z : |z| < 1\}$, $D_1 = \{w : |w| < 1\}$, $w(z_0) = w_0, \arg w'(z_0) = \alpha$ $(|z_0| < 1, |w_0| < 1)$.

4) $D = \{z : |\operatorname{Im} z| > 0\}$, $D_1 = \{w : |w| < 1\}$, $w(z_0) = w_0, \arg w'(z_0) = \alpha$ $(\operatorname{Im} z_0 > 0, |w_0| < 1)$.

§27, №9(2) Найти общий вид конформного отображения области $\{z : |z-5| > 4, \operatorname{Re} z > 0\}$ на кольцо $\{w : 1 < |w| < R\}$.

§28, №5

§28, №10

§28, №12

§28, №13

§28, №19

§28, №20

§29, №3

§29, №4

§29, №5

T1 Решить классическую задачу Дирихле в единичном крге с заданным граничным условием:

а) $\Delta u = 0,\ u(e^{i\theta}) = \dfrac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}$.

б) $\Delta u = 0,\ u(e^{i\theta}) = \dfrac{4+5\cos\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$.

T2 Решить общую задачу Дирихле в области $G = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ с заданным граничным условием:

$$\Delta u = 0, z \in G; \quad u\big|_{\operatorname{Im} z=0} = 0, u\big|_{|z|=1} = 1.$$

Список литературы

[1] М.И. Шабунин, Е.С. Половинкин, М.И. Кралов. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Москва: Бином, 2006. (все номера задач указаны по этой книге).

[2] М.И Карлов. Курс видеолекций «Теория функций комплексного переменного». https://mipt.lectoriy.ru/course/Maths-ComplexAnalysis-13L.