Линдеманн Никита, 874

$$I = \int_1^2 \left(5(t\dot{x}(t))^2 + 3t x(t)\dot{x}(t) + 4x^2(t)\right)dt \to min$$

$$s.t. \quad x(1)=0, \quad x(2)=1$$

$$L = 5t^2\dot{x}^2 + 3tx\dot{x} + 4x^2$$

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$$3t\dot{x} + 8x - \frac{d}{dt}(10t^2\dot{x} + 3tx) = 0$$

$$\cancel{3t\dot{x}} + 8x - 20t\dot{x} - 10t^2\ddot{x} - 3x \cancel{- 3t\dot{x}} = 0$$

$$2t^2\ddot{x} + 4t\dot{x} - x = 0 \quad \text{- ур-ние Эйлера}$$

$$t = e^p \Rightarrow \dot{x} = x'_p e^{-p}, \quad \ddot{x} = e^{-2p}(x''_{pp} - x'_p)$$

$$2e^{2p}e^{-2p}(x''_{pp} - x'_p) + 4e^p e^{-p}x'_p - x = 0$$

$$2x''_{pp} - 2x'_p + 4x'_p - x = 0$$

$$2x''_{pp} + 2x'_p - x = 0$$

$$2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4\cdot 2}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x(p) = C_1 \exp\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}p\right) + C_2 \exp\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}p\right)$$

$$x(t) = C_1 t^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}} + C_2 t^{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}}$$

2) $x(1)=0$, $x(2)=1$ $\Rightarrow \hat{x} = \dfrac{2^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \cdot t^{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}}\left(t^{\sqrt{3}}-1\right)}{2^{\sqrt{3}}-1}$

3) $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}} = 10t^2 > 0 \quad \forall t \in [1,2] \Rightarrow$ условие Лежандра выполнено

4) $-\dfrac{d}{dt}\left(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{\dot{x}x}h\right) + \hat{L}_{x\dot{x}}\dot{h} + \hat{L}_{xx}h = 0$ – ур-ние Якоби

$$-\frac{d}{dt}\left(10t^2\dot{h} + 3th\right) + 3t\dot{h} + 8 = 0$$

$$-20t\dot{h} - 10t^2\ddot{h} - 3h \cancel{-3t\dot{h}} \cancel{+3t\dot{h}} + 8 = 0$$

$$\begin{cases} 10t^2\ddot{h} + 20t\dot{h} + 3h - 8 = 0 \\ h(1) = 0 \\ \dot{h}(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$h = \frac{1}{3}\left(-\frac{2\sqrt{5}\sin\left(\frac{\log x}{2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{x}} - 8\,\frac{\cos\left(\frac{\log x}{2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{x}} + 8\right) \quad ???$$

5) $\mathcal{E}(t,x,\dot{x},u) = L(t,x,u) - L(t,x,\dot{x}) - L_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})(u-\dot{x})$

функция Вейерштрасса

$$\mathcal{E} = 5t^2u^2 + 3txu \cancel{+4x^2} - \left(5t^2\dot{x}^2 + 3tx\dot{x} \cancel{+4x^2}\right) -$$

$$-\left(10t^2\dot{x} + 3tx\right)(u-\dot{x}) = 5t^2u^2 \cancel{+3txu} - 5t^2\dot{x}^2 \cancel{-3tx\dot{x}}$$

$$-10t^2\dot{x}u + 10t^2\dot{x}^2 \cancel{-3txu} \cancel{+3tx\dot{x}} = 5t^2\dot{x}^2 - 10t^2\dot{x}u + 5t^2u^2$$

$= 5t^2(\dot{x}^2 - 2\dot{x}u + u^2) = 5t^2(\dot{x} - u)^2 \geq 0 \; \forall \; u \in \mathbb{R}$ и

$\forall \; t \in [1, 2]$ $\Rightarrow$ условие Вейерштрасса выполнено

б) Все необходимые условия выполнены $\Rightarrow$ $\hat{x}$ доставляет интегралу L сильный и слабый локальный min.