Линдеманн Никита, 847

$$J(x) = \int_0^1 \left(5\dot{x}^2(t) + 3t x(t)\right) dt \to \min$$

$$\text{s.t.} \quad x(0) = x(1) = 0$$

1) $L = 5\dot{x}^2(t) + 3t x(t)$

2) $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$ – ур-ние Эйлера – Лагранжа (необходимое условие экстремума)

$$3t - \frac{d}{dt}\left(10\dot{x}(t)\right) = 0 \Rightarrow 3t - 10\ddot{x} = 0$$

3) $10\, d\dot{x} = 3t\, dt$

$$10\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}t^2 + C_1$$

$$10x = \frac{1}{2}t^3 + C_1 t + C_2$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x(1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}$$

4) $\hat{x}(t) = \frac{1}{20}t^3 - \frac{1}{20}t$ – кандитат на экстремум

5) Пусть $\eta(t) \in C^1[0,1]$ и $\eta(0) = \eta(1) = 0$

$$J(\hat{x}+\eta) - J(\hat{x}) = \int_0^1 \left[5\left(2\dot{\hat{x}}\dot{\eta} - \dot{\eta}^2\right) + 3t\eta\right) dt =$$

$$= 10\int_0^1 \dot{\hat{x}}\, d\eta + 3\int_0^1 t\eta\, dt - 5\int_0^1 \dot{\eta}^2 dt =$$

$$= \cancel{10\dot{\hat{x}}\eta\Big|_0^1} \xrightarrow{} 0 - 10\int_0^1 \eta\ddot{\hat{x}}\,dt + 3\int_0^1 t\eta\,dt - 5\int_0^1 \dot{\eta}^2\,dt =$$

$$= -10\int_0^1 \eta\,\frac{3}{10}t\,dt + 3\int_0^1 t\eta\,dt - 5\int_0^1 \dot{\eta}^2\,dt =$$

$$= -5\int_0^1 \dot{\eta}^2\,dt \leq 0 \Rightarrow$$ найденная функция $\hat{x}(t)$ дает на заданном функционале $J(x)$ максимум