Гармонический анализ (4 семестр)

Линдеманн Никита, МФТИ

6 мая 2020 г.

Содержание

1 Программа

1. Абсолютно интегрируемые функции. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремлении к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость ряда Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.

2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.

3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полный линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Неполнота пространства непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных и нормированных пространствах.

4. Бесконечномерное евклидово пространство. Ряд фурье по ортогональной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированном базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.

5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.

6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости для несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера – гамма- и бета- функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D'. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.

2 Теория

Определение 2.1. *Пусть $f(x)$ – $2l$-переодическая и абсолютно интегрируемая на отрезке $[-l,l]$ функция. Тогда тригонометрический ряд*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(kx\frac{\pi}{l}\right) + b_k \sin\left(kx\frac{\pi}{l}\right)\right)$$

называется рядом Фурье, где:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\left(kx\frac{\pi}{l}\right)dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\left(kx\frac{\pi}{l}\right)dx.$$

Легко показать, что:

1. Если $f(x)$ – четная, то $a_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\left(kx\frac{\pi}{l}\right)dx, \quad b_k = 0.$

2. Если $f(x)$ – нечетная, то $a_k = 0, \quad b_k = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\left(kx\frac{\pi}{l}\right)dx.$

Используя формулу Эйлера $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, можно записать ряд Фурье в комплексной форме:

$$S_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(ikx\frac{\pi}{l}\right), \quad c_k = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\exp\left(-ikx\frac{\pi}{l}\right)dx.$$

Определение 2.2. *Обобщенная правая одностороняя производная функции $f(x)$ в точке x_0 – это предел*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0+0)}{x - x_0}.$$

Аналогично определяется обобщенная левая одностороняя производная.

Определение 2.3. *Точка x_0 называется почти регулярной точкой функции $f(x)$, если в этой точке существуют односторонние пределы и односторонние обобщенные производные функции $f(x)$.*

Определение 2.4. *Точка x_0 называется регулярной точкой функции $f(x)$, если эта точка почти регулярна и*

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Теорема 2.1 (**О поточечной сходимости ряда Фурье**). *Пусть $f(x)$ – $2l$-переодическая и абсолютно интегрируемая на отрезке $[-l,l]$ функция. Тогда в каждой почти регулярной точке x_0 ряд Фурье функции $f(x)$ сходится поточечно к значению*

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Теорема 2.2 (**О равномерной сходимости ряда Фурье**). *Пусть $f(x)$ – $2l$-переодическая, непрерывная и кусочно непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-l,l]$ функция. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно к функции $f(x)$.*

Теорема 2.3. *Пусть функция $f(x)$ является $m-1$ раз непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условию: $f^{(p)}(-\pi)=f^{(p)}(\pi)\ \forall\, p=\overline{0,m-1}$. Если при этом $f(x)$ также имеет m-ую и $(m+1)$-ую кусочно непрерывную производную, тогда для коэффициентов a_k и b_k ряда Фурье функции $f(x)$ выполняется асимптотическая оценка:*

$$|a_k|+|b_k|=O\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right),\ \ k\to\infty.$$

Определение 2.5. *Счетная система $\{f_k\}$ называется полной в нормированном пространстве N, если $\forall\,\varepsilon>0\ \forall\, f\in N\ \exists\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}:$*

$$\left|\left|f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k f_k\right|\right|<\varepsilon.$$

Определение 2.6. *Подмножество M нормированного пространства N называется плотным в N, если $\forall\,\varepsilon>0\ \forall\, x\in N\ \exists\, y\in M$: $||x-y||<\varepsilon$.*

3 Первое задание

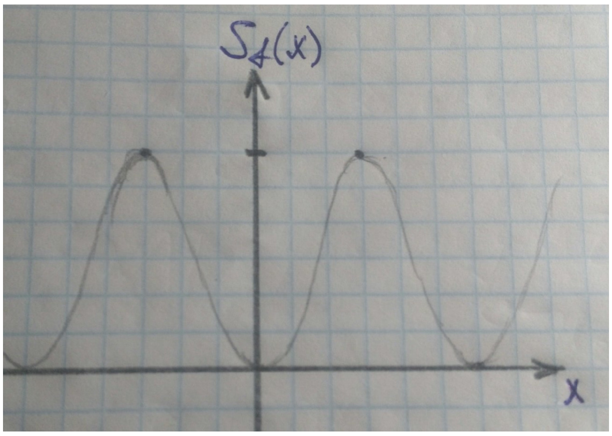
С2 §22, №1(3) Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \sin^4 x$, построить график суммы ряда Фурье и исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

Решение. Прежде всего заметим, что функция $f(x) = \sin^4 x$ является 2π-переодической и абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье. Так как система функций $\{\sin kx, \cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ является базисом в пространстве функций, то, если мы представим функцию $\sin^4 x$ в виде линейной комбинации элементов этого базиса, то это и будет искомое разложение в ряд Фурье. Применяя тригонометрические тождества, получим:

$$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8} =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x \ + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Так как функция $f(x)$ является гладкой на всей вещественной прямой, то, по теореме о равномерной сходимости ряда Фурье, ряд Фурье $S_f(x)$ функции $f(x)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к $f(x)$, а значит его график совпадает с графиком функции:



□

С2 §22, №4 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$, указать промежутки, в которых сумма ряда Фурье равна функции $f(x)$, и найти сумму ряда в точке $x_0 = \pi$. Построить график суммы ряда Фурье и исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

Решение. Так как, чтобы сопоставить функции ряд Фурье, необходимо, чтобы она была 2π-переодической, то сначала необходимо продолжить заданную функцию:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x - 2\pi n, \ x \in [(k-2)\pi, k\pi) \ \text{при} \ k = 2n+1, \ n \in \mathbb{Z}_- \setminus \{0\} \\ x, \ x \in [-\pi, \pi] \\ x - 2\pi n, \ x \in (k\pi, (k+2)\pi] \ \text{при} \ k = 2n-1, \ n \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\} \end{cases}$$

Так как новая функция $\tilde{f}(x)$ является 2π-переодической и абсолютно интегрируемой, то ее можно разложить в ряд Фурье:

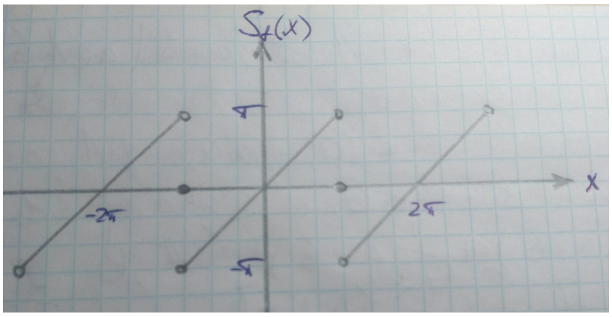
$$a_k = 0, \ \text{так как функция нечетная}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin kx dx = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{k}\cos kx\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi k}\int\limits_0^\pi \cos kx dx = \frac{2}{k}\cdot(-1)^{k+1} + \frac{2}{\pi k^2}\sin kx\Big|_0^\pi = \frac{2}{k}\cdot(-1)^{k+1}.$$

Следовательно, функции $\tilde{f}(x)$ (а так как она совпадает на отрезке $[-\pi,\pi]$ с функцией $f(x)$, то и функции $f(x)$ на том же отрезке) можно сопоставить ряд:

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\cdot\sin kx.$$

Так как функция $\tilde{f}(x)$ является 2π-переодической и абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$, то, по теореме о поточечной сходимости ряда Фурье, ряд $S_f(x)$ будет сходится поточечно к функции $\tilde{f}(x)$ на $\mathbb{R}$, кроме почти регулярных точкек – это точки вида πk, $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ (так как все остальные точки регулярные). По той же теореме о поточечной сходимости ряда Фурье в почти регулярных точках x_k ряд Фурье будет сходится к значению $\dfrac{f(x_k-0)+f(x_k+0)}{2}$. Зная это, можно построить график ряда Фурье:



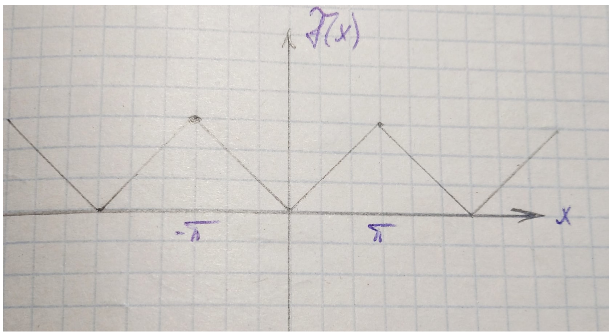
Так как $x_0 = \pi$ – почти регулярная точка, то

$$S_f(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = \frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$$

Ряд $S_f(x)$ не сходится равномерно ввиду того, что частичные суммы ряда являются непрерывными функциями, а $\tilde{f}(x)$ очевидно разрывна (не выполнено необходимое условие равномерной сходимости: если функциональная последовательность непрерывных функций сходится равномерно, то предел такой последовательности обязательно непрерывная функция). □

С2 §22, №9 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$, указать промежутки, в которых сумма ряда Фурье равна функции $f(x)$, и найти сумму ряда в точке $x_0 = \pi$. Построить график суммы ряда Фурье и исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

Решение. Сперва 2π-переодически продолжим функцию так, как показано на рисунке:



Получившаяся функция $\tilde{f}(x)$ четная, следовательно, $b_k = 0$ и:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|dx = \pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k}\int\limits_0^{\pi}\sin kx dx = \frac{2}{\pi k^2}((-1)^k - 1).$$

Тогда функции $\tilde{f}(x)$ (а так как она совпадает на отрезке $[-\pi, \pi]$ с функцией $f(x)$, то и функции $f(x)$ на том же отрезке) можно сопоставить ряд:

$$S_f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k^2}((-1)^k - 1)\cdot\cos kx.$$

Ряд Фурье функции $\tilde{f}(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ так как функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна, значит, ряд сходится и поточечно. Отсюда следует, что график ряда Фурье совпадает с построенным выше графиком функции $\tilde{f}(x)$. Тода легко можно найти:

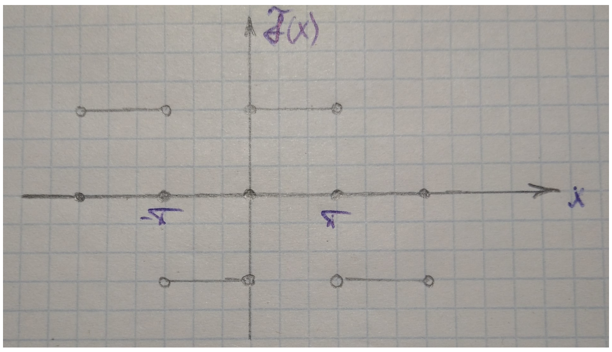
$$S_f(x_0) = \tilde{f}(x_0) = \pi.$$

□

C2 §22, №12 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$, построить график суммы ряда Фурье и исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$. Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда Лейбница:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Решение. Продолжим 2π-переодически и регулярно заданную функцию:



Так как получившаяся функция $\tilde{f}(x)$ нечетна, то, $a_k = 0$ и:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin kx dx = \frac{2}{\pi k}(1 - (-1)^k).$$

Тогда функции $\tilde{f}(x)$ (а так как она совпадает на отрезке $[-\pi, \pi]$ с функцией $f(x)$, то и функции $f(x)$ на том же отрезке) можно сопоставить ряд:

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k}(1 - (-1)^k)\cdot\sin kx = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Полученный ряд Фурье не сходится равномерно на $\mathbb{R}$ так как функция $\tilde{f}(x)$ разрывна, но сходтся поточечно к $\tilde{f}(x)$ на $\mathbb{R}$, так как выполнены условия теоремы о поточечной сходимости ряда Фурье.

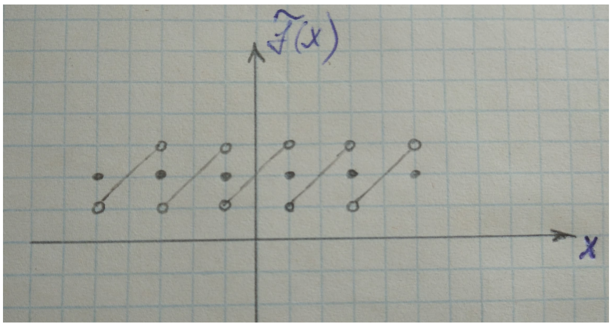
Пользуясь тем, что $\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = (-1)^n$, рассмотрим полученный ряд Фурье в точке $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{sign}\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

□

C2 §22, №27 Разложить в ряд Фурье переодическую с периодом 2 функцию $f(x)$, если $f(x) = x$, $x \in (1, 3)$. Построить график суммы ряда Фурье и исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

Решение. Доопределим функцию в точка $x = 1$ и $x = 3$ таким образом, чтобы эти точки были регулярными:



Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \int\limits_{-1}^{1}(x+2)dx = 4,$$

$$a_k = \int\limits_{-1}^{1}(x+2)\cos(kx\pi)dx = \int\limits_{-1}^{1}x\cos(kx\pi)dx + 2\int\limits_{-1}^{1}\cos(kx\pi)dx = 0,$$

$$b_k = \int\limits_{-1}^{1}(x+2)\sin(kx\pi)dx = \int\limits_{-1}^{1}x\sin(kx\pi)dx + 2\int\limits_{-1}^{1}\sin(kx\pi)dx = \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k}.$$

Значит, ряд Фурье для функции $f(x)$ выглядит следующим образом:

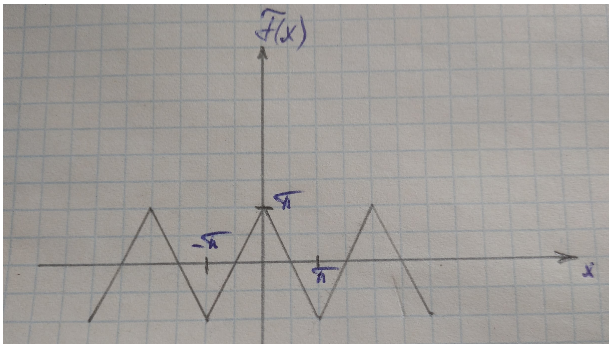
$$S_f(x) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin(kx\pi).$$

Ряд Фурье сходится поточечно на $\mathbb{R}$, но не равномерно, так как предельная функция $f(x)$ разрывна. График ряда Фурье совпадает с построенным ранее графиком функции $f(x)$. □

С2 §22, №30 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \pi - 2x$, $0 < x \le \pi$, продолжив ее на отрезок $[-\pi, 0]$ четным и нечетным образом. В обоих случаях построить график суммы ряда Фурье и исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

Решение. Рассмотрим несколько случаев:

1. Продолжим функцию четным образом:



Коэффициенты ряда Фурье: $b_k = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi (\pi - 2x)dx = 0,$$

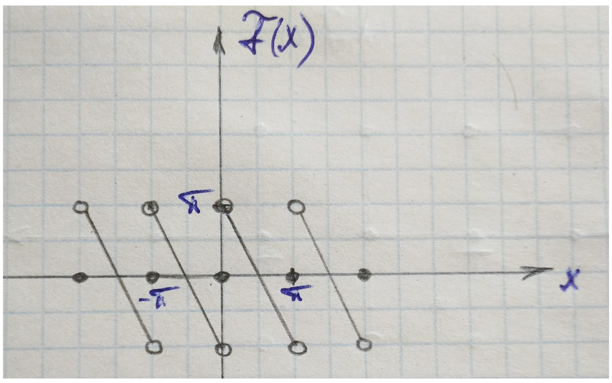
$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi (\pi - 2x)\cos kx dx = 2\int\limits_0^\pi \cos kx dx - \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos kx dx = -\frac{4}{\pi k^2}((-1)^k - 1).$$

Ряд Фурье:

$$S_f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((-1)^k - 1)}{k^2}\cos kx.$$

Так как выполнены условия теоремы о равномерной сходимости ряда Фурье, то ряд сходится равномерно, а его график совпадает с графиком функции, построенным выше.

2. Продолжим функцию нечетным и регулярным образом:



Тогда $a_k = 0$,

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi (\pi - 2x)\sin kx dx = 2\int\limits_0^\pi \sin kx dx - \frac{4}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin kx dx = \frac{2}{k}(1 + (-1)^k).$$

Ряд Фурье:

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k + 1)}{k} \sin kx.$$

Так как продолженная функция, которую мы раскаладывали ряд разрывна, то равномерной сходимости ряда Фурье на $\mathbb{R}$ нет, есть только поточечная.

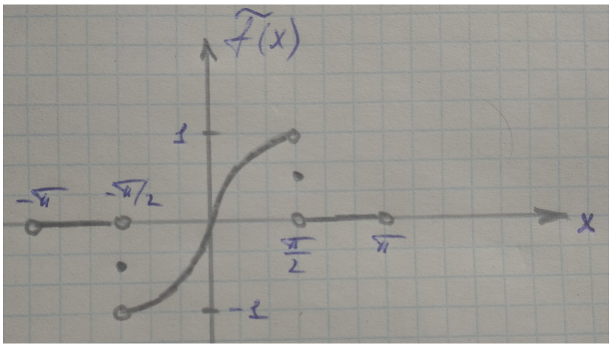
$\square$

C2 §22, №43 Разложить в ряд Фурье на $(0, \pi)$ по синусам функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

Построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

Решение. Продолжим функцию 2π переодично нечетным образом:



Коэффициенты ряда Фурье равны:

$$a_k = 0, \;\; b_1 = \frac{1}{2}, \;\; b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin x \sin kx dx = -\frac{4k}{\pi(k^2 - 1)} \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right), \;\; k \neq 1$$

Ряд Фурье будет иметь вид:

$$S_f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2 - 1)} \sin 2kx.$$

Полученный ряд Фурье не сходится к функции $f(x)$ равномерно на интервале $(0, \pi)$, так как предельная функция разрывна, а график ряда Фурье совпадает с построенным выше графиком фуннкции $\tilde{f}(x)$. $\square$

C2 §22, №45 Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье, исследовать на равномерную сходимость на всей прямой и построить график:

1. На отрезке $[-\pi, \pi]$ по косинусам.

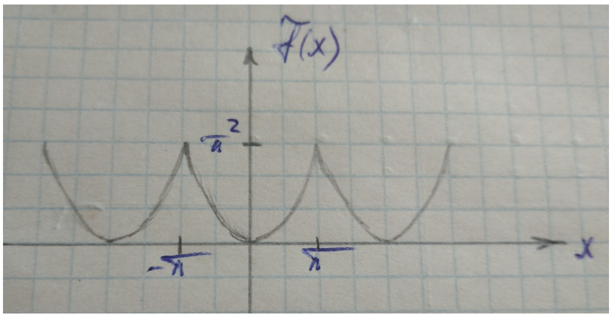
   Так как раскладываем по косинусам, следовательно необходимо продолжить функцию четным образом, а значит $b_k = 0$. Тогда:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{4(-1)^k}{k^2}.$$

Ряд Фурье будет иметь вид:

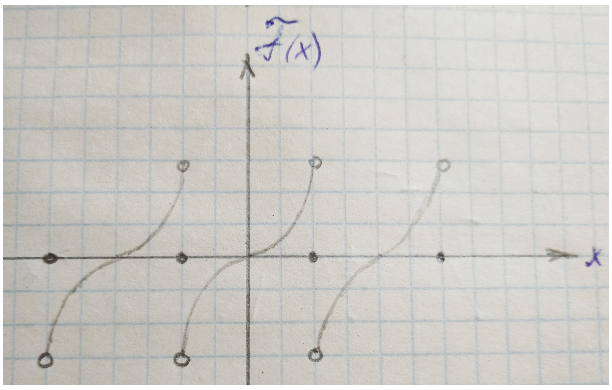
$$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

Ряд будет сходится равномерно на $\mathbb{R}$, так как продолженная функция непрерывна на вещественной прямой, а график ряда Фурье будет совпадать с графиком функции:



2. На интервале $(-\pi, \pi)$ по синусам.

   Продолжим регулярно нечетным образом функцию:



Так как раскладываем по синусам, следовательно $a_k = 0$ и:

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2(-1)^k + 1}{k} + \frac{2((-1)^k - 1)}{k^3} \right).$$

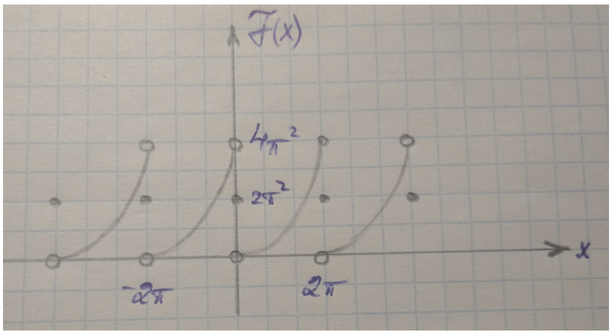
Ряд Фурье будет иметь вид:

$$S_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2(-1)^k + 1}{k} + \frac{2((-1)^k - 1)}{k^3} \right) \sin kx.$$

Ряд не будет сходится равномерно на $\mathbb{R}$, так как продолженная функция разрывна.

3. На интервале $(0, 2\pi)$ по синусам и косинусам.

   Продолжим регулярно функцию таким образом, чтобы она не была ни четной, ни нечетной:



Найдем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}x^2dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}x^2\cos kxdx = \frac{4}{k^2},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}x^2\sin kxdx = -\frac{4\pi}{k}.$$

Ряд Фурье будет иметь вид:

$$S_f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} 4\left(\frac{\cos kx}{k^2} - \frac{\pi\sin kx}{k}\right).$$

Так как функция $\tilde{f}(x)$ разрывна, то ряд Фурье не сходится к этой функции равномерно.

Используя полученные, разложения, найдем суммы рядов:

1. $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$

   Так как $\cos\pi k = (-1)^k$, то, используя первое разложение, получим:

$$S_f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2} = \pi^2 \Rightarrow S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$

   Используя последнее разложение, получим:

$$S_f(\pi) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2} = \pi^2 \Rightarrow S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3. $S_3 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

   Заметим, что $2S_3 = S_1 + S_2$, значит:

$$S_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

С2 §22, №65 Доказать, что если абсолютно интегрируемая на отрезке $[0, \pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f(\pi - x) = f(x)$, то ее коэффициенты Фурье обладают следующими свойствами:

1. при разложении f в ряд Фурье по косинусам $a_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

   Действительно, продолжим функцию f четно и 2π переодически, тогда:

$$a_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos(2n-1)xdx = \begin{vmatrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_\pi^0 f(\pi - t)\cos(2n-1)(\pi - t)dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(t)\cos(2n-1)tdt = -a_{2n-1} \Rightarrow a_{2n-1} = 0.$$

2. при разложении f в ряд Фурье по синусам $b_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

   Действительно, продолжим функцию f нечетно и 2π переодически, тогда:

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin 2nxdx = \begin{vmatrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_\pi^0 f(\pi - t)\sin 2n(\pi - t)dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(t)\sin 2ntdt = -b_{2n} \Rightarrow b_{2n} = 0.$$

С2 §22, №66 Как следует продолжить абсолютно интегрируемую на отрезке $[0, \pi/2]$ функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi, \pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x.$$

Решение. Следует продолжить функцию $f(x)$ четно таким образом, чтобы $f(\pi - x) = -f(x)$, тогда:

$$b_n = 0,\ \ a_{2n} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos(2nx)dx = \begin{vmatrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_\pi^0 f(\pi - t)\cos 2n(\pi - t)dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(t)\cos(2nt)dt = -a_{2n} \Rightarrow a_{2n} = 0.$$

□

С2 §22, №67 Как следует продолжить абсолютно интегрируемую на отрезке $[0, \pi/2]$ функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi, \pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x.$$

Решение. Следует продолжить функцию $f(x)$ нечетно таким образом, чтобы $f(\pi - x) = f(x)$, тогда:

$$a_n = 0,\ b_{2n} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin(2nx)dx = \begin{vmatrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi}^{0} f(\pi - t)\sin 2n(\pi - t)dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)\sin(2nt)dt = -b_{2n} \Rightarrow b_{2n} = 0.$$

□

C2 §22, №72 Какими особенностями обладают коэффициенты ряда Фурье функции периода 2π, если ее график

1. имеет центр симметрии в точках $(0,0)$ и $(\pm\pi/2, 0)$?

   Это означает, что функция нечетная и $f(\pi - x) = -f(x)$, следовательно:

$$a_n = 0,\ b_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin(2n-1)xdx = \begin{vmatrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi}^{0} f(\pi-t)\sin(2n-1)(\pi-t)dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)\sin(2n-1)tdt = -b_{2n-1} \Rightarrow b_{2n-1} = 0.$$

2. имеет центр симметрии в начале координат и оси симметрии $x = \pm\pi/2$?

   Это означает, что функция нечетная и $f(\pi - x) = f(x)$, следовательно $a_n = 0$, $b_{2n} = 0$ (см. задачу C2 §22, №67).

C2 §22, №110 Доказать, что если тригонометрический ряд сходится равномерно, то он является рядом Фурье своей суммы.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right),$$

где функциональный ряд сходится равномерно. Последовательно проделаем следующее: проинтегрируем ряд, проинтегрируем ряд, домножив на $\cos kx$ и проинтегрируем, домножив на $\sin kx$ (так можно поступать так как ряд сходится равномерно). В силу ортогональности тригонометрической системы (либо в этом можно убедиться проведя выкладки непосредственно):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos^2 kxdx = \pi a_k,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin^2 kx dx = \pi b_k.$$

Заметим, что $f(x)$ непрерывна (как сумма сходящегося функционального ряда непрерывных функций), а так же является 2π переодической, так как она представима в виде суммы функций с периодом 2π. □

С2 §22, №111 Выяснить, являются ли следующие тригонометрические ряды рядами Фурье:

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Так как слагаемые можно ограничить

$$\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha},$$

а числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

сходится при $\alpha > 1$, то можем заключить, что заданный ряд сходится абсолютно и равномерно по признаку Вейерштрасса. А так как каждый равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы, то рассматриваемый ряд является рядом Фурье.

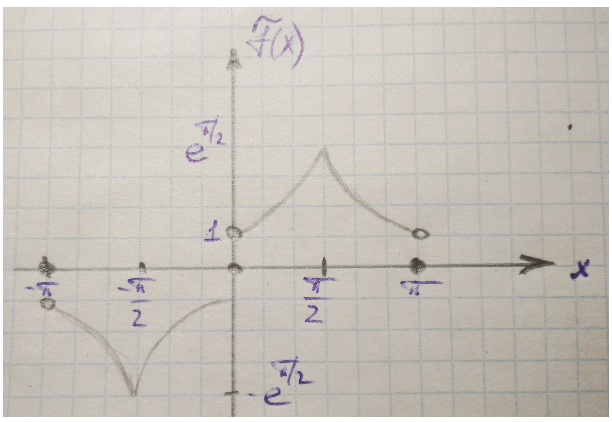
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

Этот ряд не является рядом Фурье, так как не выполнено необходимое условие: сумма квадратов коэффициентов Фурье $a_n^2 + b_n^2$ не стремится к нулю при $n \to \infty$ (протеворечие с леммой Римана об осциляции).

T1 Выяснить, сходится ли равномерно ряды Фурье функции $f(x) = e^x$, $x \in [0, \pi/2]$ по системам и построить графики сумм этих рядов:

1. $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$.

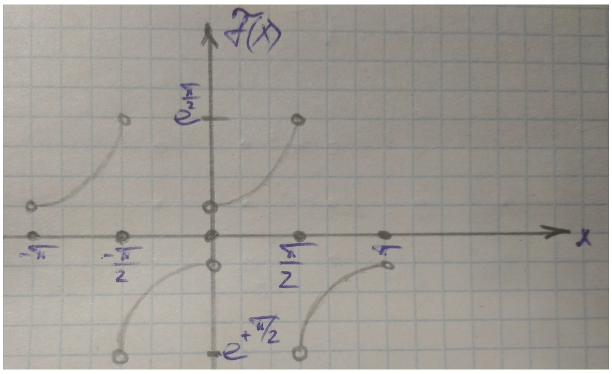
   Продолжим функцию 2π переодично нечетно следующим образом:



Так как $\tilde{f}(\pi - x) = \tilde{f}(x)$, то по доказаному в пердыдущих задачах, функция $\tilde{f}(x)$ раскладывется в ряд Фурье по синусам нечетных дуг. Так как функция $\tilde{f}(x)$ разрывна, то ее ряд Фурье не сходится равномерно, есть лишь поточечная сходимость.

2. $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$.

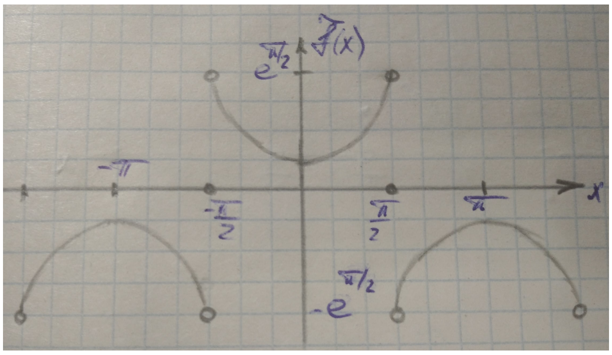
   Продолжим функцию 2π переодично нечетно следующим образом:



   Так как $\tilde{f}(\pi - x) = -\tilde{f}(x)$, то по доказаному в пердыдущих задачах, функция $\tilde{f}(x)$ раскладывется в ряд Фурье по синусам четных дуг. Так как функция $\tilde{f}(x)$ разрывна, то ее ряд Фурье не сходится равномерно, есть лишь поточечная сходимость.

3. $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$.

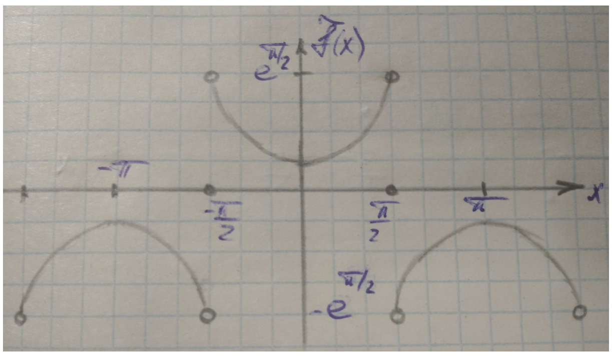
   Продолжим функцию 2π переодично четно следующим образом:



   Так как $\tilde{f}(\pi - x) = -\tilde{f}(x)$, то по доказаному в пердыдущих задачах, функция $\tilde{f}(x)$ раскладывется в ряд Фурье по косинусам нечетных дуг. Так как функция $\tilde{f}(x)$ разрывна, то ее ряд Фурье не сходится равномерно, есть лишь поточечная сходимость.

4. $\{\cos 2kx\}_{k=1}^{\infty}$.

   Продолжим функцию 2π переодично четно следующим образом:



Так как $\tilde{f}(\pi - x) = \tilde{f}(x)$, то по доказаному в пердыдущих задачах, функция $\tilde{f}(x)$ раскладывется в ряд Фурье по косинусам четных дуг. Так как функция $\tilde{f}(x)$ непрерывна, то ее ряд Фурье сходится равномерно.

T2 Не вычисляя коэффициентов ряда Фурье, определить их порядок убывания для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

1. $f(x) = x^{20}$.

   Воспользуемся теоремой о порядке убывания коэффициентов Фурье. Так как функция четная, то $b_k = 0$, значит нужно оценить только порядок убывания коэффициентов a_k. Так как все условия теоремы о порядке убывания коэффициентов Фурье выполнены, остается проверить только уловия сшивки:

   $$f(-\pi) = f(\pi),\ \ f'(-\pi) \neq f'(\pi).$$

   Заключаем, что $m = 1$, а следовательно $|a_k| = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ при $k \to \infty$.

2. $f(x) = x^{19}$.

   Так как функция нечетная, то $a_k = 0$, значит с помощью теоремы о порядке убывания коэффициентов Фурье нужно оценить только порядок убывания коэффициентов b_k. Проверим только уловия сшивки:

   $$f(-\pi) \neq f(\pi).$$

   Значит, $m = 0$ и $|b_k| = O\left(\dfrac{1}{k}\right)$ при $k \to \infty$.

3. $f(x) = (\pi - |x|)\sin x$.

   Функция нечетная, значит $a_k = 0$. Очевидно, что $f(\pi) = f(-\pi)$. Проверим, является ли функция непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, для этого сперва проверим, дифференцируема ли $f(x)$ в нуле (при ненулевых значения аргумента функция очевидно дифференцируема):

   $$f'_-(0) = \lim_{x\to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to -0} \frac{(\pi - |x|)\sin x}{x} = \lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to -0} (\pi - |x|) = \pi.$$

   $$f'_+(0) = \lim_{x\to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to +0} \frac{(\pi - |x|)\sin x}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to +0} (\pi - |x|) = \pi.$$

   Так как левая производная в нуле равна правой, то функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке, причем:

   $$f'(x) = (\pi - |x|)\cos x - \operatorname{sign} x \cdot \sin x = \begin{cases} (\pi - x)\cos x - \sin x, & x > 0 \\ (\pi + x)\cos x + \sin x, & x < 0 \\ \pi, & x = 0 \end{cases}$$

   Более того, так как

   $$\lim_{x\to -0} (\pi - x)\cos x - \sin x = \lim_{x\to +0} (\pi + x)\cos x + \sin x = \pi,$$

   функция $f(x) \in C^1[-\pi, \pi]$. Значит уже можно заключить, что $m \geq 2$, так как $f'(-\pi) = f'(\pi)$.

Проверим, является ли функция $f(x)$ дважды дифференцируемой в нуле:

$$f''_{-}(0) = \lim_{x\to -0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to -0} \frac{(\pi + x)\cos x + \sin x - \pi}{x} = 2.$$

$$f''_{+}(0) = \lim_{x\to +0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to +0} \frac{(\pi - x)\cos x - \sin x - \pi}{x} = -2.$$

Так как $f''_{-}(0) \neq f''_{+}(0)$, то функция не является дважды дифференцируемой и $m = 2$. При этом у $f(x)$ существуют кусочно непрерывные производные второго и третьего порядка, а значит $|b_k| = O\left(\frac{1}{k^3}\right)$ при $k \to \infty$.

4. $f(x) = (\pi^2 - x^2)\sin^2 x$.

   Функция четная, значит $b_k = 0$. В лоб вычислив производные, легко убедиться, что

$$f(\pi) = f(-\pi),\ f'(\pi) = f'(-\pi),\ f''(\pi) = f''(-\pi),\ f'''(\pi) \neq f'''(-\pi).$$

   Значит, $m = 3$ и $|a_k| = O\left(\frac{1}{k^4}\right)$ при $k \to \infty$.

C2 §22, №115 Не вычисляя коэффициенты ряда Фурье на $(-\pi, \pi)$ функции $f(x) = \pi x - x|x|$, выяснить, сходится ли этот ряд равномерно. Построить графики сумм продифференцированного и дважды продифференцированного рядов.

Решение. Так как заданная функция равна:

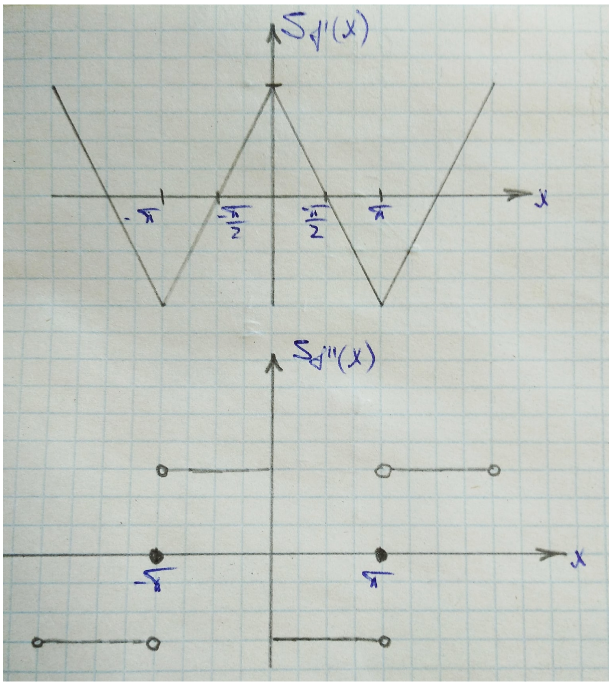
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \pi x, & x > 0 \\ x^2 + \pi x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

то очевидно, что она является непрерывной и кусочно непрерывно дифференцируемой на $[-\pi, \pi]$ (доопределим $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ и продожим трансляцией на π), а значит ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно.

Первая и вторая производные равны:

$$f'(x) = \pi - 2|x|,\ f''(x) = -2\,\mathrm{sign}\, x.$$

Ряд Фурье первой производной сходится равномерно, а второй только поточечно, графики их сумм выглядят следующим образом:



□

C2 §22, №115 Проинтегрировав почленно разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \ \ 0 < x < 2\pi,$$

получить формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}.$$

Решение. Так как заданный ряд сходится равномерно, то его можно почленно интегрировать:

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} + C = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{\pi}{2}x.$$

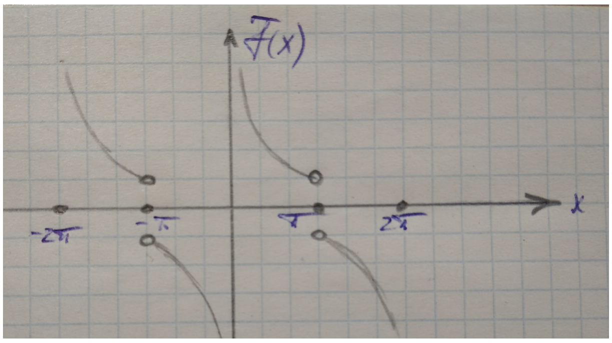
Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

то, рассматривая точку $x = 0$, получим, что $C = \dfrac{\pi^2}{6}$, откуда и следует требуемое. □

T3 Построить график сумм ряда Фурье на $[-\pi, \pi]$ фукции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ и найти для этого ряда сумму квадратов коэффициентов Фурье.

Решение. Продолжим нечетно и регулярно функцию следующим образом:



Ряд Фурье этой функции сходится лишь поточечно (так как продолженная функция разрывна), а значит сумма ряда Фурье совпадает с графиком $\tilde{f}(x)$.

Используя равенство Парсеваля, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{6}{\sqrt[3]{\pi^2}}.$$

□

С2 §16, №47 Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, обозначим

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\quad \sigma_n=\frac{S_0+S_1+\ldots+S_n}{n+1}.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ суммируется методом средних арифметических, а число σ называют обобщенной (в смысле Чезаро) суммой этого ряда. Доказать, что метод средних арифметических (Чезаро) является:

1. линейным, то есть если ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ имеют обощенные суммы A и B соответсвенно, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, имеет обобщенную сумму $\alpha A+\beta B$.

   Доказательство. Обозначим за $\sigma_n(a)$ и $\sigma_n(b)$ среднее арифметическое первых $n+1$ частичных сумм рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$ соответственно. Рассмотрим

   $$\sigma_n(\alpha a+\beta b)=\frac{\alpha((n+1)a_0+na_1+\ldots+2a_{n-1}+a_n)+\beta((n+1)b_0+nb_1+\ldots+2b_{n-1}+b_n)}{n+1}=$$

   $$=\alpha\frac{(n+1)a_0+\ldots+a_n}{n+1}+\beta\frac{(n+1)b_0+\ldots+b_n}{n+1}=\alpha\sigma_n(a)+\beta\sigma_n(b).$$

   Обозначив обобщенную сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ за C и используя линейность предела, получим требуемое:

   $$C=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(\alpha a+\beta b)=\lim_{n\to\infty}(\alpha\sigma_n(a)+\beta\sigma_n(b))=\alpha\lim_{n\to\infty}\sigma_n(a)+\beta\lim_{n\to\infty}\sigma_n(b)=\alpha A+\beta B.$$

   □

2. регулянным, то есть если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится в обычном смысле, то он имеет обобщенную сумму, также равную A.

Доказательство. Докажем, что если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу A, то к тому же пределу сходится последовательность $\sigma_n = \dfrac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$ средних арифметических чисел $S_1, \ldots, S_n$. Так как $S_n \xrightarrow{n\to\infty} A$, то для любого положительного ε найдется натуральный номер N, такой, что при всех $n > N$ будет выполнено $|S_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. При достаточно больших $n > N$ оценим модуль разности:

$$|\sigma_n - A| = \left| \frac{(S_1 - A) + \ldots + (S_N - A)}{n} + \frac{(S_{N+1} - A) + \ldots + (S_n - A)}{n} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{(S_1 - A) + \ldots + (S_N - A)}{n} \right| + \left| \frac{(S_{N+1} - A) + \ldots + (S_n - A)}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - N}{n} \leq \varepsilon.$$

Из доказанного утверждения очевидно следует регулярность суммирования по Чезаро. □

С2 §16, №48 Показать, что ряд суммируется методом Чезаро, найдя σ_n и σ:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$.

Так как последовательность частичных сумм последовательности $a_n = (-1)^n$ имеет вид $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$, то легко найти:

$$\sum_{k=0}^{2n} S_k = n + 1, \quad \sum_{k=0}^{2n-1} S_k = n.$$

Значит, в зависимости от четности n, среднее арифметическое частичных сумм будет равно:

$$\sigma_n = \frac{n+1}{2n+1}, \text{ при } n = 2k; \quad \sigma_n = \frac{n}{2n}, \text{ при } n = 2k - 1.$$

Так как предел обеих последовательностей равен 0,5, то можно заключить, что заданный ряд суммируем по Чезаро и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\theta, \quad 0 < |\theta| < \pi$.

Используя современные математические пакеты (например, wolframalpha), можно вычислить:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin n\theta = \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right).$$

Значит, обобщенная сумма ряда равна:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{k\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(k+1)\theta}{2}\right).$$

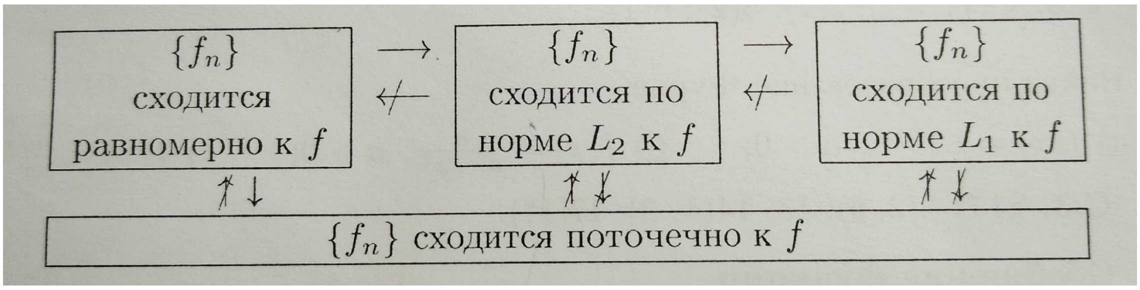
С помощью того же матпакета, получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{(k+1)\theta}{2}\right) = \frac{1}{4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot ((n+1)\sin\theta - \sin(n+1)\theta).$$

Итого, ответ:

$$\sigma = \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\sin\theta - \frac{\sin(n+1)\theta}{n}\right) = \frac{\sin\theta}{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}.$$

T4 Докажите, что если f – непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, а $\{f_n\}$ – последовательность функций, непрерывнах на том же отрезке, то между различными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):



1. Пусть f_n сходится равномерно к функции f на отрезке $[a,b]$. Тогда, согласно критерию равномерной сходимости, $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n\to\infty$. Но из последнего утверждения следует, что $\forall\, x \in [a,b] \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$, что и есть определение поточечной сходимости последовательности функций f_n к f.

   Чтобы доказать, что поточечная сходимость не влечет за собой равномерную, рассмотрим последовательность функций:

   $$f_n(x) = x^n,\ \ x \in [0,1].$$

   Очевидно, что поточечно эта последовательность сходится к функции:

   $$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = \begin{cases} 1,\ x = 1, \\ 0,\ x \in [0,1). \end{cases}$$

   При этом равномерной сходимости нет, так как $f_n(x) \in C[0,1]$, а предельная функция разрывна, чего быть бы не могло, если бы последовательностьf_n сходилась к f равномерно.

2.

C3 §18, №92 Доказать, что пространство $C[a,b]$ полно.

Доказательство. Напомним, что метрика в пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций задается следующим образом:

$$\rho(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Чтобы доказать, что некоторое пространство полно, необходимо показать, что любая фундаментальная последовательность из этого пространства имеет предел в этом же пространстве.

Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{f_n\} \in C[a,b]$. Так как эта последовательность фундаментальна, то она сходится, обозначим ее предел за f. Так как $f_n \to f$, то

$$\rho(f_n, f) = \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Последний переход корректен, так как в силу ограниченности функций f_n предельная функция f тоже будет ограничена, а значит sup и max совпадают. Но тот факт, что

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

означает, что $f_n \rightrightarrows f$ на отрезке $[a,b]$. Значит, в силу непрерывности f_n предельная функция тоже непрерывна, а следовательно $f \in C[a,b]$. □

С3 §18, №98 Доказать, что пространство $CL_1[a,b]$ не является полным.

Доказательство. Напомним, что норма в пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $CL_1[a,b]$ задается следующим образом:

$$||f|| = \int\limits_a^b |f(x)| dx.$$

Чтобы доказать, что пространство $CL_1[a,b]$ не полно, без ограничения общности положим $a = -1$, $b = 1$ и рассмотрим последовательность

$$f_n = \begin{cases} 0, \ \ x \in [-1, 0] \\ nx, \ \ x \in \left(0, \frac{1}{n}\right] \\ 1, \ \ x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Эта последовательность фундаментальна, пусть $m > n$, тогда:

$$||f_n - f_m|| = \int\limits_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \to 0.$$

При этом последовательность $\{f_n\}$ не сходится по норме к непрерывной функции. Предположим противное: пусть f – непрерывная функция, к которой сходится последовательность. Очевидно, что при $x \in [-1, 0]$ выполнено, что $f(x) = 0$. Чтобы $f_n \to f$ по норме, необходимо, чтобы

$$||f_n - f|| = \int\limits_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx \to 0 \Rightarrow f(x) = 1 \text{ при } x \in (0, 1].$$

Значит, предельная функция $f(x)$ является разрывной, а следовательно $f \notin CL_1[-1,1]$. □

Т5 Докажте, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах:

1. $C[a,b]$.

   Полноту системы $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ в данном пространстве гарантирует теорема Вейерштрасса, которая гласит, что

$$\forall\, f \in C[a,b]\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k : ||f - P_n||_C < \varepsilon.$$

2. $CL_1[a,b]$.

   Используя теорему Вейерштрасса в формулировке

$$\forall\, f \in C[a,b]\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k : ||f - P_n||_C < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

   получим необходимую оценку:

$$||f - P_n||_1 = \int\limits_a^b |f(x) - P_n(x)| dx \leq ||f - P_n||_C \cdot (b-a) < \varepsilon.$$

3. $CL_2[a,b]$.

   Аналогично предыдущему пункту, по теореме Вейерштрасса

$$\forall\, f \in C[a,b]\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k : ||f - P_n||_C < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}},$$

   откуда следует:

$$||f - P_n||_2 = \sqrt{\int\limits_a^b |f(x) - P_n(x)|^2 dx} \leq ||f - P_n||_C \cdot \sqrt{b-a} < \varepsilon.$$

С3 §19, №116 Доказать, что

1. в пространстве $\tilde{C}[-\pi,\pi] = \{f \in C[-\pi,\pi] \mid f(-\pi) = f(\pi)\}$ система $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

   Продолжим произвольную функцию $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ на всю вещественную прямую непрерывным и 2π переодическим образом. Тогда по теореме Фейера:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \sigma_N = \frac{S_0 + \ldots + S_N}{N+1} : ||f - \sigma_N|| < \varepsilon,$$

   где S_i – i-ая частичная сумма ряда Фурье функции f, которая состоит из линейной комбинации функций системы $\{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{\infty}$. Так как мы можем приблизить любую функцию с любой наперед заданной точностью линейной комбинацией функций системы, то эта система полна.

2. в пространстве $\tilde{C}[-\pi,\pi]$ система $\{1, \cos kx\}_{k=1}^{\infty}$ не полна.

   Рассмотрим функцию $f \in \tilde{C}[-\pi,\pi]$ такую, что $f(-\pi/2) = -1$ и $f(\pi/2) = 1$. Пусть для $\forall\, \varepsilon$ существует $P_n(x)$, состоящая из элементов системы $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$, такая, что $||f - P_n|| < \varepsilon$. Тогда, так как $f \rightrightarrows P$ (так как сходимость в $\tilde{C}[-\pi,\pi]$ это равномерная сходимость), то должно выполняться $P_n(\pi/2) \to 1$ и $P_n(-\pi/2) \to -1$ при $n \to \infty$, однако:

$$P_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) = P_n\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

   Значит, предположение о существовании такого P_n не верно, и следовательно система не полна.

3. в подпространстве $C[0, \pi/2]$ функций, таких, что $f(0) = 0$, система $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$ полна.

   Продолжим функцию f на отрезок $[\pi/2, \pi]$ четно относительно прямой $x = \pi/2$ и продолжим эту функцию на $[-\pi, 0]$ так, чтобы полученная функция была нечетна. Далее продолжим функцию 2π переодично на $\mathbb{R}$. Заметим, что получившаяся функция $\tilde{f}(x)$ будет непрерывна на всей вещественной оси и будет раскладываться в ряд Фурье по синусам нечетных дуг. Тогда аналогично первому пункту, можно приблизить $\tilde{f}(x)$ суммой Фейера, состоящей из линейной комбинации элеметов системы $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$, с любой точностью. Значит эта система полна.

С3 §19, №121(2) Доказать, что система $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$ полна в пространстве $RL_2[0, \pi/2]$.

Доказательство. Пусть $f \in RL_2[0, \pi/2]$, продолжим ее 2π перодически четным образом так, что $f(\pi - x) = -f(x)$. Тогда по теореме Фейера:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \sigma_N = \frac{S_0 + \ldots + S_N}{N+1} : ||f - \sigma_N||_C < \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

где S_i – i-ая частичная сумма ряда Фурье функции f, которая состоит из линейной комбинации функций системы $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$. Воспользуемся неравенством норм в пространствах $C[a,b]$ и $\in RL_2[a,b]$:

$$||f||_2 \leq ||f||_C \cdot \sqrt{b-a}.$$

Тогда получим требуемое:

$$||f - \sigma_N||_2 \leq ||f - \sigma_N||_C \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} < \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \varepsilon.$$

□

Т6 Докажите, что система функций $\{x^{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве $C[1,2]$. Будет ли она полна в пространстве $C[0,1]$?

Доказательство. Пусть $f \in C[1,2]$, соеденим прямой точки $(0,0)$ и $(1, f(1))$, а затем продолжим функцию нечетно на отрезок $[-2, 0]$. Применяя теорему Вейерштрасса для полученной нечетной непрерывной на $[-2,2]$ функции $\tilde{f}(x)$, получим, что

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k : ||f - P_n||_C < \varepsilon.$$

Причем, так как $\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x)$, то полином $P_n(x)$ обязан состоять только из мономов нечетных степеней. Значит, система функций $\{x^{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ действительно полна в пространстве $C[1,2]$.

Эта же система функций не будет полна в пространстве $C[0,1]$. Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = 1$ на отрезке $[0,1]$. Тогда

$$||f - P_n||_C = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - P_n(x)| \geq |f(0) - P_n(0)| = 1.$$

Значит, данную функцию никак нельзя приблизить линейной комбинацией элементов системы $\{x^{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ с наперед заданной точностью, а следовательно эта система не полна в $C[0,1]$. □

T7 Полна ли система $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве:

1. $C[0, \pi/2]$.

   Продолжим $f \in C[0, \pi/2]$ на отрезок $[\pi/2, \pi]$ так, чтобы $f(\pi - x) = f(x)$, а затем продолжим ее четным образом на $[-\pi, 0]$. Потом продолжим 2π переодично получившуюся функцию на $\mathbb{R}$. Тогда продолженная функция $\tilde{f}(x)$ будет непрерывна на всей вещественной оси и по теореме Фейера ее можно будет приблизить с любой точностью линейной комбинацией четных косинусов (благодаря выбраному продолжению). Следовательно, система $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $C[0, \pi/2]$.

2. $C[0, 2]$.

   Пусть $a > 0$ и $0 < \alpha < \pi/2$, рассмотрим функцию $f \in C[0, 2]$ такую, что $f(\pi/2 - \alpha) = a$, $f(0) = a$ и $f(\pi/2 + \alpha) = -a$. Тогда, если бы существовал приближающий функцию f тригонометрический многочлен $P_n(x)$, состоящий из четных косинусов, то $P_n(\pi/2 - \alpha) \to a$ и $P_n(\pi/2 + \alpha) \to -a$ при $n \to \infty$, но

   $$P_n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \alpha_k \cos 2\alpha k = P_n\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

   Очевидно, что такого быть не может, значит не существует многочлена $P_n(x)$, следовательно, система не полна в этом пространстве.

T8 С помощью равенства Парсеваля вычислить суммы рядов

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

   Воспользуемся известным разложением:

   $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

   Согласно равенству Парсеваля:

   $$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2}\right)^2 = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

   Проинтегрируем разложение из предыдущего пункта (так можно сделать, так как ряд сходится равномерно):

   $$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^3} \sin nx + C.$$

   Рассмотрев точку $x = 0$, получим, что $C = 0$.

   Используем равенство Парсеваля для полученного разложения:

   $$\frac{16}{945}\pi^6 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3}\right)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

4 Второе задание

Список литературы

[1] Сборник задач по математическому анализу. Т. 2. Интегралы. Ряды: учебное пособие / под ред. Л.Д. Кудрявцева. – Москва: Физматлит, 2003. (цитируется **С2**).

[2] Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие / под ред. Л.Д. Кудрявцева. – Москва: Физматлит, 2003. (цитируется **С3**).