Рассматривается линейное пространство

$$X = \left\{ x : (0,1) \to C | \exists \int_0^1 \frac{|x(t)|}{t^2} dt < +\infty \right\}$$

Рассматривается норма

$$||x|| = \int_0^1 t^2 |x(t)| dt \quad x \in X$$

а) Доказать неполноту пространства $(X, || \cdot ||)$

Решение. Заметим, что функция $x(t) = 1 = const$ не принадлежит множеству X, и подберем последовательность функций из X, сходящихся к ней по данной норме

$$x_n(t) = \begin{cases} n^2 t^2 & , \quad 0 \quad < t \leq \quad \frac{1}{n} \\ 1 & , \quad \frac{1}{n} \quad \leq t < \quad 1 \end{cases}$$

$$||x_n - x|| = \int_0^{1/n} t^2 (1 - n^2 t^2) dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{n^2 t^5}{5} \right) |_0^{1/n} = \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{5n^3} \to 0$$

Тогда из сходимости в некотором более широком пространстве всегда следует фундаментальность: для любого $\varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \quad ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2}$, тогда для любого $m > n$

$$||x_m - x_n|| \leq ||x_m - x|| + ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- выполнено определение фундаментальности. Получили $\{x_n\} \in X$ фундаментальную, которая имеет предел не в X, и не может иметь двух разных пределов, значит, в X она предела не имеет. Пространство не полное.

б)Доказательно построить пополнение пространства X.

Рассмотрим множество $X_0 : \exists \int_0^1 t^2 |x(t)| dt < \infty$,x(t) измерима. Возьмем любую $x \in X_0$. Рассмотрим (как и в предыдущем пункте)

$$x_n(t) = \begin{cases} n^2 t^2 & , \quad 0 \quad < t < \quad \frac{1}{n} \\ x(t) & , \quad \frac{1}{n} \quad \leq t < \quad 1 \end{cases} \qquad \int_0^1 \frac{|x_n(t)|}{t^2} dt \leq n + n^4 \int_{1/n}^1 t^2 |x(t)| dt < +\infty$$

$$||x_n - x|| = \int_0^{1/n} t^2 (x(t) - n^2 t^2) dt = \int_0^{1/n} t^2 x(t) dt - \left(-\frac{n^2 t^5}{5} \right) |_0^{1/n} = \int_0^{1/n} t^2 x(t) dt - \frac{1}{5n^3} \to 0$$

,из свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега. И значит, $x(t)$ является пределом некоторой фундаментальной последовательности элементов из X.

Обратно, любая фундаментальной последовательности элементов из X имеет предел в X_0 по норме

$$||x|| = \int_0^1 t^2|x(t)|dt = \int_0^1 |x(t)|d\left(\frac{t^3}{3}\right) = \int_0^1 |x(t)|d\mu(0,t)$$

$$\mu(E) = \int_E t^2 dt$$

,то есть в пространстве $L^1([0,1],\mu)$, так как известно, что для любой абсолютно непрерывной $\sigma-$аддитивной меры μ пространство $L^1([0,1],\mu)$ полное. Поэтому X_0является наименьшим полным пространством, содержащим X, значит, пополнением X

в)Исследовать сепарабельность пространства $(X, ||\cdot||)$

Докажем сепарабельность более широкого пространства $X_0 = L^1((0,1),\mu)$. Построим изоморфизм из него в $L^1(0,\frac{1}{3})$ со стандартной лебеговой мерой

$$||x||_{X_0} = \int_0^1 t^2|x(t)|dt = \int_0^1 |x(t)|d\left(\frac{t^3}{3}\right) = \int_0^{1/3} |x(3^{1/3}u^{1/3})||du = ||y||_1$$

$$x(t) \to y(u) = x(3^{1/3}u^{1/3}) \in L^1(0,\frac{1}{3})$$

Пространство $L^1(a,b)$ сепарабельно, это есть в теории, например , счетным всюду плотным множеством в L^1может быть множество всевозможных тригонометрических многочленов с рациональными коэффициентами. Поэтому изометричное ему пространство X_0 также сепарабельно. Любое подмножество X сепарабельного пространства -также является сепарабельным пространством

г)Исследовать ограниченность и замкнутость множества

$$S = \left\{x \in X | \int_0^1 |x(t)|dt \leq 1\right\}$$

в пространстве $(X, ||\cdot||)$

Решение. Ограниченность: если$x \in S$, то

$$||x|| = \int_0^1 t^2|x(t)|dt \leq \int_0^1 |x(t)|dt \leq 1$$

-значит, S содержится в единичном шаре пространства $(X, ||\cdot||)$, S ограничено.

Предположим, есть некоторая предельная точка $x(t)$ у множества S, Значит, существует $x_n(t)$,

$$||x_n - x|| = \int_0^1 t^2|x_n(t) - x(t)|dt \to 0$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 |x_n(t)-x(t)|dt = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_\varepsilon^1 \frac{\varepsilon^2}{t^2}\cdot t^2|x_n(t)-x(t)|dt \le \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 t^2|x_n(t)-x(t)|dt \to 0$$

$$\int_\varepsilon^1 |x(t)|dt \le \int_\varepsilon^1 |x_n(t)|dt + \int_\varepsilon^1 |x_n(t)-x(t)|dt \le 1 + \int_\varepsilon^1 |x_n(t)-x(t)|dt$$

Так как левая часть не зависит от n,

$$\int_\varepsilon^1 |x(t)|dt \le 1$$

при любом $\varepsilon > 0$. Из абсолютной непрерывности интеграла Лебега

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\varepsilon |x(t)|dt = 0$$

$$\int_0^1 |x(t)|dt = \int_0^\varepsilon |x(t)|dt + \int_\varepsilon^1 |x(t)|dt \le 1 + \int_0^\varepsilon |x(t)|dt$$

, тогда , так как левая часть не зависит от ε,

$$\int_0^1 |x(t)|dt \le 1$$

Получити, что обязательно $x \in S$, S замкнуто.

д) Исследовать открытость множества

$$S = \left\{ x \in X | \int_0^1 |x(t)|dt < 1 \right\}$$

в пространстве $(X, ||\cdot||)$

Решение. Предположим,

$$x \in S, \quad \int_0^1 |x(t)|dt = a < 1$$

Определим последовательность $y_n(t) \in X$

$$y_n(t) = \begin{cases} n^4t^2 & , \quad 0 < t < \frac{1}{n} \\ 0 & , \quad \frac{1}{n} \le t < 1 \end{cases}$$

$$||y_n|| = \int_0^{1/n} n^4t^4 dt = \frac{n^4}{5n^5} = \frac{1}{5n} \to 0$$

$$\int_0^1 |x(t)+y_n(t)|dt \ge \int_0^1 |y_n(t)|dt - \int_0^1 |x(t)|dt =$$

$$= n^4 \int_0^1 t^2 dt - \int_0^1 |x(t)| dt > \frac{n}{3} - 1$$

-больше 1 при n>6 , поэтому в любом шаре с центром x найдется элемент $(x + y_n)$, не принадлежащий S. Множество не является открытым.

д) Исследовать ограниченность и открытость множества

$$S = \left\{ x \in X | \int_0^1 \frac{|x(t)|}{t} dt < 1 \right\}$$

в пространстве $(X, || \cdot ||)$

Решение.Ограниченность: если$x \in S$, то

$$||x|| = \int_0^1 t^2 |x(t)| dt = \int_0^1 t^3 \frac{|x(t)|}{t} dt \leq \left(\max_{t \leq 1} t^3 \right) \cdot \int_0^1 \frac{|x(t)|}{t} |dt < 1$$

-значит, S содержится в единичном шаре пространства $(X, ||\cdot||)$, S ограничено.

Открытость: аналогично предыдущему пункту, рассмотрим последовательность

$$y_n(t) = \begin{cases} n^4 t^2 & , \quad 0 \quad < t < \quad \frac{1}{n} \\ 0 & , \quad \frac{1}{n} \quad \leq t < \quad 1 \end{cases}$$

$$||y_n|| = \int_0^{1/n} n^4 t^4 dt = \frac{n^4}{5n^5} = \frac{1}{5n} \to 0$$

для $x \in S$

$$\int_0^1 \frac{|x(t) + y_n(t)|}{t} dt \geq \int_0^1 \frac{|y_n(t)|}{t} dt - \int_0^1 \frac{|x(t)|}{t} dt =$$

$$= n^4 \int_0^1 t dt - \int_0^1 \frac{|x(t)|}{t} dt > \frac{n^2}{2} - 1$$

-больше 1 при n>3 , поэтому в любом шаре с центром x найдется элемент $(x + y_n)$, не принадлежащий S. Множество не является открытым.