Простейшая задача вариационного исчисления

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to min \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1 \text{ where } x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$t_0, t_1 \in \mathbb{R},\ t_0 < t_1$$

$$x \in C^1[t_0, t_1] \text{ and } x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Определение 1: Слабый локальный минимум

$$\exists\delta > 0 : \ \mathcal{J}(x) \geq \mathcal{J}(\hat{x})\ \forall x \in C^1[t_0, t_1] \colon \ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1 \to$$

$$\to ||x - \hat{x}||_{C^1} = max(||x - \hat{x}||, ||\dot{x} - \dot{\hat{x}}||) < \delta$$

Определение 2: Сильный локальный минимум

$$\exists\delta > 0 : \ \mathcal{J}(x) \geq \mathcal{J}(\hat{x})\ \forall x \in RC^1[t_0, t_1] \colon \ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1 \to$$

$$\to ||x - \hat{x}||_{C^1} = max(||x - \hat{x}||, ||\dot{x} - \dot{\hat{x}}||) < \delta$$

Предложение 1: Связь между определениями

$\hat{x}$ сильный минимум $\Rightarrow$ $\hat{x}$ слабый минимум

Теорема 1: Необходимое условие

$\hat{x}$ - слабый локальный минимум

$$\mathcal{L}, \mathcal{L}_x, \mathcal{L}_{\dot{x}} \in C[\mathbb{U}(\{(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) | t \in [t_0, t_1])\})]$$

$$\hat{\mathcal{L}}_{\dot{x}} \in C^1[t_0, t_1]$$

$$\forall t \in [t_0, t_1] \to -\frac{d}{dt}\hat{\mathcal{L}}_{\dot{x}}(t) + \hat{\mathcal{L}}_x(t) = 0$$

Пример 1
Решение

- $\mathcal{L} = \dot{x}^2(t) + x(t)$

- Euler: $\dfrac{d}{dt}\mathcal{L}_{\dot{x}} - \mathcal{L}_x = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}(2\dot{x}) - 1 = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \dfrac{1}{2}$

- $\begin{cases} \hat{x} = \frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2 \\ x(0) = x(T) = 0 \end{cases} \quad \to \hat{x} = \dfrac{1}{4} t \cdot (t - T)$

- $\mathcal{J}(\hat{x} + h) - \mathcal{J}(\hat{x}) = \displaystyle\int_0^T ((\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 + \hat{x} + h - \dot{\hat{x}}^2 - \hat{x})dt =$

$$\bullet\, \mathcal{J}(\hat{x} + h) - \mathcal{J}(\hat{x}) = \int_0^T ((\dot{\hat{x}} + \dot{h})^2 + \hat{x} + h - \dot{\hat{x}}^2 - \hat{x})dt =$$

$$\int_0^T (\dot{h}^2 + 2\dot{h}\dot{\hat{x}} + h)dt = \int_0^T \dot{h}^2 \overset{\geq 0}{dt} + \int_0^T (h - 2\ddot{\hat{x}}h)\overset{= 0}{dt}$$

$$+\ 2\dot{\hat{x}}h\Big|_0^T \overset{= 0}{dt} > 0$$

Теорема 1 (необходимое условие)

$$\hat{x} \in C^2 \text{ - weak local min, } f \in C^3(O(\Gamma)) \to$$

Тогда выполнены:

Уравнение Эйлера

Условие Лежандра

Условие Якоби, если выполнено сильное условие Лежандра

Теорема 2 (необходимое условие)

$\hat{x} \in C^1$ - strong local min, $f \in C^1(O(\Gamma)) \to$

Тогда выполнены:

Условие Эйлера

Условие Вейерштрасса

Условие Лежандра, если $\exists \hat{f}_{\dot{x}\dot{x}},\ \forall t \in [t_0, t_1]$

Теорема 3 (достаточное условие)

Пусть выполнены:

усиленное условие Лежандра и Якоби, а также

$$\hat{x} \in C^2 \cap M,\ f \in C^3(V), V = \left\{ (t, \hat{x}(t)) \middle| t \in [t_0, t_1] \right\}$$

$\hat{x}$ - weak local min

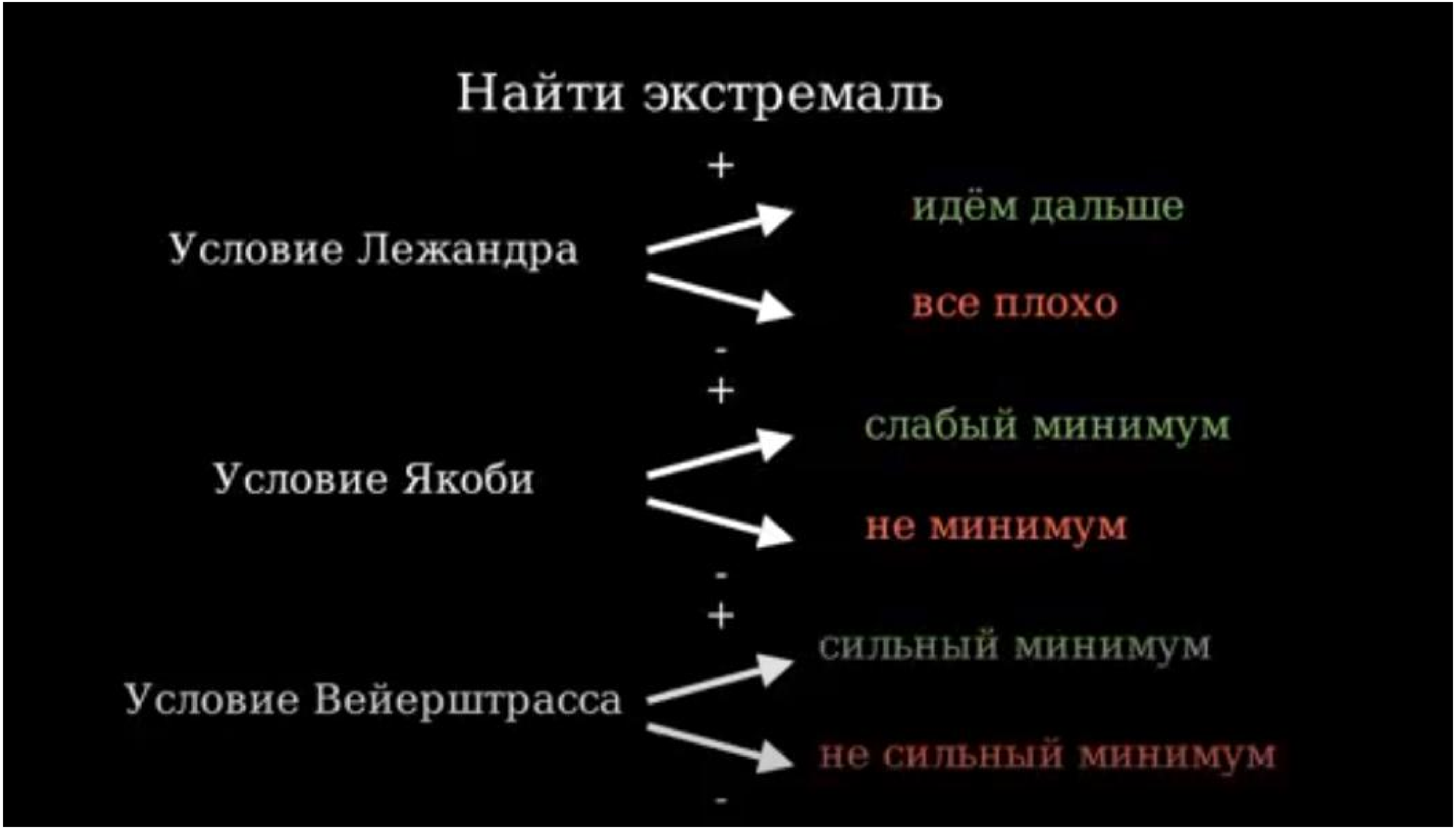
Теорема 4 (достаточное условие)

Пусть выполнены:

усиленное условие Лежандра и Якоби, а также

$$\hat{x} \in C^2 \cap M,\ f \in C^3(V), V = \left\{ (t, \hat{x}(t)) \middle| t \in [t_0, t_1] \right\}$$

f - выпукла по производной x


Найти экстремаль
+
Условие Лежандра
идём дальше
все плохо
-
+
Условие Якоби
слабый минимум
не минимум
-
+
Условие Вейерштрасса
сильный минимум
не сильный минимум
-

Пример

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x) = \int_0^1 \dot{x}^3 dt \to min \\ x(0) = 0,\ x(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x) = \int_0^1 \dot{x}^3 dt \to min \\ x(0) = 0,\ x(1) = 1 \end{cases}$$

Допустимая экстремаль: Идем дальше

$f(x) = \dot{x}^3$- Impulse integral $\Rightarrow 3\dot{x}^2 = const \Rightarrow x(t) = C_1 t + C_2$

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = t$$

Условие Лежандра: Выполнено

$$\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t) = 6\dot{\hat{x}} = 6 > 0, \ \forall t \in [0,\ 1]$$

Условие Якоби:

$$-\frac{d}{dt}\left[6\dot{h}\right] = 0 \Rightarrow \ddot{h} = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{h} = 0 \\ h(0) = 0, \dot{h}(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow h(t) = t$$

$$h(\tau) = 0 \Rightarrow \tau = 0 \notin (0, 1]$$

Условие Якоби: Выполнено

Условие Вейертрасса: Не выполнено

$f(x) = \dot{x}^3$ - not convex over $\dot{x}$

$$\varepsilon(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) = u^3 - \dot{\hat{x}}^3 - 3 \cdot \dot{\hat{x}}^2(u - \dot{\hat{x}}) = u^3 - 3u + 2$$

Таким образом, $\hat{x} = t$ - слабый локальный минимум


$\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}} \underset{>}{\geq} 0$
Условие Лежандра

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}\Big(\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{f}_{\dot{x}x}(t)h(t)\Big) + \hat{f}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{f}_{xx}(t)h(t) = 0 \\ h(t_0) = 0,\ \dot{h}(t_0) = 1 \\ h(\tau) = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}, u) = f(t, \hat{x}, u) - f(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) - \hat{f}_{\dot{x}}(t)(u - \dot{x}) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{R},\ \forall t \in [t_0, t_1]$$

Задача с незакрепленными концам

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to min \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Теорема 1 (Необходимое условие

Пусть, $\hat{x}$ - weak local min

$$L, L_x, L_{\dot{x}} \in C\Big[U\Big(\Big\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\Big| t \in [t_0,\, t_1]\Big\}\Big)\Big]$$

Тогда: $\hat{L}_{\dot{x}}(t) \in C^1[t_0,\, t_1]$, $\begin{cases} -\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \\ \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x) = \int_0^T (\dot{x}^2(t) + x(t))dt \to min \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- $L = \dot{x}^2(t) + x(t)$

- $-\frac{d}{dt}\left(2\dot{x}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$

- $\hat{L}_{\dot{x}}(T) = 0 \Rightarrow \dot{x}(T) = 0$

- $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2 \\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{x}(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{T}{2}t$

Задача Больца

$$\mathcal{B}(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt + l(x(t_0), x(t_1))) \to min$$

Теорема 1 (Необходимое условие)

Пусть, $\hat{x}$ - weak local min $, l \in C^1[U(\hat{x}(t_0)), \hat{x}(t_1)]$

$$L, L_x, L_{\dot{x}} \in C\Big[U\Big(\Big\{(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))\Big| t \in [t_0, t_1]\Big\}\Big)\Big]$$

Тогда: $\hat{L}_{\dot{x}}(t) \in C^1[t_0, t_1]$, $\begin{cases} -\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0 \\ \hat{L}_{\dot{x}}(t_0) = \hat{l}_{x(t_0)}, \ \hat{L}_{\dot{x}}(t_1) = -\hat{l}_{x(t_1)} \end{cases}$

$$\mathcal{B}(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt + x^2(1) \to min$$

- $L = \dot{x}^2 - x,\ l = x^2(1)$
- $-\dfrac{d}{dt}\Big(2\dot{x}\Big) + 1 = 0 \Rightarrow 2\ddot{x} + 1 = 0 \Rightarrow x(t) = -\dfrac{t^2}{4} + C_1 t + C_2$
- $\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)} \\ L_{\dot{x}}(1) = -l_{x(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ 2\dot{x}(1) = -2x(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(1) = -x(1) \end{cases}$
- $\begin{cases} x(t) = -\frac{t^2}{4} + C_1 t + C_2 \\ \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(1) = -x(1) \end{cases} \Rightarrow \hat{x}(t) = \dfrac{3 - t^2}{4}$

Изопериметрическая задача

$$\begin{cases} \mathcal{J}_0(x) = \int_{t_0}^{t_1} L_0(t, x, \dot{x})dt \to min \\ \mathcal{J}_i(x) = \int_{t_0}^{t_1} L_i(t, x, \dot{x})dt = \gamma_i, \qquad i = \overline{1..m} \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Лагранжиан задачи

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i L_i(t, x, \dot{x})$$

$$\begin{cases} \mathcal{J}_0(x) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2)dt \to min \\ \mathcal{J}_1(x) = \int_0^1 xe^{-t}dt = \frac{1-3e^{-2}}{4} \\ x(0) = 0,\ x(1) = \frac{1}{e} \end{cases}$$

- $\mathcal{L} = \lambda_0(\dot{x}^2 + x^2) + \lambda_1 xe^{-t}$

- $-\dfrac{d}{dt}\mathcal{L}_{\dot{x}} + \mathcal{L}_x = 0 \Rightarrow -2\lambda_0\ddot{x} + 2\lambda_0 x + \lambda_1 e^{-t} = 0$

- $\begin{cases} \lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ inappropriate} \\ \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \ddot{x} - x = \lambda_1 e^{-t} \Rightarrow x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\lambda_1 te^{-t} \end{cases}$

- $\begin{cases} \lambda_0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ inappropriate} \\ \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \ddot{x} - x = \lambda_1 e^{-t} \Rightarrow x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\lambda_1 t e^{-t} \end{cases}$
- $\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\lambda_1 t e^{-t} \\ x(0) = 0, x(1) = \frac{1}{e} \\ \int_0^1 x e^{-t} = \frac{1-3e^{-2}}{4} \end{cases} \Rightarrow \hat{x}(t) = t e^{-t}$
- ...

Упрощенная задача оптимального управления

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt \to min \\ \dot{x} = \phi(t, x, u) \\ u(t) \in U, x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \end{cases} \qquad (*)$$

Опр 1 Решение (*) - (x, u) - допустимый процесс

Опр 2 Допустимый роцесс $(\hat{x}, \hat{u})$ - оптимальный, если: $|\mathcal{L}(\hat{x}, \hat{u})| < \infty$

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \forall (x, u) \in BC : \ ||x - \hat{x}||_C \leq \varepsilon \to \mathcal{J}(x, u) \geq \mathcal{J}(\hat{x}, \hat{u})$$

Опр 3 Функция Лагранжа: $L = \lambda_0 f(t, x, u) + p(t)(\dot{x} - \phi(t, x, u))$

λ_0, $p = p(t)$ - множители Лагранжа

Теорема. Необходимое условие

Если $(\hat{x}, \hat{u})$ - optimal, $f,\ f_x,\ \phi,\ \phi_x \in C$

то $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, p \in PC^1[t_0, t_1]$, что выполнены:

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}} + L_x = 0 \Leftrightarrow \dot{p} = \lambda_0 \hat{f}_x(t) - p\hat{\phi}_x(t) = \hat{L}_x$$

$$\forall t \in [t_0, t_1] : \hat{u}(t) \in C[t_0, t_1] \min_{u \in U} L(t, \hat{x}, u, \lambda_0, p) = \hat{L}$$

Замечание для задачи со свободным концом:

- $\lambda_0 = 1,$
- $\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = 0 \Leftrightarrow p(t_i) = 0, i = \overline{1,2}$

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^T (\dot{x}^2 + x)dt \to min \\ x(0) = x(T) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} J(x,u) = \int_0^T (u^2 + x)dt \to min \\ \dot{x} = u, \; x(0) = x(T) = 0 \end{cases}$$

- $L = \lambda_0(u^2 + x) + p(\dot{x} - u) \Rightarrow \dot{p} = \lambda_0$
- min over u: $L_u = 0 \Rightarrow 2\lambda_0 u - p = 0$
- $\begin{cases} \dot{p} = \lambda_0 \\ 2\lambda_0 u = p \end{cases}$

$$\begin{cases} J(x) = \int_0^T (\dot{x}^2 + x)dt \to min \\ x(0) = x(T) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} J(x,u) = \int_0^T (u^2 + x)dt \to min \\ \dot{x} = u, \ \ x(0) = x(T) = 0 \end{cases}$$

- $\begin{cases} \dot{p} = \lambda_0 \\ 2\lambda_0 u = p \end{cases}$

- $\lambda_0 = 0 \Rightarrow p = 2\lambda_0 u = 2u \cdot 0 = 0$:(

- $\lambda_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = \lambda_0 \\ 2\lambda_0 u = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = t + C_1 \\ u = \frac{t}{2} + C_2 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{t^2}{4} + C_2 t + C_3$

- $\begin{cases} x = \frac{t^2}{4} + C_2 t + C_3 \\ x(0) = 0, \ x(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x} = \frac{1}{4} t(t - T) \\ \hat{u} = \frac{1}{4}(2t - T) \end{cases}$

$$\begin{cases} \mathcal{J}(x) = \int_0^4 (\dot{x}^2 + x)dt \to min \\ |\dot{x}| \le 1,\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{J}(x) = \int_0^4 (u^2 + x)dt \to min \\ \dot{x} = u,\ |u| \le 1,\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- $L = \lambda_0(u^2 + x) + p(\dot{x} - u) \Rightarrow \dot{p} = \lambda_0$
- $\hat{L}_{\dot{x}}(4) = 0 \Leftrightarrow p(4) = 0$
- $\lambda_0 = 0 \Rightarrow \dot{p} = 0 \Rightarrow p(t) \equiv const \Rightarrow p(t) \equiv 0$:(
- $\lambda_0 = 1 \Rightarrow$ min over u $\min\limits_{u\in[-1,1]}(\lambda_0(u^2 + \hat{x}) + p(\dot{\hat{x}} - u)) = \lambda_0(\hat{u}^2 + \hat{x}) + p(\dot{\hat{x}} - \hat{u})$
- $\Rightarrow \hat{u} = \begin{cases} \frac{p}{2} & |p| \le 2 \\ sign(p) & |p| \ge 2 \end{cases}$

- $\Rightarrow \hat{u} = \begin{cases} \frac{p}{2} & |p| \leq 2 \\ sign(p) & |p| \geq 2 \end{cases}$

- ODE for p: $\begin{cases} \dot{p} = 1 \\ p(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow p(t) = t - 4$

- $\dot{\hat{x}} = \hat{u} = \begin{cases} \frac{t-4}{2} & |t-4| \leq 2 \\ sign(t-4) & |t-4| \geq 2 \end{cases}$

- $\dot{\hat{x}} = \begin{cases} \frac{t}{2} - 2 & t \in [2,4] \\ -1 & t \in [0,2] \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -t + C_1 & t \in [0,2] \\ \frac{t^2}{4} - 2t + C_2 & t \in [2,4] \end{cases}$

- $$\dot{\hat{x}} = \begin{cases} \frac{t}{2} - 2 & t \in [2,4] \\ -1 & t \in [0,2] \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -t + C_1 & t \in [0,2] \\ \frac{t^2}{4} - 2t + C_2 & t \in [2,4] \end{cases}$$

- $$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \hat{x} \in C[0,4] \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} -t & t \in [0,2] \\ \frac{t^2}{4} - 2t + 1 & t \in [2,4] \end{cases}$$

- Let $h \in PC^1[t_0, t_1] : |\dot{\hat{x}} + \dot{h}| \leq 1,\ h(0) = 0$

$$\Delta\mathcal{J}(\hat{x}, h) = \int_0^4 ((\dot{x} + \dot{h})^2 + x + h - \dot{x}^2 - x)dt = \int_0^4 (\dot{h}^2 + 2\dot{x}\dot{h} + h)dt \geq$$

$$\int_0^4 (-2\ddot{x} + 1)hdt = \int_0^2 hdt \geq 0$$

Линейные автономные системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & u \in U \subseteq \mathbb{R}^p \\ x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1, & x_0, x_1 \in R^n \end{cases}$$

Характеристики линейных систем:

1. Управляемость
2. Наблюдаемость
3. Идентифицируемость

Управляемость

Опр1 АЛС - вполне управляема при $U = \mathbb{R}^p$
если: $\forall (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \ \exists u(t) \in [-C, C] \forall t \in [t_0, t_1]$ переводящее систему $x_0 \to x_1$

Теор1 АЛС при $U = \mathbb{R}^p$ - вполне управляема $\Leftrightarrow rank\left[B\ AB\ \ldots\ A^{n-1}B\right]$

Пример1 $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

If $n = 2 \to rank\left[B\ AB\right] = rank \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 < 2$ - система не вполне управляема

Опр2 АЛС - вполне управляема относительно $H = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| Kx = 0\right\}$
если: $\forall x_0 \ \exists t_1, \ \exists u(t) \in [-C, C] \forall t \in [t_0, t_1]$ переводящее систему $x_0 \to x_1 : \ Kx_1 = 0$

Теор2 АЛС вполне управляема на $H \Leftrightarrow rank\left[KB\ KAB\ \ldots\ KA^{n-1}B\right]$

Наблюдаемость

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & u \in U \subseteq \mathbb{R}^p \\ y = Cx, & y \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$ - наблюдаемая система

Опр3 Пусть $\forall x(t_0) = x_0 \; \exists t_1 : u(t) \; y(t)$ достаточно для определения $x(t_0)$
Тогда система вполне наблюдаема.

Теор3 НС вполне наблюдаема $\Leftrightarrow rank\left[C \; CA \; \dots \; CA^{n-1}\right]$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \left[C \; CA \; CA^2 \; CA^3\right] \quad CA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad CA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad CA^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$rank\left[Q\right] = 4$ - вполне наблюдаема

Идентифицируемость

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & u \in U \subseteq \mathbb{R}^p \\ y = Cx, & y \in \mathbb{R}^m \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Опр4 Направление $\bar{k} : ||\bar{k}|| = 1$ идентифицируемо по измерениям, если $\forall \gamma \in \mathbb{R} : k = \gamma \bar{k}$ восстанавливается по y

И идентифицируемо вполне, если каждое направление идентифицируемо

Теор4 Система идентифицируема по напр.

$\Leftrightarrow$ If $Q = \left\{ CB\bar{k}\, CAB\bar{k}\, \dots\, CA^{n-1}B\bar{k} \right\}$ $\exists x \in Q\ x \neq 0$

Теор5 Система идентифицируема в целом

$\Leftrightarrow rank \left[CB\, CAB\, \dots\, CA^{n-1}B \right] = p$

ЗОУ в общем виде

1. Уравнения движения: $\dot{x}(t) = \phi(t, x, u)$

2.1 Ограничения вида равенства:

$$\mathcal{J}_i(x, u, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, u)dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t1, x(t_1)) \leq 0 \;\; 1 \leq i \leq m^1$$

2.2 Ограничения вида неравенства:

$$\mathcal{J}_j(x, u, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x, u)dt + \psi_i(t_0, x(t_0), t1, x(t_1)) = 0 \;\; m^1 \leq j \leq m$$

3. Критерий оптимальности:

$$\mathcal{J}_0(x, u, t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u)dt + \psi_0(t_0, x(t_0), t1, x(t_1)) \to min$$

Метод Лагранжа

1. Функция Лагранжа:

$$L(x,t,\dot{x},p,\lambda) = p(t)\cdot(\dot{x} - \phi(t,x,u)) + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(t,x,u)$$

$$l(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1)) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \psi_i(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))$$

2. Уравнение Эйлера: $\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) = \hat{L}_x(t)$

3. Условия трансверсальности: $\hat{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i l_{x(t_i)}$

4. Условие минимума по u : $\min\limits_u L(\ldots) = L(\ldots,\hat{u},\ldots)$

5. Условие стационарности: $\hat{L}(t_1) + \hat{l}_{t_1} = 0$

6. Условия доп. нежесткости: $\forall i \in \overline{1,m}:\ \lambda_i \geq 0 \;\&\&\; \mathcal{J}_i \lambda_i = 0$

$$\begin{cases} \int_0^T \Big[x(t) + u^2(t)\Big]dt \to min \\ \dot{x}(t) = u(t) \\ x(0) = \frac{1}{33},\ |u(t)| \le 1 \end{cases}$$

1. $L = p(t) \cdot (\dot{x} - u) + \lambda_0 \cdot (x + u^2) \qquad l = \lambda_1 \cdot \Big[x(0) - \frac{1}{33}\Big]$

2. $-\frac{d}{dt}L_{\dot{x}} + L_x = 0 \Rightarrow \dot{p}(t) = \lambda_0$

3. $\begin{cases} L_{\dot{x}}(0) = l_{x(0)}, \\ L_{\dot{x}}(T) = -l_{x(T)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) = \lambda_1, \\ p(T) = 0 \end{cases}$

4. $L_u = 2\lambda_0 u - p(t) = 0$

5. $L(T) + l_T = \lambda_0\Big[x(T) + u^2(T)\Big] + p(t)\Big[\dot{x}(T) - u(T)\Big] = 0$

!-- 2. $\to p(t) = \lambda_0 t + C_0 \to$!-- 3. $\to C_0 = \lambda_1,\ T = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$

!-- 4. $u(t) = \frac{p}{2\lambda_0} = \frac{t}{2} + \frac{C_0}{2\lambda_0} = \frac{t}{2} - \frac{T}{2}$

5. $L(T) + l_T = \lambda_0\left[x(T) + u^2(T)\right] + p(t)\left[\dot{x}(T) - u(T)\right] = 0$

!-- 2. $\rightarrow p(t) = \lambda_0 t + C_0 \rightarrow$!-- 3. $\rightarrow C_0 = \lambda_1,\ T = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}$

!-- 4. $u(t) = \dfrac{p}{2\lambda_0} = \dfrac{t}{2} + \dfrac{C_0}{2\lambda_0} = \dfrac{t}{2} - \dfrac{T}{2}$

!-- 0. $\dot{x} = u \Rightarrow x(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{tT}{2} + \dfrac{1}{33}$!-- 5. $\lambda_0\left[\dfrac{T^2}{4} - \dfrac{T^2}{2} + \dfrac{1}{33} + \left(\dfrac{T}{2} - \dfrac{T}{2}\right)\right] = 0 \Rightarrow T^2 = \dfrac{4}{33}$

Ответ: $x(t) = \dfrac{t^2}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{33}}t + \dfrac{1}{33},\ u = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{33}},\ T = \dfrac{2}{\sqrt{33}}$