Теория вероятностей (ФАКИ, 7 семестр)

Линдеманн Никита, МФТИ

24 ноября 2019 г.

Содержание

1 Теория

Теорема 1.1 (Первое неравенство Чебышева, неравенство Маркова). *Пусть ξ – неотрицательная случайная величина с конечным матожиданием. Тогда $\forall\, c > 0$ верно*

$$P(\xi \geq c) \leq \frac{E(\xi)}{c}.$$

Доказательство. Введем события $A_c = \{w_i \mid \xi(w_i) \geq c\}$. Ввиду неотрицательности случайной величины ξ можем записать:

$$\xi(w) \geq \xi(w)\mathbb{1}_{A_c} \geq c\mathbb{1}_{A_c}$$

Используя монотонность матожидания, получаем требуемое:

$$E(\xi) \geq cE(\mathbb{1}_{A_c}) = cP(A_c) = cP(\xi \geq c).$$

□

Теорема 1.2 (Второе неравенство Чебышева). *Пусть ξ – произвольная случайная величина с конечными матожиданием и дисперсией. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ верно*

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Доказательство. Заметим, что $P(|\xi - E(\xi)|^2 \geq \varepsilon^2)$ равносильно $P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon)$. Тогда, вводя обозначение $|\xi - E(\xi)|^2 = \eta$, можем записать оцениваемое сверху выражение как $P(\eta \geq \varepsilon^2)$. Тогда по первому неравенству Чебышева получаем требуемое:

$$P(\eta \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(\eta)}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

□

Определение 1.1. *Вероятностное пространство – это тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где:*

1. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ *– произвольное непустое множество элементарных исходов.*
2. $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ *– множество случайных событий, состоящее из подмножеств Ω, такое, что:*
   (a) $\Omega \in \mathcal{F}$.
   (b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus A = \overline{A} \in \mathcal{F}$.
   (c) $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
3. $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *– функция, такая, что:*
   (a) $P(\Omega) = 1$.
   (b) $\forall\, \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F} : A_i \cap A_j = \varnothing\ \forall\, i \neq j \ \Rightarrow P\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

При этом $\mathcal{F}$ называется σ-алгеброй событий (так как это множество замкнуто относительно счетного объединения), а P – σ-аддитивной вероятностной мерой. Пару $(\Omega, \mathcal{F})$, состоящую из множества и сигма-алгебры его подмножеств, называют измеримым пространством.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathcal{E}$ – любой класс подмножеств множества Ω. Существует единственная σ-алгебра $\sigma(\mathcal{E})$, обладающая следующими свойствами:*

1. $\varepsilon \subseteq \sigma(\mathcal{E})$
2. $\sigma(\mathcal{E})$ *– минимальная по включению σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$. То есть, если $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, такая что $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, то $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}$.*

Определение 1.2. *Функцией распределения случайной величины ξ называется функция $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ такая, что $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$.*

Свойства функции распределения:

1. $P(\xi \in (a,b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.
2. $F_\xi(x)$ монотонно неубывающая функция.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1.$
4. $F_\xi(x)$ непрерывна справа: $\forall\, x \in \mathbb{R} \lim\limits_{t\to x+0} F_\xi(t) = F_\xi(x)$.
5. $F_\xi(x)$ имеет предел слева.
6. $F_\xi(x)$ имеет разрывы только первого рода, и таких разрывов не более чем счетное количество.

Определение 1.3. *Функциия $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется борелевской, если прообраз любого борелевского множества является борелевским множеством:*

$$\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Определение 1.4. *Распределение $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называется абсолютно непрерывным, если существует такая неотрицательная функция $p_\xi(x)$ (которая называется плотностью распределения или плотностью вероятности случайной величины ξ), что:*

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt.$$

Свойства плотности вероятности:

1. Условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1.$
2. $\int\limits_{a}^{b} p_\xi(x)dx = P(\xi \in \langle a, b\rangle).$
3. $p_\xi(x) = F'_\xi(x).$

Теорема 1.4. *Пусть $p_\xi(x)$ – плотность вероятности абсолютно непрерывной случайной величины ξ, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – борелевская функция. Тогда*

$$E(g(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)p_\xi(x)dx.$$

Доказательство. Проведем доказательство в несколько этапов:

1. Докажем утверждение для простых (с конечным числом значений) функций. Для этого заметим, что каждая такая функция $g(x)$ представима в виде:
$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mathbb{1}_{A_k}(x).$$
А для индикаторов это утверждение очевидно: с одной стороны по свойству индикаторов $E(\mathbb{1}_A(\xi)) = P(\xi \in A)$, а с другой стороны по определению плотности вероятности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A(x) p_\xi(x) dx = \int\limits_A p_\xi(x) dx = P(\xi \in A)$. Зачит, используя линейность матожидания и интерграла, получим требуемое для простых функций.

2. Следующим шагом докажем утверждение для произвольных неотрицательных борелевских функций. Для этого воспользуемся леммой, которая говорит, что любая неотрицательная борелевская функция $g(x)$ представима в виде $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, где $\{g_n\}$ – неубывающая последовательность простых функций.

□

Теорема 1.5. *Пусть $\eta = f(\xi)$, где $f(x)$ – гладкая строго монотонная функция, а ξ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения $p_\xi(x)$. Тогда плотность распределения η имеет вид:*
$$p_\eta(x) = p_\xi(g(y)) \cdot |g'(y)|,$$
где $g(y) = f^{-1}(x)$ – обратная к $f(x)$ функция.

Доказательство. Сначала докажем утверждение для строго возастающей функции $f(x)$. Используя строгую монотонность $f(x)$ и $g(y)$ и определение функции распределения, а также теорему о замене переменной в определенном интеграле, получим:
$$F_\eta(y) = P(f(\xi) \le y) = P(\xi \le g(y)) = \int\limits_{-\infty}^{g(y)} p_\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{y} p_\xi(g(y)) g'(y) dy.$$
Далее, используя связь плотности вероятности и функции распределения и теорему о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом, получим требуемое:
$$p_\eta(y) = F'_\eta(y) = \frac{d}{dy}\left(\int\limits_{-\infty}^{y} p_\xi(g(y)) g'(y) dy\right) = p_\xi(g(y)) g'(y).$$

Аналогично рассуждая, получим требуемое и для строго убывающей фнкции:
$$F_\eta(y) = P(f(\xi) \le y) = P(\xi \ge g(y)) = \int\limits_{g(y)}^{+\infty} p_\xi(x) dx = \int\limits_{y}^{+\infty} p_\xi(g(y)) g'(y) dy = 1 - \int\limits_{-\infty}^{y} p_\xi(g(y)) g'(y) dy.$$
$$p_\eta(y) = F'_\eta(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - \int\limits_{-\infty}^{y} p_\xi(g(y)) g'(y) dy\right) = -p_\xi(g(y)) g'(y).$$

□

2 Первое задание

Задача 2.1. Пусть A, B и C – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что:

a) произошло только событие A: $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

b) произошли A и B, а C не произошло: $A \cap B \cap \overline{C}$;

c) все три события произошли: $A \cap B \cap C$;

d) произошло по крайней мере одно из событий: $A \cup B \cup C$;

e) ни одно из событий не произошло: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.

Задача 2.2. Проверить справедливость следующих равенств:

a) $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$$x \in \overline{AB} \Leftrightarrow x \notin AB \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \overline{A} \\ x \in \overline{B} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

b) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$.

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \ \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \overline{A} \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \overline{A}\,\overline{B}.$$

c) $(A \cup B)C = AC \cup BC$.

$$x \in (A \cup B)C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \in C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \ x \in C \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \\ \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in AC \cup BC.$$

d) $(A \cup B)\overline{AB} = A\overline{B} \cup \overline{A}B$.
Используя доказанные выше свойства, получим:

$$(A \cup B)\overline{AB} = A\overline{AB} \cup B\overline{AB} = A(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup B(\overline{A} \cup \overline{B}) = A\overline{A} \cup A\overline{B} \cup B\overline{A} \cup B\overline{B} = A\overline{B} \cup \overline{A}B.$$

Задача 2.3. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке 1.

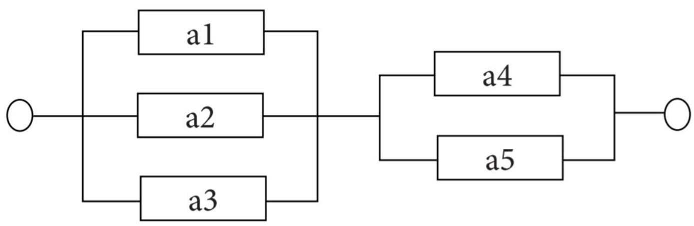


Рис. 1: Схема.

Событие A_i состоит в том, что вышел из строя участок a_i. Записать выражение для события C, заключающегося в том, что цепь разомкнута.

Решение. Очевидно, что цепь будет разомкнута только тогда, когда полностью выйдет из строя первый блок (участки a_1, a_2 и a_3) или второй (участки a_4 и a_5). Значит

$$C = A_1A_2A_3 \cup A_4A_5.$$

□

Задача 2.4. Упростить выражения для заданных событий:

a) $(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B}) = AA\cup A\overline{B}\cup BA\cup B\overline{B} = A\cup A\overline{B}\cup AB = A\cup A(\overline{B}\cup B) = A\cup A = A.$

b) $(A\cup B)\cap(B\cup C) = AB\cup AC\cup BB\cup BC = B\cup AC.$

c) $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\cap(A\cup\overline{B}) = (A\overline{A}\cup A\overline{B}\cup B\overline{A}\cup B\overline{B})(A\cup\overline{B}) = A\overline{B}A\cup A\overline{B}\,\overline{B}\cup B\overline{A}A\cup B\overline{A}\,\overline{B} = A\overline{B}\cup A\overline{B} = A\overline{B}.$

Задача 2.5. Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ – произвольное семейство подмножеств некоторого множества. Доказать законы де Моргана:

1. $\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i} = \bigcap\limits_{i\in I}\overline{A_i}.$

$$x\in\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \Leftrightarrow x\notin\bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x\notin A_i\ \forall\, i\in I \Leftrightarrow x\in\overline{A_i}\ \forall\, i\in I \Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}\overline{A_i}.$$

2. $\overline{\bigcap\limits_{i\in I} A_i} = \bigcup\limits_{i\in I}\overline{A_i}.$

$$x\in\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \Leftrightarrow x\notin\bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists\, j\in I : x\notin A_j \Leftrightarrow \exists\, j\in I : x\in\overline{A_j} \Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}\overline{A_i}.$$

Задача 2.6. Пусть $\{A_n\}$ – произвольная последовательность подмножеств некоторого множества. Пусть A_* – подмножество, состоящее из элементов, которые принадлежат бесконечно многим подмножествам последовательности $\{A_n\}$, A^* – подмножество, состоящее из элементов, которые принадлежат всем подмножествам последовательности $\{A_n\}$, кроме конечного их числа. Выразить A_* и A^* через подмножества $\{A_n\}$ с помощью теоретико-множественных операций.

Задача 2.7. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника:

a) 3 партии из 4-х или 5 из 8-ми?

Так как испытания реализуются по схеме Бернулли, то вероятность выиграть ровно k партий из n при вероятности выигрыша p, может быть вычислена как $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$. Следовательно:

$$P(3|4) = C_4^3\frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4},\quad P(5|8) = C_8^5\frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{7}{32}.$$

b) не менее 3-х партий из 4-х или не менее 5 из 8-ми?

$$P(3\geq|4) = C_4^3\frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^4\frac{4!}{4!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}.$$

$$P(5\geq|8) = C_8^5\frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^6\frac{8!}{6!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7\frac{8!}{7!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^8\frac{8!}{8!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{89}{256}.$$

Задача 2.8. На полке в случайном порядке расставлены 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти три тома стоят в порядке возрастания слева направо (не обязательно рядом).

Решение. Вероятность удачного расположения трех книг (событие A) можно найти по классической формуле (так как вероятностное пространство однородно):

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Мощность Ω, очевидно, равна 40!, так как именно столько есть способов расставить 40 разных книг на полку. Чтобы найти $|A|$, сначала (мысленно) расставим на полке в правильном порядке три книги Пушкина, а остальные 37 книг расставим случайным образом. Тогда очевидно, что есть 37! способов расставить остальные книги при каждой заданной правильной расстановке трех книг Пушкина. Количество таких правильных расстановок можно найти, если представить, что между (либо до или после) правильно расставленными томами Пушкина нам надо поставить еще 37 книг, что эквивалентно задаче размещения 37 неразличимых шаров по 4 ящикам, при условии, что каждый ящик может вместить любое количество (от 0 до 37) шаров. Решение этой задачи известно и равно C_{40}^{37}, следовательно, искомая вероятность будет такая же, как при расстановке трехтомника без других книг:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{37!}{40!} C_{40}^{37} = \frac{1}{6}.$$

□

Задача 2.9. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года (учесть, что число дней в разных месяцах различно).

Решение. В предоположении, что дни рождения могут приходится на все месяцы равновероятно, ответ будет равен $\frac{12!}{12^{12}}$. Однако, в году 7 месяцев с 31 днем, 4 месяца по 30 дней и 1 месяц с 28 днями, а значит нам надо решить следующую задачу: есть n лунок и n шаров, каждый шар может попасть в лунку k с вероятностью p_k, какова вероятность того, что все шарики попадут в разные лунки? Докажем по индукции, что вероятность такого события равна

$$P(n) = n! \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Действительно, при $n = 2$ всего 4 исхода: оба шара попали в первую лунку ($p = p_1^2$); оба попали во вторую лунку ($p = p_2^2$); первый шар попал в первую лунку, а второй во воторую ($p = p_1 p_2$); первый шар попал во вторую лунку, а второй в первую ($p = p_2 p_1$). База доказана.

Пусть есть $n+1$ шаров и лунок, и вероятность того, что n шаров попадут в разные лунки равна $P(n) = n! \prod\limits_{k=1}^{n} p_k$. Рассмотрим первые n шаров, которые с вероятностью $P(n)$ закатятся каждый в свою лунку, тогда, чтобы испытание закончилось успехом, необходимо, чтобы последний шар закатился в последнюю свободную лунку. Это произойдет с вероятностью p_{k_i} (в зависимости от того, в какие лунки закатились первые n шаров), при этом мы можем выбрать первые n шаров $C_{n+1}^n = n+1$ способами. Значит, вероятность того, что все $n+1$ шаров закатятся каждый в свою лунку равна $P(n+1) = (n+1)n! \prod\limits_{k=1}^{n+1} p_k = (n+1)! \prod\limits_{k=1}^{n+1} p_k$. Шаг индукции доказан.

Итого, ответ на задачу будет следующим:

$$P = 12! \cdot \left(\frac{31}{365}\right)^7 \cdot \left(\frac{30}{365}\right)^4 \cdot \frac{28}{365}.$$

□

Задача 2.10. Ребенок играет с десятью буквами разрезанной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что он случайно составит слово МАТЕМАТИКА?

Решение. Всего количество различных слов, которые можно составить из этих букв, равно $\frac{10!}{3!2!2!}$, так как всего 10! способов переставить 10 букв, но при этом у нас есть 3 одинаковые буквы А и по две буквы М и Т, следовательно, переставляя их, мы не будем получать новые слова. Из этого набора нам нужно только одно слово, следовательно вероятность равна

$$P = \frac{3!2!2!}{10!}.$$

Можно рассуждать по-другому: чтобы составить слово МАТЕМАТИКА, нам нужно на первое место поставить букву М, это произойдет с вероятностью $\frac{2}{10}$. Далее должна идти буква А, вероятность чего равна $\frac{3}{9}$. Рассуждая далее аналогично, ввиду независимости выбора букв, получим:

$$P = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3!2!2!}{10!}.$$

□

Задача 2.11. Из колоды 52 карт наудачу выбирается 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут карты всех четырех мастей?

Решение. Всего способов выбрать 6 карт из колоды 52 карт C_{52}^6. Чтобы найти количество способов выбрать из колоды 6 карт так, чтобы среди них были карты всех 4 мастей, рассмотрим разбиение на события A_1 и A_2, которые заключаются в том, что среди выбранных 6 карт первые 4 все разной масти, а последние две разной и одинаковой масти соответсвенно. $N(A_1) = C_{13}^2 \cdot C_{13}^2 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_4^2$, так как именно столько есть способов выбрать по две карты двух выделенных мастей и по одной карте из двух оставшихся мастей (множитель C_4^2 нужен, так как это количество способов выделить 2 масти из 4). $N(A_2) = C_{13}^3 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_4^1$, так как именно столько есть способов выбрать три карты выделенной масти и три карты по одной из оставшихся мастей (множитель C_4^1 отвечает за количество способыв выбрать 1 выделенную масть из 4). Итого:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(A_1) + N(A_2)}{N(\Omega)} = \frac{C_{13}^2 \cdot C_{13}^2 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_4^2 + C_{13}^3 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 \cdot C_4^1}{C_{52}^6}.$$

□

Задача 2.12. Для работы выделено 12 человек. Сколькими способами их можно разделить на пары?

Решение. Выстроим всех людей в шеренгу и занумеруем. Будем разбивать людей по парам с начала шеренги (рисунок 2).

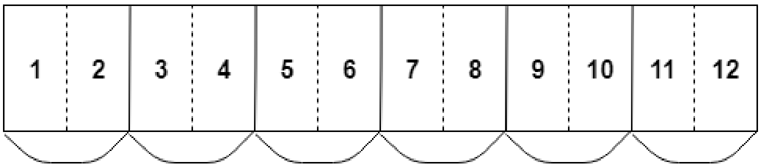


Рис. 2: Разбиение людей на пары.

Всего таких построений 12!, но перестановка в каждой паре двух людей даст то же разбиение на пары, следовательно, всего пар $\frac{12!}{2^6}$. Таким образом мы нашли количество упорядоченных пар (так как изначально мы начали с перестановок людей, то порядок важен), но так как нас интересует количество неупорядоченных пар, то надо поделить на количество перестановок на множестве из 6 элементов, следовательно, ответ равен $\frac{12!}{6!\cdot 2^6}$. ☐

Задача 2.13. В задаче №3 найти $P(C)$, если события A_i, $i = \overline{1,5}$ независимы в совокупности и $P(A_k) = \frac{1}{k+1}$.

Решение.

$$P(C) = P(A_1A_2A_3 \cup A_4A_5) = P(A_1A_2A_3) + P(A_4A_5) - P(A_1A_2A_3 \cap A_4A_5) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_4)P(A_5) - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} = \frac{53}{6!}.$$

☐

Задача 2.14. (Сумашедший почтальон) В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти p_n – вероятность того, что что хотя бы одно письмо дойдет до своего адресата. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Решение. Очевидно, что в данном случае вероятность того, что к конкретному адресату попадет именного его письмо, равна $\frac{1}{n}$.

Расссмотрим события A_k, заключающиеся в том, что k-ое письмо пришло по правильному адресу. Легко подсчитать вероятность того, что ровно k писем пришли по правильному адресу:

$$P(A_{i_1}\dots A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

Чтобы найти вероятность события, при котором все письма попадут по правильным адресам, то есть вероятность события $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, используем известную формулу включения исключений, которая для вероятности имеет вид:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Подставляя значения в формулу, получим ответ:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - C_n^2\frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3\frac{(n-3)}{n!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n} \approx 1 - \frac{1}{e}.$$

☐

Задача 2.15. Группа из $2n$ девушек и $2n$ юношей делится на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число юношей и девушек?

Решение. Количество способов разделить $4n$ человек на две равные группы, очевидно, равно C_{4n}^{2n}. При этом количество таких разбиений, при которм в каждой подгруппе окажется равное количество юношей и девушек равно $C_{2n}^{n} \cdot C_{2n}^{n}$, так как в таком случае в каждой подгруппе будет по n девушек и юношей, и количество способов независимо отобрать n из $2n$ девушек и n из $2n$ юношей равно $C_{2n}^{n} \cdot C_{2n}^{n}$. Итого, ответ:

$$P = \frac{(C_{2n}^{n})^2}{C_{4n}^{2n}}.$$

□

Задача 2.16. n мужчин и n женщин случайно рассаживаются вокруг круглого стола. Какова вероятность того, что за столом мужчины и женщины будут чередоваться?

Задача 2.17. В первом ящике 2 белых и 4 черных шара, а во втором – 3 белых и 1 черный шар. Из первого ящика переложили во второй два шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второго ящика после перекладывания, окажется белым.

Решение. Пусть A – интересующее нас событие. Рассмотрим разбиение: $B_1 = \{ЧЧ\}$, $B_2 = \{ЧБ\}$, $B_3 = \{ББ\}$ – события, при которых из первого ящика переложили во второй 2 черных шара, черный и белый, 2 белых шара соответственно. Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3).$$

Так как, чтобы произошло событие B_1, необходимо выбрать 2 белых шара из 2 белых, а всего способов выбрать два шара из первого ящика C_6^2, то

$$P(B_1) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}.$$

Аналогично:

$$P(B_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{15}.$$

$$P(B_3) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = 1 - P(B_1) - P(B_2) = \frac{6}{15}.$$

Итого:

$$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{15} + \frac{2}{6} \cdot \frac{8}{15} + \frac{3}{6} \cdot \frac{6}{15} = \frac{7}{18}.$$

□

Задача 2.18. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трех костях выпали разные грани?

Решение. Рассмотрим два случая:

1. Кости не различимы. Обозначим $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_i = \overline{1,6},\ \omega_i \neq \omega_j\ \forall\, i \neq j\}$, A – событие, при котором на всех трех костях выпали разные грани. Тогда $|\Omega| = \frac{6\cdot5\cdot3}{3!} = 20$ так как на первом месте может стоять любая из 6 цифр, на втором – любая из оставшихся 5, а на третьем месте любая из 3 оставшихся, делим на 3! ввиду неупорядоченности набора (кости не различимы). $|A| = \frac{5\cdot4}{2!} = 10$ так как можно зафиксировать на

первом месте цифру 1, тогда на втором месте может стоять любая из 5 цифр, а на третьем – любая из 4 оставшихся, так же надо поделить на количество перестановок на множестве из двух элементов ввиду неупорядоченности набора. Итого:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

2. Кости различимы. Тогда $|\Omega| = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, $|A| = C_3^1 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ так как мы можем зафиксировать одно из трех место для единицы, на первое оставшееся место поставить любую из 5 цифр, а на последнее свободное место можем поставить еще любую из 4 цифр. Итого:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

Ради интереса посчитаем, какова априорная вероятность того, что при бросании трех костей хотя бы на одной выпадет единица. Эта вероятность равна:

$$P = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0.42$$

так как вероятность того, что при независимом бросании трех игральных костей ни разу не выпадет единица равна $\left(\frac{5}{6}\right)^3$. □

Задача 2.19. Стрелки A, B, C поражают мишень с вероятностями 0,6, 0,5 и 0,7 соответственно. Стрелки дали залп по мешени и две пули попали в цель. Найти вероятность того, что стрелок C попал в мишень.

Решение. Рассмотрим два способа решения:

1. Введем событие D, которое заключается в том, что при залпе стрелков 2 пули из 3 попали в мешень. Тогда, искомая вроятность равна:

$$P(C|D) = \frac{P(CD)}{P(D)}.$$

Событие CD заключается в том, что при залпе стрелков 2 пули из 3 попали в мешень и при этом попал стрелок C. Эта вероятность равна $P(CD) = P(\overline{A})P(B)P(C)+ P(A)P(\overline{B})P(C) = 0{,}35$. Аналогично находится $P(D) = P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(\overline{B})P(C)+ P(A)P(B)P(\overline{C}) = 0{,}44$. Следовательно, ответ равен:

$$P(C|D) = \frac{0{,}35}{0{,}44} \approx 0{,}795.$$

2. Введем событие D, которое заключается в том, что при залпе стрелков 2 пули из 3 попали в мешень. После того, как нам стало известно, что при залпе стрелков 2 пули из 3 попали в мешень, исходное вероятностное пространство изменилось. Рассмотрим события в этом новом вероятностном пространстве: $\Sigma_1 = \{AB\}$, $\Sigma_2 = \{AC\}$, $\Sigma_3 = \{BC\}$ – события, состоящие в том, что в мешень попали стрелки A и B, стрелки A и C, стрелки B и C соответсвенно.

Заметим, что $P(\Sigma_1) + P(\Sigma_2) + P(\Sigma_3) = 0{,}44 \neq 1$, а значит это не разбиение. Чтобы сделать Σ_1, Σ_2, Σ_3 разбиением, необходима перенормировкаб то есть нужно поделить вероятности $P(\Sigma_i)$ на их суммарную вероятность.

Тогда вероятность события D, состоящего в том, что при попадании двух из трех пуль в мешень попал стрелок C, может быть вычислена следующим образом:

$$P(D) = \frac{P(D|\Sigma_1)P(\Sigma_1) + P(D|\Sigma_2)P(\Sigma_2) + P(D|\Sigma_3)P(\Sigma_3)}{P(\Sigma_1) + P(\Sigma_2) + P(\Sigma_3)} = \frac{0{,}35}{0{,}44} \approx 0{,}795.$$

□

Задача 2.20. По каналу связи может быть вередана одна из последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$. Известно, что (априорные) вероятности каждой из трех последовательностей равны соответственно 0,3, 0,4 и 0,3. В результате шумов каждая буква принимается правильно с вероятностью 0,6, а с вероятностями 0,2 и 0,2 вместо нее принимаются две другие. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

Решение. Обозначим за A и B события, обозначающие соответсвенно, что была передана последовательность AAAA и что получена последовательность ABCA. Так же введем разбиение C_1, C_2, C_3 – события, при которых переданы последовательности AAAA, BBBB и CCCC соответственно. Тогда, по формуле Байеса:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2) + P(B|C_3)P(C_3)}.$$

Ввиду независимости передачи букв $P(B|A) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 36 \cdot 4 \cdot 10^{-4}$. По условию $P(A) = 0{,}3$. Остается только найти знаменатель:

$$P(B|C_1)P(C_1) + P(B|C_2)P(C_2) + P(B|C_3)P(C_3) =$$

$$= 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 768 \cdot 10^{-5}.$$

Итого:

$$P(A|B) = \frac{36 \cdot 4 \cdot 3}{768} = 0{,}5625.$$

□

Задача 2.21. Пусть в урне N белых и M черных шаров. Из нее случайно потеряли K шаров. После этого достали шар. Какова вероятность того, что он будет белый?

Решение. Пусть после того, как мы потеряли K шаров, в урне осталось n белых и m черных шаров. Тогда вероятность вытащить белый шар равна:

$$P = \frac{n}{n+m} = \frac{n}{N+M-K}.$$

Пусть $K = k_1 + k_2$, где k_1 – количество потерянных белых шаров, а k_2 – количество потерянных черных шаров. Чем больше в мешке белых шаров, тем больше белых шаров мы потеряем, если будем терять случайные шары из мешка. Это соображение позволяет запистъ систему:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = K, \\ \dfrac{k_1}{k_2} = \dfrac{N}{M} \end{cases}$$

Отсюда, учитывая, что $n = N - k_1$, находим:

$$n = N\frac{M+N-K}{M+N} \Rightarrow P = \frac{N}{N+M}.$$

□

Задача 2.22. На связке N ключей. Мы берем наудачу любой ключ. Если он не открывает дверь, то мы откладываем его в сторону. Найти вероятность того, что мы откроем дверь с K-ой попытки, если к двери подходит ровно один ключ.

Решение. Если мы открыли дверь с K-ой попытки попытки, то это значит, то все предыдущие попытки мы выбирали неподходящие ключи, и только на K-ый раз смогли угадать. Значит, ввиду независимости попыток:

$$P = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N-1} \cdot \ldots \cdot \frac{N-K+1}{N-K+2} \cdot \frac{1}{N-K+1} = \frac{1}{N}.$$

□

Задача 2.23. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на первой кости выпало меньше очков, чем на второй.

Решение. В данном случае легко явно задать пространство элементарных исходов:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i = \overline{1{,}6},\ \omega_1 < \omega_2\}.$$

Нетрудно подсчитать, что $|\Omega| = 15$, а благоприятных исходов всего три: (3,6), (3,5), (3,4). Следовательно:

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

□

Задача 2.24. Пусть A, B и A, C образуют пары независимых событий, причем $C \subset B$. Показать, что события A и $B \setminus C$ также независимы.

Решение. Действительно, если $P(AB) = P(A)P(B)$ и $P(AC) = P(A)P(C)$, то $P(A \cap (B \setminus C)) = P(AB \setminus AC) = P(AB) - P(AC) = P(A)P(B) - P(A)P(C) = P(A)(P(B) - P(C)) = P(A)P(B \setminus C)$. □

Задача 2.25. Человек с вероятностью p делает шаг вправо, а с вероятностью $1-p$ – влево. С какой вероятностью он упадет, если он находится на расстоянии $n \geq 0$ шагов слева от края пропасти?

Задача 2.26. Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент времени $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента времени t, испытает столкновение в промежуток времени $(t, t+h)$, равна $\lambda h + o(h)$, $h \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

Задача 2.27. (Задача о встрече) Девушка и юноша условились встретиться в определенном месте от полудня до часу дня. Пришедший(ая) первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встрчи, если приход каждого из них в течение часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

Решение. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи. Пусть t_1 – время (в часах), прошедшее после 12:00 до прихода юноши, а t_2 – время, прошедшее после 12:00 до прихода девушки. Тогда время прихода обоих можно задать точкой в квадрате $[0{,}1] \times [0{,}1]$: первая координата будет задавать t_1, а вторая – t_2. Заметим, что встреча произойдет, если $|t_1 - t_2| \leq \frac{1}{3}$. Данное неравенство задает «полоску» на плоскости, которая пересекает наш квадрат по зеленой области (рисунок 3). Площадь данной фигуры и равна вероятности встречи:

$$P = S = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}.$$

□

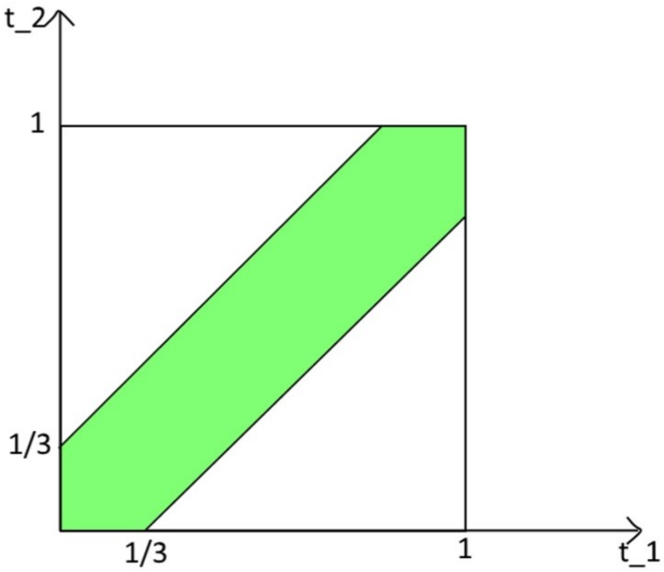
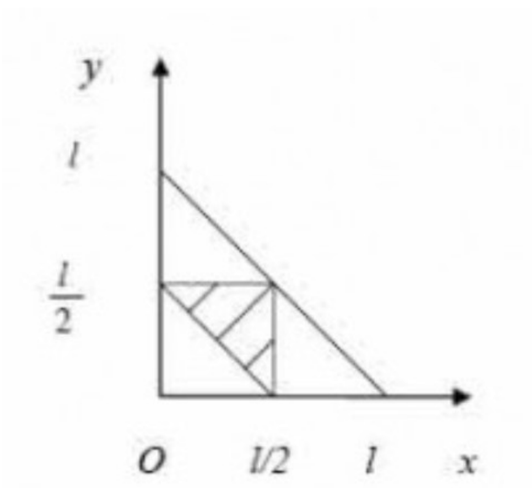


Рис. 3: Иллюстрация к задаче о встрече.

Задача 2.28. Стержень длины l разломан в двух надачу выбранных точках. Найти вероятность того, что из полученных кусков можно составить треугольник.

Решение. Обозначим за x и y длинны первых двух кусков разломанного стержня, тогда длина третьего $l-x-y$. Пространство элементарных исходов – пары x и y такие, что $x+y < l$. Чтобы из трех отрезков можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства треугольника. Они будут задавать в координатах x, y следующую фигуру:



Значит, искомая вероятность:

$$P = \frac{\frac{l}{2}\frac{l}{2}\frac{1}{2}}{l \cdot l \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

□

Задача 2.29. (Игла Бюффона) На плоскость, разлинованную линиями, расстояние между которыми равно $2a$, бросили иглу длинной $2l$ ($a > l$). Найти вероятность того, что она пересечет хотя бы одну линию.

Решение. Задать положение случайно брошенной иглы можно с помощью расстояния от центра иглы до ближайшей прямой и углом наклона иглы относительно этой прямой (рисунок 4).

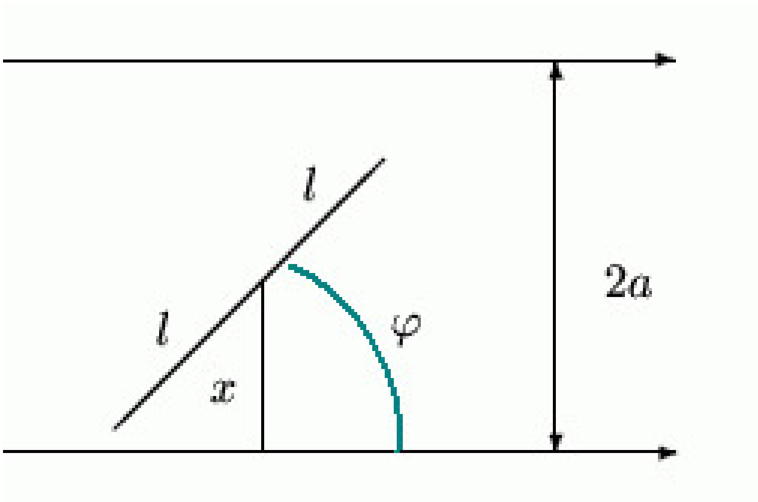


Рис. 4: Игла Бюффона.

Очевидно, что игла пересечет ближайшую к ней линию, если $x < l\sin\varphi$. При этом x и φ независимо меняются от 0 до a и от 0 до π соответственно. Тогда очевидно, что искомая вероятность будет равна отношению заштрихованной площади к площади прямоугольника на графике 5.

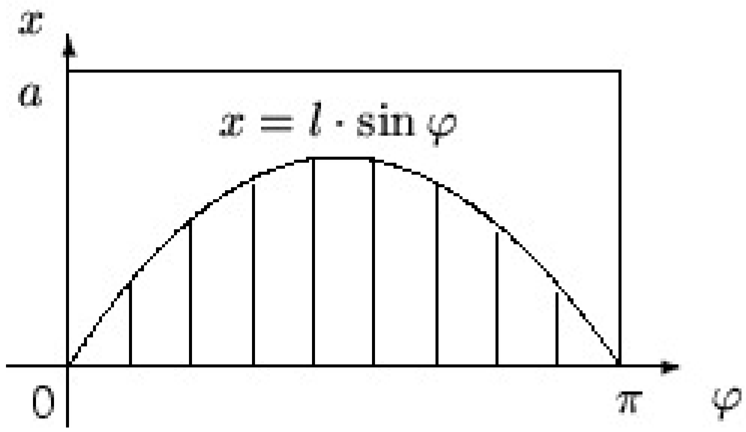


Рис. 5: К вычислению вероятности в задаче про иглу Бюффона.

Значит, искомая вероятность:

$$P = \frac{1}{a\pi}\int\limits_0^\pi l\sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

□

Задача 2.30. На отрезке [0,1] наудачу выбираются точки ξ, η. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + \xi x + \eta = 0$ имеет действительные корни одного знака?

Решение. Так как корни квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4\eta}}{2},$$

то, чтобы они были вещественными и одного знака, ввиду того, что ξ и η неотрицальны, необходимо, чтобы были выполнены неравенства:

$$\begin{cases} \xi^2 - 4\eta \geq 0, \\ \xi \geq \sqrt{\xi^2 - 4\eta} \end{cases}$$

Заметим, что ввиду неотрицательности ξ и η система эквивалентна первому неравенству, которое в координатах ξ и η задает область под параболой, площадь которой легко найти:

$$S = \int\limits_0^1 \frac{\xi^2}{4} d\xi = \frac{1}{12}.$$

Так как выбор конкретных ξ и η определяет точку в единичном квадрате в координатах ξ и η, то, используя геометрическое определение вероятности, находим:

$$P = S = \frac{1}{12}.$$

□

Задача 2.31. (Парадокс Бертрана) На окружности случайным образом провели хорду. Найти вероятность того, что ее длина будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

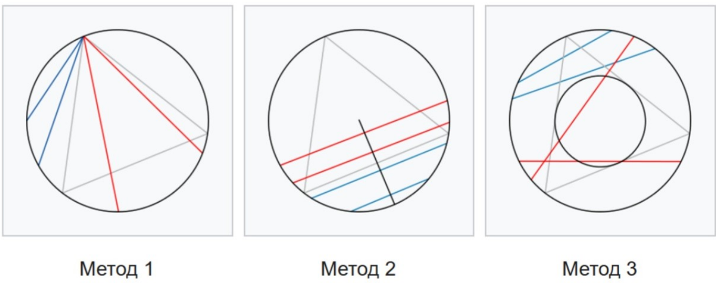


Рис. 6: Иллюстрация к парадоксу Бертрана.

Решение. Эта задача называется парадоксом, так как можно предложить несколько правдоподобных решений, которые будут давать разные ответы (рисунок 6).

1. Метод «случайных концов»: наудачу выберем две точки на окружности, через которые и проведем хорду. Впишем правильный треугольник так, чтобы одна из его вершин находилась в одном из концов хорды. Заметим, что если другой конец хорды лежит на дуге между двумя другими вершинами треугольника, то длина хорды больше стороны треугольника. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

2. Метод «случайного радиуса»: наудачу выберем точку на зафиксированном радиусе. Построим хорду, перпендикулярную зафиксированному радиусу, проходящую через выбранную точку. Чтобы найти вероятность того, что длина построенной хорды

больше стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, построим треугольник так, чтобы одна из его сторон была перпендикулярна зафиксированному радиусу. Хорда длинее стороны треугольника, если ее центр ближе к центру окружности, чем точка пересечени ятреугольника с зафиксированным радиусом. Сторона треугольника делит пополам радиус, следовательно, искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

3. Метод «случайного центра»: выберем наудачу точку внутри круга и построим хорду с центром в этой точке. Построенная хорда будет длинее стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, если выбранная точка находится внутри круга, вписанного в треугольник. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{4}$.

На самом деле, конечно же, никакого парадокса тут нет – все рассуждения правильны, и ответ зависит от того, что мы понимаем под проведенной наудачу хордой. □

Задача 2.32. Из ящика, содержащего m белых и n черных шаров, извлекают с возращением шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

Решение. Зададим случайную величину ξ как количество извлеченных шаров до появления первого белога шара. Обозначим через $p = \frac{m}{n+m}$ и $q = \frac{n}{n+m}$ вероятности достать белый или черный шар соответственно. Тогда можно составить закон распределения случайной величины ξ:

ξ_i	1	2	3	...	k	...
$P(\xi_i)$	p	pq	pq^2	...	pq^{k-1}	...

Тогда, по определению математического ожидания:

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi P(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}.$$

Чтобы найти сумму данного ряда, используем тот факт, что $kq^{k-1} = (q^k)'$. Тогда мы можем записать:

$$E(\xi) = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)' = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Так как члены исходного ряда имеют непрерывные производные на (0,1), то, чтобы обосновать корректность подобного перехода, осталось убедиться, что ряд из производных сходится равномерно, а исходный ряд сходится хотя бы в одной точке, что не составляет труда. □

Задача 2.33. Случайная величина ξ принимает значения -1, 0, 1 с вероятностями 1/3, 1/6, 1/2 соответственно. Найти:

а) Распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi^2$.

ξ_i	-1	0	1
$P(\xi_i)$	1/3	1/6	1/2

$\Rightarrow$

η_i	0	1
$P(\eta_i)$	1/6	5/6

$$E(\eta) = \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{5}{6}\cdot 1 = \frac{5}{6}.$$

$$D(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) = \frac{5}{6} - \frac{25}{36} = \frac{5}{36}.$$

b) Совместное распределение и ковариацию случайных величин ξ и η.

По определению ковариация двух случайных величин ξ и η есть ни что иное как матожидание произведения их центровок:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=E(\xi_c\eta_c)=E[(\xi-E(\xi))(\eta-E(\eta))]=E(\xi\eta)-E(\xi)E(\eta)=\frac{5}{36}-\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=0.$$

Матожидание произведения находится из таблицы:

$\xi_i\eta_i$	-1	0	1
$P(\xi_i\eta_i)$	5/18	11/36	5/12

Совместное распределение задается следующим образом:

$$P_{\xi\eta}=\begin{pmatrix}1/18 & 5/18\\ 1/36 & 5/36\\ 1/12 & 5/12\end{pmatrix}$$

Задача 2.34. (Петербургский парадокс) Рассматривается следующая игра. Игрок покупает входной билет за N рублей и начинает бросать правильную монету. Если герб первый раз выпал на n-ом шаге, игрок получает 2^n рублей и уходит. При какой стоимости входного билета казино будет выгодна такая игра, если:

a) Размер разовой выплаты неограничен.

Если размер выйгрыша неограничен, то вероятность выиграть 2^n рублей равна 2^{-n}. Тогда матожидание выйгрыша ξ:

$$E(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot 2^{-n}\to\infty.$$

Это означает, что при любой цене на входной билет казино разорится.

b) Разовый размер выйгрыша не привосходит 1 000 000 рублей.

Если же размер выйгрыша ограничен, то, приблизительно считая $10^6\approx 2^{20}$, закон распределения выйгрыша ξ будет иметь вид:

ξ_i	2^1	2^2	$\ldots$	2^{19}	2^{20}	2^{20}	2^{20}	$\ldots$
$P(\xi_i)$	2^{-1}	2^{-2}	$\ldots$	2^{-19}	2^{-20}	2^{-21}	2^{-22}	$\ldots$

В таком случае казино не разорится, если цена входного билета будет больше 21 рубля:

$$E(\xi)=\sum_{k=1}^{20}2^k\cdot 2^{-k}+\sum_{k=21}^{\infty}2^{20}2^{-k}=20+1=21.$$

Задача 2.35. Бросаются две игральные кости. Пусть X_i – число очков (от 1 до 6), выпавшее на i-ой кости $i=1,2$. Найти совместное распределение случайных величин $Y=\min\{X_1,X_2\}$ и $Z=X_2$, их математическое ожидание, диспрерсию и ковариацию. Написать формулу оптимального линейного прогноза величины Y по наблюдению величины Z.

Решение. Таблица (матрица) P_{YZ} совместного распределения Y и Z имеет следующий вид:

Y \Z	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	Σ
1	**6/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	11/36
2	**0**	**5/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	9/36
3	**0**	**0**	**4/36**	**1/36**	**1/36**	**1/36**	7/36
4	**0**	**0**	**0**	**3/36**	**1/36**	**1/36**	5/36
5	**0**	**0**	**0**	**0**	**2/36**	**1/36**	3/36
6	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1/36**	1/36
Σ	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Последние строка и столбец представляют собой маргинальные распределения Y и Z, а значит для этих случайных величин легко ищутся матожидание и дисперсия:

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{6} P(Y_i)Y_i = \frac{11}{36} + 2\cdot\frac{9}{36} + 3\cdot\frac{7}{36} + 4\cdot\frac{5}{36} + 5\cdot\frac{3}{36} + 6\cdot\frac{1}{36} = \frac{91}{36} \approx 2{,}56.$$

$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{2555}{1296} \approx 1{,}97.$$

$$E(Z) = \frac{7}{2} = 3{,}5.$$

$$D(Z) = \frac{497}{36} \approx 13{,}81.$$

Чтобы найти ковариацию, используем формулу:

$$\operatorname{cov}(Y,Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z) = Y^T P_{YZ} Z - E(Y)E(Z) \approx 10{,}31 - 2{,}56\cdot 3{,}5 = 1{,}35.$$

Теперь можно вычислить оптимальный линейный прогноз величины Y по наблюдению величины Z:

$$\hat{Y} = E(Y) + \operatorname{cov}(Y,Z)\frac{Z - E(Z)}{\sqrt{D(Z)}} = 2{,}56 + 0{,}36\cdot(Z - 3{,}5) = 0{,}36\cdot Z + 1{,}3.$$

□

Задача 2.36. Закон распределения случайной величиины ξ определяется формулами:

$$P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = a, \quad P(\xi = 0) = 1 - 2a.$$

Сравнить точное значение вероятности $P(|\xi| \geq 1)$ с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

Решение. Рассмотрим случайную величину $\eta = |\xi|$, ее распределение имеет вид:

η	0	1
$P(\eta)$	$1-2a$	$2a$

По неравенству Чебышева:

$$P(\eta \geq 1) \leq \frac{E(\eta)}{1} = 2a.$$

Точная же оценка:

$$P(\eta \geq 1) = 2a.$$

□

Задача 2.37. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p. Найти:

a) $P(\xi = \eta)$.

Рассмотрим событие $A = \{\xi = 1, \eta = 1\} + \{\xi = 2, \eta = 2\} + \ldots$. Тогда $P(\xi = \eta) = P(A)$. Ввиду независимости ξ и η:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi = k)P(\eta = k) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{2(k-1)}p^2 = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{p}{1+q}.$$

b) $P(\xi > \eta)$.

Используя условие нормировки вероятности, а так же тот факт, что величины ξ и η равноправны, можем запистьсистему, из которой легко находится нужная вероятность:

$$\begin{cases} P(\xi = \eta) + P(\xi > \eta) + P(\xi < \eta) = 1, \\ P(\xi > \eta) = P(\xi < \eta) \end{cases}$$

$$P(\xi > \eta) = \frac{1}{2}\left(1 - P(\xi = \eta)\right) = \frac{q}{1+q}.$$

К этому же ответу можно было прийти другим путем: представим событие $\{\xi > \eta\}$ в виде суммы событий:

$$\{\xi > \eta\} = \{\xi = 2, \eta = 1\} + \{\xi = 3, \eta = 1\} + \ldots +$$

$$\{\xi = 3, \eta = 2\} + \{\xi = 4, \eta = 2\} + \ldots +$$

$$+ \ldots\ldots$$

Ввиду независимости событий можно записать:

$$P(\xi > \eta) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(pq^j \sum_{k=j+1}^{\infty} pq^k\right) = p\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k+1} = \frac{q}{1+q}.$$

c) $P(\xi + \eta = k)$.

Снова представим событие в виде суммы и воспользуемся условием независимости:

$$P(\xi + \eta = k) = P(\xi = 1, \eta = k-1) + P(\xi = 2, \eta = k-2) + \ldots + P(\xi = k-1, \eta = 1) =$$

$$= ppq^{k-1} + pqpq^{k-1} + \ldots + pq^{k-2}p = (k-1)p^2q^{k-2}.$$

d) $P(\xi = l \mid \xi + \eta = k)$.

По определению условной вероятности и ввиду независимости величин ξ и η:

$$P(\xi = l \mid \xi + \eta = k) = \frac{P(\xi = l, \xi + \eta = k)}{P(\xi + \eta = k)} = \frac{P(\xi = l, \eta = k - l)}{P(\xi + \eta = k)} = \frac{p^2q^{k-2}}{(k-1)p^2q^{k-2}} = \frac{1}{k-1}.$$

e) $P(\xi = k \mid \xi = \eta)$.

По определению условной вероятности и ввиду независимости величин ξ и η:

$$P(\xi = k \mid \xi = \eta) = \frac{P(\xi = k, \xi = \eta)}{P(\xi = \eta)} = \frac{P(\xi = k, \eta = k)}{P(\xi = \eta)} = \frac{p^2q^{2(k-1)}}{\frac{p}{1+q}} = p(1+q)q^{2(k-1)}.$$

Задача 2.38. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k).$$

Доказательство. Пусть без ограничения общности (некоторые P_i, возможно, равны нулю) ξ имеет распределение:

ξ	1	2	3	...
$P(\xi)$	P_1	P_2	P_3	...

Рассмотрим сумму:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k) = P(\xi \geq 1) + P(\xi \geq 2) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} P_k + \sum_{k=2}^{\infty} P_k + \ldots$$

Таким образом видно, что в этой сумме слагаемое P_1 встретится один раз, P_2 два раза и так далее, то есть эта сумма равна $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k P(\xi_k)$, что является определением математического ожидания случайной величины ξ. $\square$

Задача 2.39. В N ячеек случайно размещается n неразличимых шаров. Найти матожидание и дисперсию числа пустых ячеек.

Решение. Введем вспомогательную случайную величину:

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, \text{если } k\text{-ая ячейка пуста} \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\xi = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \;\Rightarrow\; E(\xi) = \sum_{k=1}^{N} E(\alpha_k).$$

$E(\alpha_k) = p$ – это вероятность того, что k-ая ячейка пуста (так как каждая ячейка может быть пуста с вероятностью p или же с вероятностью $1 - p$ в ячейке будет хотя бы один шар). Так как всего способов разложить n шаров по N ячейкам равно C^n_{n+N-1}, то

$$E(\alpha_k) = p = \frac{C^n_{n+(N-1)-1}}{C^n_{n+N-1}} = \frac{N-1}{(n+N-1)} \;\Rightarrow\; E(\xi) = \frac{N(N-1)}{(n+N-1)}.$$

Чтобы найти дисперсию ξ необходимо вычислить $E(\xi^2)$:

$$E(\xi^2) = E\left(\sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j\right) = \sum_{i,j} E(\alpha_i\alpha_j) = \sum_{i=1}^{N} E(\alpha_i^2) + \sum_{i\neq j} \alpha_i\alpha_j = \sum_{i=1}^{N} E(\alpha_i) + \sum_{i\neq j} \alpha_i\alpha_j.$$

Так как $E(\alpha_1\alpha_2)$ равно вероятности того, что одновременно пусты первая и вторая ячейки, то:

$$\sum_{i\neq j} \alpha_i\alpha_j = E(\alpha_1\alpha_2)(N^2 - N) = (N^2 - N)\frac{C^n_{n+(N-2)-1}}{C^n_{n+N-1}} = \frac{N(N-1)^2(N-2)}{(n+N-2)(n+N-1)}.$$

Значит, дисперсия равна

$$D(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \frac{N(N-1)^2(N-2)}{(n+N-2)(n+N-1)}.$$

$\square$

Задача 2.40. Пусть ξ и η – числа появлений единицы и шестерки при n бросаниях игральной кости соответсвенно. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

Решение. Рассмотрим индикаторы событий:

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, \text{на } k\text{-ом шаге выпала } 1 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}, \quad \beta_k = \begin{cases} 1, \text{на } k\text{-ом шаге выпала } 6 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно, что $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$ и $\eta = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k$, следовательно ввиду симметрии $E(\xi) = E(\eta) = \sum\limits_{k=1}^{n} E(\alpha_k) = \frac{n}{6}$.

Чтобы найти ковариацию необходимо также найти

$$E(\xi\eta) = E\left(\sum_{k,j} \alpha_k\beta_j\right) = \sum_{k,j} E(\alpha_k\beta_j) = \sum_{k}^{n} E(\alpha_k\beta_k) + \sum_{k\neq j} E(\alpha_k\beta_j) = \sum_{k\neq j} E(\alpha_k)E(\beta_j) =$$

$$= n(n-1)E(\alpha_1)E(\beta_2) = \frac{n^2-n}{36}.$$

Чтобы найти дисперсии ξ и η, воспользуемся тем, что α_k независимы:

$$D(\xi) = D(\eta) = \sum_{k=1}^{n} D(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n}(E(\alpha_k^2) - E^2(\alpha_k)) = \sum_{k=1}^{n}(E(\alpha_k) - E^2(\alpha_k)) = \frac{5n}{36}.$$

Итого:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = \frac{n^2-n}{36} - \frac{n^2}{36} = -\frac{n}{36}.$$

$$r(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)} = -\frac{1}{5}.$$

□

Задача 2.41. Кидают несимметричную монету. Найти

a) Математическое ожидание количества бросаний до выпадения первого герба

Пусть p – вероятность выпадения герба, а $q = 1-p$ – вероятность выпадения решки. Если мы обозначим за ξ количество бросаний монеты до выпадения первого герба, то закон распределения ξ будет иметь следующий вид:

ξ_i	1	2	3	…	k	…
$P(\xi_i)$	p	pq	pq^2	…	pq^{k-1}	…

Тогда, по определению математического ожидания:

$$E(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k P(\xi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{p}.$$

b) Математическое ожидание количества бросаний до выпадения двух гербов подряд.

Задача 2.42. Игральная кость бросается до тех пор, пока хотя бы один раз не выпали все грани. Найти матожидание числа бросаний.

Задача 2.43. Пусть ξ и η – две случайные величины с $E(\xi) = E(\eta) = 0$, $D(\xi) = D(\eta) = 1$ и коэффициентом корреляции $r = r(\xi, \eta)$. Показать, что

$$E(\max(\xi^2, \eta^2)) \leq 1 + \sqrt{1 - r^2}.$$

Используя данный результат для произвольных случайных величин ξ и η, получить двумерный аналог неравенства Чебышева:

$$P(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\xi)}, \quad |\eta - E(\eta)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\eta)}) \leq \frac{1 + \sqrt{1 - r^2(\xi, \eta)}}{\varepsilon^2}.$$

3 Второе задание

Задача 3.1. Длина круга равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

Решение. Пусть x – радиус круга, тогда по условию: $L = 2\pi x \sim \mathcal{U}([0,1])$, следовательно, длина окружности имеет плотность распределения:

$$p_L(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [0,1] \\ 0, \ x \notin [0,1] \end{cases}$$

Так как площадь круга может быть выражена через длину как $S = \dfrac{L^2}{4\pi}$, то легко найти:

$$E(S) = \frac{1}{4\pi}E(L^2) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 p_L(x)dx = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{1} x^2 dx = \frac{1}{12\pi}.$$

$$E(S^2) = \frac{1}{16\pi^2}E(L^4) = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^4 p_L(x)dx = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{0}^{1} x^4 dx = \frac{1}{80\pi^2}.$$

$$D(S) = E(S^2) - E^2(S) = \frac{1}{80\pi^2} - \frac{1}{144\pi^2} = \frac{1}{180\pi^2}$$

□

Задача 3.2. Координаты двух случайных точек на прямой независимы и равномерно распределены на отрезке [0,1]. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояний между точками.

Решение. □

4 Дополнительные задачи

Задача 4.1. Какова вероятность того, что корни квадартного уравнения $x^2 + 2bx + c = 0$ вещественны?

a) b и c независимо выбираются из отрезка $[0; 1]$.

b) Никаких ограничений на b и c нет.

Задача 4.2. На окружность случайным образом независимо друг от друга бросают n точек. Найти вероятность того, что эти точки лежат на одной полуокружности.

Задача 4.3. Дано множество $N = \{1,2,\dots,n\}$. Из множества всех его подмножеств 2^N независимо выбираются два элемента X и Y. Найдите вероятность того, что они не пересекаются.

Решение. Всего способов выбрать два элемента из 2^N это $2^n \cdot (2^n - 1)$. Пусть множество X состоит из k элементов, тогда, чтобы множства X и Y не пересекались, Y не должно включать в себя те элементы, которые есть в X. Всего таких множеств – 2^{n-k}. При этом k может меняться от 0 до n, значит всего таких случаев $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^{n-k}$.

Следовательно, ответ равен

$$P = \frac{1}{2^n \cdot (2^n - 1)} \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}.$$

□

Задача 4.4. Пусть X – случайная величина, принимающая значения $[0, 1]$. Найти матожидание X, если известно, что $P(X = \frac{n}{n+2}) = \frac{1}{n(n+1)}$ при $n = 1, 2, \dots$

Решение. По определению матожидания имеем:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n P(X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.$$

□

Задача 4.5. Студент решает тест, в котором надо сопоставить каждому из 10 вопросов один из 10 ответов. Найти вероятность того, что при расстановке ответов на удачу, студент верно ответит ровно на

1. 9 вопросов?

   Если студент сопоставил 9 вопросам 9 правильных ответов, то последнему ответу ничего не остается, чтобы быть сопоставленым правильному вопросу. Следовательно, вероятность ответить правильно ровно на 9 вопросов равна 0.

2. 5 вопросов?

Задача 4.6. Честную монетку подбрасывают $2n$ раз. Какова вероятность того, что количество выпавших орлов четно?

Задача 4.7. Пусть X – неотрицательная случайная величина с конечным числом значений. Доказать, что выполняются неравенства:

$$E(X) \le E(X^2)^{\frac{1}{2}} \le E(X^3)^{\frac{1}{3}} \le \dots$$

Задача 4.8. Пусть ξ и η – независимые случайные величины с нулевым средним и конечной дисперсией. Что можно сказать про $E(\xi\eta)$ и $D(\xi\eta)$?

Задача 4.9. Для трех событий A, B, C известно, что $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$. Можно ли из этого сделать вывод, что эти события независимы в совокупности?

Решение. Нет, этого условия недостаточно. Рассмотрим следующие три события при бросании двух игральных костей:

$$A = \{\text{на первой кости выпала 1 или 2 или 5}\},$$

$$B = \{\text{на первой кости выпала 4 или 5 или 6}\},$$

$$C = \{\text{сумма выпавших очков на двух игральных костях равна 9}\}.$$

В этом случае $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, но, как легко убедиться, нет попарной независимости, например:

$$P(AB) = \frac{1}{6} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

□

Задача 4.10. Доказать, что независимо от вида промежутка $I = \langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ (отрезок, интервал, полуинтервал) все минимальные σ-алгебры, порожденные этим промежутком совпадают и являются борелевской σ-алгеброй $\sigma(I) = B(I)$.

Задача 4.11. Пусть $\Theta = (\eta_{ij})$ – матрица, составленная из случайных величин, а A и B – детерминированные (константные) матрицы. Доказать, что $E(A\Theta B) = AE(\Theta)B$.

Задача 4.12. В комнате стоит стол. Известно, что с вероятностью p в комнате находится письмо, причем, если письмо в комнате, то оно равновероятно лежит в одном из ящиков стола. Наблюдатель открывает первые 4 ящика и обнаруживает, что в них письма нет. Какова вероятность того, что в пятом ящике есть письмо?

Решение. Введем следующие события: A – в столе есть письмо, B – в первых четырех ящиках письма нет, A_k – письмо в k-ом ящике стола.

Задача сводится к нахождению вероятности того, что письмо в пятом ящике, если известно, что его нет в первых четырех ящиках. Так как $A = \sum\limits_{k=1}^{5} A_k$ и $P(A) = p$, то $P(A_k) = \dfrac{p}{5}$.

Таким образом:

$$P(A_5 \mid B) = \frac{P(A_5 B)}{P(B)} = \frac{P(A_5)}{P(A_5 + \overline{A})} = \frac{p}{5 - 4p}.$$

Заметим, что интуитивный ответ p верен только тогда, когда $p = 0$ или $p = 1$, а так же, что $P(A_5) < P(A_5 \mid B) < P(A)$. □

Задача 4.13. Покажите, что из попарной независимости событий не следут их независимость в совокупности.

Решение. Оказывается, что даже для трех событий A, B, C их попарная независимость не достаточна, чтобы утверждать о том, что эти события независимы в совокупности. Классический пример – тетраэдр Бернштейна. Это правильный тетраэдр, у которого одна грань покрашена в красный, одна в синий, одна в зеленый цвета, а на последней четвертой грани есть все три цвета (рисунок 7).

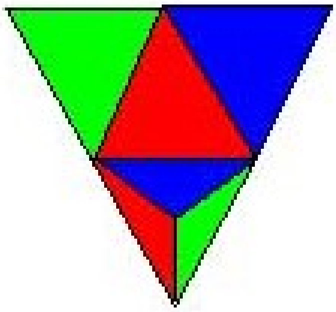


Рис. 7: Развертка тетраэдра Бернштейна.

Рассмотрим события A – на выпавшей грани есть красный цвет, B – на на выпавшей грани есть зеленый цвет, C – на выпавшей грани есть синий цвет. Очевидно, что $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Легко убедиться, что все события попарно независимы:

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Однако эти события не являются независимыми в совокупности:

$$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}.$$

□

5 Список использованной литературы

1. Н.О. Бузун, А.В. Гасников, Ф.О. Гончаров, О.Г. Горбачев, С.А. Гуз, Е.А. Крымова, А.А. Натан, Е.О. Черноусова – Стохастический анализ в задачах. Под редакцией А.В. Гасникова. Часть 1.

2. А. Н. Ширяев – Вероятность.

3. А. И. Кибзун, Е. Р. Горяинова, А. В. Наумов, А. Н. Сиротин – Теория вероятностей и математическая статистика.

4. М.Е. Широков – О некоторых понятиях теории вероятностей.