Ликбез по дифференциальному и интегральному исчислению

Линдеманн Никита

8 ноября 2020 г.

1 Дифференциальное исчисление

Определение 1.1. Производная функции одной переменной $y = f(x)$ в точке x_0 – это предел:

$$\frac{d}{dx}f(x_0) = \frac{d}{dx}y(x_0) = f'(x_0) = y'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Если обозначить $\Delta x = x - x_0$, то производную функции в точке можно записать в виде:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Задача 1.1. Найти по определению производную функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 3$.

Решение. Из определения имеем:

$$y'(3) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-3^2}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6.$$

Можно было действовать по-другому:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) = 2x.$$

Далее подставляя значение $x_0 = 3$ в найденную функцию $y'(x) = 2x$, получим ответ:

$$y'(x_0) = y'(3) = 2\cdot 3 = 6.$$

□

Конечно, на практике никто не считает производные по определению, для этого есть готовая таблица производных элементарных функций (которую полезно помнить наизусть) и правила дифференцирования.

Табличные производные:

1. $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$.
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
3. $(\sin x)' = \cos x$.
4. $(\cos x)' = -\sin x$.
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
7. $(e^x)' = e^x$.
8. $(a^x)' = a^x \ln a$.
9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
10. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.
14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.
15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.
16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.
17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
18. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Правила дифференцирования:

1. Линейность производной: $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.
2. Производная произведения: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. Производная частного: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.
4. Производная сложной функции: $(f(g(x)))' = f'_g(g) \cdot g'(x)$.

Задача 1.2. Найти производную функции $y(x) = \dfrac{\cos(x^2+1)}{\ln(1-2x)+3}$.

Решение. Используя правило дифференцирования частного двух функций, получим:

$$y'(x) = \frac{(\cos(x^2+1))' \cdot (\ln(1-2x)+3) - \cos(x^2+1) \cdot (\ln(1-2x)+3)'}{(\ln(1-2x)+3)^2}.$$

Отдельно найдем производные:

$$(\cos(x^2+1))' = -\sin(x^2+1) \cdot (x^2+1)' = -2x \cdot \sin(x^2+1).$$

$$(\ln(1-2x)+3)' = \frac{1}{1-2x} \cdot (1-2x)' = -\frac{2}{1-2x}.$$

Окончательно имеем:

$$y'(x) = \frac{-2x \sin(x^2+1) \cdot (\ln(1-2x)+3) + \cos(x^2+1) \cdot \frac{2}{1-2x}}{(\ln(1-2x)+3)^2}.$$

□

Определение 1.2. Дифференциал функции $f(x)$ – это функция

$$df(x) = f'(x)dx,$$

где dx – это дифференциал независимой переменной x (который имеет смысл приращения аргумента Δx).

Так как дифференциал определяется через производную, то все его свойства наследуются от производной.

Свойства дифференциала:

1. $d(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \cdot df(x) + \beta \cdot dg(x)$.
2. $d(f(x) + \alpha) = df(x)$.
3. $d(f(x) \cdot g(x)) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$.
4. $d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)}$.

Задача 1.3. Найти дифференциал функции $y(x) = \sin(4e^{2x} - x^3)$.

Решение. По определению дифференциал функции $y(x)$ – это $dy = y'(x)dx$. Используя правило дифференцирования сложной функции, найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = \cos(4e^{2x} - x^3) \cdot (4e^{2x} - x^3)' = \cos(4e^{x} - x^3) \cdot (8e^{2x} - 3x^2).$$

Значит искомый дифференциал будет равен

$$dy(x) = y'(x)dx = \cos(4e^{x} - x^3) \cdot (8e^{2x} - 3x^2)dx.$$

□

Утверждение 1.1. *Для дифференциала справедливы следующие равенства:*

1. $x^n \cdot dx = \dfrac{1}{n+1} \cdot dx^{n+1}$.

2. $\sin x \cdot dx = -d\cos x$.

3. $\cos x \cdot dx = d\sin x$.

4. $e^x \cdot dx = de^x$.

5. $\dfrac{1}{x} \cdot dx = d\ln x$.

Все эти равенства проверяются непосредственным вычислением дифференциалов функций, стоящих в правой части равенств.

2 Интегральное исчисление

Определение 2.1. Первообразная функции $f(x)$ – это функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$. При этом пишут

$$\int f(x)dx = F(x).$$

Определение 2.2. Неопределенный интеграл функции $f(x)$ – это совокупность всех первообразных данной функции.

Заметим, что если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ (что по определению значит, что выполнено $F'(x) = f(x)$), то функция $F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$ – производьная постоянная, тоже будет первообразной для функции $f(x)$. Таким образом, достаточно найти одну первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, чтобы записать неопределенный интеграл от функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Табличные первообразные:

1. $\displaystyle\int dx = x + C.$
2. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C.$
5. $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C.$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\displaystyle\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx.$
2. $\displaystyle\int f(x+\alpha)dx = \int f(x+\alpha)d(x+\alpha) = F(x+\alpha) + C.$
3. $\displaystyle\int f(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\int f(\alpha x)d(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x) + C.$
4. $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x) = F(g(x)) + C.$

Задача 2.1. Вычислить неопределенный интеграл от функции $y(x) = \cos(x+3) - 3x^2 + 2e^{5x}$.

Решение. Используя свойство линейности неопределенного интеграла, получим:

$$\int y(x)dx = \int (\cos(x+3) - 3x^2 + 2e^{5x})dx = \int \cos(x+3)dx - 3\int x^2 dx + 2\int e^{5x}dx.$$

Далее применяя свойства дифференциала, найдем:

$$\int y(x)dx = \int \cos(x+3)d(x+3) - 3\int x^2dx + \frac{2}{5}\int e^{5x}d(5x) = \sin(x+3) - x^3 + \frac{2}{5}e^{5x} + C.$$

□

Задача 2.2. Вычислить неопределенный интеграл от функции $y(x) = x^2 \sin x^3 dx$.

Решение. Так как $x^2dx = \dfrac{dx^3}{3}$, то можно внести x^2 под знак дифференциала. В таком случае получим:

$$\int y(x)dx = \int x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3}\int \sin x^3 dx^3 = -\frac{1}{3}\cos x^3 + C.$$

□

Задача 2.3. Вычислить неопределенный интеграл от функции

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}.$$

Решение. Используя метод неопределенных коэффициентов разложим дробь в сумму дробей:

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)} =$$
$$= \frac{(A+B)x + A - 3B}{x^2-2x-3} \Rightarrow A = \frac{1}{4},\ \ B = -\frac{3}{4}.$$

Тогда искомый интеграл будет иметь вид:

$$\int y(x)dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x-3)}{x-3} - \frac{3}{4}\int \frac{d(x+1)}{x+1} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{3}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln C = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{C(x-3)}{(x+1)^3}\right).$$

□

Задача 2.4. Вычислить неопределенный интеграл от функции

$$y(x) = \frac{1}{1+\sin x + \cos x}.$$

Решение. Подобные функции интегрируются с помощью универсальной тригонометрической подстоновки, суть которой заключается в замене переменной $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t.$$

В данном случае:

$$\int y(x)dx = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2+2t+1-t^2} = \int \frac{2dt}{2+2t} =$$

$$= \int \frac{dt}{t+1} = \int \frac{d(t+1)}{t+1} = \ln|t+1| + C.$$

Делая обратную замену, получим:

$$\int y(x)dx = \int \frac{dx}{1+\sin x + \cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right| + C.$$

□

Задача 2.5. Вычислить неопределенный интеграл от функции

$$y(x) = (7x+3)e^{4x}.$$

Решение. Воспользуемся формулой интегрирования по частям, которая в общем случае имеет вид:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Используя эту формулу, получим:

$$\int y(x)dx = \int (7x+3)e^{4x}dx = \left| \begin{array}{c} u(x) = (7x+3) \Rightarrow du(x) = 7dx \\ dv(x) = e^{4x}dx \Rightarrow v(x) = \frac{1}{4}e^{4x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}(7x+3)e^{4x} - \frac{7}{4}\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}(7x+3)e^{4x} - \frac{7}{16}e^{4x} = \frac{1}{4}e^{4x}\left(7x + \frac{5}{4}\right).$$

□

Задача 2.6. Вычислить неопределенный интеграл от функции

$$y(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{6x-1}).$$

Решение. Сперва сделаем замену $t^3 = 6x - 1$, в таком случае $3t^2dt = 6dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^2dt$. Тогда после замены переменных можно применить формулу интегрирования по частям, которая имеет вид:

$$\int u(t)dv(t) = u(t)v(t) - \int v(t)du(t).$$

Тогда получим:

$$\int y(x)dx = \int \operatorname{arctg}(\sqrt[3]{6x-1})dx = \frac{1}{2}\int t^2 \operatorname{arctg} t dt = \left| \begin{array}{c} u(t) = \operatorname{arctg} t \Rightarrow du(t) = \frac{dt}{t^2+1} \\ dv(t) = t^2dt \Rightarrow v(t) = \frac{1}{3}t^3 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{t^3}{6}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{6}\int \frac{t^3}{t^2+1}dt = \frac{t^3}{6}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{6}\int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \frac{t^3}{6}\operatorname{arctg} t - \frac{t^2}{12} + \frac{1}{6}\int \frac{tdt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t^3}{6}\operatorname{arctg} t - \frac{t^2}{12} + \frac{1}{12}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{t^3}{6}\operatorname{arctg} t - \frac{t^2}{12} + \frac{1}{12}\ln(t^2+1) + C.$$

Делая обратную замену, получим, что искомый интеграл равен:

$$\int y(x)dx = \frac{1}{6}\left((6x-1)\operatorname{arctg}(\sqrt[3]{6x-1}) - \frac{\sqrt[3]{(6x-1)^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt[3]{(6x-1)^2} + 1\right)\right) + C.$$

□

Задача 2.7. Вычислить неопределенный интеграл

$$I = \int \sqrt{x^2+1}dx.$$

Решение. Проинтегрируем по частям по формуле:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Тогда получим:

$$I = \int \sqrt{x^2+1}dx = \left| \begin{array}{c} u(x) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow du(x) = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} \\ dv(x) = dx \Rightarrow v(x) = x \end{array} \right| = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| - \int \sqrt{x^2+1}dx + C = x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| - I + C.$$

Таким образом, имеем:

$$2I = x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C \Rightarrow I = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|) + C.$$

Тогда ответ равен:

$$I = \int \sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|) + C.$$

□

Задача 2.8. Найти определенный интеграл

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}}.$$

Решение. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница, которая связывает знчение определенного интеграла с первообразной подынтегральной функции:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Сперва найдем первообразную подынтегральной функции:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{\sqrt{(x^2)^2+16}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+16}).$$

Значит определенный интеграл будет равен:

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{x^4+16}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^4+16})\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left[\ln(3+\sqrt{9+16}) - \ln 4\right] = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = \frac{\ln 2}{2}.$$

□