

Диагностическая работа по математике 10-11 классы

№п/п	Задание	Варианты ответов
1	а) Решите уравнение $\cos(\frac{\pi}{2} + 2x) = \sqrt{2} \sin x$ б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(0; \frac{3\pi}{2})$	1) а) $\pi k; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) $\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$ 2) а) $\pi k; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) 0; $\pi; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$ 3) а) $2\pi k; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) 0; $\pi; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$ 4) а) $\pi k; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$; б) 0; $\pi; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}$
2	ABCD ₁ B ₁ C ₁ D ₁ – прямоугольный параллелепипед. Точки Е и F – точки пересечения диагоналей граней AA ₁ B ₁ B и BB ₁ C ₁ C соответственно, а точки К и Т – середины ребер AD и DC соответственно. Стороны оснований равны 3 и 4, а диагональ большей боковой грани 5. А) Выясните взаимное расположение прямых EF и KT Б) Найдите объем параллелепипеда	1) параллельны, 36 2) перпендикулярны, 36 3) под углом 45°; 49 4) параллельны, 56
3	Решите неравенство $ x + 3 - x - 2 > 2x + 1$	1) $(-\infty; -5)$ 2) $(-\infty; -3)$ 3) $(-3; -\infty)$ 4) $(-\infty; -5); (-3; 2)$
4	15-го января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы: — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца; — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что в течение второго года (последних 12 месяцев) кредитования нужно вернуть банку 1434000 рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?	1) 2450000 2) 3400000 3) 2400000 4) 600 000
5	Найдите все значения а при каждом из которых уравнение $x^4 + (a - 3)^2 = x - a + 3 + x + a - 3 $ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.	1) $a \geq 2, a \leq 4$ 2) $b \geq 2, b \geq -2$ 3) $a \leq 1, a \geq 5$ 4) $a \geq 1, a \geq 5$

11

$$a) \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sqrt{2} \sin x$$

$$- \sin 2x = \sqrt{2} \sin x$$

$$-2 \sin x \cdot \cos x = \sqrt{2} \sin x$$

$$-2 \sin x \cdot \cos x - \sqrt{2} \sin x = 0$$

$$-\sqrt{2} \sin x \cdot (\sqrt{2} \cos x + 1) = 0$$

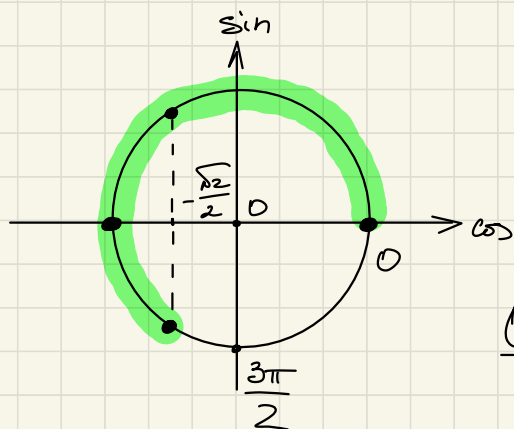
$$\sin x (\sqrt{2} \cos x + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} x = \sqrt{k}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\circ) \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$$

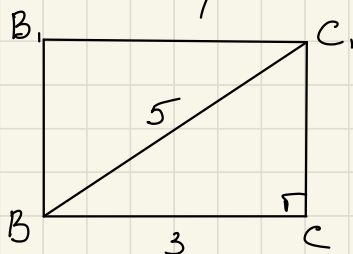
$$0, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$$

Antwort: (4)

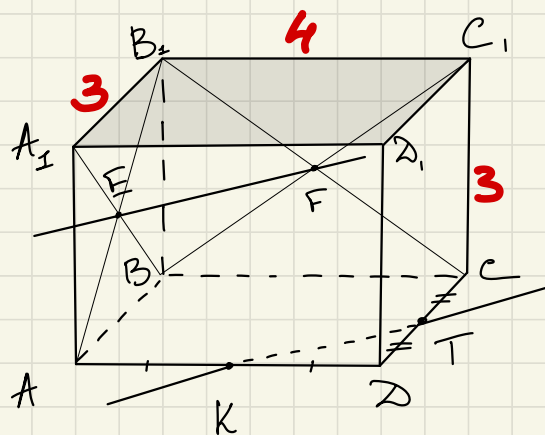


N2

1) Рассмотрим B, BCC_1 :



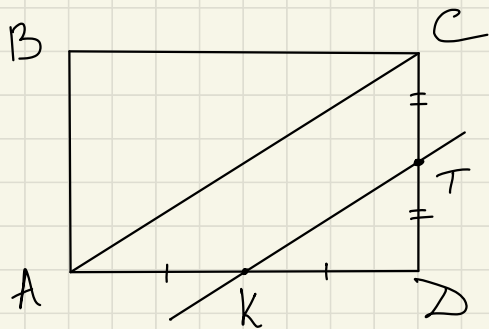
По условию $BC = 3$, $BC_1 = 5$
и $\angle BCC_1 = 90^\circ \Rightarrow CC_1 = 3$
(по Тх. Пифагора)



2) $V = a \cdot b \cdot c$ - объем $\Rightarrow V = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$

3) $B_1E = EA$ и $B_1F = FC$ по св-ву диагоналей
прямоугольника $\Rightarrow EF$ - средняя линия в
 $\triangle ACB_1 \Rightarrow EF \parallel AC$

4) Рассмотрим $ABCD$:



По условию $KT = TC$
и $AK = KD \Rightarrow KT$ -

средняя линия в $\triangle ACD$
 $\Rightarrow KT \parallel AC$

5) Из п. 3-4 $\Rightarrow EF \parallel KT$

Ответ: (1)

№3

$$|x+3| - |x-2| > 2x+1$$

1) Пусть $x \in (-\infty, -3]$ \Rightarrow

$$-x-3+x-2 > 2x+1$$

$$-5 > 2x+1 \Rightarrow x < -3$$

$$x \in (-\infty, -3)$$

2) Пусть $x \in (-3, 2]$ \Rightarrow

$$x+3+x-2 > 2x+1$$

$$2x+1 > 2x+1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

3) Пусть $x \in (2, +\infty)$ \Rightarrow

$$x+3-x+2 > 2x+1$$

$$5 > 2x+1 \Rightarrow x < 2$$

$x \in \emptyset$ т.к. мы рассматривали $x \in (2, +\infty)$

Итого: $x \in (-\infty, -3)$

Ответ: (2)

N4

Пусть S - взятая сумма в банке. Рассмотри долг на 15 числа:

№ месяца	1	2	3	...	23	24
Долг (15 числа)	$S - p$	$S - 2p$	$S - 3p$...	$S - 23p$	$S - 24p$

Здесь p - некоторая сумма, на которую долг равномерно (по условию) уменьшается каждый месяц.

За 24 месяца долг нужно полностью отдать
 \Rightarrow долг 15 числа 24^{го} месяца $= 0$: $S - 24p = 0$

По условию выплаты за второй год = 1 434 000. Найдем эти выплаты: пусть x_i - выплата за i -ый месяц, тогда:

$$1,03(S - 12p) - x_{13} = S - 13p \Rightarrow$$

$$x_{13} = 0,03S + (13 - 12 \cdot 1,03)p,$$

$$1,03(S - 13p) - x_{14} = S - 14p \Rightarrow$$

$$x_{14} = 0,03S + (14 - 13 \cdot 1,03)p,$$

.....

$$1,03(S - 23) - X_{24} = 0 \Rightarrow$$

$$X_{24} = 1,03S - 23 \cdot 1,03.$$

$$\begin{aligned} X_{13} + X_{14} + \dots + X_{24} &= 0,03S \cdot 11 + (13 + 14 + \dots + 23)p - \\ &- 1,03p(12 + 13 + \dots + 23) + 1,03S = \\ &= 0,33S + \frac{13+23}{2} \cdot 11p - 1,03p \frac{12+23}{2} \cdot 12 + \\ &1,03S = 1,36S + 18 \cdot 11p - 1,03 \cdot 35 \cdot 6p \\ &= 1434000 \Rightarrow \text{T.K. } p = \frac{S}{24}, \text{ TO} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1,36S + \frac{S}{24} (18 \cdot 11 - 1,03 \cdot 35 \cdot 6) = \\ &= 1,36S - \frac{18,3}{24} S = 1434000 \end{aligned}$$

$$S = \frac{1434000}{0,5975} = 2400000 //$$

Ответ: (3)

N5

$$x^4 + (a-3)^2 = |x-a+3| + |x+a-3|$$

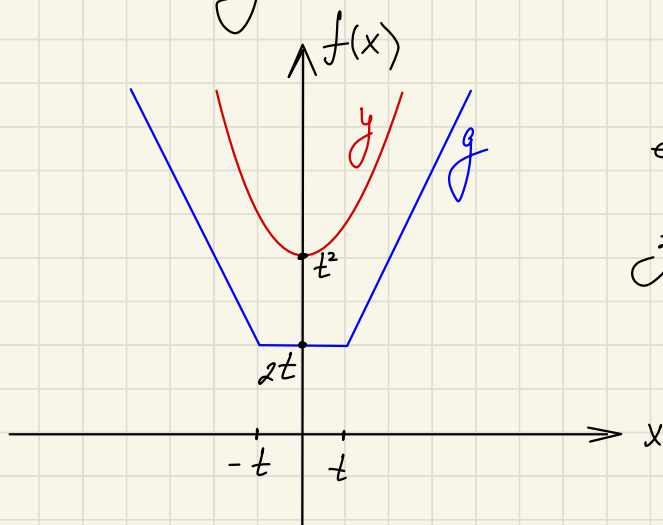
a : не более 1^{го} решения

$$t = a-3 \Rightarrow x^4 + t^2 = |x-t| + |x+t|$$

Рассмотрим функции:

$$y = x^4 + t^2$$

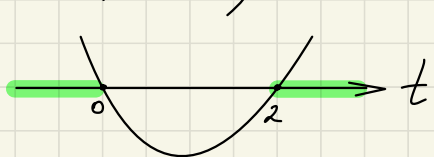
$$g = |x-t| + |x+t|$$



Заметим, что
если t - решение
задачи, то $-t$ тоже
решение.

Рассмотрим сначала
 $t > 0$.

Из графика видно, что у функций y и g
будет не более одного пересечения при $t^2 \geq 2t \Rightarrow$
 $t(t-2) \geq 0$



$$t \in [2, +\infty)$$

т.к. рассма-
триваем $t > 0$.

В бюджете замечание, $t \in (-\sigma, -2]$ тоже
решение задачи $\Rightarrow t \in (-\sigma, -2] \cup [2, +\sigma)$
 $t = 0$ - не решение (бюджет два перес.)
 $t = a - 3 \Rightarrow a \in (-\sigma, 1] \cup [5, +\sigma)$

Ответ: ③