Методы решений основных типов дифференциальных уравнений

Линдеманн Никита

10 мая 2019 г.

Содержание

1 Уравнения с разделяющимися переменными **3**

2 Однородные уравнения **3**

2.1 Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ . . . 3

2.2 Уравнения вида $y' = f\left(ax + by + c\right)$ . . . 3

2.3 Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ . . . 3

3 Линейные уравнения с переменными коэффицентами **4**

4 Уравнение Бернулли **5**

5 Уравнение Рикатти **5**

6 Уравнение Эйлера **5**

7 Уравнения в полных дифференциалах **5**

8 Интегрирующий множитель **6**

9 Уравнения, допускающие понижение порядка **7**

9.1 Уравнения не содержащие младших производных . . . 7

9.2 Уравнения не содержащие независимой переменной . . . 7

9.3 Однородные уравнения . . . 7

9.4 Уравнения с обобщенной однородностью . . . 7

10 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами **8**

11 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и квазиполиномами **8**

12 Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами **9**

13 Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами **9**

14 Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами **11**

15 Устойчивость **11**

16 Список литературы **12**

1 Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$\boxed{y' = f(x)g(y)} \tag{1}$$

$$\boxed{A(x)B(y)dx + C(x)D(y)dy = 0} \tag{2}$$

разрешаются путем разделения переменных и последующим интегрированием:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$\int \frac{A(x)}{C(x)}dx = -\int \frac{D(y)}{B(y)}dy$$

При этом необходимо отдельно рассмотреть случаи когда $B(y) = 0$ и $C(x) = 0$. ??????????

2 Однородные уравнения

2.1 Уравнения вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Решение уравнения вида

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{3}$$

получается заменой $z = y/x$:

$$y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$$

$$f(z) = z'x + z \Rightarrow \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x}$$

2.2 Уравнения вида $y' = f\left(ax + by + c\right)$

Уравнения вида

$$\boxed{y' = f(ax + by + c)} \tag{4}$$

сводятся к уравнению с разделяющимися переменными путем замены $z = ax + by + c$:

$$z' = a + by' \Rightarrow y' = f(z) = \frac{z' - a}{b}$$

$$\int \frac{dz}{bf(z) + a} = \int dx$$

Здесь $b \neq 0$, так так иначе переменные разделяются и без замены переменных.

2.3 Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

Для уравнения вида

$$\boxed{y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)} \tag{5}$$

рассматриаются 2 случая:

а. Если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то уравнение (5) выделением целой части сводится к виду

$$y' = f\left(A + \frac{B}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = \dfrac{1}{a_2x + b_2y + c_2}$.???

б. В случае $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ уравнение (5) сводится к (3)?????? линейной заменой:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} + \delta_1 \\ y = \tilde{y} + \delta_2 \end{cases}$$

где δ_1 и δ_2 находятся из системы:

$$\begin{cases} a_1\delta_1 + b_1\delta_2 + c_1 = 0 \\ a_2\delta_1 + b_2\delta_2 + c_2 = 0 \end{cases}$$

3 Линейные уравнения с переменными коэффицентами

Уравнения вида

$$\boxed{y' + a(x)y + b(x) = 0} \tag{6}$$

можно решать несколькими способами.

1. Метод вариации постоянной:

   (a) Ищется решение $\widetilde{y}$ однородного уравнения:

   $$\widetilde{y}' + a(x)\widetilde{y} = 0$$

   $$\widetilde{y} = C\exp\left(-\int a(x)dx\right)$$

   (b) Общее решение ищется методом вариации постоянной, то есть в виде:

   $$y = C(x)\exp\left(-\int a(x)dx\right)$$

   Подставляя отсюда y в (6) и упрощая, получим решение:

   $$y = \left[\int b(x)\exp\left(-\int a(x)dx\right)dx + C_1\right]\exp\left(-\int a(x)dx\right)$$

2. Метод Бернулли:

   (a) Представляем искомую функцию в виде произведения двух новых: $y = uv$

   $$u'v + uv' + a(x)uv = -b(x),$$

   $$u'v + u(v' + a(x)v) = -b(x).$$

   (b) Составляем систему, приравнивая выражение в скобках к нулю:

   $$\begin{cases} v' + a(x)v = 0, \\ u'v = -b(x). \end{cases}$$

4 Уравнение Бернулли

Уравнения вида

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)y^m \quad (m \neq 0, m \neq 1)} \tag{7}$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$ называется уравнением Бернулли. Стоит заметить, что функция $y = 0$ является решением и должна входть в ответ.

Уравнение Бернулли сводится к линейному ураравнению с переменными коэффициентами заменой $y = z^{\frac{1}{1-m}}$:

$$y' = \frac{1}{1-m} z^{\frac{1}{1-m}-1} z'$$

Подставляя y' в (7) и упрощая, получим линейное уравнение:

$$\frac{1}{1-m} z' + a(x)z = b(x)$$

5 Уравнение Рикатти

Уравненеие вида

$$\boxed{y' + a(x)y + b(x)y^2 + c(x) = 0} \tag{8}$$

называется уравнение Рикатти и решается по следующему алгоритму:

а. Ищется частное решение y_0: $y_0' + a(x)y_0 + b(x)y_0^2 + c(x) = 0$

б. Общее решение ищется в виде $y = y_0 + \tilde{y}$:

$$(y_0 + \tilde{y})' + a(x)(y_0 + \tilde{y}) + b(x)(y + \tilde{y})^2 + c(x) = 0$$

Раскрывая скобки и учитывая, что y_0 – частное решение, получаем уравнение Бернулли с $m = 2$:

$$\tilde{y}' + a(x)\tilde{y} + 2b(x)\tilde{y}y_0 + b(x)\tilde{y}^2 = 0$$

6 Уравнение Эйлера

Уравнение вида

$$\boxed{p_0 x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0} \tag{9}$$

называется уравнением Эйлера.

Решается оно заменой:

$$\begin{cases} x = e^t, \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t}, \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}(\dot{y}e^{-t}) = \dfrac{d}{dt}(\dot{y}e^{-t})\dfrac{dt}{dx} = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y}). \end{cases}$$

7 Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \tag{10}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $P(x, y)$ такая, что $dP(x, y) = M(x,y)dx + N(x, y)dy$.

Если такая $P(x, y)$ существует, то

$$\frac{\partial P}{\partial x} = M,\ \frac{\partial P}{\partial x} = N.$$

Если же функция $P(x, y)$ еще и дважды дифференцируема, то

$$M'_y = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = N'_x,$$

то есть

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Последнее утверждение может служить критерием уравнения в полных дифференциалах.

Решение уравнения (9) имеет вид $P(x, y) = const$, то есть сводится к отысканию функции $P(x, y)$, которая находится из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$P(x, y) = \int M(x, y)dx + C(y).$$

Подставляя результат во второе уравнение, находим константу интегрирования, зависящую от y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right) + C'_y = N(x, y)$$

Окончательный ответ:

$$\int M(x, y)dx + N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right) = const$$

8 Интегрирующий множитель

Если уравнение (9) не является уравнением в полных дифференциалах, но существует такая функция $\mu(x, y)$, что уравнение

$$\boxed{\mu(x, y)M(x,y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0} \tag{11}$$

является уравнением в полных дифференциалах, то такая функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем.

Если нам удастся найти интегрирующий множитель, то мы сможем найти частное решение уравнения (9). Интегрирующий множитель ищется обычно в виде $\mu(x)$ или $\mu(y)$. Подставляя μ в

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

находим интегрирующий множитель и решаем уравнение (10) как уравние в полных дифференциалах.

9 Уравнения, допускающие понижение порядка

9.1 Уравнения не содержащие младших производных

Уравнениия, не содержащие первых $k-1$ производных

$$\boxed{F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0} \tag{12}$$

решаются путем понежения порядка с помощью замены: $y^{(k)} = z, y^{(k+1)} = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$.

9.2 Уравнения не содержащие независимой переменной

Уравнениия, не содержащие независимой переменной

$$\boxed{F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0} \tag{13}$$

решаются путем введения новой функции $y' = p(y)$, относительно которой будет решаться уравнение, при этом $y'' = \dfrac{dp}{dx} = p'y'$. Так же надо помнить о существовании тривиальных решений вида $y(x) = const$.

9.3 Однородные уравнения

Уравнениие называется однородным, если для любого натурального k выполнено:

$$\boxed{F(x, ky, ky', \ldots, ky^{(n)}) = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})} \tag{14}$$

Для решения таких уравнений делается следующая замена:

$$y'_x = yz(x),$$

$$y'' = y'z(x) + yz'(x) = y(z^2(x) + z'(x)).$$

После замены и сокращения на функцию $y(x)$ получится уравнение, связывающее функцию $z(x)$ и неразисимую переменную x.

9.4 Уравнения с обобщенной однородностью

Говорят, что уравнение обладает свойством обобщенной однородности, если для любого натурального k существует такое m, что:

$$\boxed{F(ky, k^m y', k^{m-1} y', \ldots, k^{m-n} y^{(n)}) = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})} \tag{15}$$

Решаются такие уравнения заменой:

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{mt} z(t). \end{cases}$$

10 Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Для решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0} \tag{16}$$

находятся корни его характерестического уравнения

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Общее решение уравнения (16) есть сумма, состоящая из слагаемых вида

$$C_i e^{\lambda_i x}$$

для каждого простого корня λ_i и слагаемых вида

$$(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \ldots + C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x}$$

для каждого корня характерестического уравнения λ, имеющего кратность k.

В случае вещественных коэффициентов уравнения (16) решение можно записать в вещественной форме даже в случае комплексных корней. Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$C_{m+1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_{m+2}e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

если корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q_{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

если каждый из корней $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} – многочлены степени $k-1$ вида

$$(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_kx^{k-1}).????????????????$$

11 Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и квазиполиномами

Для уравнения вида

$$\boxed{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = P_m(x)e^{\alpha x}} \tag{17}$$

выделяют два принципиально разных случая:

1. α – корень характерестического многочлена $F(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n$ кратности k: $F(\alpha) = F'(\alpha) = \ldots = F^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $F^k(\alpha) \neq 0$ (случай резонанса). В таком случае общее решение ищется в виде

   $$y(x) = x^k R_m(x)e^{\alpha x},$$

   где $R_m(x)$ – многочлен такой же степени m, как и $P_m(x)$.

2. α – не является корнем характерестического многочлена: $F(\alpha) \neq 0$. Тогда общее решение имеет вид
$$y(x) = R_m(x)e^{\alpha x}.$$

Для уравнения вида

$$\boxed{y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))} \tag{18}$$

так же рассматривают два случая:

1. $\alpha+\beta i$ – корень характерестического многочлена $F(\lambda) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n$ кратности k: $F(\alpha+\beta i) = F'(\alpha+\beta i) = \ldots = F^{(k-1)}(\alpha+\beta i) = 0$, $F^k(\alpha+\beta i) \neq 0$ (случай резонанса). В таком случае общее решение ищется в виде
$$y(x) = x^k e^{\alpha x}(R_m(x)\cos(\beta x) + S_m(x)\sin(\beta x)),$$
где $R_m(x)$ и $S_m(x)$ – многочлены такой же степени m, как и $P_m(x)$ и $Q_m(x)$.

   Если в уравнении многочлены разной степени, то полагают $m = \max\{\deg P(x), \deg Q(x)\}$.

2. $\alpha + \beta i$ – не является корнем характерестического многочлена: $F(\alpha + \beta i) \neq 0$. Тогда общее решение имеет вид
$$y(x) = e^{\alpha x}(R_m(x)\cos(\beta x) + S_m(x)\sin(\beta x)).$$

12 Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами

Решение уравнения

$$\boxed{y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)} \tag{19}$$

имеет вид
$$y(x) = y_0(x) + Y(x),$$
где $y_0(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ – общее решение соответсвуещего исходному однородного уравнения, а $Y(x)$ – частное решение исходного уравнения.

Частное решение $Y(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ ищется методом вариации постоянных, то есть функции $C_i(x)$ находятся из алгебраической системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

13 Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

Систему уравнений

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases}} \tag{20}$$

обычно представляют в виде

$$\dot{X} = AX,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Для решения таких систем сперва находят собственные значения матрицы A, решая характерестическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Каждому простому корню λ_i соответствует решение

$$C_i \vec{v}_i e^{\lambda_i t},$$

где $\vec{v}_i$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ_i.

Если корень λ имеет алгебраическую кратность k, и существует k линейно независимых собственных вкторов $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$, соответствующих собстенному зачению λ, то этому корню соответсвует решение

$$(C_1 \vec{v}_1 + \ldots + C_k \vec{v}_k) e^{\lambda k}.$$

Если для корня λ кратности k существует только $m < k$ линейно независимых собственных вкторов $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$, то для кажого собственного вектора $\vec{v}$ ищутся присоединенные векторы $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_p$:

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}, \ \vec{v} \neq 0,$$

$$A\vec{h}_1 = \lambda \vec{h}_1 + \vec{v},$$

$$A\vec{h}_2 = \lambda \vec{h}_2 + \vec{h}_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A\vec{h}_p = \lambda \vec{h}_p + \vec{h}_{p-1}.$$

Каждой серии $\vec{v}, \vec{h}_1, \vec{h}_2, \dots, \vec{h}_p$ соответствует $p+1$ линейно независимое решение $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \vec{x}_{p+1}$ системы (20):

$$\vec{x}_1 = e^{\lambda t} \vec{v},$$

$$\vec{x}_2 = e^{\lambda t} \left(\frac{t}{1!} \vec{v} + \vec{h}_1 \right),$$

$$\vec{x}_3 = e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2!} \vec{v} + \frac{t}{1!} \vec{h}_1 + \vec{h}_2 \right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\vec{x}_{p+1} = e^{\lambda t} \left(\frac{t^p}{p!} \vec{v} + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \vec{h}_1 + \ldots + \frac{t}{1!} \vec{h}_{p-1} + \vec{h}_p \right).$$

Найдя для каждого λ решения и сложив их, получим общее решение системы (20).

14 Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Уравнение

$$\boxed{a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)} \tag{21}$$

имеет решение вида

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_1y_1 + C_2y_2,$$

где y_1 и y_2 – линейно независимые частные решения однородного уравнения, а функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находятся методом вариации постоянных из системы:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \dfrac{f(x)}{a(x)}. \end{cases}$$

Если удается угадать одно частное решение y_1, то для отыскания функции y_2 обычно пользуются формулой Лиувилля-Остроградского:

$$W_{y_1,y_2} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C \cdot \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right).$$

Упрощая вронскиан, получим конечную формулу:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C}{y_1^2} \cdot \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right).$$

15 Устойчивость

Определение 15.1. Решение $x = \varphi(t)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \;\; i = \overline{1,n}$$

называется устойчивым по Ляпунову, если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\, \exists\, \delta > 0 : \forall$ решения $x(t)$ той же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta,$$

при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Определение 15.2. Решение $\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того, все решения с достаточно близкими начальными условиями неограниченно приближается к $\varphi(t)$ при $t \to \infty$, то есть если из неравенства предыдущего определения

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$$

следует, что

$$\lim_{t\to\infty} x(t) - \varphi(t) = 0.$$

16 Список литературы

1. А. Ф. Филиппов – Сборник задач по дифференциальным уравнениям
2. В. К. Романко – Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению
3. Д. В. Беклемишев – Курс аналитической геометрии и линейной алгебры
4. Д. В. Беклемишев – Дополнительные главы линейной алгебры
5. С. М. Никольский – Курс математического анализа

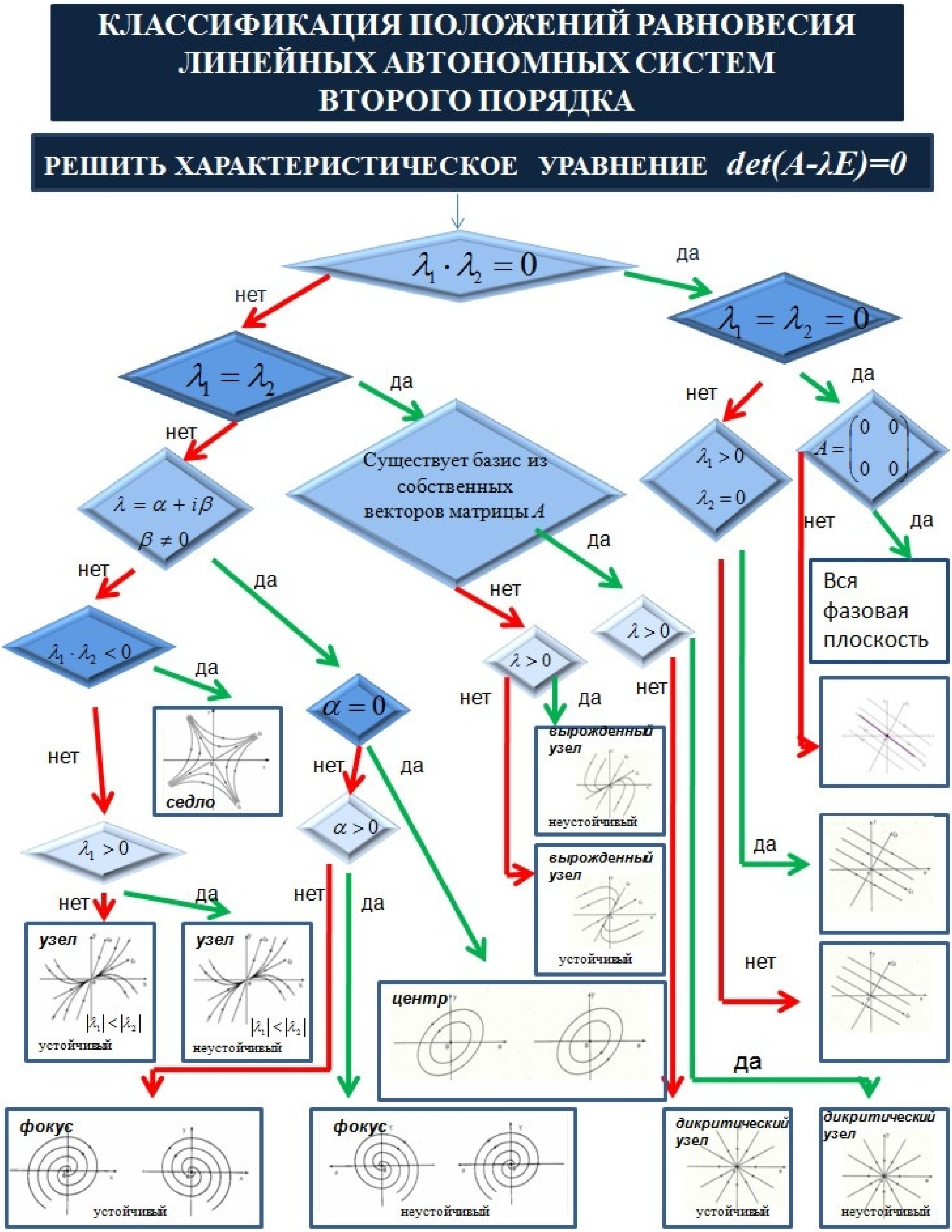

Рис. 1: Классификатор