Числа

Линдеманн Никита, МФТИ

15 февраля 2020 г.

Содержание

1 Натуральные числа

1.1 Аксиомы Пеано

Определение 1.1. *Натуральные числа $\mathbb{N}$ – это множество, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. *Для кажого числа $n \in \mathbb{N}$ существует единственное натуральное число n', называемое последующим для n.*
3. $\forall\, n' \in \mathbb{N}$ *выполнено* $n' \neq 1$.
4. *Всякое натуральное число n, за исключением единицы, является следующим только для одного натурального числа.*
5. *Если $\mathbb{M}$ – множество натуральных чисел, такое, что*

   (a) $1 \in \mathbb{M}$

   (b) $n \in \mathbb{M} \Rightarrow n' \in \mathbb{M}$

   тогда $\mathbb{M}$ содержит все натуральные числа.

Утверждение 1.1. *Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно $n' = m' \Leftrightarrow n = m$.*

Доказательство. $\boxed{\Leftarrow}$ Очевидно из второй аксиомы.
$\boxed{\Rightarrow}$ Очевидно из четвертой аксиомы. □

Утверждение 1.2. *Для всех $n, m \in \mathbb{N}$ верно $n \neq m \Rightarrow n' \neq m'$.*

Доказательство. Докажем от противного: пусть при $n \neq m$ верно $n' = m'$, тогда, по утверждению 1.1 вытекает, что $n = m$, что протеворечит условию. Следовательно, все же, $n' \neq m'$. □

Утверждение 1.3. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ верно $n' \neq n$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{M}$ – множество тех чисел, для которых утверждение верно. Очевидно, что $1 \in \mathbb{M}$: согласно третьей аксиоме $\forall\, n' \in \mathbb{N} \hookrightarrow n' \neq 1$, следовательно, при $n = 1$ получим, что $1' \neq 1$. Пусть утверждение выполнено для некоторого n, тогда, рассматривая натуральные n' и $(n')' = n''$ и применяя утверждение 1.2, получим, что $n' \neq (n')'$. Осталось заметить, что для множества $\mathbb{M}$ выполнены условия пятой аксиомы (аксиомы индукции), а значит $\mathbb{M} = \mathbb{N}$, то есть доказываемое утверждение верно для всех натуральных чисел. □

1.2 Индуктивное правило сложения Грассмана

Определение 1.2. *Сложение на множестве натуральных чисел – это внутренняя бинарная операция $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, такая, что $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ выполнено:*

1. $n + 1 = n'$
2. $n + m' = (n + m)'$

Теорема 1.1. *В области натуральных чисел операция сложения всегда выполнима и однозначна.*

Доказательство. Индукцией по m докажем, что результат операции $n+m$ определен и однозначен для всех $n, m \in \mathbb{N}$. База: при $m = 1$ имеем $n + 1 = n'$ – следующее за n число, всегда существует и единственно для всех натуральных n по второй аксиоме. Шаг индукции: если доказываемое утверждение верно для некоторого m, то $n + m' = (n + m)'$ – следующее за вполне конкретным $n+m$ число, значит оно тоже существует и единственно. □

Утверждение 1.4. $2 + 3 = 3 + 2 = 5$.

Доказательство. По определению $2 + 3 = 2 + 2' = (2 + 2)'$, так как именно 2 непосредственно предшествует 3 в натуральном ряду. Далее, рассуждая аналогично, получим: $2 + 3 = (2 + 2)' = ((2 + 1)')' = (2 + 1)'' = 3'' = 4' = 5$, здесь мы воспользовались тем, что $2 + 1 = 2' = 3$ и тем, что $3' = 4$ и $4' = 5$.

Абсолютно так же доказывается, что $3 + 2 = 5$: $3 + 2 = (3 + 1)' = (3')' = 4' = 5$. А так как равенство есть отношение эквивалентности, то выполняется свойство транзитивности: $2 + 3 = 5$, $5 = 3 + 2 \Rightarrow 2 + 3 = 3 + 2$. □

Теорема 1.2 (Ассоциотивность сложения). *Для всех натуральных n, m, p справедлив ассоциативный закон сложения:*

$$(n + m) + p = n + (m + p).$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по p. Для $p = 1$ утверждение очевидно верно: $(n + m) + 1 = (n + m)' = n + m' = n + (m + 1)$. Далее, предполагая истинность доказываемого утверждения для некоторого p, покажем, что оно верно и для p': $(n + m) + p' = ((n + m) + p)' = (n + (m + p))' = n + (m + p)' = n + (m + p')$. □

Утверждение 1.5. *Для всех $n \in \mathbb{N}$ верно $n' + 1 = n + 1'$.*

Доказательство. Докажем индукцией по n. База: при $n = 1$ утверждение верно, так как $1' + 1 = 2 + 1 = 2'$ и $1 + 1' = (1')' = 2'$. Шаг: если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ верно $n' + 1 = n + 1'$, то $n' + 1' = n' + (1 + 1) = (n' + 1) + 1 = n'' + 1 = n'''$ и $(n')' + 1 = n'' + 1 = n'''$, откуда следует, что $(n')' + 1 = n' + 1'$. □

Теорема 1.3 (Коммутативность сложения). *Для всех натуральных n, m справедлив коммутативный закон сложения:*

$$n + m = m + n.$$

Доказательство. Сначала индукцией по n докажем, что $1 + n = n + 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. База очевидна, чтобы доказать корректность индукционного перехода, заметим, что $1 + n' = (1 + n)' = (n + 1)' = n + 1' = n' + 1$ (здесь мы использовали предыдущее утверждение 1.5 и индукционное предположение о том, что для n справедливо $n + 1 = 1 + n$).

Осталось (опять же индукцией, но в этот раз по m) доказать саму теорему. Базу мы уже доказали: $n + 1 = 1 + n$. Шаг индукции: $n + m' = (n + m)' = (m + n)' = m + n' = m + (n + 1) = m + (1 + n) = (m + 1) + n = m' + n$. □

1.3 Индуктивное правило умножения Грассмана

Определение 1.3. *Умножение на множестве натуральных чисел – это внутренняя бинарная операция $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, такая, что $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ выполнено:*

1. $1 \cdot n = n$

2. $m' \cdot n = m \cdot n + n$

Следствие 1.1. *Для всех* $n, m \in \mathbb{N}$ *выполнено* $(m+1) \cdot n = m \cdot n + n$

Заметим, что как и сложение, умножение в области натуральных чисел всегда выполнимо и однозначно (докажите это).

Утверждение 1.6. *Для любого натурального* n *верно* $3 \cdot n = n + n + n$.

Доказательство. Действительно, по определению умножения: $3 \cdot n = 2' \cdot n = 2 \cdot n + n = 1' \cdot n + n = 1 \cdot n + n + n = n + n + n$. □

Утверждение 1.7. $3 \cdot 2 = 6$.

Доказательство. Используя утверждение 1.6, получим $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$. Так как $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = (2')' = 3' = 4$, то $2 + 2 + 2 = (2 + 2) + 2 = 4 + 2 = 4 + 1' = (4 + 1)' = (4')' = 5' = 6$. □

Утверждение 1.8. *Для любого натурального* n *верно* $n \cdot 1 = 1 \cdot n$.

Доказательство. Докажем индукцией по n. База очевидна, индукционный переход, на самом деле, тоже: $n' \cdot 1 = n \cdot 1 + 1 = n + 1 = n' = 1 \cdot n'$. □

Теорема 1.4 (Левая дистрибутивность умножения относительно сожения). *Для всех* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *верно*

$$n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p.$$

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по n. База индукции: $1 \cdot (m+p) = m + p = 1 \cdot m + 1 \cdot p$. Индукционный шаг: предположим, что доказываемое равенство выполнено для всех натуральных m и p при некотором n, тогда: $n' \cdot (m+p) = n \cdot (m+p) + (m+p) = n \cdot m + n \cdot p + m + p = n \cdot m + m + n \cdot p + p = (n+1) \cdot m + (n+1) \cdot p = n' \cdot m + n' \cdot p$, здесь в предпоследнем равенстве использовано следствие из определения, а именно, что $\forall\, n, m \in \mathbb{N} \hookrightarrow (m+1) \cdot n = m \cdot n + n$. □

Теорема 1.5 (Коммутативность умножения). *Для всех* $n, m \in \mathbb{N}$ *верно*

$$n \cdot m = m \cdot n.$$

Доказательство. Как обычно, будем доказывать индукцией по m. База индукции представляет собой утверждение 1.8, которое уже доказано. Шаг доказывается следующим образом: если для любого $n \in \mathbb{N}$ и для некоторого m верно, что $n \cdot m = m \cdot n$, то, используя левую дистрибутивность, имеем $m' \cdot n = m \cdot n + n = n \cdot m + n \cdot 1 = n \cdot (m+1) = n \cdot m'$. □

Так как мы доказали дистрибутивность слева и то, что умножение коммутативно, то из этого следует, что умножение так же дистрибутивно справа.

Теорема 1.6 (Ассоциативность умножения). *Для всех* $n, m, p \in \mathbb{N}$ *верно*

$$(n \cdot m) \cdot p = n \cdot (m \cdot p).$$

Доказательство. Индукция по n: база – $1 \cdot (m \cdot p) = mp = (1 \cdot m) \cdot p$. Для доказательства шага, потребуется дистрибутивность умножения относительно сложения справа: $n' \cdot (m \cdot p) = n \cdot (m \cdot p) + m \cdot p = (n \cdot m) \cdot p + m \cdot p = (n \cdot m + m) \cdot p = [(n+1) \cdot m] \cdot p = (n' \cdot m) \cdot p$. □

Определение 1.4. *Возведение натурального числа в натуральную степень – это это внутренняя бинарная операция* $\wedge : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, *такая, что* $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ *выполнено:*

1. $n^1 = n$

2. $n^{m'} = n^m \cdot n$

Абсолютно аналогично умножению и сложению, устанавливаются (проделайте это) известные правила для возведения в степень:

$$n^m \cdot n^p = n^{m+p}, \quad (n^m)^p = n^{m \cdot p}.$$

1.4 Линейный порядок натурального ряда

Определение 1.5. *Для натуральных n,m будем писать, что $n > m$ и $m < n$, если существует натуральное число p, такое, что $n = m + p$.*

Следствие 1.2. *Для любого натурального n выполнено $n < n + 1$, то есть $n < n'$.*

Теорема 1.7 (Транзитивность отношения "$<$"). *Если $n < m$ и $m < p$, то $n < p$.*

Доказательство. Из определения следует, что существуют натуральные a, b такие, что $m = n + a$ и $p = m + b$. Следовательно, $p = (n + a) + b = n + (a + b)$, откуда получаем требуемое. □

Теорема 1.8. *Соотношения $n = m$, $n < m$ и $n > m$ исключают друг друга.*

Доказательство. □

Список литературы

[1] В.И. Арнольд. Теоретическая арифметика.

[2] Эдмунд Ландау. Основы анализа.

[3] Р.Н. Карасев. Отдельные темы математического анализа. http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf

[4] Рихард Дедекинд. Непрерывность и иррациональные числа.