深 圳 大 学 实 验 报 告

课程名称：智能网络与计算

实验项目名称：实验三 物理层信道容量分析实验

学院：计算机与软件学院

专业：计算机科学与技术

指导教师：车越岭

报告人：林宪亮 学号：2022150130 班级：国际班

实验时间：2024.10.23

实验报告提交时间：2024年10月29日

教务处制

实验三：物理层信道容量分析实验

实验目的与要求：

1. 了解什么是凸优化问题
2. 学会使用 Matlab CVX 工具箱解决最优功率分配问题，使得信道容量最大化
3. 了解注水算法

方法、步骤：

1. 深入理解最优功率分配问题
2. 使用 CVX 找出最优的功率分配
3. 使用注水算法求解最优功率分配

实验过程及内容：

1. 深入理解最优功率分配问题

考虑一个包含 10 个时隙（T = 10）的通信系统。在每个时隙 iii，发射机的发射功率为 Pi（单位：瓦特），同时发射机到接收机的信道状态与接收机背景噪声的比值为 ai。假设单位带宽条件下，收发机之间在 T 个时隙中的总信道容量可以表示为：

$$C = \sum_{i=1}^{T} \log_2 (1 + P_i a_i)$$

假设发射机的总发射功率不能超过 Pmax=1P_{\text{max}} = 1Pmax =1 瓦特，最优的功率分配问题可以表示为以下的凸优化问题：

最大化：

$$\sum_{i=1}^{T} \log_2 (1 + P_i a_i)$$

约束条件：

$$P_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{T} P_i = 1$$

2. 使用 CVX 找出最优的功率分配

代码：

```
T = 10;
%a=rand(T,1);
cvx_begin
    variable  p(T);

    maximize( sum( log( 1+ p .* a )/log(2) ) );
    subject to
        p >= 0;
        sum(p) == 1;
cvx_end
disp(['最优解: ',num2str(p')]);
```

图 1 代码截图

代码解释：

这段代码是我编写的，用于解决一个最优功率分配的问题。我的目标是通过 CVX 求解器，在 10 个时隙中分配发射机的发射功率 pi，从而最大化信道容量。具体来说，在每个时隙 i，发射功率 pi 和信道的状态 ai 会影响信道容量。为此，我使用了香农信道容量公式的一个变形形式作为优化目标。

我通过 CVX 定义了一个优化问题，首先指定了优化变量 ppp，这是一个长度为 10 的向量，表示每个时隙的发射功率。然后，我设定目标函数 maximize(sum(log(1+ p .* a)/log(2)))，其中 log(2) 是为了将自然对数转换为以 2 为底的对数，符合香农公式。

接下来，我设置了两个约束条件：一是所有时隙的发射功率 pi 必须为非负，二是发射机的总发射功率不能超过 1 瓦，即 sum(p) == 1。最后，通过 cvx_end，我让 CVX 求解这个优化问题，并输出最优的功率分配 p 值，以便查看每个时隙的发射功率。

通过这个过程，我能够找到一种最优的功率分配方式，使得信道容量达到最大化，同时满足总功率限制的要求。

实验数据：

a：

编辑器 - Untitled.m

p a

10x1 double

	1	2
1	0.6443	
2	0.3786	
3	0.8116	
4	0.5328	
5	0.3507	
6	0.9390	
7	0.8759	
8	0.5502	
9	0.6225	
10	0.5870	

图 2 a 值

p:

```
Successive approximation method to be employed.
   SDPT3 will be called several times to refine the solution.
   Original size: 50 variables, 21 equality constraints
   10 exponentials add 80 variables, 50 equality constraints
-----------------------------------------------------------------
 Cones  |             Errors              |
Mov/Act | Centering  Exp cone   Poly cone | Status
--------+---------------------------------+---------
  3/  3 | 3.213e-01  7.287e-03  0.000e+00 | Solved
  3/  3 | 2.137e-02  3.318e-05  0.000e+00 | Solved
  3/  3 | 1.439e-03  1.486e-07  0.000e+00 | Solved
  0/  3 | 9.709e-05  6.013e-10  0.000e+00 | Solved
-----------------------------------------------------------------
Status: Solved
Optimal value (cvx_optval): +1.11249

最优解: 6.2372e-10  6.6207e-11    0.24742  1.3758e-10  6.0529e-11    0.41462    0.33796  1.5655e-10  3.6857e-10  2.2156e-10
```

图 3 p 值

如图 2，为 a 的值，如图 3，为使用 CVX 计算出的 p 值。

3. 使用注水算法求解

代码：

```
% 注水算法
syms x
func = 0;
T = 10; % 确保T的定义
% 计算λ
for i = 1:T
    func = func + 1/2 * ((1/(log(2)*x) - 1/a(i)) + abs((1/(log(2)*x) - 1/a(i))));
end
eqn = func == 1;
lambda = double(vpasolve(eqn, x));

% 计算注水线
v = 1 / ((log(2)/log(exp(1))) * lambda);

% 初始化功率分配
P = zeros(T, 1); % 创建一个零向量来存储每个时隙的功率分配

% 计算每个时隙的功率分配 P_i
for i = 1:T
    P(i) = max(0, (1/(log(2)*lambda) - 1/a(i))); % 计算 P_i
end

% 绘图
z = [];
for i = 0:T-1
    y = 1/a(i+1);
    z = [z; i, y; i+1, y];
end

figure(2);
plot(z(:, 1), z(:, 2));
line([0 T], [v v], 'linestyle', ':');
xlabel('Channel index a(i)');
legend('1/a', '注水线');
set(gca, 'xtick', [], 'ytick', []);
text(-1.2, v, num2str(v));

% 显示功率分配结果
disp(['最优功率分配 P: ', num2str(P')]);
```

图 4 代码截图

代码解释：

这段代码是我用来实现注水算法，目的是计算信道的最优功率分配。首先，我定义了符号变量 x 并初始化变量 func，同时设置了时隙数量 T=10。接着，我通过一个循环计算拉格朗日乘子 λ，在循环中累加每个时隙的功率表达式。然后，我使用 vpasolve 函数求解方程 ，从而得到 λ 的数值解。接下来，我计算注水线的值 v，并初始化一个零向量 PPP 来存储每个时隙的功率分配。通过另一个循环，我依据公式计算每个时隙的功率分配。最后，我生成图形以显示功率分配的曲线和注水线，并输出最优功率分配结果。

实验输出：

P：

```
>> Untitled
最优解: 6.2372e-10  6.6207e-11    0.24742  1.3758e-10  6.0529e-11    0.41462    0.33796  1.5655e-10  3.6857e-10  2.2156e-10
```

a：

编辑器 - Untitled.m

p × a ×

10x1 double

	1	2
1	0.6443	
2	0.3786	
3	0.8116	
4	0.5328	
5	0.3507	
6	0.9390	
7	0.8759	
8	0.5502	
9	0.6225	
10	0.5870	

图 5 a 值

由于我的 a 只随机生成一次，所以 a 是不改变的，对比两种算法的输出结果 p，可以看出 p 是一样的，这样就互相证明了两种算法的正确性。实验成功。

4. 思考

• **思考公式(1)是如何得到的？**

通过凸优化问题两个公式推导而成，通常是基于拉格朗日对偶方法和凸优化理论。

推导过程

优化问题的设定：我们的目标是最大化信道容量：

$$\max \sum_{i=1}^{T} \log_2(1 + P_i a_i)$$

约束条件是：

$$P_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{T} P_i = P_{\max}$$

引入拉格朗日乘子：我们引入拉格朗日乘子λ来处理约束条件，构建拉格朗日函数：

$$\mathcal{L}(P,\lambda) = \sum_{i=1}^{T} \log_2(1+P_i a_i) + \lambda\left(P_{\max} - \sum_{i=1}^{T} P_i\right)$$

对 Pi 求导并设置为零：为了找到最优的功率分配 Pi，我们对拉格朗日函数关于 Pi 求导并设置为零：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = \frac{a_i}{1+P_i a_i} - \lambda = 0$$

从中我们可以得到：

$$\frac{a_i}{1+P_i a_i} = \lambda$$

重排公式得到：

$$P_i = \frac{a_i}{\lambda} - \frac{1}{a_i}$$

引入非负性约束：由于 Pi≥0，我们可以推导出：

$$P_i = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{a_i}\right)^+$$

进一步转换为：

$$P_i = \left(\ln\left(\frac{1}{2\lambda}\right) - a_i\right)^+$$

这里的 (x)+表示取最大值与 0 的关系，即 max（0,x）。

•思考为什么称作注水算法。注水线，信道状态 a，与功率分配的关系如何？

注水算法之所以得名，是因为其理念类似于将水注入不同的容器，以实现最优分配。在这个算法中，注水线代表了一个基准水平，只有当信道状态 aia_iai 足够好时，才会“注入”功率。当信道状态较差时，分配的功率会被削减，甚至为零。

具体来说，注水线的高度与拉格朗日乘子 λ\lambdaλ 相关，反映了在功率分配限制下，所能支持的最大信道容量。信道状态 aaa 则表示信号与噪声的比值，信道状态越好，能分配的功率越多。通过这种方式，注水算法将有限的功率资源合理分配给信道条件较好的时隙，以最大化整体信道容量。

•找出注水线的具体值

如下图，注水线的值为 1.4796。

• 利用 Matlab 画出结果图

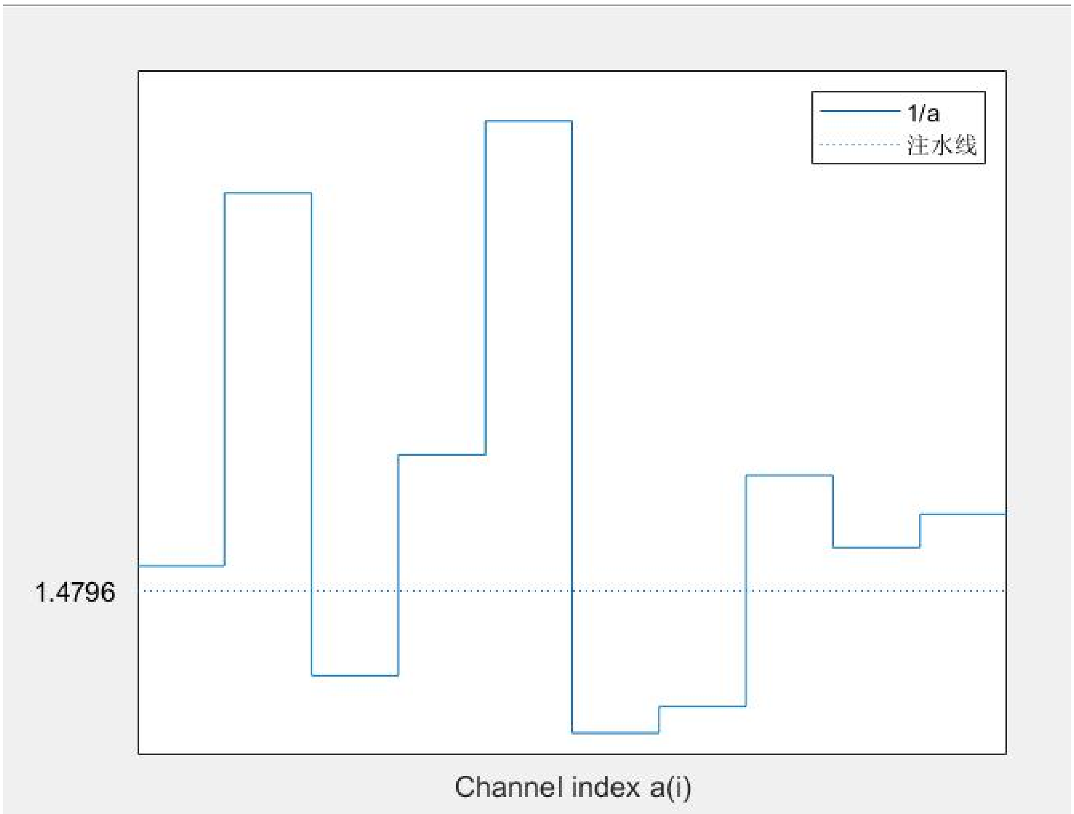

图 6 结果图

如图 6 所示。

实验结论：

在本次实验中，我通过研究凸优化问题，深入理解了最优功率分配问题，并使用了两种方法进行求解：MATLAB CVX 工具箱和注水算法。实验结果表明，合理分配功率能够有效提高信道容量。

凸优化问题的理解：我了解到最优功率分配问题本质上是一个凸优化问题，目标是最大化总信道容量。约束条件确保了功率总和受限且每个信道的功率非负。

使用 CVX 工具箱解决问题：在实验中，我使用 MATLAB 的 CVX 工具箱成功解决了功率分配问题，得到了数值解。通过 CVX 的代码实现，我能够高效地处理约束条件，并验证了功率分配结果的合理性。

注水算法的应用：注水算法从物理角度类比为将功率注入信道，根据信道状态 ai 分配更多的功率给条件较好的信道。通过数学推导，功率分配公式确保了信道容量最大化，并与 CVX 求解结果一致。

最终，我通过两种不同方法的对比，进一步理解了功率分配和信道状态之间的关系，成功实现了信道容量的最大化目标。

心得体会：

在本次实验中，我不仅加深了对凸优化问题的理解，还学会了如何利用 MATLAB 的 CVX 工具箱解决实际的优化问题。在实验的过程中，以下几点让我感触颇深：

理论与实践相结合：通过对最优功率分配问题的深入分析，我更好地理解了凸优化的数学原理。这让我意识到，在处理复杂的工程问题时，数学模型的建立与求解至关重要。尤其是在功率分配的优化问题中，约束条件的处理直接影响了最优解的可行性和有效性。

CVX 工具箱的应用：在实际编程过程中，CVX 工具箱为凸优化问题提供了便捷的求解途径。通过它，我能够快速找到最优功率分配方案，且不必手动推导复杂的数学解。这也让我意识到，现代工具能够极大地简化工程问题的解决过程，但深入理解其背后的算法与数学模型仍然是基础。

注水算法的直观性：注水算法的物理类比给我留下了深刻印象。它以一种简单而直观的方式展示了如何根据信道状态合理分配功率。我进一步了解到，很多复杂的优化问题在本质上都可以通过简单的物理直觉来解释，这不仅让我对优化算法有了更清晰的理解，也增强了我解决实际工程问题的信心。

通过这次实验，我不仅掌握了最优功率分配的理论和方法，也学会了如何在工程实践中应用这些知识。这让我深刻体会到数学、编程和算法相结合的重要性，并为日后在相关领域的深入研究打下了坚实的基础。

指导教师批阅意见：

成绩评定：　　分

指导教师签字：

年　　月　　日

备注：