Вариант

1) Сформулировать формальное описание случайного процесса как математического объекта.
   a. Случайный процесс представляет собой функцию двух переменных $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$ – множество произвольной природы, $t \in T -$ множество значений некоторого параметра, интерпретируемого как время. Функция $\xi(\omega, t)$ принимает значения в некотором множестве X, которое называется множеством состояний процесса.
   b. Случайный процесс представляет собой функцию двух переменных $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$ – множество элементарных исходов некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $t \in T -$ некоторое конечное множество, интерпретируемого как время. Функция $\xi(\omega, t)$ принимает значения в некотором множестве X, которое называется множеством состояний процесса.
   c. Случайный процесс представляет собой функцию двух переменных $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega_t$ – множество элементарных исходов некоторого вероятностного пространства $(\Omega_t, \mathcal{A}_t, P_t)$, $t \in T -$ множество значений некоторого параметра, интерпретируемого как время. Функция $\xi(\omega, t)$ принимает значения в некотором множестве X, которое называется множеством состояний процесса.
   d. Случайный процесс представляет собой функцию двух переменных $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$ – множество элементарных исходов некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $t \in T -$ множество значений некоторого параметра, интерпретируемого как время. Функция $\xi(\omega, t)$ принимает значения в некотором множестве X, которое называется множеством состояний процесса.

2) Дать определение понятия конечномерного распределения случайного процесса.
   a. Конечномерным распределением случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется совместное распределение вероятностей $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(B_1, B_2, \dots, B_n) = P(\omega \in \Omega \colon \xi(\omega, t_1) \in B_1, \xi(\omega, t_2) \in B_2, \dots, \xi(\omega, t_n) \in B_n)$, где $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ (набор моментов времени), $B_1, B_2, \dots, B_n -$ произвольные подмножества в

пространстве X, $n \geq 1$. (произвольные целые положительные числа).

b. Конечномерным распределением случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется совместное распределение вероятностей $F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(B_1, B_2, \dots, B_n) = P(\omega \in \Omega: \xi(\omega, t_1) \in B_1, \xi(\omega, t_2) \in B_2, \dots, \xi(\omega, t_n) \in B_n)$, где $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ (набор моментов времени), $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$- борелевские множества в пространстве X, $n \geq 1$.

c. Конечномерным распределением случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется совместное распределение вероятностей $F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(B_1, B_2, \dots, B_n) = P(\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \dots \omega_n \in \Omega_n :$ $\xi(\omega_1, t_1) \in B_1, \xi(\omega_2, t_2) \in B_2, \dots, \xi(\omega_n, t_n) \in B_n)$, где $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ (набор моментов времени), $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$- борелевские множества в пространстве X, $n \geq 1$ (произвольное целое фиксированное число).

d. Конечномерным распределением случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется распределение вероятностей $F_t(B) = P(\omega \in \Omega: \xi(\omega, t) \in B)$, где $t \in T$ (момент времени), $B \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$- борелевское множество в пространстве X.

3) Сформулировать классическое определение марковской цепи (МЦ).

a. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\} -$ называется цепью Маркова, если $\forall$ момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1} = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i_n)$ для некоторого заданного набора состояний $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n,\ j \in X$.

b. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\} -$ называется цепью Маркова, если $\forall$ момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1} = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i_n)$ при всех $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n,\ j \in X$.

c. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\} -$ называется цепью Маркова, если для некоторого заданного момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1} = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i_n)$ при всех $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n,\ j \in X$.

d. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\} -$ называется цепью Маркова, если $\forall$ момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1} = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_{n+1} =$

$j|\xi_n = i_n)$ при всех $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n \in X$, и некоторого заданного состояния $j \in X$.

4) Сформулировать свойства вероятностей перехода марковской цепи.

a. 1) $0 < p_{ij}(n,m) \le 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X;$
   2) $p_{ij}(n,m) = \sum_{k \in X} p_{ik}(n,u) p_{kj}(u,m);$

b. 1) $\sum_{j \in X} p_{ij}(n,m) = 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X$

c. 1) $0 \le p_{ij}(n,m) \le 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X;$
   2) $\sum_{j \in X} p_{ij}(n,m) = 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X;$
   3) $p_{ij}(n,m) = \sum_{k \in X} p_{ik}(n,u) p_{kj}(u,m);$

d. 1) $0 < p_{ij}(n,m) < 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X;$
   2) $\sum_{j \in X} p_{ij}(n,m) = 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X$

5) Записать уравнения Колмогорова-Чепмена в матричной форме.

a. $\mathbb{P}(n,m) = \mathbb{P}(n,s)\mathbb{P}(s,m), \ \ 0 \le n < s < m.$
b. $\mathbb{P}(n,m) = \mathbb{P}(n,s)\mathbb{P}(s,m), \ \ 0 \le n < m < s.$
c. $\mathbb{P}(n,m) = \mathbb{P}(n,s)\mathbb{P}(s,m), \ \ 0 \le s < n < m.$
d. $\mathbb{P}(n,m) = \mathbb{P}(n,s)\mathbb{P}(s,m), \ \ 0 < n < s < m.$

6) Дать определение класса состояний марковской цепи.

a. Классом называется произвольное заданное подмножество множества состояний.
b. Классом называется множество сообщающихся между собой состояний.
c. Классом называется некоторое множество состояний, имеющих какой-либо общий признак.
d. Классом называется множество состояний, достижимых из заданного состояния.

7) Сформулировать теорему о связи свойств существенности и замкнутости.

a. Теорема. Класс С замкнут тогда и только тогда, когда все его состояния существенны.
b. Теорема. Класс С замкнут тогда и только тогда, когда все его состояния несущественны.
c. Теорема. Пусть С- некоторый замкнутый класс. Тогда он является существенным. Обратное, вообще говоря, неверно.

d. Теорема. Пусть C- некоторый существенный класс. Тогда он является замкнутым. Обратное, вообще говоря, неверно.

8) Сформулировать теорему о числе возвращений марковской цепи в возвратное и невозвратное состояния.

a. Теорема. Если исходное состояние $i \in X$ МЦ является возвратным, то с вероятностью равной единице, цепь конечное число раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то с вероятностью равной единице, МЦ бесконечное число раз возвратится в исходное состояние.

b. Теорема. Если исходное состояние $i \in X$ МЦ является возвратным, то цепь бесконечно много раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то МЦ лишь конечное число раз возвратиться в исходное состояние. В таком случае, начиная с некоторого конечного момента времени, цепь никогда больше не вернется в исходное состояние $i \in X$.

c. Теорема. Если исходное состояние $i \in X$ МЦ является возвратным, то с вероятностью равной единице, цепь бесконечно много раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то с вероятностью, равной единице, МЦ лишь конечное число раз возвратится в исходное состояние. В таком случае, с вероятностью, равной единице, начиная с некоторого конечного момента времени, цепь никогда больше не вернется в исходное состояние $i \in X$.

d. Если исходное состояние i МЦ является возвратным, то с положительной вероятностью цепь бесконечно много раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то с положительной вероятностью МЦ лишь конечное число раз возвратится в исходное состояние. В таком случае, с положительной вероятностью, начиная с некоторого конечного момента времени, цепь никогда больше не возвратится в исходное состояние $i \in X$.

9) Дать формальное определение понятия периода состояния.

a. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i.
b. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n > 1 -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i.
c. Зафиксируем состояние $i \in X$. Обозначим через $n_1, n_2, \dots$ возможные целые положительные числа, такие, что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots$ (длины циклов). Пусть $d(i) =$ Н. О. Д. $\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i.
d. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_r, r < \infty -$ некоторый заданный набор целых положительных чисел, таких что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots, r$. Обозначим через $d(i) =$ Н. О. Д. $\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i.

10) Сформулировать теорему о циклических подклассах периодического класса состояний.
a. Теорема. Пусть C – замкнутый периодический класс с периодом $d > 1$. Тогда данный класс можно представить в виде объединения конечного числа $m < d$ непересекающихся циклических подклассов $C = C^{(0)} \cup C^{(1)} \cup \dots \cup C^{(m-1)}$. При этом переходы марковской цепи за один шаг осуществляются из подкласса $C^{(r)}$ в подкласс $C^{(r+1)}, r = 0,1, \dots, m-2$, а из подкласса $C^{(m-1)}$ в подкласс $C^{(0)}$ (циклически)
b. Теорема. Пусть C – замкнутый периодический класс с периодом $d > 1$. Тогда данный класс можно представить в виде объединения некоторых заданных подмножеств, называющихся циклическими подклассами
$$C = C^{(0)} \cup C^{(1)} \cup \dots \cup C^{(d-1)}, \qquad C^{(r)} \cap C^{(s)} \neq \emptyset, r \neq s.$$
c. Теорема. Пусть C – замкнутый периодический класс с периодом $d > 1$. Тогда данный класс можно представить в виде объединения непересекающихся циклических подклассов
$$C = C^{(0)} \cup C^{(1)} \cup \dots \cup C^{(d-1)}$$

При этом переходы марковской цепи за один шаг осуществляются произвольным образом, т.е. из подкласса $C^{(r)}$ можно перейти в любой другой подкласс $C^{(s)}, s \neq r$.

d. Теорема. Пусть C – замкнутый периодический класс с периодом $d > 1$. Тогда данный класс можно представить в виде объединения непересекающихся циклических подклассов

$$C = C^{(0)} \cup C^{(1)} \cup \dots \cup C^{(d-1)}$$

При этом переходы марковской цепи за один шаг осуществляются из подкласса $C^{(r)}$ в подкласс $C^{(r+1)}$, $r = 0,1,\dots,d-1$, а из подкласса $C^{(d-1)}$ в подкласс $C^{(0)}$ (циклически)

11) Сформулировать определение эргодического распределения МЦ.

a. Предельное распределение $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ – называется эргодическим, если выполняется условие $\pi_j \geq 0, \quad j \in X$

b. Предельное распределение $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ – называется эргодическим, если выполняется условие $\exists\, j_0 \in X$ такое, что $\pi_{j_0} = 1$.

c. Предельное распределение $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ – называется эргодическим, если выполняется условие $\pi_j > 0, \quad j \in X$

d. Предельное распределение $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ – называется эргодическим, если выполняется условие $\exists\, j_0 \in X$ такое, что $\pi_{j_0} > 0$.

12) Сформулировать определение свойства стационарности МЦ.

a. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняются следующие условия:
   - Распределение вероятностей состояний цепи $P_i^{(n)} = P(\xi_n = i), i \in X$ не зависит от n; $n = 0,1,2,\dots$
   - Совместное распределение вероятностей $P(\xi_n = i_0, \xi_{n+1} = i_1, \dots, \xi_{n+r} = i_r)$ при любых значениях $i_0, i_1, \dots, i_r \in X, r \geq 1$, не зависит от n; $n = 0,1,2,\dots$

b. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняется следующее условие:
   - $P_i^n = P(\xi_n = i), i \in \mathrm{X}$ не зависит от n; $n = 0,1,2,\dots$

c. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняется следующее условие:
   - $P(\xi_{n+1} = i_1, \xi_{n+2} = i_2, \dots, \xi_{n+r} = i_r)$ при любых значениях $i_1, i_2, \dots, i_r \in X, r \geq 2$, не зависит от $n; n = 0,1,2, \dots$

d. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если у этой цепи существует единственное стационарное распределение.

13) Записать формулу для предельного значения вероятности перехода $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n)$ в случае, когда состояния $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние.

a. Если $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = v_j$

b. Если $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \mu_j$

c. Если $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \frac{1}{\mu_j}$

d. Если $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \frac{1}{v_j}$

14) Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях эргодичности конечной марковской цепи.

a. Теорема. Пусть дана МЦ с конечным множеством состояний X. Тогда имеет место следующее утверждение:

$$(\text{Эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Возвратность} \\ \text{По ложительность} \\ \text{Апериодичность} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (\text{Апериодичность})$$

b. Теорема. Пусть дана МЦ с конечным множеством состояний X. Тогда имеет место следующее утверждение:

$$(\text{Эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Неприводимость} \\ \text{Возвратность} \\ \text{Положительность} \\ \text{Апериодичность} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Неприводимость} \\ \text{Апериодичность} \end{pmatrix}$$

c. Теорема. Пусть дана МЦ с конечным множеством состояний X. Тогда имеет место следующее утверждение:

$$(\text{Эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Возвратность} \\ \text{Положительность} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow (\text{Положительность})$$

d. Теорема. Пусть дана МЦ с конечным множеством состояний X. Тогда имеет место следующее утверждение:

$$(\text{Эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Возвратность} \\ \text{Положительность} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\text{Возвратность})$$

15) Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях существования единственного стационарного распределения марковской цепи с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний.

a. Теорема. Единственное стационарное распределение МЦ существует тогда и только тогда, когда в ней существует единственный возвратный класс.
b. Теорема. Единственное стационарное распределение МЦ существует тогда и только тогда, когда в ней существует единственный возвратный нулевой класс.
c. Теорема. Единственное стационарное распределение МЦ существует тогда и только тогда, когда в ней существует единственный возвратный положительный класс.
d. Теорема. Единственное стационарное распределение МЦ существует тогда и только тогда, когда в ней существует единственный возвратный положительный непериодический класс.

16) Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях существования предельного распределения марковской цепи с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний.

a. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный класс состояний;
b. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и

только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный класс состояний;

c. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный непериодический класс C, причем $\forall i \in X\ \exists j \in C$, такое, что $v_{ij} = 1$.

d. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный класс состояний, достижимый из любого начального состояния.

17) Сформулировать общее определение марковского свойства случайного процесса $\xi(t)$ в произвольный фиксированный момент времени $t \in T$.

a. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если $\forall$ момента времени $t \in T$ и произвольных событий $A_t^{(-)}, A_t^{(+)}$ выполняется соотношение:

$$P\left(A_t^{(-)} A_t^{(+)} \middle| \xi(t) = x\right) = P\left(A_t^{(-)} \middle| \xi(t) = x\right) P\left(A_t^{(+)} \middle| \xi(t) = x\right),$$
$$x \in X.$$

b. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если $\forall$ момента времени $t \in T$ и произвольных событий $A_t^{(-)} \in \mathcal{F}_t^{(-)}, A_t^{(+)} \in \mathcal{F}_t^{(+)}$ выполняется соотношение:
$P\left(A_t^{(-)} A_t^{(+)} \middle| \xi(t) = x\right) = P\left(A_t^{(-)} \middle| \xi(t) = x\right) P\left(A_t^{(+)} \middle| \xi(t) = x\right)$, $x \in X$, где $\mathcal{F}_t^{(+)} = \sigma\{\xi(s), s > t\}$; $\mathcal{F}_t^{(-)} = \sigma\{\xi(s), s < t\}$.

c. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если $\forall$ момента времени $t \in T$ и произвольных событий $A_t^{(-)} \in \mathcal{F}_t^{(-)}, A_t^{(+)} \in \mathcal{F}_t^{(+)}$ выполняется соотношение:
$P(A_t^{(-)} A_t^{(+)}) = P(A_t^{(-)}) P(A_t^{(+)})$, $x \in X$, где $\mathcal{F}_t^{(+)} = \sigma\{\xi(s), s > t\}$; $\mathcal{F}_t^{(-)} = \sigma\{\xi(s), s < t\}$.

d. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если $\forall$ момента времени $t \in T$ и произвольных событий $A_t^{(-)} \Subset \mathcal{F}_t^{(-)}, A_t^{(+)} \Subset \mathcal{F}_t^{(+)}$ выполняется соотношение:
$P\left(A_t^{(-)} A_t^{(+)} \middle| \xi(t) = x\right) = P\left(A_t^{(-)} \middle| \xi(t) = x\right) P\left(A_t^{(+)} \middle| \xi(t) = x\right)$,
$x \in X$, где $\mathcal{F}_t^{(+)} = \sigma\{\xi(s), s > t\}$; $\mathcal{F}_t^{(-)} = \sigma\{\xi(s), s < t\}$

18) Записать представление для совместного распределения вероятностей марковского процесса с дискретным множеством состояний через вероятности перехода.

a. $P(\xi(t_1) = i_1, \xi(t_2) = i_2, \dots, \xi(t_n) = i_n) = P(\xi(t_1) = i_1 | \xi(t_0) = i_0), \mathrm{P}(\xi(t_2) = i_2 | \xi(t_1) = i_1) \dots P(\xi(t_n) = i_n | \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}) = P_{i_0,i_1}(t_0, t_1) P_{i_1,i_2}(t_1, t_2) \dots P_{i_{n-1},i_n}(t_{n-1}, t_n)$,
$0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n; i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n \in X$

b. $P(\xi(t_0) = i_0, \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_n) = i_n) = P(\xi(t_1) = i_1 | \xi(t_0) = i_0) P(\xi(t_2) = i_2 | \xi(t_1) = i_1) \dots P(\xi(t_n) = i_n | \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}) = p_{i_0,i_1}(t_0, t_1) p_{i_1,i_2}(t_1, t_2) \dots p_{i_{n-1},i_n}(t_{n-1}, t_n)$,
$0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n; i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n \in X$

c. $P(\xi(t_1) = i_1, \xi(t_2) = i_2, \dots, \xi(t_n) = i_n | \xi(t_0) = i_0) = P(\xi(t_1) = i_1 | \xi(t_0) = i_0) P(\xi(t_2) = i_2 | \xi(t_1) = i_1) \dots P(\xi(t_n) = i_n | \xi(t_{n-1}) = i_{n-1}) = p_{i_0,i_1}(t_0, t_1) p_{i_1,i_2}(t_1, t_2) \dots p_{i_{n-1},i_n}(t_{n-1}, t_n)$,
$0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n;\ i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n \in X$

d. $P(\xi(t_1) = i_1, \xi(t_2) = i_2, \dots, \xi(t_n) = i_n | \xi(t_0) = i_0) = P(\xi(t_1) = i_1 | \xi(t_0) = i_0) P(\xi(t_2) = i_2 | \xi(t_0) = i_0) \dots P(\xi(t_n) = i_n | \xi(t_0) = i_0) = p_{i_0,i_1}(t_0, t_1) p_{i_0,i_2}(t_0, t_2) \dots p_{i_0,i_n}(t_0, t_n)$
$0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n;\ i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n \in X,\ n \ge 1.$

19) Выписать общее аналитическое определение для инфинитезимальных характеристик однородного марковского процесса с дискретным множеством состояний.

a. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta) - \delta_{ij}}{\Delta}, i, j \in X$

b. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta)}{\Delta}, i, j \in X$

c. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta) + \delta_{ij}}{\Delta}, i, j \in X$

d. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} P_{ij}(\Delta), i, j \in X$

20) Выписать обратную систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковского процесса.

a. $P'_{ij}(t) = -a_i P_{ij}(t) + \sum_{k \ne i} a_{ik} P_{kj}(t),\ \ i.j \in X$

b. $P'_{ij}(t) = -a_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} a_{ik} P_{kj}(t), \;\; i.j \in X$

c. $P'_{ij}(t) = -a_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} P_{ik}(t) a_{kj}, \;\; i.j \in X$

d. $P'_{ij}(t) = -a_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} a_{ik} P_{kj}(t), \;\; i.j \in X$

21) Выписать распределение вероятностей мгновенных переходов (скачков) однородного марковского процесса $\xi(t)$.

a. $\alpha_{ij} = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i) = a_{ij}, j \neq i,$

$\{\xi_n = \xi(t_n), n = 0,1,2, \dots\}$ – вложенная цепь Маркова;

b. $\alpha_{ij} = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i) = \frac{a_{ij}}{a_i}, j \neq i,$

$\{\xi_n = \xi(t_n), n = 0,1,2, \dots\}$ – вложенная цепь Маркова;

c. $\alpha_{ij} = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i) = 1 - \frac{a_{ij}}{a_i}, j \neq i,$

$\{\xi_n = \xi(t_n), n = 0,1,2, \dots\}$ – вложенная цепь Маркова;

d. $\alpha_{ij} = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i) = \frac{a_{ij}}{a_j}, j \neq i,$

$\{\xi_n = \xi(t_n), n = 0,1,2, \dots\}$ – вложенная цепь Маркова;

где α_{ij} в левой части уравнения – греческая альфа.

22) Выписать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний процесса гибели и размножения.

a. $\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \;\; k = 0 \\ p'_k(t) = (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) - \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \;\; k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} p'_0(t) = \lambda_0 p_0(t) - \mu_1 p_1(t), \;\; k = 0 \\ p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \;\; k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \;\; k = 0 \\ p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \;\; k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \;\; k = 0 \\ p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k+1} p_{k+1}(t) + \mu_{k-1} p_{k-1}(t), \;\; k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

23) Выписать формулы для предельных вероятностей процесса гибели и размножения.

a. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$Q_i = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}, \;\; i = 1,2, \dots \text{j}, \qquad Q_0 = 1$

b. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$Q_i = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i \mu_{i+1}}, \;\; i = 1,2, \dots \text{j}, \qquad Q_0 = 1$

c. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}, \ \ i = 1,2, \dots \text{j}, \qquad Q_0 = 1$$

d. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}, \ \ i = 1,2, \dots \text{j}, \qquad Q_0 = 1$$

24) Выписать формулу для вероятностей состояний пуассоновского процесса.

a. $P_k(t) = P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, k = 1,2, \dots$

b. $P_k(t) = P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0,1,2, \dots$

c. $P_k(t) = P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{\lambda t}, k = 0,1,2, \dots$

d. $P_k(t) = P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-k\lambda t}, k = 0,1,2, \dots$

25) Сформулировать основное определение процесса восстановления как точечного случайного процесса.

a. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega), \ n = 0,1,2, \dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \ n = 1,2, \dots; \{\xi_k = \xi_k(\omega), \ k = 1,2, \dots\}$-независимые случайные величины, принимающие положительные значения.

b. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega), \ n = 0,1,2, \dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \ n = 1,2, \dots; \{\xi_k = \xi_k(\omega), \ k = 1,2, \dots\}$ - произвольные случайные величины, принимающие положительные значения и имеющие одинаковое распределение при $k \geq 2$.

c. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega), \ n = 0,1,2, \dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \ n = 1,2, \dots; \{\xi_k = \xi_k(\omega), \ k = 1,2, \dots\}$-независимые случайные величины, принимающие любые действительные значения и одинаковое распределение при $k \geq 2$.

d. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega), \ n = 0,1,2, \dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \ n = 1,2, \dots; \{\xi_k =$

$\xi_k(\omega),\ \ k = 1,2,\dots\}$-независимые случайные величины, принимающие положительные значения и имеющие одинаковое распределение при $k \geq 2$.

26) Сформулировать определение функции восстановления.

e. $H_1(t) = E\nu_1(t)$, где $\nu_1(t)$ – считающий процесс для ПВ с запаздыванием;
f. $H_1(t) = E\nu_1(t) + 1$, где $\nu_1(t)$ – считающий процесс для ПВ с запаздыванием;
g. $H_1(t) = E[\nu_1(\tau + t) - \nu_1(\tau)]$, где $\nu_1(t)$ – считающий процесс для ПВ с запаздыванием, $\tau \geq 0$ – произвольное;
h. $H_1(t) = P(\xi_n < t), n \geq 2$, где $\{\xi_n\}$ – случайные величины, образующие процесс восстановления с запаздыванием;

27) Сформулировать элементарную теорему восстановления.

a. Теорема. Предположим, что в процессе восстановления с запаздыванием $E\xi_1 = a_1 > 0$. Тогда
$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_1(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a_1}$$
b. Теорема. Предположим, что в процессе восстановления с запаздыванием $E\xi_n = a > 0, n \geq 2$. Тогда
$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_1(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a}$$
c. Теорема. Для произвольного процесса восстановления с запаздыванием выполняется соотношение
$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_1(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a}$$
где $a = E\xi_n, n \geq 2$
d. Теорема. Для произвольного процесса восстановления с запаздыванием выполняются соотношения
$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_1(t)}{t} = \frac{1}{E\xi_1}, \lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a},$$

где $a = E\xi_n, n \geq 2$

28) Сформулировать узловую теорему восстановления.

a. Теорема. Пусть задан некоторый процесс восстановления с запаздыванием. Пусть $H_1(t)$ – функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, непосредственно интегрируемая по Риману. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x)=\frac{1}{a}\int_0^\infty Q(x)dx, \qquad \text{где } a=M\xi_k, k\geq 2\,.$$

b. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k\geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t)-$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, интегрируемая по Риману на интервале $[0;\ \infty)$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x)=\frac{1}{a}\int_0^\infty Q(x)dx, \qquad \text{где } a=M\xi_k, k\geq 2\,.$$

c. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k\geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t)-$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, непосредственно интегрируемая по Риману. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x)=\frac{1}{a}\int_0^\infty Q(x)dx, \qquad \text{где } a=M\xi_k, k\geq 2\,.$$

d. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k\geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t)-$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, непосредственно интегрируемая по Риману. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x)=\int_0^\infty Q(x)dx$$

29) Дать формальное определение обратного времени возвращения в процессе восстановления.

a. Для произвольного фиксированного значения $t>0$ обратным временем возвращения называется случайная величина

$$\xi_t^{(0)}=t-t_{\nu(t)}, \quad \text{где } \nu(t) - \text{считающий процесс.}$$

b. Для произвольного фиксированного значения $t>0$ обратным временем возвращения называется случайная величина

$$\xi_t^{(0)}=t-t_{\nu(t)+1}, \quad \text{где } \nu(t) - \text{считающий процесс.}$$

c. Для произвольного фиксированного значения $t > 0$ обратным временем возвращения называется случайная величина

$$\xi_t^{(0)} = t - t_{\nu(t)-1}, \text{ где } \nu(t) - \text{считающий процесс.}$$

d. Для произвольного фиксированного значения $t > 0$ обратным временем возвращения называется случайная величина

$$\xi_t^{(0)} = t_{\nu(t)} - t, \text{ где } \nu(t) - \text{считающий процесс.}$$

30) Выписать выражение для предельного распределения обратного времени возвращения в процессе восстановления.

a. $F^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to 0} F_t^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to 0} P\left(\xi_t^{(0)} < x\right) = \frac{1}{a}\int_x^{\infty}[1 - F(z)]dz$

b. $F^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to 0} F_t^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to 0} P\left(\xi_t^{(0)} < x\right) = \frac{1}{a}\int_a^{a+x}[1 - F(z)]dz$

c. $F^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to \infty} F_t^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to \infty} P\left(\xi_t^{(0)} < x\right) = \frac{1}{a}\int_0^{x}[1 - F(z)]dz$

d. $F^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to \infty} F_t^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to \infty} P\left(\xi_t^{(0)} < x\right) = \int_0^{x}[1 - F(z)]dz$

Вариант

1) Дать описание понятия траектории случайного процесса.
   a. Траекторией случайного процесса $\xi(\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ называется функция $x_\omega(t) = \xi(\omega,t)$, $t \in T$, определяемая при каждом фиксированном значении $\omega \in \Omega$, заданная на множестве значений временного параметра T и принимающая значения во множестве состояний X.
   b. Траекторией случайного процесса $\xi(\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ называется функция $x_t(\omega) = \xi(\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, определяемая при каждом фиксированном значении $\omega \in \Omega$, заданная на множестве значений Ω и принимающая значения во множестве состояний X.
   c. Траекторией случайного процесса $\xi(\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ называется функция $x_\omega(t) = \xi(\omega,t)$, $t \in T$, определяемая при некотором фиксированном значении $\omega \in \Omega$, заданная на множестве значений временного параметра T и принимающая значения во множестве состояний X.
   d. Траекторией случайного процесса $\xi(\omega,t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$ называется функция $x_\omega(t) = \xi(\omega,t)$, $t \in T$, определяемая при каждом фиксированном значении $\omega \in \Omega$, заданная на множестве значений временного параметра T и принимающая значения во множестве Ω.

2) Сформулировать второе (аксиоматическое) определение случайного процесса.
   a. Определение. Случайным процессом называется произвольное отображение $\xi\colon \Omega \to \mathcal{X}$, где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{X} -$ множество всевозможных функций, заданных на множестве значений параметра времени T и принимающих значения в пространстве состояний X; при этом на множестве $\mathcal{X}$ введена $\sigma -$ алгебра подмножеств $\mathcal{F}$, порожденная цилиндрическими множествами, а пара $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ образует измеримое пространство.
   b. Определение. Случайным процессом называется измеримое отображение $\xi\colon \Omega \to \mathcal{X}$, где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{X} -$ некоторое подмножество множества всевозможных функций, заданных на множестве значений параметра времени T и принимающих

значения в пространстве состояний X; при этом на множестве $\mathcal{X}$ введена $\sigma-$ алгебра подмножеств $\mathcal{F}$, порожденная цилиндрическими множествами, а пара $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ образует измеримое пространство.

c. Определение. Случайным процессом называется измеримое отображение $\xi: \Omega \to \mathcal{X}$, где $\Omega-$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{A},P)$, $\mathcal{X}-$ множество всевозможных функций, заданных на множестве значений параметра времени T и принимающих значения в пространстве состояний X; при этом на множестве $\mathcal{X}$ введена $\sigma-$ алгебра подмножеств $\mathcal{F}$, порожденная цилиндрическими множествами, а пара $(\mathcal{X},\mathcal{F})$ образует измеримое пространство.

d. Определение. Случайным процессом называется измеримое отображение $\xi: \Omega \to X$, где $\Omega-$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega,\mathcal{A},P)$, $X-$ множество множество состояний процесса; при этом на множестве X введена $\sigma-$ алгебра подмножеств $\mathcal{B}$, а пара $(X,\mathcal{B})$ образует измеримое пространство.

3) Сформулировать классическое определение марковской цепи (МЦ).

a. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\}-$ называется цепью Маркова, если $\forall$ момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1}=j|\xi_0=i_0,\xi_1=i_1,\dots,\xi_{n-1}=i_{n-1},\xi_n=i_n)=P(\xi_{n+1}=j|\xi_n=i_n)$ для некоторого заданного набора состояний $i_0,i_1,i_2,\dots,i_{n-1},i_n,\ j\in X$.

b. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\}-$ называется цепью Маркова, если $\forall$ момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1}=j|\xi_0=i_0,\xi_1=i_1,\dots,\xi_{n-1}=i_{n-1},\xi_n=i_n)=P(\xi_{n+1}=j|\xi_n=i_n)$ при всех $i_0,i_1,i_2,\dots,i_{n-1},i_n,\ j\in X$.

c. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\}-$ называется цепью Маркова, если для некоторого заданного момента времени n выполняется условие
$P(\xi_{n+1}=j|\xi_0=i_0,\xi_1=i_1,\dots,\xi_{n-1}=i_{n-1},\xi_n=i_n)=P(\xi_{n+1}=j|\xi_n=i_n)$ при всех $i_0,i_1,i_2,\dots,i_{n-1},i_n,\ j\in X$.

d. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\}-$ называется цепью Маркова, если $\forall$ момента времени n выполняется условие
$P(\xi_{n+1}=j|\xi_0=i_0,\xi_1=i_1,\dots,\xi_{n-1}=i_{n-1},\xi_n=i_n)=P(\xi_{n+1}=$

$j|\xi_n = i_n)$ при всех $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n \in X$, и некоторого заданного состояния $j \in X$.

4) Записать представление для совместного распределения вероятностей марковской цепи через вероятности перехода.
   a. Теорема. Для произвольной МЦ имеет место следующее соотношение $P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_1 = i_1|\xi_0 = i_0)P(\xi_2 = i_2|\xi_1 = i_1) \dots P(\xi_n = i_n|\xi_{n-1} = i_{n-1})$
   b. Теорема. Для произвольной МЦ имеет место следующее соотношение $P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n|\xi_0 = i_0) = P(\xi_1 = i_1|\xi_0 = i_0)P(\xi_2 = i_2|\xi_1 = i_1) \dots P(\xi_n = i_n|\xi_{n-1} = i_{n-1})$
   c. Теорема. Для произвольной МЦ имеет место следующее соотношение $P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n|\xi_0 = i_0) = P(\xi_1 = i_1|\xi_0 = i_0)P(\xi_2 = i_2|\xi_0 = i_0) \dots P(\xi_n = i_n|\xi_0 = i_0)$
   d. Теорема. Для произвольной МЦ имеет место следующее соотношение $P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n|\xi_0 = i_0) = P(\xi_n = i_n|\xi_0 = i_0)P(\xi_n = i_n|\xi_1 = i_1) \dots P(\xi_n = i_n|\xi_{n-1} = i_{n-1})$

5) Записать матричную форму для вероятностей перехода за k шагов однородной марковской цепи.
   a. $\mathbb{P}(n, n+k) = \mathbb{P}^{k+1}, \;\; k \geq 1$
   b. $\mathbb{P}(n, n+k) = \mathbb{P}^{k-1}, \;\; k \geq 1$
   c. $\mathbb{P}(n, n+k) = \mathbb{P}^{k}, \;\; k \geq 1$
   d. $\mathbb{P}(n, n+k) = k \cdot \mathbb{P}, \;\; k \geq 1$

6) Сформулировать определение свойства существенности.
   a. Состояние $i \in X$ называется существенным, если найдётся такое состояние $j \neq i$, что существует путь из i в j $(i \to j)$, но не существует пути обратно.
   b. Состояние $i \in X$ называется существенным, если для любого другого состояния $j \neq i$ существует путь $i \to j$ и при этом существует путь $j \to i$.
   c. Состояние $i \in X$ называется существенным, если из него достижимо любое другое состояние: $\forall\, j \neq i \; \exists$ путь $i \to j$.
   d. Состояние $i \in X$ называется существенным, если для любого состояния $j \neq i$, достижимого из i, то есть такого, что $i \to j$, существует путь $j \to i$.

7) Дать формальное определение параметра $\boldsymbol{v_i}$ – вероятности возвращения в состояние $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{X}$. Пусть $B_n = (\xi_1 \neq i, \xi_2 \neq i, \dots, \xi_{n-1} \neq i, \xi_n = i), n = 1,2, \dots$

a. $v_i = P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$

b. $v_i = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_n = i \,|\xi_0 = i)$

c. $v_i = P(B|\xi_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n|\xi_0 = i)$

d. $v_i = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n|\xi_0 = i)$

8) Сформулировать теорему о связи свойств существенности и возвратности.

a. Теорема. Если некоторое состояние марковской цепи i возвратно, то оно существенно. Если состояние i существенно и $i \in$ C, где C- некоторый конечный класс, то i – возвратно.

b. Теорема. Если некоторое состояние марковской цепи i существенно, то оно возвратно.

c. Теорема. Если некоторое состояние марковской цепи невозвратно, то оно несущественно.

d. Теорема. Произвольное состояние марковской цепи i существенно тогда и только тогда, когда оно возвратно.

9) Сформулировать теорему о свойстве параметра $\boldsymbol{v_{ij}}$ для возвратного класса.

a. Пусть C - некоторый возвратный класс; i, $j \in$ C – произвольные фиксированные состояния. Тогда $0 < v_{ij} < 1$

b. Пусть C - некоторый возвратный класс; i, $j \in$ C – произвольные фиксированные состояния. Тогда $v_{ij} = 1$

c. Пусть C - некоторый возвратный класс; $i \in$ C, $j \,\overline{\in}$ C – произвольные фиксированные состояния. Тогда $v_{ij} = 1$

d. Пусть C - некоторый замкнутый класс; i, $j \in$ C – произвольные фиксированные состояния. Тогда $v_{ij} = 1$

10) Сформулировать определение свойства положительности.

a. Если $\mu_i > 0$, то состояние i называется положительным.

b. Если $\mu_i < \infty$, то состояние i называется положительным.

c. Если $\mu_i \geq 1$, то состояние i называется положительным.

d. Если $\mu_i = \infty$, то состояние i называется положительным.

11) Сформулировать определение стационарного распределения МЦ.

a. Предположим, что $\exists$ вектор $Q = (q_j,\ j \in X)$, который образует распределение вероятностей, т.е. $q_j \geq 0,\ j \in X$ и $\sum_{j \in X} q_j = 1$, и для которого выполняется следующее условие

$$q_j = \sum_{i \in X} q_i p_{ij},\ \ j \in X$$

Тогда вектор $Q = (q_j,\ j \in X)$ называется стационарным (инвариантным) распределением данной марковской цепи.

b. Предположим, что $\exists$ вектор $Q = (q_j,\ j \in X)$, который образует распределение вероятностей, т.е. $q_j \geq 0,\ j \in X$ и $\sum_{j \in X} q_j = 1$, и для которого выполняется следующее условие

$$q_i = \sum_{j \in X} q_j p_{ij},\ \ i \in X$$

Тогда вектор $Q = (q_j,\ j \in X)$ называется стационарным (инвариантным) распределением данной марковской цепи.

c. Предположим, что $\exists$ вектор $Q = (q_j,\ j \in X)$, для которого выполняется следующее условие

$$q_j = \sum_{i \in X} q_i p_{ij},\ \ j \in X$$

Тогда вектор $Q = (q_j,\ j \in X)$ называется стационарным (инвариантным) распределением данной марковской цепи.

d. Предположим, что $\exists$ вектор $Q = (q_j,\ j \in X)$, для которого выполняются следующие условия: $q_j \geq 0, j \in X$ и

$$q_j = \sum_{i \in X} q_i p_{ij},\ \ j \in X$$

Тогда вектор $Q = (q_j,\ j \in X)$ называется стационарным (инвариантным) распределением данной марковской цепи.

12) Сформулировать определение свойства стационарности МЦ.

a. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняются следующие условия:
   - Распределение вероятностей состояний цепи $P_i^{(n)} = P(\xi_n = i), i \in X$ не зависит от n; $n = 0,1,2, \dots$
   - Совместное распределение вероятностей $P(\xi_n = i_0, \xi_{n+1} = i_1, \dots, \xi_{n+r} = i_r)$ при любых значениях $i_0, i_1, \dots, i_r \in X, r \geq 1$, не зависит от n; $n = 0,1,2, \dots$

b. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняется следующее условие:
   - $P_i^n = P(\xi_n = i), i \in X$ не зависит от $n; n = 0,1,2, \dots$

c. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняется следующее условие:
   - $P(\xi_{n+1} = i_1, \xi_{n+2} = i_2, \dots, \xi_{n+r} = i_r)$ при любых значениях $i_1, i_2, \dots, i_r \in X, r \geq 2$, не зависит от $n; n = 0,1,2, \dots$

d. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если у этой цепи существует единственное стационарное распределение.

13) Записать формулу для предельного значения вероятности перехода $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n)$ в случае, когда $j -$ возвратное непериодическое состояние, достижимое из состояния i $(i \to j)$.

a. Если j – возвратное непериодическое состояние, $i \to j$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \frac{1}{\mu_j}$

b. Если j – возвратное непериодическое состояние, $i \to j$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \frac{v_{ij}}{\mu_j}$

c. Если j – возвратное непериодическое состояние, $i \to j$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = v_{ij}$

d. Если j – возвратное непериодическое состояние, $i \to j$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = v_j$

14) Сформулировать общее утверждение о предельном значении вероятности перехода $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n)$ в случае, когда $i, j \in C$, где $C -$ возвратный периодический класс с периодом d.

a. Если $i, j -$ произвольные фиксированные состояния из заданного возвратного периодического класса C, то предел вида $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \frac{1}{\mu_j}$.

b. Если $i, j -$ произвольные фиксированные состояния из заданного возвратного периодического класса C, то предел вида $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \frac{d}{\mu_j}$.

c. Если i,j – произвольные фиксированные состояния из заданного возвратного периодического класса С, то предел вида $\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n) = 0$.

d. Если i,j – произвольные фиксированные состояния из заданного возвратного периодического класса С, то предел вида $\lim_{n\to\infty} P_{ij}(n)$ не существует.

15) Сформулировать общее утверждение о связи свойств существования предельного и стационарного распределений марковской цепи.

a. Если у марковской цепи существует единственное стационарное распределение, то оно образует и предельное распределение.

b. Предельное распределение марковской цепи существует тогда и только тогда, когда существует единственное стационарное распределение.

c. Между свойствами существования предельного и единственного стационарного распределений, вообще говоря, не имеется определенной связи.

d. Если у МЦ существует предельное распределение, то оно же является единственным стационарным.

16) Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях существования предельного распределения марковской цепи с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний.

a. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный класс состояний;

b. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный класс состояний;

c. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный непериодический класс C, причем $\forall i \in X\ \exists j \in C$, такое, что $v_{ij} = 1$.

d. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный класс состояний, достижимый из любого начального состояния.

17) Сформулировать классическое определение марковского свойства для случайного процесса $\xi(t)$ с непрерывным временем $T = [0; \infty)$ и дискретным множеством состояний $X = \{0,1,2, \dots\}$.

a. Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любого момента времени $t > 0$ и произвольных $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t < t + \tau$; $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n, i, j \in X, n \ge 1$ выполняется соотношение
$P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_n) = i_n, \xi(t) = i) = P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t) = i)$.

b. Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для некоторого фиксированного момента времени $t > 0$ и произвольных наборов значений $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n < t < t + \tau$; $i_1, i_2, \dots, i_n, i, j \in X, n \ge 1$ выполняется соотношение
$P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_n) = i_n, \xi(t) = i) = P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t) = i)$.

c. Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любого момента времени $t > 0$ произвольного $n \ge 1$, некоторого заданного набора моментов времени $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n < t < t + \tau$ и произвольных наборов значений $i_1, i_2, \dots, i_n, i, j \in X$ выполняется соотношение
$P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_n) = i_n, \xi(t) = i) = P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t) = i)$.

d. Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любого момента времени $t > 0$ произвольных наборов моментов времени $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n < t < t + \tau$ и некоторого заданного набора значений $i_1, i_2, \dots, i_n, i, j \in X, n \ge 1$ выполняется соотношение

$P(\xi(t+\tau) = j|\xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_n) = i_n, \xi(t) = i) = P(\xi(t+\tau) = j|\xi(t) = i)$.

18) Сформулировать условие «непрерывности в нуле» для однородного марковского процесса с дискретным множеством состояний.

a. $\lim_{\Delta\to 0} P_{ij}(\Delta) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j \neq i \\ 0, & j = i \end{cases}$

b. $\lim_{\Delta\to 0} P_{ij}(\Delta) = 0, \forall i, j \in X$

c. $\lim_{\Delta\to 0} P_{ij}(\Delta) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$

d. $\lim_{\Delta\to \infty} P_{ij}(\Delta) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$

19) Выписать общее определение для интенсивностей перехода и выхода однородного марковского процесса с дискретным множеством состояний.

a. $a_{ij} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{P_{ij}(\Delta) - \delta_{ij}}{\Delta}, i, j \in X$

b. $a_{ij} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{P_{ij}(\Delta)}{\Delta}, i, j \in X$

c. $a_{ij} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{P_{ij}(\Delta) - \delta_{ij}}{\Delta}, i, j \overline{\in} X$

d. $a_{ij} = \lim_{\Delta\to 0} P_{ij}(\Delta) - \delta_{ij}, i, j \in X$

20) Выписать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний марковского процесса.

a. $P'_j(t) = -a_i P_j(t) + \sum_{k\neq j} P_k(t) a_{kj}, j \in X$

b. $P'_j(t) = -a_j P_j(t) + \sum_{k\neq j} P_k(t) a_{kj}, j \in X$

c. $P'_j(t) = -a_j P_j(t) + \sum_{k\neq j} a_{jk} P_k(t), j \in X$

d. $P'_j(t) = -a_j P_j(t) + \sum_{k\in X} a_{kj} P_k(t), j \in X$

21) Выписать распределение случайного времени пребывания однородного марковского процесса $\xi(t)$ в фиксированном состоянии $k \in X$.

a. $P(\theta_n < x|\xi_n = k) = 1 - e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ —момент изменения состояний процесса.

b. $P(\theta_n < x|\xi_n = k) = e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ —момент изменения состояний процесса.

c. $P(\theta_n < x|\xi_{n+1} = k) = 1 - e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ —момент изменения состояний процесса.

d. $P\left(\theta_n < x \middle| \xi_{n+1} = k\right) = e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ −момент изменения состояний процесса.

22) Сформулировать определение процесса гибели и размножения.

a. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ называется процессом гибели и размножения, если выполняются следующие условия:
   - $P_{k,k+1}(\Delta) = \lambda_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2, \dots$
   - $P_{k,k-1}(\Delta) = \mu_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 1,2, \dots$
   - $P_{k,k}(\Delta) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 0,1,2, \dots$

b. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ называется процессом гибели и размножения, если выполняются следующие условия:
   - $P_{k,k+1}(\Delta) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 0,1,2, \dots$
   - $P_{k,k-1}(\Delta) = \mu_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 1,2, \dots$
   - $P_{k,k}(\Delta) = \lambda_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2, \dots$

c. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ называется процессом гибели и размножения, если выполняются следующие условия:
   - $P_{k,k+1}(\Delta) = \mu_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 1,2, \dots$
   - $P_{k,k-1}(\Delta) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2, \dots$
   - $P_{k,k}(\Delta) = \lambda_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 0,1,2, \dots$

d. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ называется процессом гибели и размножения, если выполняются следующие условия:
   - $P_{k,k+1}(\Delta) = \lambda_{k+1} \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2, \dots$
   - $P_{k,k-1}(\Delta) = \mu_{k-1} \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 1,2, \dots$
   - $P_{k,k}(\Delta) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 0,1,2, \dots$

23) Сформулировать определение пуассоновского процесса как однородного марковского процесса с заданными свойствами вероятностей перехода.

a. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ с непрерывным временем $t \in T = [0, \infty]$и множеством состояний $X = \{0,1,2, \dots\}$ называется пуассоновским, если его переходные вероятности удовлетворяют следующим условиям:
   - $P_{k,k-1}(\Delta) = \lambda \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 1,2, \dots$

- $P_{k,k}(\Delta) = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2,\dots$ где $\lambda > 0$ – интенсивность процесса

b. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ с непрерывным временем $t \in T = [0,\infty]$и множеством состояний $X = \{0,1,2,\dots\}$ называется пуассоновским, если его переходные вероятности удовлетворяют следующим условиям:

- $P_{k,k+1}(\Delta) = \lambda\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2,\dots$
- $P_{k,k}(\Delta) = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2,\dots$ где $\lambda > 0$ – интенсивность процесса

c. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ с непрерывным временем $t \in T = [0,\infty]$и множеством состояний $X = \{0,1,2,\dots\}$ называется пуассоновским, если его переходные вероятности удовлетворяют следующим условиям:

- $P_{k,k+1}(\Delta) = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2,\dots$
- $P_{k,k}(\Delta) = \lambda\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2,\dots,$ где $\lambda > 0$ – интенсивность процесса

d. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ с непрерывным временем $t \in T = [0,\infty]$и множеством состояний $X = \{0,1,2,\dots\}$ называется пуассоновским, если его переходные вероятности удовлетворяют следующим условиям:

- $P_{k,k-1}(\Delta) = 1 - \lambda\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2,\dots$
- $P_{k,k}(\Delta) = \lambda\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 1,2,\dots,$ где $\lambda > 0$ – интенсивность процесса

24) Выписать формулу для вероятностей перехода пуассоновского процесса.

a. $P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \text{ при } j = i, i+1, \dots \\ 0, \text{при } j < i \end{cases}$

b. $P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j+i}}{(j+i)!} e^{-\lambda t} \text{ при } j = i, i+1, \dots \\ 0, \text{при } j < i \end{cases}$

c. $P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t} \text{ при } j = i, i+1, \dots \\ 0, \text{при } j < i \end{cases}$

d. $P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{i}}{i!} e^{-\lambda t} \text{ при } j = i, i+1, \dots \\ 0, \text{при } j < i \end{cases}$

25) Сформулировать определение считающего случайного процесса, связанного с заданным процессом восстановления.

a. Считающим процессом называется случайный процесс $\nu(t) = \nu(\omega, t) = \sup\{t_n(\omega) : t_n(\omega) \leq t\}$, где $\{t_n = t_n(\omega), \ \ n = 0,1,2, \ldots$ некоторый процесс восстановления.

b. Считающим процессом называется случайный процесс $\nu(t) = \nu(\omega, t) = \sup\{n : t_n(\omega) \leq t\}$, где $\{t_n = t_n(\omega), \ \ n = 0,1,2, \ldots$ некоторый процесс восстановления.

c. Считающим процессом называется случайный процесс $\nu(t) = \nu(\omega, t) = \sup\{n : t_n(\omega) \leq t\} - 1$, где $\{t_n = t_n(\omega), \ \ n = 0,1,2, \ldots$ некоторый процесс восстановления.

d. Считающим процессом называется случайный процесс $\nu(t) = \nu(\omega, t) = \sup\{n : t_n(\omega) \leq t\} + 1$, где $\{t_n = t_n(\omega), \ \ n = 0,1,2, \ldots$ некоторый процесс восстановления.

26) Выписать интегральное уравнение восстановления для процесса восстановления с запаздыванием, которое связывает функции восстановления $H(t)$ и $H_1(t)$.

a. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H(t-x) dF_1(x)$

b. $H_1(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x) dF_1(x)$

c. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H(t-x) dF(x)$

d. $H(t) = F_1(t) + \int_0^t H_1(t-x) dF_1(x)$

27) Сформулировать теорему Блекуэлла.

a. Теорема. Пусть задан произвольный процесс восстановления с запаздыванием. Пусть $H_1(t) -$ функция восстановления этого процесса. Тогда для любого $\Delta > 0$

$$\lim_{t \to \infty} [H_1(t+\Delta) - H_1(t)] = \frac{\Delta}{a}, \qquad \text{где } a = E\xi_k, k \geq 2.$$

b. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k \geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t) -$ функция восстановления этого процесса. Тогда для любого $\Delta > 0$

$$\lim_{t \to \infty} [H_1(t+\Delta) - H_1(t)] = \frac{\Delta}{a}, \qquad \text{где } a = E\xi_k, k \geq 2.$$

c. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k \geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t) -$ функция восстановления этого процесса. Тогда для любого $\Delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} H_1(t+\Delta) = \frac{\Delta}{a}, \qquad \text{где } a = E\xi_k, k \geq 2.$$

d. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k \geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t) -$ функция восстановления этого процесса. Тогда для любого $\Delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} [H_1(t+\Delta) - H_1(t)] = \frac{\Delta}{a_1}, \qquad \text{где } a_1 = E\xi_1.$$

28) Сформулировать простейший вариант достаточных условий, обеспечивающих непосредственную интегрируемость по Риману.

a. Лемма. Пусть функция Q(t) является монотонной ограниченной по абсолютной величине и интегрируемой на интервале [0,∞], то есть $\int_0^\infty Q(t)dt < \infty$. Тогда она непосредственно интегрируема по Риману.

b. Лемма. Пусть функция Q(t) является ограниченной по абсолютной величине и интегрируемой на интервале [0,∞], то есть $\int_0^\infty Q(t)dt < \infty$. Тогда она непосредственно интегрируема по Риману.

c. Лемма. Пусть функция Q(t) является монотонной и интегрируемой на интервале [0,∞], то есть $\int_0^\infty Q(t)dt < \infty$. Тогда она непосредственно интегрируема по Риману.

d. Лемма. Пусть функция Q(t) является монотонной ограниченной по абсолютной величине. Тогда она непосредственно интегрируема по Риману.

29) Выписать выражение для предельного распределения прямого времени возвращения в процессе восстановления.

a. $F^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to 0} F_t^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to 0} P\left(\xi_t^{(1)} < y\right) = \frac{1}{a}\int_y^\infty [1 - F(z)]dz$

b. $F^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to\infty} F_t^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(\xi_t^{(1)} < y\right) = \frac{1}{a}\int_0^y [1 - F(z)]dz$

c. $F^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to 0} F_t^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to 0} P\left(\xi_t^{(1)} < y\right) = \frac{1}{a}\int_a^{a+y} [1 - F(z)]dz$

d. $F^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to\infty} F_t^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(\xi_t^{(1)} < y\right) = \int_0^y [1 - F(z)]dz$

30) Выписать формулу для предельной вероятности $K_1 = \lim_{t\to\infty} P(A_t^{(1)})$ события $A_t^{(1)}$, состоящего в том, что для альтернирующего процесса восстановления $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1,2, \dots$, для которого $\xi_k = \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}$, $k = 1,2, \dots$, произвольный фиксированный момент времени t накрывается одной из величин $\left\{\xi_k^{(1)},\ k = 1,2, \dots\right\}$ (нечетным интервалом).

a. $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(A_t^{(1)}\right) = \frac{E\xi_k^{(2)}}{E\xi_k^{(1)} - E\xi_k^{(2)}}$.

b. $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(A_t^{(1)}\right) = \frac{E\xi_k^{(1)}}{E\xi_k^{(1)} - E\xi_k^{(2)}}$.

c. $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(A_t^{(1)}\right) = \frac{E\xi_k^{(2)}}{E\xi_k^{(1)} + E\xi_k^{(2)}}$.

d. $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(A_t^{(1)}\right) = \frac{E\xi_k^{(1)}}{E\xi_k^{(1)} + E\xi_k^{(2)}}$.

Вариант

1) Сформулировать первое (аналитическое) определение случайного процесса.
    a. Определение. Случайным процессом называется семейство произвольных функций $\xi_t(\omega) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P), \omega \in \Omega$.
    b. Определение. Случайным процессом называется семейство вещественных функций $\xi_t(\omega) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, заданных на некотором произвольном множестве $\Omega, \omega \in \Omega$.
    c. Определение. Случайным процессом называется семейство случайных величин $\xi_t(\omega) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P), \omega \in \Omega$.
    d. Определение. Случайным процессом называется семейство случайных величин $\xi_t(\omega) = \xi(\omega, t)$, $t \in T$, заданных на, вообще говоря, различных вероятностных пространствах $(\Omega_t, \mathcal{A}_t, P_t), \omega \in \Omega_t$ для фиксированного t$\in T$.

2) Дать определение понятия конечномерного распределения случайного процесса.
    a. Конечномерным распределением случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется совместное распределение вероятностей $F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(B_1, B_2, \dots, B_n) = P(\omega \in \Omega\colon \xi(\omega, t_1) \in B_1, \xi(\omega, t_2) \in B_2, \dots, \xi(\omega, t_n) \in B_n)$, где $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ (набор моментов времени), $B_1, B_2, \dots, B_n -$ произвольные подмножества в пространстве X, $n \geq 1$. (произвольные целые положительные числа).
    b. Конечномерным распределением случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется совместное распределение вероятностей $F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(B_1, B_2, \dots, B_n) = P(\omega \in \Omega\colon \xi(\omega, t_1) \in B_1, \xi(\omega, t_2) \in B_2, \dots, \xi(\omega, t_n) \in B_n)$, где $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ (набор моментов времени), $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$- борелевские множества в пространстве X, $n \geq 1$.
    c. Конечномерным распределением случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется совместное распределение вероятностей $F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(B_1, B_2, \dots, B_n) = P(\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \dots \omega_n \in \Omega_n :$ $\xi(\omega_1, t_1) \in B_1, \xi(\omega_2, t_2) \in B_2, \dots, \xi(\omega_n, t_n) \in B_n)$, где $t_1, t_2, \dots, t_n \in$

T (набор моментов времени), $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$- борелевские множества в пространстве X, $n \geq 1$ (произвольное целое фиксированное число).

d. Конечномерным распределением случайного процесса $\xi(\omega, t)$ называется распределение вероятностей $F_t(B) = P(\omega \in \Omega: \xi(\omega, t) \in B)$, где $t \in T$ (момент времени), $B \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$- борелевское множество в пространстве X.

3) Сформулировать общее определение марковского свойства для случайного процесса с дискретным временем.

a. Определение. Случайный процесс с дискретными временем $\{\xi_n,\ n = 0,1,2, \dots\}$ называется марковским (цепью Маркова), если для некоторого фиксированного момента времени n, произвольного состояния $x \in X$ и произвольных событий $A_n^{(-)} \in \mathcal{F}_n^{(-)}, A_n^{(+)} \in \mathcal{F}_n^{(+)}$ имеет место соотношение: $P\left(A_n^{(-)} A_n^{(+)} \middle| \xi_n = x\right) = P\left(A_n^{(-)} \middle| \xi_n = x\right) P(A_n^{(+)} | \xi_n = x)$, где $\mathcal{F}_n^{(-)} = \sigma\{\xi_k,\ k = 0,1, \dots, n-1\}, \mathcal{F}_n^{(+)} = \sigma\{\xi_k,\ k > n\}$

b. Определение. Случайный процесс с дискретными временем $\{\xi_n,\ n = 0,1,2, \dots\}$ называется марковским (цепью Маркова), если для любого фиксированного момента времени n, некоторого заданного состояния $x \in X$ и произвольных событий $A_n^{(-)} \in \mathcal{F}_n^{(-)}, A_n^{(+)} \in \mathcal{F}_n^{(+)}$ имеет место соотношение: $P\left(A_n^{(-)} A_n^{(+)} \middle| \xi_n = x\right) = P\left(A_n^{(-)} \middle| \xi_n = x\right) P(A_n^{(+)} | \xi_n = x)$, где $\mathcal{F}_n^{(-)} = \sigma\{\xi_k,\ k = 0,1, \dots, n-1\}, \mathcal{F}_n^{(+)} = \sigma\{\xi_k,\ k > n\}$

c. Определение. Случайный процесс с дискретными временем $\{\xi_n,\ n = 0,1,2, \dots\}$ называется марковским (цепью Маркова), если для любого фиксированного момента времени n, произвольного состояния $x \in X$ и произвольных событий $A_n^{(-)} \in \mathcal{F}_n^{(-)}, A_n^{(+)} \in \mathcal{F}_n^{(+)}$ имеет место соотношение: $P(A_n^{(-)} A_n^{(+)}) = P(A_n^{(-)}) P(A_n^{(+)})$, где $\mathcal{F}_n^{(-)} = \sigma\{\xi_k,\ k = 0,1, \dots, n-1\}, \mathcal{F}_n^{(+)} = \sigma\{\xi_k,\ k > n\}$

d. Определение. Случайный процесс с дискретными временем $\{\xi_n,\ n = 0,1,2, \dots\}$ называется марковским (цепью Маркова), если для любого фиксированного момента времени n, произвольного состояния $x \in X$ и произвольных событий $A_n^{(-)} \in \mathcal{F}_n^{(-)}, A_n^{(+)} \in \mathcal{F}_n^{(+)}$ имеет место соотношение: $P\left(A_n^{(-)} A_n^{(+)} \middle| \xi_n = x\right) =$

$P\left(A_n^{(-)}\middle|\xi_n = x\right) P(A_n^{(+)}|\xi_n = x)$, где $\mathcal{F}_n^{(-)} = \sigma\{\xi_k,\ k = 0,1,\dots,n-1\}, \mathcal{F}_n^{(+)} = \sigma\{\xi_k,\ k > n\}$

4) Сформулировать свойства вероятностей перехода марковской цепи.

a. 1) $0 < p_{ij}(n,m) \le 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X;$
   2) $p_{ij}(n,m) = \sum_{k\in X} p_{ik}(n,u)p_{kj}(u,m);$

b. 1) $\sum_{j\in X} p_{ij}(n,m) = 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X$

c. 1) $0 \le p_{ij}(n,m) \le 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X;$
   2) $\sum_{j\in X} p_{ij}(n,m) = 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X;$
   3) $p_{ij}(n,m) = \sum_{k\in X} p_{ik}(n,u)p_{kj}(u,m);$

d. 1) $0 < p_{ij}(n,m) < 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X;$
   2) $\sum_{j\in X} p_{ij}(n,m) = 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X$

5) Сформулировать определение однородной марковской цепи.

a. МЦ называется однородной, если для любых состояний $i,j \in X$ выполняются условия $p_{ij}(n,m) = p_{ij}(n-m)$, m$> n \ge 0$

b. МЦ называется однородной, если для любых состояний $i,j \in X$ выполняются условия $p_{ij}(n,m) = p_{ij}(m-n)$, m$> n \ge 0$ или $p_{ij}(n,n+k) = p_{ij}(k),\ k \ge 1$, тогда $p_{ij}(n,n+1) = p_{ij},\ n = 0,1,2,\dots$

c. МЦ называется однородной, если для любых состояний $i,j \in X$ выполняются условия $p_{ij}(n,m) = p_{ij}(m-n+1)$ или $p_{ij}(n,n+k) = p_{ij}(k+1)$

d. МЦ называется однородной, если для некоторой заданной пары состояний $i,j \in X$ выполняются условия $p_{ij}(n,m) = p_{ij}(m-n)$, m$> n \ge 0$ или $p_{ij}(n,n+k) = p_{ij}(k),\ k \ge 1$, тогда $p_{ij}(n,n+1) = p_{ij},\ n = 0,1,2,\dots$

6) Дать определение класса состояний марковской цепи.

a. Классом называется произвольное заданное подмножество множества состояний.

b. Классом называется множество сообщающихся между собой состояний.

c. Классом называется некоторое множество состояний, имеющих какой-либо общий признак.

d. Классом называется множество состояний, достижимых из заданного состояния.

7) Сформулировать определение свойства возвратности.

a. Состояние $i \in X$ называется возвратным, если вероятность возвращения $v_i > 0$.

b. Состояние $i \in X$ называется возвратным, если вероятность возвращения $v_i = 1$.

c. Состояние $i \in X$ называется возвратным, если выполняется условие: $p_{ii}(n) > 0$ при всех $n = 1,2, \dots$

d. Состояние $i \in X$ называется возвратным, если выполняется условие: $P(B_n|\xi_0 = i) = P(\xi_1 \neq i, \xi_2 \neq i, \dots, \xi_{n-1} \neq i, \xi_n = i|\xi_0 = i) > 0$, при всех $n = 1,2, \dots$

8) Сформулировать теорему о связи свойств существенности и возвратности.

a. Теорема. Если некоторое состояние марковской цепи i возвратно, то оно существенно. Если состояние i существенно и $i \in$ C, где C- некоторый конечный класс, то $i -$ возвратно.

b. Теорема. Если некоторое состояние марковской цепи i существенно, то оно возвратно.

c. Теорема. Если некоторое состояние марковской цепи невозвратно, то оно несущественно.

d. Теорема. Произвольное состояние марковской цепи i существенно тогда и только тогда, когда оно возвратно.

9) Дать формальное определение параметра μ_i для состояния $i \in X$. (среднее время возвращения).

a. Зафиксируем начальное состояние $\xi_0 = i \in X$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \dots -$ моменты возвращения в состояние i. Случайные величины ν_1 и $\nu_n - \nu_{n-1}$, $n = 2,3, \dots$ имеют одинаковое распределение. Тогда $\mu_i = E\nu_1 = E(\nu_n - \nu_{n-1}) -$ математическое ожидание длины интервалов между моментами возвращения в состояние i.

b. Зафиксируем начальное состояние $\xi_0 = i \in X$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \dots -$ моменты возвращения в состояние i. Тогда $\mu_i = E\nu_n, n = 1,2, \dots$

c. Зафиксируем начальное состояние $\xi_0 = i \in X$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \dots -$ моменты возвращения в состояние i. Тогда $\mu_i = E\nu_1$

d. Зафиксируем начальное состояние $\xi_0 = i \in X$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \dots -$ моменты возвращения в состояние i. Случайные величины ν_1 и $\nu_n - \nu_{n-1}$, $n = 2,3, \dots$ имеют одинаковое распределение. Тогда $\mu_i = E(\nu_n - \nu_1)$, $n = 2,3, \dots$

10) Дать формальное определение понятия периода состояния.

a. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i.

b. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n > 1 -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i.

c. Зафиксируем состояние $i \in X$. Обозначим через $n_1, n_2, \dots$ возможные целые положительные числа, такие, что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots$ (длины циклов). Пусть $d(i) =$ Н.О.Д.$\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i.

d. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_r, r < \infty -$ некоторый заданный набор целых положительных чисел, таких что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots, r$. Обозначим через $d(i) =$ Н.О.Д.$\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i.

11) Сформулировать определение предельного распределения МЦ.

a. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, не зависящие от начального состояния $i \in X$. Тогда вектор $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ образует предельное распределение.

b. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, не зависящие от начального состояния $i \in X$ и обладающие следующим свойством

$$\sum_{j \in X} \pi_j < 1$$

Тогда вектор $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ образует предельное распределение.

c. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_{ij}$, обладающие следующим свойством: для любого $i \in X$

$$\sum_{j \in X} \pi_{ij} \leq 1$$

Тогда каждый вектор $\pi_i = (\pi_{ij},\ j \in X)$ образует предельное распределение.

d. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, не зависящие от начального состояния $i \in X$ и обладающие следующим свойством

$$\sum_{j \in X} \pi_j = 1$$

Тогда вектор $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ образует предельное распределение.

12) Сформулировать теорему о достаточных условиях стационарности МЦ.

a. Теорема. Если выполняется условие $\mathrm{P}(\xi_n = \mathrm{i}) = \mathrm{q_i}, \mathrm{i} \in \mathrm{X}, \mathrm{n} = 0, 1, 2 \ldots$ где $\mathrm{Q} = (\mathrm{q_i}, \mathrm{i} \in \mathrm{X})$ – заданный вектор неотрицательных действительных чисел, то данная марковская цепь является стационарной;

b. Теорема. Если выполняется условие: $\mathrm{P}(\xi_n = \mathrm{i}) = \mathrm{P}(\xi_0 = \mathrm{i}),\ \mathrm{i} \in \mathrm{X}, \mathrm{n} = 1, 2 \ldots$, то данная маковская цепь является стационарной;

c. Теорема. Если у данной марковской цепи $\{\xi_n\}$ существует единственное стационарное распределение, то эта цепь является стационарной;

d. Теорема. Если начальное распределение марковской цепи $\{\xi_n\}$ совпадает со стационарным, то есть $\mathrm{P}(\xi_0 = \mathrm{i}) = \mathrm{q_i}, \mathrm{i} \in \mathrm{X}$, где $\mathrm{Q} = (\mathrm{q_i}, \mathrm{i} \in \mathrm{X})$- стационарное распределение, то данная марковская цепь является стационарной.

13) Записать формулу для предельного значения вероятности перехода $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a+nd)$ в случае, когда $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ −циклические подклассы возвратного периодического класса C, имеющего период d.

a. Если $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ −циклические подклассы возвратного периодического класса C, имеющего период d, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a+nd)$=$\frac{1}{\mu_j}$

b. Если $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ −циклические подклассы возвратного периодического класса C, имеющего период d, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a+nd)$=$\frac{1}{d\mu_j}$

c. Если когда $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ −циклические подклассы возвратного периодического класса C, имеющего период d, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a+nd)$=$\frac{d}{\mu_j}$

d. Если когда $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ −циклические подклассы возвратного периодического класса C, имеющего период d, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a+nd)$=0

14) Сформулировать теорему о необходимых условиях существования пределов вероятностей перехода в счётной марковской цепи.

a. Теорема. Пусть в МЦ $\{\xi_n\}$ $\exists$ пределы вероятностей перехода $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$, $j \in X -$ произвольные состояния, причем π_j может, вообще говоря, зависеть от начального состояния i. Тогда выполняются следующие утверждения
   - $\sum_{j\in X} \pi_j \le 1$; $\pi_j = \sum_{j\in X} \pi_i p_{ij}, j \in X$
   - Либо все $\pi_j = 0, j \in X$ и тогда стационарного распределения не существует, либо $\sum_{j\in X} \pi_j = 1$ и тогда вектор Π=$\left(\pi_j, j \in X\right)$ образует единственное стационарное распределение.

b. Теорема. Пусть в МЦ $\{\xi_n\}$ $\exists$ пределы вероятностей перехода $\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$, не зависящие от $i, j \in X -$ произвольные состояния. Тогда выполняются следующие утверждения
   - $\sum_{j\in X} \pi_j = 1$; $\pi_j = \sum_{j\in X} \pi_i p_{ij}, j \in X$
   - Вектор Π=$\left(\pi_j, j \in X\right)$ образует единственное стационарное распределение.

c. Теорема. Пусть в МЦ $\{\xi_n\}$ $\exists$ пределы вероятностей перехода $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$, не зависящие от $i, j \in X -$ произвольные состояния. Тогда выполняются следующие утверждения
   - $\sum_{j\in X} \pi_j \le 1$; $\pi_j = \sum_{j\in X} \pi_i p_{ij}, j \in X$
   - Либо все $\pi_j = 0, j \in X$ и тогда стационарного распределения не существует, либо $\sum_{j\in X} \pi_j = 1$ и тогда вектор $\Pi = (\pi_j, j \in X)$ образует единственное стационарное распределение.

d. Теорема. Пусть в МЦ $\{\xi_n\}$ $\exists$ пределы вероятностей перехода $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)$, не зависящие от $i, j \in X -$ произвольные состояния. Тогда выполняются следующие утверждения
   - $\sum_{j\in X} \pi_j \le 1$; $\pi_j = \sum_{j\in X} \pi_i p_{ij}, j \in X$
   - Все $\pi_j = 0, j \in X$ и стационарного распределения не существует.

15) Сформулировать утверждение о связи стационарных вероятностей $q_{j,}\, j \in X$ марковской цепи и параметров $\mu_j, j \in X$.

a. Утверждение. Пусть марковская цепь имеет ровно один класс возвратных положительных состояний С. Рассмотрим вектор

$$q_j = \frac{1}{\mu_j}, \qquad j \in X$$

Тогда величины $Q = (q_j,\ j \in X)$ образуют единственное стационарное распределение данной марковской цепи.

b. Утверждение. Пусть марковская цепь имеет ровно один класс возвратных положительных состояний С. Рассмотрим вектор

$$q_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_j}, & j \in C, \\ 0, & j \,\overline{\in}\, C. \end{cases}$$

Тогда величины $Q = (q_j,\ j \in X)$ образуют единственное стационарное распределение данной марковской цепи.

c. Утверждение. Пусть марковская цепь имеет ровно один класс возвратных состояний С. Рассмотрим вектор

$$q_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_j}, & j \in C, \\ 0, & j \,\overline{\in}\, C. \end{cases}$$

Тогда величины $Q = (q_j,\ j \in X)$ образуют единственное стационарное распределение данной марковской цепи.

d. Утверждение. Пусть марковская цепь имеет ровно один класс существенных состояний С. Рассмотрим вектор

$$q_j = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_j}, & j \in C, \\ 0, & j \overline{\in} C. \end{cases}$$

Тогда величины $Q = (q_j,\ j \in X)$ образуют единственное стационарное распределение данной марковской цепи.

16) Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях существования эргодического распределения (эргодичности) марковской цепи со счетным множеством состояний.

a. Теорема. Для марковской цепи со счетным множеством состояний справедливо следующее утверждение

$$(\text{эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неприводимость} \\ \text{возвратность} \\ \text{положительность} \\ \text{апериодичность} \end{pmatrix}$$

b. Теорема. Для марковской цепи со счетным множеством состояний справедливо следующее утверждение

$$(\text{эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неприводимость} \\ \text{апериодичность} \end{pmatrix}$$

c. Теорема. Для марковской цепи со счетным множеством состояний справедливо следующее утверждение

$$(\text{эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неприводимость} \\ \text{возвратность} \\ \text{апериодичность} \end{pmatrix}$$

d. Теорема. Для марковской цепи со счетным множеством состояний справедливо следующее утверждение

$$(\text{эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неприводимость} \\ \text{возвратность} \\ \text{положительность} \end{pmatrix}$$

17) Сформулировать свойства вероятностей перехода марковского процесса с непрерывным временем и дискретным множеством состояний.

a. $0 \le p_{ij}(s,t) \le 1, \quad 0 \le s < t, \quad i,j \in X;$

b. $0 \le p_{ij}(s,t) \le \infty, \quad 0 \le s < t, \quad i,j \in X;$

$\sum_{j \in X} p_{ij}(s,t) = 1, \quad 0 \le s < t, \quad i \in X;$

c. $\sum_{j \in X} p_{ij}(s,t) = 1, \quad 0 \le s < t, \quad i \in X;$
$p_{ij}(s,t) = \sum_{k \in X} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t), \; 0 \le s < u < t, \; i,j \in X$

d. $0 \le p_{ij}(s,t) \le 1, \quad 0 \le s < t, \quad i,j \in X;$
$\sum_{j \in X} p_{ij}(s,t) = 1, \quad 0 \le s < t, \quad i \in X;$
$p_{ij}(s,t) = \sum_{k \in X} p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t), \; 0 \le s < u < t, \; i,j \in X$

18) Сформулировать условие регулярности (консервативности) для однородного марковского процесса с дискретным множеством состояний.

a. Процесс $\xi(t)$называется регулярным (консервативным), если для любого фиксированного $i \in X$ выполняется соотношение $\sum_{\substack{j \neq i \\ (j \in X)}} a_{ij} < a_i.$

b. Процесс $\xi(t)$называется регулярным (консервативным), если для любого фиксированного $i \in X$ выполняется соотношение $\sum_{\substack{j \neq i \\ (j \in X)}} a_{ij} > a_i.$

c. Процесс $\xi(t)$называется регулярным (консервативным), если для любого фиксированного $i \in X$ выполняется соотношение $\sum_{\substack{j \neq i \\ (j \in X)}} a_{ij} = a_i.$

d. Процесс $\xi(t)$называется регулярным (консервативным), если для любого фиксированного $i \in X$ выполняется соотношение $\sum_{j \in X} a_{ij} = a_i.$

19) Выписать общее определение для интенсивностей перехода и выхода однородного марковского процесса с дискретным множеством состояний.

a. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta) - \delta_{ij}}{\Delta}, i,j \in X$

b. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta)}{\Delta}, i,j \in X$

c. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta) - \delta_{ij}}{\Delta}, i,j \equiv X$

d. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} P_{ij}(\Delta) - \delta_{ij}\,, i,j \in X$

20) Выписать прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковского процесса.

a. $P'_{ij}(t) = -a_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) a_{kj}, \quad i.j \in X$
b. $P'_{ij}(t) = -a_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) a_{kj}, \quad i.j \in X$
c. $P'_{ij}(t) = -a_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} a_{ik} P_{kj}(t), \quad i.j \in X$
d. $P'_{ij}(t) = -a_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} P_{ik}(t) a_{kj}, \quad i.j \in X$

21) Выписать распределение случайного времени пребывания однородного марковского процесса $\xi(t)$ в фиксированном состоянии $k \in X$.

a. $P(\theta_n < x | \xi_n = k) = 1 - e^{-a_k x}, \quad \theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n), \{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ −момент изменения состояний процесса.
b. $P(\theta_n < x | \xi_n = k) = e^{-a_k x}, \quad \theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n), \quad \{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ −момент изменения состояний процесса.
c. $P(\theta_n < x | \xi_{n+1} = k) = 1 - e^{-a_k x}, \quad \theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n), \{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ −момент изменения состояний процесса.
d. $P(\theta_n < x | \xi_{n+1} = k) = e^{-a_k x}, \ \theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n), \ \{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ −момент изменения состояний процесса.

22) Сформулировать определение процесса гибели и размножения.

a. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ называется процессом гибели и размножения, если выполняются следующие условия:
   - $P_{k,k+1}(\Delta) = \lambda_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \ \ k = 0,1,2, \dots$
   - $P_{k,k-1}(\Delta) = \mu_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \ \ k = 1,2, \dots$
   - $P_{k,k}(\Delta) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \ \ k = 0,1,2, \dots$

b. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ называется процессом гибели и размножения, если выполняются следующие условия:
   - $P_{k,k+1}(\Delta) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \ \ k = 0,1,2, \dots$
   - $P_{k,k-1}(\Delta) = \mu_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \ \ k = 1,2, \dots$
   - $P_{k,k}(\Delta) = \lambda_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \ \ k = 0,1,2, \dots$

c. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ называется процессом гибели и размножения, если выполняются следующие условия:
   - $P_{k,k+1}(\Delta) = \mu_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \ \ k = 1,2, \dots$
   - $P_{k,k-1}(\Delta) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \ \ k = 0,1,2, \dots$
   - $P_{k,k}(\Delta) = \lambda_k \Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \ \ k = 0,1,2, \dots$

d. Однородный марковский процесс $\xi(t)$ называется процессом гибели и размножения, если выполняются следующие условия:

- $P_{k,k+1}(\Delta) = \lambda_{k+1}\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0 \;\; k = 0,1,2, \dots$
- $P_{k,k-1}(\Delta) = \mu_{k-1}\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 1,2, \dots$
- $P_{k,k}(\Delta) = 1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0, \;\; k = 0,1,2, \dots$

23) Выписать формулы для предельных вероятностей процесса гибели и размножения.

e. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_i}, \quad i = 1,2, \dots \mathrm{j}, \qquad Q_0 = 1$$

f. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_i\mu_{i+1}}, \quad i = 1,2, \dots \mathrm{j}, \qquad Q_0 = 1$$

g. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_i}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_i}, \quad i = 1,2, \dots \mathrm{j}, \qquad Q_0 = 1$$

h. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\mu_1\mu_2 \dots \mu_i}{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}, \quad i = 1,2, \dots \mathrm{j}, \qquad Q_0 = 1$$

24) Выписать формулу для распределения вероятностей приращений пуассоновского процесса.

a. $\mathrm{P}(\xi(\mathrm{t}+\tau) - \xi(\mathrm{t}) = \mathrm{k}) = \frac{(\lambda)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}\mathrm{e}^{\lambda}, \;\; \mathrm{k} = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0.$

b. $\mathrm{P}(\xi(\mathrm{t}+\tau) - \xi(\mathrm{t}) = \mathrm{k}) = \frac{(\lambda\mathrm{t})^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{t}}, \;\; \mathrm{k} = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0.$

c. $\mathrm{P}(\xi(\mathrm{t}+\tau) - \xi(\mathrm{t}) = \mathrm{k}) = \frac{(\lambda\mathrm{t})^{(\mathrm{k}+1)}}{(\mathrm{k}+1)!}\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{t}}, \;\; \mathrm{k} = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0.$

d. $\mathrm{P}(\xi(\mathrm{t}+\tau) - \xi(\mathrm{t}) = \mathrm{k}) = \frac{(\lambda\mathrm{t})^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}\mathrm{e}^{-\lambda\mathrm{t}}, \;\; \mathrm{k} = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0.$

25) Сформулировать основное определение процесса восстановления как точечного случайного процесса.

a. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega), \; n = 0,1,2, \dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1,2,\dots$; $\{\xi_k = \xi_k(\omega),\ k = 1,2,\dots\}$-независимые случайные величины, принимающие положительные значения.

b. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega),\ n = 0,1,2,\dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1,2,\dots$; $\{\xi_k = \xi_k(\omega),\ k = 1,2,\dots\}$ - произвольные случайные величины, принимающие положительные значения и имеющие одинаковое распределение при $k \geq 2$.

c. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega),\ n = 0,1,2,\dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1,2,\dots$; $\{\xi_k = \xi_k(\omega),\ k = 1,2,\dots\}$-независимые случайные величины, принимающие любые действительные значения и одинаковое распределение при $k \geq 2$.

d. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega),\ n = 0,1,2,\dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1,2,\dots$; $\{\xi_k = \xi_k(\omega),\ k = 1,2,\dots\}$-независимые случайные величины, принимающие положительные значения и имеющие одинаковое распределение при $k \geq 2$.

26) Выписать интегральное уравнение восстановления для процесса восстановления с запаздыванием, относительно функции восстановления $H_1(t)$.

a. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H_1(t-x)dF_1(x)$

b. $H_1(t) = F(t) + \int_0^t H_1(t-x)dF_1(x)$

c. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H_1(t-x)dF(x)$

d. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H_1(x)dF(x)$

27) Сформулировать элементарную теорему восстановления.

a. Теорема. Предположим, что в процессе восстановления с запаздыванием $E\xi_1 = a_1 > 0$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H_1(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{a_1}$$

b. Теорема. Предположим, что в процессе восстановления с запаздыванием $E\xi_n = a > 0, n \geq 2$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_1(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{1}{a}$$

c. Теорема. Для произвольного процесса восстановления с запаздыванием выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_1(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{1}{a}$$

где $a=E\xi_n, n\geq 2$

d. Теорема. Для произвольного процесса восстановления с запаздыванием выполняются соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_1(t)}{t}=\frac{1}{E\xi_1},\lim_{t\to\infty}\frac{H(t)}{t}=\frac{1}{a},$$

где $a=E\xi_n, n\geq 2$

28) Сформулировать определение непосредственной интегрируемости по Риману.

a. Функция Q(t) непосредственно интегрируема по Риману, если выполняются следующие условия:
   - $\int_0^\infty|Q(t)|dt<\infty$ (абсолютная интегрируемость)
   - $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k\Delta,(k-1)\Delta)=0$, где $\omega(\alpha,\beta)=\sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]}Q(t)-\inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]}Q(t)$

b. Функция Q(t) непосредственно интегрируема по Риману, если выполняются следующие условия:
   - $\int_0^\infty Q(t)dt<\infty$ (абсолютная интегрируемость)
   - $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k\Delta,(k-1)\Delta)=0$, где $\omega(\alpha,\beta)=\sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]}Q(t)-\inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]}Q(t)$

c. Функция Q(t) непосредственно интегрируема по Риману, если выполняются следующие условия:
   - $\int_0^\infty|Q(t)|dt<\infty$ (абсолютная интегрируемость)

d. Функция Q(t) непосредственно интегрируема по Риману, если выполняются следующие условия:
   - $\lim\limits_{\Delta\to 0}\Delta\sum_{k=1}^{\infty}\omega(k\Delta,(k-1)\Delta)=0$, где $\omega(\alpha,\beta)=\sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]}Q(t)-\inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]}Q(t)$

29) Сформулировать узловую теорему восстановления.

a. Теорема. Пусть задан некоторый процесс восстановления с запаздыванием. Пусть $H_1(t)$ − функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, непосредственно интегрируемая по Риману. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x)=\frac{1}{a}\int_0^\infty Q(x)dx, \qquad \text{где } a=M\xi_k, k\geq 2\,.$$

b. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k\geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t)-$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, интегрируемая по Риману на интервале [0; ∞). Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x)=\frac{1}{a}\int_0^\infty Q(x)dx, \qquad \text{где } a=M\xi_k, k\geq 2\,.$$

c. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k\geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t)-$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, непосредственно интегрируемая по Риману. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x)=\frac{1}{a}\int_0^\infty Q(x)dx, \qquad \text{где } a=M\xi_k, k\geq 2\,.$$

d. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k\geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t)-$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, непосредственно интегрируемая по Риману. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x)=\int_0^\infty Q(x)dx$$

30) Дать определение альтернирующего процесса восстановления.

a. Определение. Альтернирующим процессом восстановления называется простой процесс восстановления $t_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n=1,2,\dots,t_0=0$, для которого случайные величины ξ_k, $k=1,2,\dots$ представляются в виде $\xi_k=\xi_k^{(1)}+\xi_k^{(2)}$, где $\xi_k^{(1)},\xi_k^{(2)}$-независимые случайные величины для всех $k=1,2,\dots$, $\{\xi_k^{(1)},\ k=1,2,\dots\}$ −независимые положительные одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение $G^{(1)}(x)=P\left(\xi_k^{(1)}<x\right)$, $k=1,2,..;$

$\{\xi_k^{(2)},\ k=1,2,\dots\}$ −независимые положительные одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение $G^{(2)}(x)=P\left(\xi_k^{(2)}<x\right),\ k=1,2,\dots.$

b. Определение. Альтернирующим процессом восстановления называется простой процесс восстановления $t_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\ \ n=1,2,\dots,t_0=0$, для которого случайные величины $\xi_k,\ k=1,2,\dots$ представляются в виде $\xi_k=\xi_k^{(1)}+\xi_k^{(2)}$, где $\xi_k^{(1)},\xi_k^{(2)}$- произвольные положительные случайные величины.

c. Определение. Альтернирующим процессом восстановления называется простой процесс восстановления $t_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\ \ n=1,2,\dots,t_0=0$, для которого случайные величины $\xi_k,\ k=1,2,\dots$ представляются в виде $\xi_k=\xi_k^{(1)}+\xi_k^{(2)}$, где $\xi_k^{(1)},\xi_k^{(2)}$-произвольные независимые случайные величины для всех $k=1,2,\dots$

d. Определение. Альтернирующим процессом восстановления называется простой процесс восстановления $t_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k,\ \ n=1,2,\dots,t_0=0$, для которого случайные величины $\xi_k,\ k=1,2,\dots$ представляются в виде $\xi_k=\xi_k^{(1)}+\xi_k^{(2)}$, где $\xi_k^{(1)},\xi_k^{(2)}$-независимые случайные величины для всех $k=1,2,\dots$, $\{\xi_k^{(1)},\ k=1,2,\dots\}$ −независимые одинаково распределенные случайные величины, пронимающие произвольные действительные значения и имеющие распределение $G^{(1)}(x)=P\left(\xi_k^{(1)}<x\right),\ k=1,2,..;$

$\{\xi_k^{(2)},\ k=1,2,\dots\}$ −независимые одинаково распределенные случайные величины, пронимающие произвольные действительные значения и имеющие распределение $G^{(2)}(x)=P\left(\xi_k^{(2)}<x\right),\ k=1,2,\dots.$

Вариант

1) Дать описание понятия траектории случайного процесса.
   a. Траекторией случайного процесса $\xi(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \in T$ назывется функция $x_\omega(t) = \xi(\omega, t),\ t \in T,$ определяемая при каждом фиксированном значении $\omega \in \Omega$, заданная на множестве значений временного параметра T и принимающая значения во множестве состояний X.
   b. Траекторией случайного процесса $\xi(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \in T$ назывется функция $x_t(\omega) = \xi(\omega, t),\ \omega \in \Omega,$ определяемая при каждом фиксированном значении $\omega \in \Omega$, заданная на множестве значений Ω и принимающая значения во множестве состояний X.
   c. Траекторией случайного процесса $\xi(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \in T$ назывется функция $x_\omega(t) = \xi(\omega, t),\ t \in T,$ определяемая при некотором фиксированном значении $\omega \in \Omega$, заданная на множестве значений временного параметра T и принимающая значения во множестве состояний X.
   d. Траекторией случайного процесса $\xi(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \in T$ назывется функция $x_\omega(t) = \xi(\omega, t),\ t \in T,$ определяемая при каждом фиксированном значении $\omega \in \Omega$, заданная на множестве значений временного параметра T и принимающая значения во множестве Ω.

2) Сформулировать второе (аксиоматическое) определение случайного процесса.
   a. Определение. Случайным процессом называется произвольное отображение $\xi\colon \Omega \to \mathcal{X}$, где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{X} -$ множество всевозможных функций, заданных на множестве значений параметра времени T и принимающих значения в пространстве состояний X; при этом на множестве $\mathcal{X}$ введена $\sigma -$ алгебра подмножеств $\mathcal{F}$, порожденная цилиндрическими множествами, а пара $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ образует измеримое пространство.
   b. Определение. Случайным процессом называется измеримое отображение $\xi\colon \Omega \to \mathcal{X}$, где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{X} -$ некоторое подмножество множества всевозможных функций, заданных на множестве значений параметра времени T и принимающих

значения в пространстве состояний X; при этом на множестве $\mathcal{X}$ введена $\sigma-$ алгебра подмножеств $\mathcal{F}$, порожденная цилиндрическими множествами, а пара $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ образует измеримое пространство.

c. Определение. Случайным процессом называется измеримое отображение $\xi: \Omega \to \mathcal{X}$, где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{X} -$ множество всевозможных функций, заданных на множестве значений параметра времени T и принимающих значения в пространстве состояний X; при этом на множестве $\mathcal{X}$ введена $\sigma-$ алгебра подмножеств $\mathcal{F}$, порожденная цилиндрическими множествами, а пара $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ образует измеримое пространство.

d. Определение. Случайным процессом называется измеримое отображение $\xi: \Omega \to X$, где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X -$ множество множество состояний процесса; при этом на множестве X введена $\sigma-$ алгебра подмножеств $\mathcal{B}$, а пара $(X, \mathcal{B})$ образует измеримое пространство.

3) Сформулировать свойства вероятностей перехода марковской цепи.

a. 1) $0 < p_{ij}(n,m) \le 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X;$
   2) $p_{ij}(n,m) = \sum_{k \in X} p_{ik}(n,u) p_{kj}(u,m);$

b. 1) $\sum_{j \in X} p_{ij}(n,m) = 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X$

c. 1) $0 \le p_{ij}(n,m) \le 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X;$
   2) $\sum_{j \in X} p_{ij}(n,m) = 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X;$
   3) $p_{ij}(n,m) = \sum_{k \in X} p_{ik}(n,u) p_{kj}(u,m);$

d. 1) $0 < p_{ij}(n,m) < 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X;$
   2) $\sum_{j \in X} p_{ij}(n,m) = 1; \quad 0 \le n < m, \ i,j \in X$

4) Записать представление для совместного распределения вероятностей марковской цепи через вероятности перехода.

a. Теорема. Для произвольной МЦ имеет место следующее соотношение $P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_1 = i_1 | \xi_0 = i_0) P(\xi_2 = i_2 | \xi_1 = i_1) \dots P(\xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1})$

b. Теорема. Для произвольной МЦ имеет место следующее соотношение $P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n | \xi_0 = i_0) = P(\xi_1 = i_1 | \xi_0 = i_0) P(\xi_2 = i_2 | \xi_1 = i_1) \dots P(\xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1})$

c. Теорема. Для произвольной МЦ имеет место следующее соотношение $P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n | \xi_0 = i_0) = P(\ \xi_1 = i_1 | \xi_0 = i_0) P(\ \xi_2 = i_2 | \xi_0 = i_0) \dots P(\ \xi_n = i_n | \xi_0 = i_0)$

d. Теорема. Для произвольной МЦ имеет место следующее соотношение $P(\xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n | \xi_0 = i_0) = P(\ \xi_n = i_n | \xi_0 = i_0) P(\ \xi_n = i_n | \xi_1 = i_1) \dots P(\ \xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1})$

5) Записать матричную форму для вероятностей перехода за k шагов однородной марковской цепи.

a. $\mathbb{P}(n, n+k) = \mathbb{P}^{k+1},\ \ k \geq 1$

b. $\mathbb{P}(n, n+k) = \mathbb{P}^{k-1},\ \ k \geq 1$

c. $\mathbb{P}(n, n+k) = \mathbb{P}^{k},\ \ k \geq 1$

d. $\mathbb{P}(n, n+k) = k \cdot \mathbb{P},\ \ k \geq 1$

6) Сформулировать определение свойства существенности.

a. Состояние $i \in X$ называется существенным, если найдётся такое состояние $j \neq i$, что существует путь из i в j ($i \to j$), но не существует пути обратно.

b. Состояние $i \in X$ называется существенным, если для любого другого состояния $j \neq i$ существует путь $i \to j$ и при этом существует путь $j \to i$.

c. Состояние $i \in X$ называется существенным, если из него достижимо любое другое состояние: $\forall\ j \neq i\ \exists$ путь $i \to j$.

d. Состояние $i \in X$ называется существенным, если для любого состояния $j \neq i$, достижимого из i , то есть такого, что $i \to j$, существует путь $j \to i$.

7) Сформулировать теорему о числе возвращений марковской цепи в возвратное и невозвратное состояния.

a. Теорема. Если исходное состояние $i \in X$ МЦ является возвратным, то с вероятностью равной единице, цепь конечное число раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то с вероятностью равной единице, МЦ бесконечное число раз возвратится в исходное состояние.

b. Теорема. Если исходное состояние $i \in X$ МЦ является возвратным, то цепь бесконечно много раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то МЦ лишь конечное число раз возвратиться в исходное состояние. В таком случае, начиная с некоторого конечного момента времени, цепь никогда больше не вернется в исходное состояние $i \in X$.

c. Теорема. Если исходное состояние $i \in X$ МЦ является возвратным, то с вероятностью равной единице, цепь бесконечно много раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то с вероятностью, равной единице, МЦ лишь конечное число раз возвратится в исходное состояние. В таком случае, с вероятностью, равной единице, начиная с некоторого конечного момента времени, цепь никогда больше не вернется в исходное состояние $i \in X$.

d. Если исходное состояние i МЦ является возвратным, то с положительной вероятностью цепь бесконечно много раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то с положительной вероятностью МЦ лишь конечное число раз возвратится в исходное состояние. В таком случае, с положительной вероятностью, начиная с некоторого конечного момента времени, цепь никогда больше не возвратится в исходное состояние $i \in X$.

8) Дать формальное определение параметра μ_i для состояния $i \in X$. (среднее время возвращения).

a. Зафиксируем начальное состояние $\xi_0 = i \in X$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \dots$ – моменты возвращения в состояние i. Случайные величины ν_1 и $\nu_n - \nu_{n-1}$, $n = 2,3, \dots$ имеют одинаковое распределение. Тогда $\mu_i = E\nu_1 = E(\nu_n - \nu_{n-1})$ – математическое ожидание длины интервалов между моментами возвращения в состояние i.

b. Зафиксируем начальное состояние $\xi_0 = i \in X$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \dots$ – моменты возвращения в состояние i. Тогда $\mu_i = E\nu_n, n = 1,2, \dots$

c. Зафиксируем начальное состояние $\xi_0 = i \in X$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \dots$ – моменты возвращения в состояние i. Тогда $\mu_i = E\nu_1$

d. Зафиксируем начальное состояние $\xi_0 = i \in X$. Рассмотрим случайные величины $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \dots$ – моменты возвращения в состояние i. Случайные величины ν_1 и $\nu_n - \nu_{n-1}$, $n = 2,3, \dots$

имеют одинаковое распределение. Тогда $\mu_i = E(\nu_n - \nu_1)$, $n = 2,3,\dots$

9) Дать формальное определение понятия периода состояния.

a. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i.
b. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n > 1 -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i.
c. Зафиксируем состояние $i \in X$. Обозначим через $n_1, n_2, \dots$ возможные целые положительные числа, такие, что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots$ (длины циклов). Пусть $d(i) = \text{Н.О.Д.}\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i.
d. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_r, r < \infty -$ некоторый заданный набор целых положительных чисел, таких что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots, r$. Обозначим через $d(i) = \text{Н.О.Д.}\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i.

10) Сформулировать определение свойства периодичности.

a. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i. Если $d(i) = 1$, то состояние i называется непериодическим, если $d(i) > 1$, то состояние i называется периодическим.
b. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n > 1 -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i. При выполнении заданного условия состояние i называется периодическим.
c. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_r, r < \infty -$ некоторый заданный набор целых положительных чисел, таких что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots, r$. Обозначим через $d(i) = \text{Н.О.Д.}\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i. Если $d(i) = 1$, то состояние

i называется непериодическим, если $d(i) > 1$, то состояние i называется периодическим.

d. Зафиксируем состояние $i \in X$. Обозначим через $n_1, n_2, \dots$ возможные целые положительные числа, такие, что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots$ (длины циклов). Пусть $d(i) = \text{Н.О.Д.}\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i. Если $d(i) = 1$, то состояние i называется непериодическим, если $d(i) > 1$, то состояние i называется периодическим.

11) Сформулировать определение предельного распределения МЦ.

a. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, не зависящие от начального состояния $i \in X$. Тогда вектор $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ образует предельное распределение.

b. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, не зависящие от начального состояния $i \in X$ и обладающие следующим свойством

$$\sum_{j\in X} \pi_j < 1$$

Тогда вектор $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ образует предельное распределение.

c. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_{ij}$, обладающие следующим свойством: для любого $i \in X$

$$\sum_{j\in X} \pi_{ij} \le 1$$

Тогда каждый вектор $\pi_i = (\pi_{ij},\ j \in X)$ образует предельное распределение.

d. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, не зависящие от начального состояния $i \in X$ и обладающие следующим свойством

$$\sum_{j\in X} \pi_j = 1$$

Тогда вектор $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ образует предельное распределение.

12) Сформулировать определение свойства стационарности МЦ.

a. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняются следующие условия:
   - Распределение вероятностей состояний цепи $P_i^{(n)} = P(\xi_n = i), i \in X$ не зависит от $n; n = 0,1,2, \ldots$
   - Совместное распределение вероятностей $P(\xi_n = i_0, \xi_{n+1} = i_1, \ldots, \xi_{n+r} = i_r)$ при любых значениях $i_0, i_1, \ldots, i_r \in X, r \geq 1$, не зависит от $n; n = 0,1,2, \ldots$

b. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняется следующее условие:
   - $P_i^n = P(\xi_n = i), i \in$ X не зависит от $n; n = 0,1,2, \ldots$

c. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняется следующее условие:
   - $P(\xi_{n+1} = i_1, \xi_{n+2} = i_2, \ldots, \xi_{n+r} = i_r)$ при любых значениях $i_1, i_2, \ldots, i_r \in X, r \geq 2$, не зависит от $n; n = 0,1,2, \ldots$

d. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если у этой цепи существует единственное стационарное распределение.

13) Записать формулу для предельного значения вероятности перехода $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a + nd)$ в случае, когда $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ –циклические подклассы возвратного периодического класса С, имеющего период d.

a. Если $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ –циклические подклассы возвратного периодического класса С, имеющего период d, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a + nd) = \frac{1}{\mu_j}$

b. Если $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ –циклические подклассы возвратного периодического класса С, имеющего период d, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a + nd) = \frac{1}{d\mu_j}$

c. Если когда $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ –циклические подклассы возвратного периодического класса С, имеющего период d, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a + nd) = \frac{d}{\mu_j}$

d. Если когда $i \in C^{(r)}, j \in C^{(r+a)}$, где $C^{(r)}, C^{(r+a)}$ –циклические подклассы возвратного периодического класса C, имеющего период d, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(a+nd)$=0

14) Сформулировать общее утверждение о связи свойств существования предельного и стационарного распределений марковской цепи.

a. Если у марковской цепи существует единственное стационарное распределение, то оно образует и предельное распределение.
b. Предельное распределение марковской цепи существует тогда и только тогда, когда существует единственное стационарное распределение.
c. Между свойствами существования предельного и единственного стационарного распределений, вообще говоря, не имеется определенной связи.
d. Если у МЦ существует предельное распределение, то оно же является единственным стационарным.

15) Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях существования предельного распределения марковской цепи с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний.

a. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный класс состояний;
b. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный класс состояний;
c. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный непериодический класс C, причем $\forall i \in X\ \exists j \in C$, такое, что $v_{ij} = 1$.

d. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный класс состояний, достижимый из любого начального состояния.

16) Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях существования эргодического распределения (эргодичности) марковской цепи со счетным множеством состояний.

a. Теорема. Для марковской цепи со счетным множеством состояний справедливо следующее утверждение

$$(\text{эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неприводимость} \\ \text{возвратность} \\ \text{положительность} \\ \text{апериодичность} \end{pmatrix}$$

b. Теорема. Для марковской цепи со счетным множеством состояний справедливо следующее утверждение

$$(\text{эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неприводимость} \\ \text{апериодичность} \end{pmatrix}$$

c. Теорема. Для марковской цепи со счетным множеством состояний справедливо следующее утверждение

$$(\text{эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неприводимость} \\ \text{возвратность} \\ \text{апериодичность} \end{pmatrix}$$

d. Теорема. Для марковской цепи со счетным множеством состояний справедливо следующее утверждение

$$(\text{эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{неприводимость} \\ \text{возвратность} \\ \text{положительность} \end{pmatrix}$$

17) Сформулировать классическое определение марковского свойства для случайного процесса $\xi(t)$ с непрерывным временем $T = [0; \infty)$ и дискретным множеством состояний $X = \{0,1,2, \dots\}$.

a. Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любого момента времени $t > 0$ и произвольных $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < t < t + \tau$; $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n, i, j \in X, n \ge 1$ выполняется соотношение

$P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_n) = i_n, \xi(t) = i) = P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t) = i)$.

b. Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для некоторого фиксированного момента времени $t > 0$ и произвольных наборов значений $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t < t + \tau$; $i_1, i_2, \dots, i_n, i, j \in X, n \ge 1$ выполняется соотношение
$P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_n) = i_n, \xi(t) = i) = P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t) = i)$.

c. Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любого момента времени $t > 0$ произвольного $n \ge 1$, некоторого заданного набора моментов времени $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t < t + \tau$ и произвольных наборов значений $i_1, i_2, \dots, i_n, i, j \in X$ выполняется соотношение
$P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_n) = i_n, \xi(t) = i) = P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t) = i)$.

d. Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если для любого момента времени $t > 0$ произвольных наборов моментов времени $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t < t + \tau$ и некоторого заданного набора значений $i_1, i_2, \dots, i_n, i, j \in X, n \ge 1$ выполняется соотношение
$P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t_1) = i_1, \dots, \xi(t_n) = i_n, \xi(t) = i) = P(\xi(t+\tau) = j | \xi(t) = i)$.

18) Сформулировать условие «непрерывности в нуле» для однородного марковского процесса с дискретным множеством состояний.

a. $\lim\limits_{\Delta \to 0} P_{ij}(\Delta) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j \ne i \\ 0, & j = i \end{cases}$

b. $\lim\limits_{\Delta \to 0} P_{ij}(\Delta) = 0, \forall i, j \in X$

c. $\lim\limits_{\Delta \to 0} P_{ij}(\Delta) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \ne i \end{cases}$

d. $\lim\limits_{\Delta \to \infty} P_{ij}(\Delta) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \ne i \end{cases}$

19) Выписать обратную систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковского процесса.

a. $P'_{ij}(t) = -a_i P_{ij}(t) + \sum_{k \ne i} a_{ik} P_{kj}(t), \quad i.j \in X$

b. $P'_{ij}(t) = -a_j P_{ij}(t) + \sum_{k \ne i} a_{ik} P_{kj}(t), \quad i.j \in X$

c. $P'_{ij}(t) = -a_i P_{ij}(t) + \sum_{k \ne i} P_{ik}(t) a_{kj}, \quad i.j \in X$

d. $P'_{ij}(t) = -a_i P_{ij}(t) + \sum_{k \ne j} a_{ik} P_{kj}(t), \quad i.j \in X$

20) Выписать распределение случайного времени пребывания однородного марковского процесса $\xi(t)$ в фиксированном состоянии $k \in X$.

a. $P\left(\theta_n < x \middle| \xi_n = k\right) = 1 - e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ —момент изменения состояний процесса.

b. $P\left(\theta_n < x \middle| \xi_n = k\right) = e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ —момент изменения состояний процесса.

c. $P\left(\theta_n < x \middle| \xi_{n+1} = k\right) = 1 - e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ —момент изменения состояний процесса.

d. $P\left(\theta_n < x \middle| \xi_{n+1} = k\right) = e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ —момент изменения состояний процесса.

21) Выписать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний процесса гибели и размножения.

a. $\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \;\; k = 0 \\ p'_k(t) = (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) - \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \;\; k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} p'_0(t) = \lambda_0 p_0(t) - \mu_1 p_1(t), \;\; k = 0 \\ p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \;\; k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \;\; k = 0 \\ p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \;\; k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \;\; k = 0 \\ p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k+1} p_{k+1}(t) + \mu_{k-1} p_{k-1}(t), \;\; k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

22) Выписать формулы для предельных вероятностей процесса гибели и размножения.

e. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}, \;\; i = 1,2, \dots \text{j}, \qquad Q_0 = 1$$

f. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i \mu_{i+1}}, \;\; i = 1,2, \dots \text{j}, \qquad Q_0 = 1$$

g. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}, \;\; i = 1,2, \dots \text{j}, \qquad Q_0 = 1$$

h. $P_k = \frac{Q_k}{\sum_{i=0}^{\infty} Q_i}, k = 0,1,2 \dots j$

$$Q_i = \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}, \quad i = 1,2, \dots j, \qquad Q_0 = 1$$

23) Выписать формулу для вероятностей перехода пуассоновского процесса.

a. $P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} \text{ при } j = i, i+1, \dots \\ 0, \text{при } j < i \end{cases}$

b. $P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j+i}}{(j+i)!} e^{-\lambda t} \text{ при } j = i, i+1, \dots \\ 0, \text{при } j < i \end{cases}$

c. $P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t} \text{ при } j = i, i+1, \dots \\ 0, \text{при } j < i \end{cases}$

d. $P_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{i}}{i!} e^{-\lambda t} \text{ при } j = i, i+1, \dots \\ 0, \text{при } j < i \end{cases}$

24) Выписать формулу для распределения вероятностей приращений пуассоновского процесса.

a. $\mathrm{P}(\xi(\mathrm{t}+\tau) - \xi(\mathrm{t}) = \mathrm{k}) = \frac{(\lambda)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \mathrm{e}^{\lambda}, \ \mathrm{k} = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0.$

b. $\mathrm{P}(\xi(\mathrm{t}+\tau) - \xi(\mathrm{t}) = \mathrm{k}) = \frac{(\lambda \mathrm{t})^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}}, \ \mathrm{k} = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0.$

c. $\mathrm{P}(\xi(\mathrm{t}+\tau) - \xi(\mathrm{t}) = \mathrm{k}) = \frac{(\lambda \mathrm{t})^{(\mathrm{k}+1)}}{(\mathrm{k}+1)!} \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}}, \ \mathrm{k} = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0.$

d. $\mathrm{P}(\xi(\mathrm{t}+\tau) - \xi(\mathrm{t}) = \mathrm{k}) = \frac{(\lambda \mathrm{t})^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{t}}, \ \mathrm{k} = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0.$

25) Сформулировать основное определение процесса восстановления как точечного случайного процесса.

a. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega), \ n = 0,1,2, \dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \ n = 1,2, \dots; \{\xi_k = \xi_k(\omega), \ k = 1,2, \dots\}$-независимые случайные величины, принимающие положительные значения.

b. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega), \ n = 0,1,2, \dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \ n = 1,2, \dots; \{\xi_k = \xi_k(\omega), \ k = 1,2, \dots\}$ - произвольные случайные величины, принимающие положительные значения и имеющие одинаковое распределение при $k \geq 2$.

c. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega),\ n = 0,1,2,\dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,\ \ n = 1,2,\dots;\ \{\xi_k = \xi_k(\omega),\ \ k = 1,2,\dots\}$-независимые случайные величины, принимающие любые действительные значения и одинаковое распределение при $k \geq 2$.

d. Процессом восстановления называется последовательность случайных величин $\{t_n = t_n(\omega),\ n = 0,1,2,\dots, t_0\}$ (случайных точек на оси времени), где $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,\ \ n = 1,2,\dots;\ \{\xi_k = \xi_k(\omega),\ \ k = 1,2,\dots\}$-независимые случайные величины, принимающие положительные значения и имеющие одинаковое распределение при $k \geq 2$.

26) Выписать интегральное уравнение восстановления для процесса восстановления с запаздыванием, которое связывает функции восстановления $H(t)$ и $H_1(t)$.

a. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H(t-x)dF_1(x)$

b. $H_1(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x)dF_1(x)$

c. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H(t-x)dF(x)$

d. $H(t) = F_1(t) + \int_0^t H_1(t-x)dF_1(x)$

27) Сформулировать простейший вариант достаточных условий, обеспечивающих непосредственную интегрируемость по Риману.

a. Лемма. Пусть функция Q(t) является монотонной ограниченной по абсолютной величине и интегрируемой на интервале [0,∞], то есть $\int_0^\infty Q(t)dt < \infty$. Тогда она непосредственно интегрируема по Риману.

b. Лемма. Пусть функция Q(t) является ограниченной по абсолютной величине и интегрируемой на интервале [0,∞], то есть $\int_0^\infty Q(t)dt < \infty$. Тогда она непосредственно интегрируема по Риману.

c. Лемма. Пусть функция Q(t) является монотонной и интегрируемой на интервале [0,∞], то есть $\int_0^\infty Q(t)dt < \infty$. Тогда она непосредственно интегрируема по Риману.

d. Лемма. Пусть функция Q(t) является монотонной ограниченной по абсолютной величине. Тогда она непосредственно интегрируема по Риману.

28) Сформулировать узловую теорему восстановления.

a. Теорема. Пусть задан некоторый процесс восстановления с запаздыванием. Пусть $H_1(t) -$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, непосредственно интегрируемая по Риману. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x) = \frac{1}{a}\int_0^\infty Q(x)dx, \qquad \text{где } a = M\xi_k, k \geq 2 \,.$$

b. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k \geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t) -$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, интегрируемая по Риману на интервале $[0;\ \infty)$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x) = \frac{1}{a}\int_0^\infty Q(x)dx, \qquad \text{где } a = M\xi_k, k \geq 2 \,.$$

c. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k \geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t) -$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, непосредственно интегрируемая по Риману. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x) = \frac{1}{a}\int_0^\infty Q(x)dx, \qquad \text{где } a = M\xi_k, k \geq 2 \,.$$

d. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k \geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t) -$ функция восстановления этого процесса, Q(t)-некоторая функция, непосредственно интегрируемая по Риману. Тогда

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-x)dH_1(x) = \int_0^\infty Q(x)dx$$

29) Дать формальное определение обратного времени возвращения в процессе восстановления.

a. Для произвольного фиксированного значения $t > 0$ обратным временем возвращения называется случайная величина

$$\xi_t^{(0)} = t - t_{\nu(t)}, \text{ где } \nu(t) - \text{считающий процесс.}$$

b. Для произвольного фиксированного значения $t > 0$ обратным временем возвращения называется случайная величина

$$\xi_t^{(0)} = t - t_{\nu(t)+1}, \text{ где } \nu(t) - \text{считающий процесс.}$$

c. Для произвольного фиксированного значения $t > 0$ обратным временем возвращения называется случайная величина

$$\xi_t^{(0)} = t - t_{\nu(t)-1}, \text{ где } \nu(t) - \text{считающий процесс.}$$

d. Для произвольного фиксированного значения $t > 0$ обратным временем возвращения называется случайная величина

$$\xi_t^{(0)} = t_{\nu(t)} - t, \text{ где } \nu(t) - \text{считающий процесс.}$$

30) Выписать выражение для предельного распределения обратного времени возвращения в процессе восстановления.

a. $F^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to 0} F_t^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to 0} P\left(\xi_t^{(0)} < x\right) = \frac{1}{a}\int_x^{\infty}[1 - F(z)]dz$

b. $F^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to 0} F_t^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to 0} P\left(\xi_t^{(0)} < x\right) = \frac{1}{a}\int_a^{a+x}[1 - F(z)]dz$

c. $F^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to \infty} F_t^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to \infty} P\left(\xi_t^{(0)} < x\right) = \frac{1}{a}\int_0^{x}[1 - F(z)]dz$

d. $F^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to \infty} F_t^{(0)}(x) = \lim\limits_{t\to \infty} P\left(\xi_t^{(0)} < x\right) = \int_0^{x}[1 - F(z)]dz$

Вариант

1) Сформулировать формальное описание случайного процесса как математического объекта.
    a. Случайный процесс представляет собой функцию двух переменных $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$ – множество произвольной природы, $t \in T -$ множество значений некоторого параметра, интерпретируемого как время. Функция $\xi(\omega, t)$ принимает значения в некотором множестве X, которое называется множеством состояний процесса.
    b. Случайный процесс представляет собой функцию двух переменных $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$ – множество элементарных исходов некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $t \in T -$ некоторое конечное множество, интерпретируемого как время. Функция $\xi(\omega, t)$ принимает значения в некотором множестве X, которое называется множеством состояний процесса.
    c. Случайный процесс представляет собой функцию двух переменных $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega_t$ – множество элементарных исходов некоторого вероятностного пространства $(\Omega_\mathrm{t}, \mathcal{A}_t, P_t)$, $t \in T -$ множество значений некоторого параметра, интерпретируемого как время. Функция $\xi(\omega, t)$ принимает значения в некотором множестве X, которое называется множеством состояний процесса.
    d. Случайный процесс представляет собой функцию двух переменных $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$ – множество элементарных исходов некоторого вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $t \in T -$ множество значений некоторого параметра, интерпретируемого как время. Функция $\xi(\omega, t)$ принимает значения в некотором множестве X, которое называется множеством состояний процесса.

2) Сформулировать второе (аксиоматическое) определение случайного процесса.
    a. Определение. Случайным процессом называется произвольное отображение $\xi: \Omega \to \mathcal{X}$, где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{X} -$ множество всевозможных функций, заданных на множестве значений параметра времени T и принимающих значения в пространстве

состояний X; при этом на множестве $\mathcal{X}$ введена $\sigma -$ алгебра подмножеств $\mathcal{F},$ порожденная цилиндрическими множествами, а пара $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ образует измеримое пространство.

b. Определение. Случайным процессом называется измеримое отображение $\xi: \Omega \to \mathcal{X},$ где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{X} -$ некоторое подмножество множества всевозможных функций, заданных на множестве значений параметра времени T и принимающих значения в пространстве состояний X; при этом на множестве $\mathcal{X}$ введена $\sigma -$ алгебра подмножеств $\mathcal{F},$ порожденная цилиндрическими множествами, а пара $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ образует измеримое пространство.

c. Определение. Случайным процессом называется измеримое отображение $\xi: \Omega \to \mathcal{X},$ где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{X} -$ множество всевозможных функций, заданных на множестве значений параметра времени T и принимающих значения в пространстве состояний X; при этом на множестве $\mathcal{X}$ введена $\sigma -$ алгебра подмножеств $\mathcal{F},$ порожденная цилиндрическими множествами, а пара $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ образует измеримое пространство.

d. Определение. Случайным процессом называется измеримое отображение $\xi: \Omega \to X,$ где $\Omega -$ множество элементарных исходов вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $X -$ множество множество состояний процесса; при этом на множестве X введена $\sigma -$ алгебра подмножеств $\mathcal{B}$, а пара $(X, \mathcal{B})$ образует измеримое пространство.

3) Сформулировать классическое определение марковской цепи (МЦ).

a. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\} -$ называется цепью Маркова, если $\forall$ момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1} = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i_n)$ для некоторого заданного набора состояний $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n,\ j \in X$.

b. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\} -$ называется цепью Маркова, если $\forall$ момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1} = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i_n)$ при всех $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n,\ j \in X$.

c. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ – называется цепью Маркова, если для некоторого заданного момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1} = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i_n)$ при всех $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n,\ j \in X$.

d. Определение. Случайная последовательность $\{\xi_n\}$ – называется цепью Маркова, если $\forall$ момента времени n выполняется условие $P(\xi_{n+1} = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i_n) = P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i_n)$ при всех $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n \in X$, и некоторого заданного состояния $j \in X$.

4) Сформулировать свойства вероятностей перехода марковской цепи.

a. 1) $0 < p_{ij}(n,m) \le 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X;$
   2) $p_{ij}(n,m) = \sum_{k \in X} p_{ik}(n,u) p_{kj}(u,m);$

b. 1) $\sum_{j \in X} p_{ij}(n,m) = 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X$

c. 1) $0 \le p_{ij}(n,m) \le 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X;$
   2) $\sum_{j \in X} p_{ij}(n,m) = 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X;$
   3) $p_{ij}(n,m) = \sum_{k \in X} p_{ik}(n,u) p_{kj}(u,m);$

d. 1) $0 < p_{ij}(n,m) < 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X;$
   2) $\sum_{j \in X} p_{ij}(n,m) = 1;\quad 0 \le n < m,\ i,j \in X$

5) Сформулировать определение однородной марковской цепи.

a. МЦ называется однородной, если для любых состояний $i,j \in X$ выполняются условия $p_{ij}(n,m) = p_{ij}(n-m)$, m> $n \ge 0$

b. МЦ называется однородной, если для любых состояний $i,j \in X$ выполняются условия $p_{ij}(n,m) = p_{ij}(m-n)$, m> $n \ge 0$ или $p_{ij}(n,n+k) = p_{ij}(k),\ k \ge 1$, тогда $p_{ij}(n,n+1) = p_{ij},\ n = 0,1,2,\dots$

c. МЦ называется однородной, если для любых состояний $i,j \in X$ выполняются условия $p_{ij}(n,m) = p_{ij}(m-n+1)$ или $p_{ij}(n,n+k) = p_{ij}(k+1)$

d. МЦ называется однородной, если для некоторой заданной пары состояний $i,j \in X$ выполняются условия $p_{ij}(n,m) = p_{ij}(m-n)$, m> $n \ge 0$ или $p_{ij}(n,n+k) = p_{ij}(k),\ k \ge 1$, тогда $p_{ij}(n,n+1) = p_{ij},\ n = 0,1,2,\dots$

6) Записать матричную форму для вероятностей перехода за k шагов однородной марковской цепи.

a. $\mathbb{P}(n, n+k) = \mathbb{P}^{k+1}, \ \ k \geq 1$

b. $\mathbb{P}(n, n+k) = \mathbb{P}^{k-1}, \ \ k \geq 1$

c. $\mathbb{P}(n, n+k) = \mathbb{P}^{k}, \ \ k \geq 1$

d. $\mathbb{P}(n, n+k) = k \cdot \mathbb{P}, \ \ k \geq 1$

7) Дать формальное определение параметра $\boldsymbol{v_i}$ − вероятности возвращения в состояние $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{X}$. Пусть $B_n = (\xi_1 \neq i, \xi_2 \neq i, \dots, \xi_{n-1} \neq i, \xi_n = i), n = 1,2, \dots$

a. $v_i = P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$

b. $v_i = \sum_{n=1}^{\infty} P(\xi_n = i \,|\xi_0 = i)$

c. $v_i = P(B|\xi_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n|\xi_0 = i)$

d. $v_i = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n|\xi_0 = i)$

8) Сформулировать теорему о числе возвращений марковской цепи в возвратное и невозвратное состояния.

a. Теорема. Если исходное состояние $i \in X$ МЦ является возвратным, то с вероятностью равной единице, цепь конечное число раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то с вероятностью равной единице, МЦ бесконечное число раз возвратится в исходное состояние.

b. Теорема. Если исходное состояние $i \in X$ МЦ является возвратным, то цепь бесконечно много раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то МЦ лишь конечное число раз возвратиться в исходное состояние. В таком случае, начиная с некоторого конечного момента времени, цепь никогда больше не вернется в исходное состояние $i \in X$.

c. Теорема. Если исходное состояние $i \in X$ МЦ является возвратным, то с вероятностью равной единице, цепь бесконечно много раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то с вероятностью, равной единице, МЦ лишь конечное число раз возвратится в исходное состояние. В таком случае, с вероятностью, равной единице, начиная с некоторого конечного момента времени, цепь никогда больше не вернется в исходное состояние $i \in X$.

d. Если исходное состояние i МЦ является возвратным, то с положительной вероятностью цепь бесконечно много раз возвратится в это состояние. Если исходное состояние i является невозвратным, то с положительной вероятностью МЦ лишь конечное число раз возвратится в исходное состояние. В таком случае, с положительной вероятностью, начиная с некоторого конечного момента времени, цепь никогда больше не возвратится в исходное состояние $i \in X$.

9) Сформулировать определение свойства положительности.

a. Если $\mu_i > 0$, то состояние i называется положительным.
b. Если $\mu_i < \infty$, то состояние i называется положительным.
c. Если $\mu_i \geq 1$, то состояние i называется положительным.
d. Если $\mu_i = \infty$, то состояние i называется положительным.

10) Сформулировать определение свойства периодичности.

a. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i. Если $d(i) = 1$, то состояние i называется непериодическим, если $d(i) > 1$, то состояние i называется периодическим.
b. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n > 1 -$ произвольное целое положительное число, такое что $p_{ii}(n) > 0$. Тогда это число обозначается $n = d(i)$ и называется периодом состояния i. При выполнении заданного условия состояние i называется периодическим.
c. Зафиксируем состояние $i \in X$. Пусть $n_1, n_2, \dots, n_r, r < \infty -$ некоторый заданный набор целых положительных чисел, таких что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots, r$. Обозначим через $d(i) = \text{Н.О.Д.}\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i. Если $d(i) = 1$, то состояние i называется непериодическим, если $d(i) > 1$, то состояние i называется периодическим.
d. Зафиксируем состояние $i \in X$. Обозначим через $n_1, n_2, \dots$ возможные целые положительные числа, такие, что $p_{ii}(n_k) > 0, k = 1,2, \dots$ (длины циклов). Пусть $d(i) =$

$\text{Н. О. Д.}\{n_k, k = 1,2, \dots\}$, если $d(i) > 1$, то $d(i)$ называется периодом состояния i. Если $d(i) = 1$, то состояние i называется непериодическим, если $d(i) > 1$, то состояние i называется периодическим.

11) Сформулировать определение предельного распределения МЦ.

a. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, не зависящие от начального состояния $i \in X$. Тогда вектор $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ образует предельное распределение.

b. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, не зависящие от начального состояния $i \in X$ и обладающие следующим свойством

$$\sum_{j\in X} \pi_j < 1$$

Тогда вектор $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ образует предельное распределение.

c. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_{ij}$, обладающие следующим свойством: для любого $i \in X$

$$\sum_{j\in X} \pi_{ij} \leq 1$$

Тогда каждый вектор $\pi_i = (\pi_{ij},\ j \in X)$ образует предельное распределение.

d. Определение. Пусть для МЦ $\{\xi_n\}\exists$ пределы вероятностей перехода $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n) = \pi_j$, не зависящие от начального состояния $i \in X$ и обладающие следующим свойством

$$\sum_{j\in X} \pi_j = 1$$

Тогда вектор $\pi = (\pi_j,\ j \in X)$ образует предельное распределение.

12) Сформулировать определение свойства стационарности МЦ.

a. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняются следующие условия:

- Распределение вероятностей состояний цепи $P_i^{(n)} = P(\xi_n = i), i \in X$ не зависит от $n; n = 0,1,2,\dots$
- Совместное распределение вероятностей $P(\xi_n = i_0, \xi_{n+1} = i_1, \dots, \xi_{n+r} = i_r)$ при любых значениях $i_0, i_1, \dots, i_r \in X, r \geq 1$, не зависит от $n; n = 0,1,2,\dots$

b. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняется следующее условие:
- $P_i^n = P(\xi_n = i), i \in \mathrm{X}$ не зависит от $n; n = 0,1,2,\dots$

c. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если выполняется следующее условие:
- $P(\xi_{n+1} = i_1, \xi_{n+2} = i_2, \dots, \xi_{n+r} = i_r)$ при любых значениях $i_1, i_2, \dots, i_r \in X, r \geq 2$, не зависит от $n; n = 0,1,2,\dots$

d. Определение. Марковская цепь $\{\xi_n\}$ называется стационарной, если у этой цепи существует единственное стационарное распределение.

13) Записать формулу для предельного значения вероятности перехода $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n)$ в случае, когда состояния $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние.

a. Если $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = v_j$

b. Если $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \mu_j$

c. Если $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \frac{1}{\mu_j}$

d. Если $i, j \in C, C -$ возвратный класс, $j -$ непериодическое состояние, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{ij}(n) = \frac{1}{v_j}$

14) Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях эргодичности конечной марковской цепи.

a. Теорема. Пусть дана МЦ с конечным множеством состояний X. Тогда имеет место следующее утверждение:

$$(\text{Эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Возвратность} \\ \text{По ложительность} \\ \text{Апериодичность} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (\text{Апериодичность})$$

b. Теорема. Пусть дана МЦ с конечным множеством состояний X. Тогда имеет место следующее утверждение:

$$(\text{Эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Неприводимость} \\ \text{Возвратность} \\ \text{Положительность} \\ \text{Апериодичность} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Неприводимость} \\ \text{Апериодичность} \end{pmatrix}$$

c. Теорема. Пусть дана МЦ с конечным множеством состояний X. Тогда имеет место следующее утверждение:

$$(\text{Эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Возвратность} \\ \text{Положительность} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow (\text{Положительность})$$

d. Теорема. Пусть дана МЦ с конечным множеством состояний X. Тогда имеет место следующее утверждение:

$$(\text{Эргодичность}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Возвратность} \\ \text{Положительность} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\text{Возвратность})$$

15) Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях существования предельного распределения марковской цепи с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний.

a. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный класс состояний;

b. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный класс состояний;

c. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный непериодический класс C, причем $\forall i \in X\ \exists j \in C$, такое, что $v_{ij} = 1$.

d. Теорема. Пусть задана цепь Маркова с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний X. Предельное распределение данной марковской цепи существует тогда и только тогда, когда у нее существует единственный возвратный положительный класс состояний, достижимый из любого начального состояния.

16) Сформулировать эргодическую теорему для стоимостного аддитивного функционала, заданного на траекториях марковской цепи.

a. Теорема. Пусть задана марковская цепь $\{\xi_n\}$ с дискретным множеством состояний X, имеющая ровно один класс возвратных положительных состояний. Обозначим через $\mathbb{П} = (\pi_j, j \in X)$ – стационарное распределение данной цепи. Пусть далее, $\{\eta_n\}$ – стоимостный аддитивный функционал, определяемый соотношением

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} c(\xi_k),$$

где $c_i = c(i), i \in X$ – заданные величины доходов в состояниях, причем выполняется условие $\sum_{i\in X}|c_i|\pi_i < \infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\eta_n = \sum_{i\in X} c_i\pi_i.$$

b. Теорема. Пусть задана марковская цепь $\{\xi_n\}$ с дискретным множеством состояний X, обладающая свойствами неприводимости, возвратности и положительности. Обозначим через $\mathbb{П} = (\pi_j, j \in X)$ – предельное распределение данной цепи. Пусть далее, $\{\eta_n\}$ – аддитивный функционал доходов, определяемый соотношением

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} c(\xi_k),$$

где $c_i = c(i), i \in X$ – заданные величины доходов в состояниях, причем выполняется условие $\sum_{i\in X}|c_i|\pi_i < \infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E\eta_n = \sum_{i\in X} c_i\pi_i.$$

c. Теорема. Пусть задана марковская цепь $\{\xi_n\}$ с дискретным множеством состояний X, обладающая свойствами неприводимости, возвратности и положительности. Обозначим через $\mathbb{П} = (\pi_j, j \in X)$ – стационарное распределение данной цепи. Пусть далее, $\{\eta_n\}$ –аддитивный функционал доходов, определяемый соотношением

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} c(\xi_k),$$

где $c_i = c(i), i \in X$ –заданные величины доходов в состояниях, причем выполняется условие $\sum_{i\in X}|c_i|\pi_i < \infty$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E\eta_n = \sum_{i\in X} c_i\pi_i.$$

d. Теорема. Пусть задана марковская цепь $\{\xi_n\}$ с дискретным множеством состояний X, обладающая свойствами неприводимости, возвратности и положительности. Обозначим через $\mathbb{П} = (\pi_j, j \in X)$ – стационарное распределение данной цепи. Пусть далее, $\{\eta_n\}$ –аддитивный функционал доходов, определяемый соотношением

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} c(\xi_k),$$

где $c_i = c(i), i \in X$ –заданные величины доходов в состояниях. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}E\eta_n = \sum_{i\in X} c_i\pi_i.$$

17) Сформулировать общее определение марковского свойства случайного процесса $\xi(t)$ в произвольный фиксированный момент времени $t \in T$.

a. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если $\forall$ момента времени $t \in T$ и произвольных событий $A_t^{(-)}, A_t^{(+)}$ выполняется соотношение:

$$P\left(A_t^{(-)}A_t^{(+)}\middle|\xi(t) = x\right) = P\left(A_t^{(-)}\middle|\xi(t) = x\right)P\left(A_t^{(+)}\middle|\xi(t) = x\right),$$

$$x \in X.$$

b. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если $\forall$ момента времени $t \in T$ и произвольных событий $A_t^{(-)} \in \mathcal{F}_t^{(-)}, A_t^{(+)} \in \mathcal{F}_t^{(+)}$ выполняется соотношение:

$$P\left(A_t^{(-)}A_t^{(+)}\middle|\xi(t) = x\right) = P\left(A_t^{(-)}\middle|\xi(t) = x\right)P\left(A_t^{(+)}\middle|\xi(t) = x\right), \ x \in X,$$

где $\mathcal{F}_t^{(+)} = \sigma\{\xi(s), s > t\}$; $\mathcal{F}_t^{(-)} = \sigma\{\xi(s), s < t\}$.

c. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если $\forall$ момента времени $t \in T$ и произвольных событий $A_t^{(-)} \in \mathcal{F}_t^{(-)}, A_t^{(+)} \in \mathcal{F}_t^{(+)}$ выполняется соотношение:
$P(A_t^{(-)}A_t^{(+)}) = P(A_t^{(-)})P(A_t^{(+)}), \quad x \in X,$ где $\mathcal{F}_t^{(+)} = \sigma\{\xi(s), s > t\}; \quad \mathcal{F}_t^{(-)} = \sigma\{\xi(s), s < t\}$.

d. Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если $\forall$ момента времени $t \in T$ и произвольных событий $A_t^{(-)} \in \mathcal{F}_t^{(-)}, A_t^{(+)} \in \mathcal{F}_t^{(+)}$ выполняется соотношение:
$P\left(A_t^{(-)}A_t^{(+)}\middle|\xi(t) = x\right) = P\left(A_t^{(-)}\middle|\xi(t) = x\right)P\left(A_t^{(+)}\middle|\xi(t) = x\right),$
$x \in X,$ где $\mathcal{F}_t^{(+)} = \sigma\{\xi(s), s > t\}; \quad \mathcal{F}_t^{(-)} = \sigma\{\xi(s), s < t\}$

18) Выписать общее аналитическое определение для инфинитезимальных характеристик однородного марковского процесса с дискретным множеством состояний.

a. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta) - \delta_{ij}}{\Delta}, i, j \in X$
b. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta)}{\Delta}, i, j \in X$
c. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta) + \delta_{ij}}{\Delta}, i, j \in X$
d. $a_{ij} = \lim\limits_{\Delta \to 0} P_{ij}(\Delta), i, j \in X$

19) Выписать прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей марковского процесса.

a. $P'_{ij}(t) = -a_i P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) a_{kj}, \quad i.j \in X$
b. $P'_{ij}(t) = -a_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t) a_{kj}, \quad i.j \in X$
c. $P'_{ij}(t) = -a_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} a_{ik} P_{kj}(t), \quad i.j \in X$
d. $P'_{ij}(t) = -a_j P_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} P_{ik}(t) a_{kj}, \quad i.j \in X$

20) Выписать распределение случайного времени пребывания однородного марковского процесса $\xi(t)$ в фиксированном состоянии $k \in X$.

a. $P\left(\theta_n < x\middle|\xi_n = k\right) = 1 - e^{-a_k x}, \qquad \theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n),$ $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ —момент изменения состояний процесса.
b. $P\left(\theta_n < x\middle|\xi_n = k\right) = e^{-a_k x}, \quad \theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n), \quad \{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ —момент изменения состояний процесса.

c. $P\left(\theta_n < x \middle| \xi_{n+1} = k\right) = 1 - e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ – момент изменения состояний процесса.
d. $P\left(\theta_n < x \middle| \xi_{n+1} = k\right) = e^{-a_k x}$, $\theta_n = t_{n+1} - t_n, \xi_n = \xi(t_n)$, $\{t_n, n = 0, 1, 2 \dots t_0 = 0\}$ – момент изменения состояний процесса.

21) Выписать систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний процесса гибели и размножения.

a. $\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \ k = 0 \\ p'_k(t) = (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) - \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \ k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} p'_0(t) = \lambda_0 p_0(t) - \mu_1 p_1(t), \ k = 0 \\ p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \ k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \ k = 0 \\ p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \ k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \ k = 0 \\ p'_k(t) = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \lambda_{k+1} p_{k+1}(t) + \mu_{k-1} p_{k-1}(t), \ k - \text{произвольное}, k \geq 1 \end{cases}$

22) Сформулировать необходимое и достаточное условие существования предельного распределения для регулярного (в широком смысле) процесса гибели и размножения.

a. Теорема. Пусть $\xi(t)$- процесс гибели и размножения удовлетворяет условию регулярности в широком смысле. Тогда для того, чтобы существовало предельное распределение процесса гибели и размножения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:
$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i = \infty$, где $Q_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}$, $i = 1,2, \dots$ j, $Q_0 = 1$.

b. Теорема. Пусть $\xi(t)$- процесс гибели и размножения удовлетворяет условию регулярности в широком смысле. Тогда для того, чтобы существовало предельное распределение процесса гибели и размножения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:
$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i < \infty$, где $Q_i = \frac{\lambda_1 \dots \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}$, $i = 1,2, \dots$ j, $Q_0 = 1$.

c. Теорема. Пусть $\xi(t)$- процесс гибели и размножения удовлетворяет условию регулярности в широком смысле. Тогда для того, чтобы существовало предельное распределение процесса гибели и размножения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:
$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i < \infty$, где $Q_i = \frac{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}$, $i = 1,2, \dots$ j, $Q_0 = 1$.

d. Теорема. Пусть $\xi(t)$- процесс гибели и размножения удовлетворяет условию регулярности в широком смысле. Тогда для того, чтобы существовало предельное распределение процесса гибели и размножения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:
$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i < \infty$, где $Q_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}$, $i = 1,2,\dots$ j, $Q_0 = 1$.

23) Сфрмулировать определение пуассоновского процесса как случайного процесса с независимыми приращениями.

a. Случайный процесс $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любого набора моментов времени $0 \le \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n$, $n \ge 1$ случайные величины $\xi(\tau_1) - \xi(\tau_0), \xi(\tau_2) - \xi(\tau_1), \dots, \xi(\tau_n) - \xi(\tau_{n-1})$ независимы в совокупности.
Случайный процесс $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$ и дискретным множеством состояний $X = \{0,1,2, \dots\}$ называется пуассоновским, если выполняются следующие свойства:
   - $\xi(t)$ – процесс с независимыми приращениями
   - Распределение приращений имеет вид:

$$P(\xi(\tau + t) - \xi(\tau) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0,1,2, \dots; \quad \tau \ge 0$$

b. Случайный процесс $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любого набора моментов времени $0 \le \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n$, $n \ge 1$ случайные величины $\xi(\tau_1) - \xi(\tau_0), \xi(\tau_2) - \xi(\tau_1), \dots, \xi(\tau_n) - \xi(\tau_{n-1})$ независимы в совокупности.
Случайный процесс $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$ и дискретным множеством состояний $X = \{0,1,2, \dots\}$ называется пуассоновским, если выполняются следующие свойства:
   - $\xi(t)$ – процесс с независимыми приращениями
   - Распределение приращений имеет вид:

$$P(\xi(\tau + t) - \xi(\tau) = k) = \frac{(\lambda k)^{k-1}}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 1,2, \dots; \quad \tau \ge 0$$

c. Случайный процесс $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любого набора моментов времени $0 \le \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n$, $n \ge 1$

случайные величины $\xi(\tau_1) - \xi(\tau_0), \xi(\tau_2) - \xi(\tau_1), \dots, \xi(\tau_n) - \xi(\tau_{n-1})$ независимы в совокупности.

Случайный процесс $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$ и дискретным множеством состояний $X = \{0,1,2, \dots\}$ называется пуассоновским, если выполняются следующие свойства:

- $\xi(t)$ — процесс с независимыми приращениями
- Распределение приращений имеет вид:

$$P(\xi(\tau + t) - \xi(\tau) = k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, \ k = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0$$

d. Случайный процесс $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любого набора моментов времени $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n, \ n \geq 1$ случайные величины $\xi(\tau_1) - \xi(\tau_0), \xi(\tau_2) - \xi(\tau_1), \dots, \xi(\tau_n) - \xi(\tau_{n-1})$ независимы в совокупности.

Случайный процесс $\xi(t), t \in T = [0, \infty)$ и дискретным множеством состояний $X = \{0,1,2, \dots\}$ называется пуассоновским, если выполняются следующие свойства:

- $\xi(t)$ — процесс с независимыми приращениями
- Распределение приращений имеет вид:

$$P(\xi(\tau + t) - \xi(\tau) = k) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t}, \ k = 0,1,2, \dots; \quad \tau \geq 0$$

24) Выписать формулу для вероятностей состояний пуассоновского процесса.

a. $P_k(t) = P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}, k = 1,2, \dots$

b. $P_k(t) = P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0,1,2, \dots$

c. $P_k(t) = P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{\lambda t}, k = 0,1,2, \dots$

d. $P_k(t) = P(\xi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-k\lambda t}, k = 0,1,2, \dots$

25) Сформулировать определение считающего случайного процесса, связанного с заданным процессом восстановления.

a. Считающим процессом называется случайный процесс $\nu(t) = \nu(\omega, t) = \sup\{t_n(\omega): t_n(\omega) \leq t\}$, где $\{t_n = t_n(\omega), \ n = 0,1,2, \dots$ некоторый процесс восстановления.

b. Считающим процессом называется случайный процесс $\nu(t) = \nu(\omega, t) = \sup\{n: t_n(\omega) \le t\}$, где $\{t_n = t_n(\omega),\ \ n = 0,1,2, \dots$ некоторый процесс восстановления.

c. Считающим процессом называется случайный процесс $\nu(t) = \nu(\omega, t) = \sup\{n: t_n(\omega) \le t\} - 1$, где $\{t_n = t_n(\omega),\ \ n = 0,1,2, \dots$ некоторый процесс восстановления.

d. Считающим процессом называется случайный процесс $\nu(t) = \nu(\omega, t) = \sup\{n: t_n(\omega) \le t\} + 1$, где $\{t_n = t_n(\omega),\ \ n = 0,1,2, \dots$ некоторый процесс восстановления.

26) Выписать интегральное уравнение восстановления для процесса восстановления с запаздыванием, относительно функции восстановления $H_1(t)$.

a. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H_1(t-x)dF_1(x)$

b. $H_1(t) = F(t) + \int_0^t H_1(t-x)dF_1(x)$

c. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H_1(t-x)dF(x)$

d. $H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H_1(x)dF(x)$

27) Сформулировать теорему Блекуэлла.

a. Теорема. Пусть задан произвольный процесс восстановления с запаздыванием. Пусть $H_1(t)-$ функция восстановления этого процесса. Тогда для любого $\Delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty}[H_1(t+\Delta) - H_1(t)] = \frac{\Delta}{a}, \qquad \text{где } a = E\xi_k, k \ge 2.$$

b. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k \ge 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t)-$ функция восстановления этого процесса. Тогда для любого $\Delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty}[H_1(t+\Delta) - H_1(t)] = \frac{\Delta}{a}, \qquad \text{где } a = E\xi_k, k \ge 2.$$

c. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k \ge 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t)-$ функция восстановления этого процесса. Тогда для любого $\Delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} H_1(t+\Delta) = \frac{\Delta}{a}, \qquad \text{где } a = E\xi_k, k \ge 2.$$

d. Теорема. Пусть задан процесс восстановления с запаздыванием, у которого распределение случайных величин $\xi_k, k \geq 2$ нерешетчатое. Пусть $H_1(t) -$ функция восстановления этого процесса. Тогда для любого $\Delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty}[H_1(t+\Delta) - H_1(t)] = \frac{\Delta}{a_1}, \qquad \text{где } a_1 = E\xi_1.$$

28) Сформулировать определение непосредственной интегрируемости по Риману.

a. Функция Q(t) непосредственно интегрируема по Риману, если выполняются следующие условия:
   - $\int_0^\infty |Q(t)|dt < \infty$ (абсолютная интегрируемость)
   - $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta \sum_{k=1}^\infty \omega(k\Delta, (k-1)\Delta) = 0$, где $\omega(\alpha,\beta) = \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} Q(t) - \inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]} Q(t)$

b. Функция Q(t) непосредственно интегрируема по Риману, если выполняются следующие условия:
   - $\int_0^\infty Q(t)dt < \infty$ (абсолютная интегрируемость)
   - $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta \sum_{k=1}^\infty \omega(k\Delta, (k-1)\Delta) = 0$, где $\omega(\alpha,\beta) = \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} Q(t) - \inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]} Q(t)$

c. Функция Q(t) непосредственно интегрируема по Риману, если выполняются следующие условия:
   - $\int_0^\infty |Q(t)|dt < \infty$ (абсолютная интегрируемость)

d. Функция Q(t) непосредственно интегрируема по Риману, если выполняются следующие условия:
   - $\lim\limits_{\Delta\to 0} \Delta \sum_{k=1}^\infty \omega(k\Delta, (k-1)\Delta) = 0$, где $\omega(\alpha,\beta) = \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} Q(t) - \inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]} Q(t)$

29) Выписать выражение для предельного распределения прямого времени возвращения в процессе восстановления.

a. $F^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to 0} F_t^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to 0} P\left(\xi_t^{(1)} < y\right) = \frac{1}{a}\int_y^\infty [1-F(z)]dz$

b. $F^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to \infty} F_t^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to \infty} P\left(\xi_t^{(1)} < y\right) = \frac{1}{a}\int_0^y [1-F(z)]dz$

c. $F^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to 0} F_t^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to 0} P\left(\xi_t^{(1)} < y\right) = \frac{1}{a}\int_{\mathrm{a}}^{a+y} [1-F(z)]dz$

d. $F^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to \infty} F_t^{(1)}(y) = \lim\limits_{t\to \infty} P\left(\xi_t^{(1)} < y\right) = \int_0^y [1-F(z)]dz$

30) Выписать формулу для предельной вероятности $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} P(A_t^{(1)})$ события $A_t^{(1)}$, состоящего в том, что для альтернирующего процесса восстановления $t_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,\ n = 1,2,\dots$, для которого $\xi_k = \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}$, $k = 1,2,\dots$, произвольный фиксированный момент времени t накрывается одной из величин $\left\{\xi_k^{(1)},\ k = 1,2,\dots\right\}$ (нечетным интервалом).

a. $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(A_t^{(1)}\right) = \frac{E\xi_k^{(2)}}{E\xi_k^{(1)} - E\xi_k^{(2)}}$.

b. $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(A_t^{(1)}\right) = \frac{E\xi_k^{(1)}}{E\xi_k^{(1)} - E\xi_k^{(2)}}$.

c. $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(A_t^{(1)}\right) = \frac{E\xi_k^{(2)}}{E\xi_k^{(1)} + E\xi_k^{(2)}}$.

d. $K_1 = \lim\limits_{t\to\infty} P\left(A_t^{(1)}\right) = \frac{E\xi_k^{(1)}}{E\xi_k^{(1)} + E\xi_k^{(2)}}$.