

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені Тараса Шевченка
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра програмних систем і технологій

Дисципліна
«Ймовірнісні основи програмної інженерії»

Лабораторна робота № 5
«Дискретні розподіли ймовірностей»

Виконав:	Сирота Ангеліна Олександрівна	Перевірила:	Вечерковська Анастасія Сергіївна
Група	ІПЗ-21	Дата перевірки	
Форма навчання	денна	Оцінка	
Спеціальність	121		
2022			

Мета – навчитись використовувати на практиці набуті знання про центральні тенденції та міри.

Хід роботи

Постановка задачі:

Аналітичним шляхом розв'язати вказані задачі.

1. Ймовірність знаходження в кожному прибулому потязі вагонів на дане призначення 0,2. Визначити ймовірність того, що в трьох із п'яти потягів, які прибувають протягом однієї години, будуть вагони на дане призначення.
2. Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях подія А відбудеться: а) рівно 4 рази; б) не менше 4 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події становить 0,8.
3. На кондитерській фабриці 20% всіх цукерок складають льодяники. Знайти ймовірність того, що серед 400 вибраних навмання цукерок буде рівно 80 льодяників.
4. На автомобільному заводі у звичному режимі роботи з конвеєра сходять 100000 автомобілів. Ймовірність бракованого автомобіля дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів.
5. Ймовірність того, що пара взуття, яка взята навмання з виготовленої партії виявиться вищого ґатунку дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого ґатунку?
6. Банк обслуговує 100 клієнтів, від кожного з яких може надійти вимога на проведення фінансової операції на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня, та його ймовірність.
7. Завод випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170?.
8. Яка ймовірність того, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів?
9. Фірма відправила на базу 1000 якісних виробів. Ймовірність того, що вироби в дорозі пошкодяться дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів.
10. Нехай ймовірність того, що грошовий приймальник автомату при опусканні монети скидає неправильно дорівнює 0,03. Знайти найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинуту 150 монет.

Побудова математичної моделі:

Імовірність: числова характеристика можливості того, що випадкова подія відбудеться в умовах, які можуть бути відтворені необмежену кількість разів.

$$0 \leq P \leq 1 \qquad P = \frac{m}{n}$$

n – загальна кількість подій

m – події, які відповідають умові

Аксиома 1: Імовірність всіх подій у вибірці = 1

$$P[\Omega] = 1$$

Протилежна подія: \bar{A}

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Комбінація: спосіб вибору декількох речей з більшої групи, де (на відміну від розміщення) порядок не має значення.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Формула бернуллі: Якщо ймовірність настання події в кожному з випробувань стала, то ймовірність того, що подія настане разів в незалежних випробуваннях дорівнює:

$$P_n(k) = C_n^k * p^k * q^{n-k}$$

Де n – повна кількість кількості подій, k – певна кількість подій які мають статися, p – шанс виконання даної події 1 раз, q – шанс не виконання даної події.

Локальна теорема Лапласа: імовірність того, що в n незалежних випробуваннях з ймовірністю появи події A рівній p ($0 < p < 1$) подія A наступить рівно k разів (байдуже в якій послідовності) визначається за наближеною формулою:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} * \varphi(x)$$

Де

Функція Гауса: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$

Аргумент функції Гауса: $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа: імовірність, що в n незалежних випробуваннях подія A з імовірністю появи p ($0 < p < 1$) настане не менше k_1 разів і не більше k_2 (незалежно від послідовності появи) наближено визначається залежністю:

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

Де

Інтегральна функція Лапласа: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Аргумент інтегральної функції Лапласа: $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$

Псевдокод алгоритму:

Визначення факторіала:

```
if n = 1 or n = 0:
    return 1
else:
    return n * факторіал(n - 1)
```

Обчислення комбінації:

```
c = факторіал(n) / (факторіал(k) * факторіал(n - k))
return c
```

Обчислення X :

```
q = 1 - p // імовірність події протилежної до даної
x = (m - n * p) / квадратний корінь з (n * p * q)
return x
```

Обчислення значення локальної функції Гауса:

```
f = e^(-x^2 / 2) / квадратний корінь з (2 * pi)
return f
```

Обчислення значення інтегральної функції Гауса:

```
expr = 1 / квадратний корінь з (2 * pi) * інтеграл з (e^(-(x ** 2) / 2))
if X > 5:
    result = 0.5
elif X < -5:
    result = -0.5
else:
    result = обчислити expr, підставивши X
return result
```

Знаходження цілого k на проміжку:

```
i = ціла части Kmin
k = Kmin
while i <= Kmax:
    if i >= Kmin:
        k = i

    i += 1
return k
```

Задача 1:

```
total = 5
selected = 3
p = 0.2

P = Комбінація(5, 3) * p ^ selected * (1 - p) ^ (total - selected))
```

Задача 2:

```
total = 5
selected = 4 # 4 або не менше 4 разів
p = 0.8

P4 = Комбінація(5, 4) * p ^ selected * (1 - p) ^ (total - selected)
P5 = Комбінація(5, 5) * p ^ (selected + 1) * (1 - p) ^ (total - (selected + 1))
P45 = P4 + P5
```

Задача 3-4, 8-9:

```
x = обчислити x використавши функцію
f = обчислити фі використавши функцію і як параметр передавши x

P = f / квадратний корінь з (total * p * (1 - p))
```

Задача 5, 7:

```
Xmin = обчислити x для мінімальної кількості разів виконання події
використавши функцію
Xmax = обчислити x для максимальної кількості разів виконання події
використавши функцію

fiMin = обчислити фі використавши функцію і як параметр передавши Xmin
fiMax = обчислити фі використавши функцію і як параметр передавши Xmax

P = fiMax - fiMin
```

Задача 6:

```
total = 100
p = 0.4

q = 1 - p
```

```

Kmin = total * p - q
Kmax = total * p + p
// шукаємо ціле число у знайденому проміжку
i = ціла части Kmin
k = Kmin
while i <= Kmax:
    if i >= Kmin:
        k = i

    i += 1

x = обчислити x для знайденого k використавши функцію
f = обчислити fі використавши функцію і як параметр передавши x

P = f / квадратний корінь з (total * p * (1 - p))

```

Задача 10:

```

total = 150
p = 0.03

# оскільки дано імовірність неправильної роботи, то імовірність правильної
роботи:
p = 1 - p

q = 1 - p

Kmin = total * p - q
Kmax = total * p + p

k = ціле число з [Kmin, Kmax]

```

Випробування алгоритму:

Завдання 1

Умова:

Ймовірність знаходження в кожному прибулому потязі вагонів на дане призначення 0,2. Визначити ймовірність того, що в трьох із п'яти потягів, які прибувають протягом однієї години, будуть вагони на дане призначення.

Відповідь: 0.051

Завдання 2

Умова:

Знайти ймовірність того, що в п'яти незалежних випробуваннях подія А відбудеться: а) рівно 4 рази; б) не менше 4 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події становить 0,8.

Відповідь:

а) 0.41

б) 0.737

Завдання 3

Умова:

На кондитерській фабриці 20% всіх цукерок складають льодяники. Знайти ймовірність того, що серед 400 вибраних намання цукерок буде рівно 80 льодяників.

Відповідь: 0.05

Завдання 4

Умова:

На автомобільному заводі у звичному режимі роботи з конвеєра сходять 100000 автомобілів. Ймовірність бракованого автомобіля дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів.

Відповідь: 0.036

Завдання 5

Умова:

Ймовірність того, що пара взуття, яка взята намання з виготовленої партії виявиться вищого ґатунку дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого ґатунку?

Відповідь: 0.683

Завдання 6

Умова:

Банк обслуговує 100 клієнтів, від кожного з яких може надійти вимога на проведення фінансової операції на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня, та його ймовірність.

Відповідь: 0.081

Завдання 7

Умова:

Завод випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170?

Відповідь: 0.790

Завдання 8

Умова:

Яка ймовірність того, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів?

Відповідь: 0.008

Завдання 9

Умова:

Фірма відправила на базу 1000 якісних виробів. Ймовірність того, що вироби в дорозі пошкодяться дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів.

Відповідь: 0.03

Завдання 10

Умова:

Нехай ймовірність того, що грошовий приймальник автомату при опусканні монети скидає неправильно дорівнює 0,03. Знайти найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинута 150 монет.

Відповідь: 146

Розв'язання аналітичним шляхом:

$$3) \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Лабораторна робота №5

№1

Сирота
Ангеліна

$P(A) = 0,2$ - ~~потрібно~~ ^{таким} знайти вагон у потязі
всього - 5 вагонів \rightarrow ЗД - P ?

Розв'язання:

Необхідно знайти кого б 1 вагон на потязі:

$$P = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0,008 \cdot 0,64 =$$
$$= \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 0,00512 = 0,00512 = \underline{0,0512}$$

5 незалежних випробувань

$P(A)$ - ?

а) 4 рази

б) чи більше 4 разів, $P(A) = 0,8$

Розв'язання:

$$a) P(A) = C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0,4096 \cdot 0,2 = \underline{0,4096}$$

$$б) P(4) + P(5) = P(A) \cdot C_5^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^0 = 0,4096 + 0,32768 = 0,73728$$
$$= \underline{0,73728 \approx 0,737}$$

Льготники - 20%

Выбрано - 400 → 80 → льготники

Результаты:

$$P = \frac{C_{80}^{400}}{C_{400}^{80}} = 0,2 \cdot 0,8^{320}$$

Формула Муавра - Лапласа

$$P = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

функция Гаусса

$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot (1 - 0,2)}} = 0$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi \cdot 16}} = \frac{1}{\sqrt{128\pi}} = \frac{1}{\sqrt{402,12386}}$$

$$\approx \frac{1}{20,053} \approx \underline{\underline{0,05}}$$

100000 авт.

Трэк - $p = 0,0001$

Р(5 трэк) - ?

Результаты:

$$P = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

$$x = \frac{5 - 100000 \cdot 0,0001}{\sqrt{100000 \cdot 0,0001 \cdot 0,9999}} = \frac{5 - 10}{\sqrt{9,999}} = \frac{-5}{3,162} = -1,58$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1,248}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6,28}} = \frac{0,28708}{2,506} = 0,1146$$

$$P = \frac{0,1146}{\sqrt{100000 \cdot 0,0001 \cdot 0,9999}} = \frac{0,1146}{\sqrt{9,999}} = \frac{0,1146}{3,162} = \underline{\underline{0,0362}}$$

н5

p В.Г. = 0,4

600 нар

виг 228 до 252 ВГ Р-?

Розв'язання:

$$p = \frac{q(x)}{\sqrt{npq}} \quad \varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$$

$$x_{\min} = \frac{228 - 600 \cdot 0,4}{\sqrt{600 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{228 - 240}{\sqrt{6 \cdot 4 \cdot 6}} = \frac{-12}{12} = -1$$

$$x_{\max} = \frac{252 - 600 \cdot 0,4}{\sqrt{600 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{252 - 240}{\sqrt{6 \cdot 4 \cdot 6}} = \frac{12}{12} = 1$$

Інтегральна теорема Муавріа - Лапласа

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad P = \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$$

$$\varphi(x_{\min}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_0^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot (1 - 0,607) =$$

$$= \frac{0,393}{\sqrt{2\pi}} = \frac{0,393}{2,506} = 0,17$$

$$\varphi(x_{\min}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_{\min}}^0 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -0,3413$$

$$\varphi(x_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_{\max}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,3413$$

$$P = 0,3413 - (-0,3413) = 0,6826$$

н6

100 клієнтів

p вимога = 0,4

Найімовірніше число вимог: p - ?

Розв'язання:

Нехай: m_{\min} - мінімальне число вимог

Найімовірніше число: $np - q \leq k_0 \leq np + p$

$$\begin{cases} k \geq np - q \\ k \leq np + p \end{cases} \begin{cases} k \geq 40 - 0,4 \\ k \leq 40 + 0,4 \end{cases} \begin{cases} k \geq 39,6 \\ k \leq 40,4 \end{cases}$$

Единичное значение: $k = 40$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 100 \cdot 0,4}{\sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{0}{\sqrt{24}} = 0$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2,506} = 0,399$$

$$P = \frac{0,399}{\sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = \frac{0,399}{\sqrt{24}} = \frac{0,399}{4,899} = \underline{0,081}$$

27

Дано:

4% из ста изделий бракованные — k
 $k \leq 170 \Rightarrow k_{\min} = 1, k_{\max} = 170$
 4000 штук

Результаты:

$$x_{\min} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1 - 4000 \cdot 0,04}{\sqrt{4000 \cdot 0,04 \cdot 0,96}} = \frac{1 - 160}{\sqrt{153,6}} = \frac{-159}{12,4} = -12,8 = -12$$

$$x_{\max} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{170 - 4000 \cdot 0,04}{\sqrt{4000 \cdot 0,04 \cdot 0,96}} = \frac{170 - 160}{\sqrt{153,6}} = \frac{10}{12,4} = 0,806 = 0,8$$

$$\varphi(x_{\min}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,5$$

$$\varphi(x_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,291$$

$$P = 0,291 + 0,5 = \underline{0,791}$$

28

Дано:

10000 килограмм
 5000 зерно

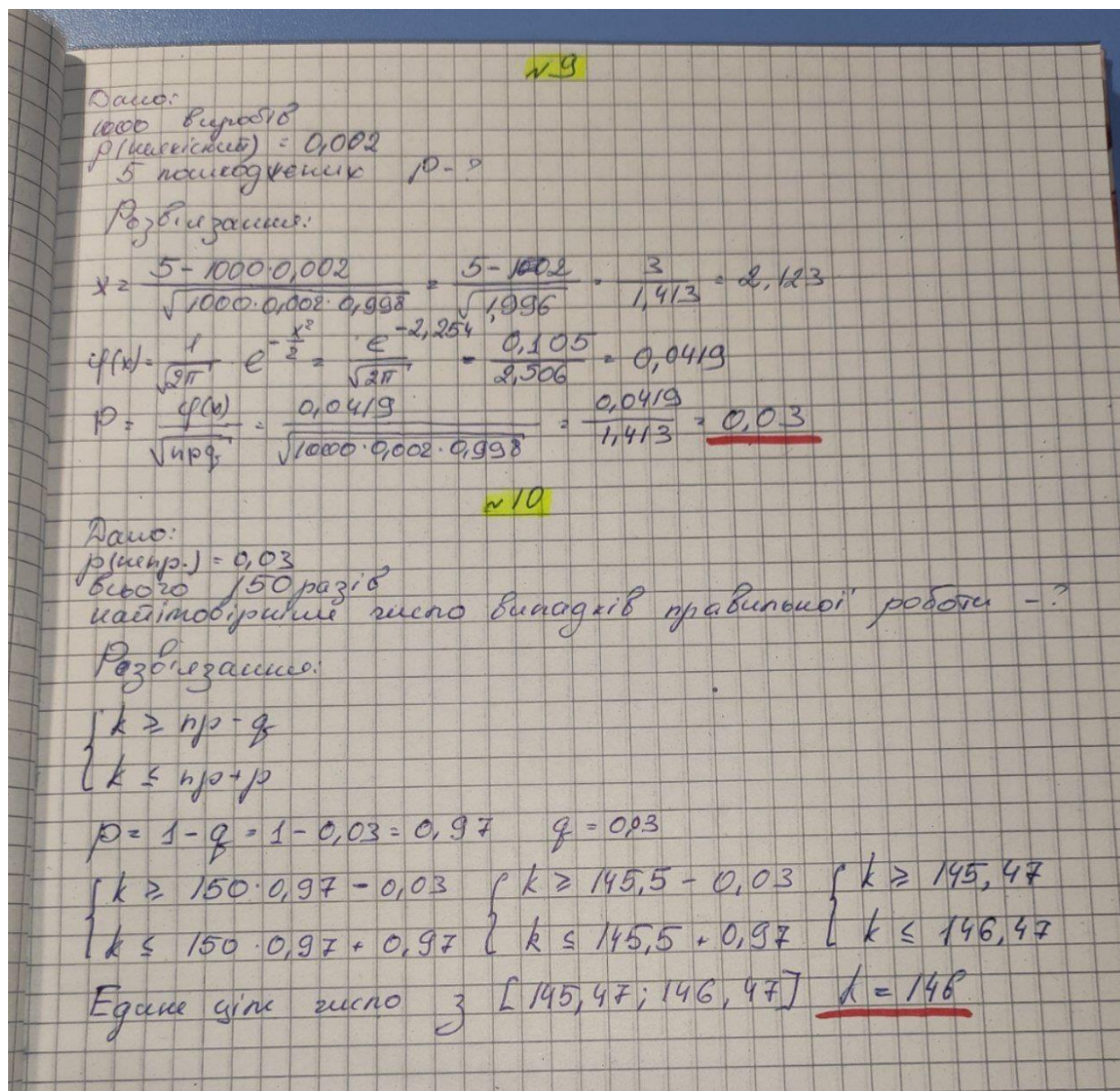
Результаты:

вероятность выпадения зерна — $p = 0,5$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{5000 - 10000 \cdot 0,5}{\sqrt{10000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{5000 - 5000}{\sqrt{2500}} = 0$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2,506} = 0,399$$

$$P = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{0,399}{\sqrt{10000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{0,399}{\sqrt{2500}} = \frac{0,399}{50} = \underline{0,008}$$



При порівнянні результатів обчислень було виявлено, що вони збігаються, виключаючи незначну похибку.

Висновок: в ході цієї лабораторної роботи було розв'язано 10 задач, умови яких можна побачити у пункті «Постановка задачі», аналітичним шляхом і написано програму, що розв'язує ці задачі. Результати, отримані при розв'язуванні задач аналітичним шляхом майже збігаються з результатами, отриманими в результаті роботи алгоритму. У 7 задач виникла похибка під час знаходження логарифму, однак вона не є значною ($\approx 0,001$). В інших випадках похибка (якщо така є) зумовлена здебільшого округленнями, з чого було зроблено висновок, що програма працює коректно. В ході розв'язання було використано класичне означення імовірності, аксіому про суму імовірностей всіх подій у вибірці, формулу комбінацій, формулу Бернуллі, локальну і інтегральну теореми Лапласа і інші теоретичні аспекти.