Natália Martins (natalia@ua.pt) - 11.3.50 - 3ª feira (1 - 16h)

Bibliografia: · Virginia Santos, Calculo 1 e Calculo 2 (cap 1 e 2) - 2009

· Alexandre Almeida, Calculo 2 (cap 4 e 5) - 2018

OTs - 3ª feira (16 - 17h) 11.2.23

Aulas com outros stores estão no padlet

Teste 1 - 19 Nov, Teste 2 - epoca exames (Janeiro)

Miniteste 1 - 20/21 outubro, Miniteste 2 -

Avaliação Final: $\text{Max}\{(T_1 + T_2) \times 0{,}5\ ,\ 0{,}45 \times T1 + 0{,}45\ T_2 + 0{,}05\ MT1 + 0{,}05\ MT2\}$

Cap 1 - Complementos de FRVR

Revisões

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ (não vazio). Chama-se função real de Domínio A a toda a aplicação f que a cada $x \in A$ faz corresponder um único elemento $f(x)$

AKA.

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Conjunto Chegada

Domínio (D_f)

Contradomínio de f: $CD_f = \{ f(x) : x \in D_f \}$

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Grafico de f

$$G_f = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D_f \}$$

Nota: Seja $B \subseteq \mathbb{R}$

A função $f|_B : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x)$

Chama-se restrição de f ao conjunto B

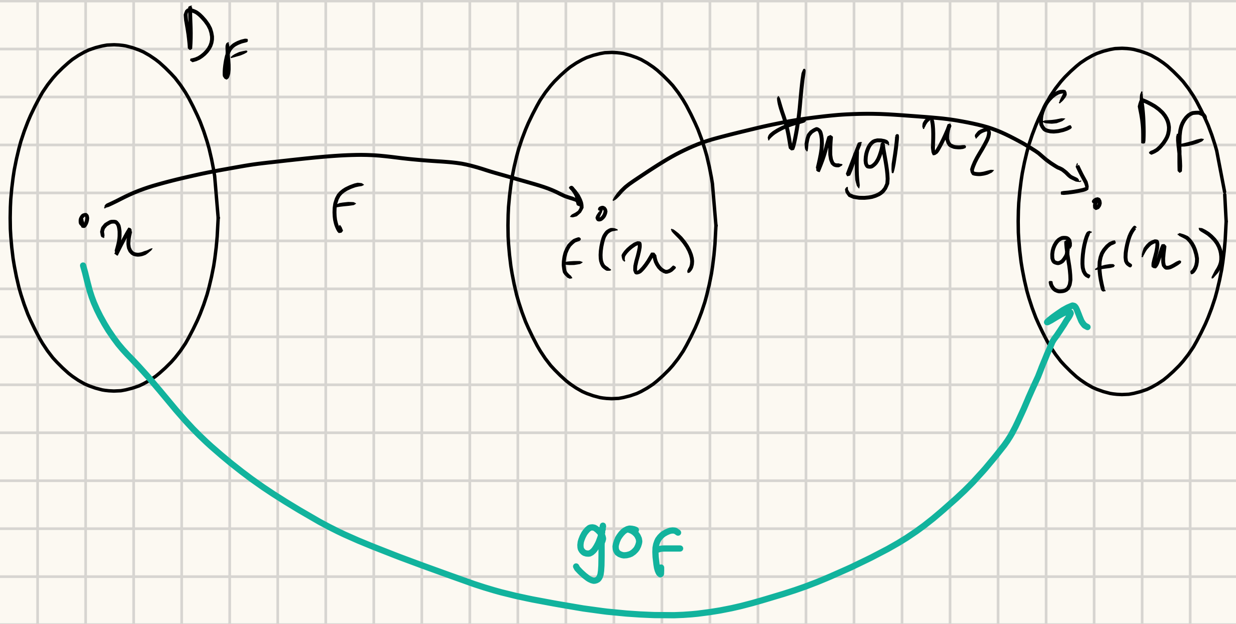
- **Função Composta**

Sejam $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}$

Chama-se função composta de g com f e denota-se por

$$g \circ f : D_{g\circ f} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (g\circ f)(x) = g(f(x))$$

onde $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$



Função Injetiva (objetos diferentes têm imagens diferentes)

Uma função $f : D_f \to \mathbb{R}$ diz-se injetiva se $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

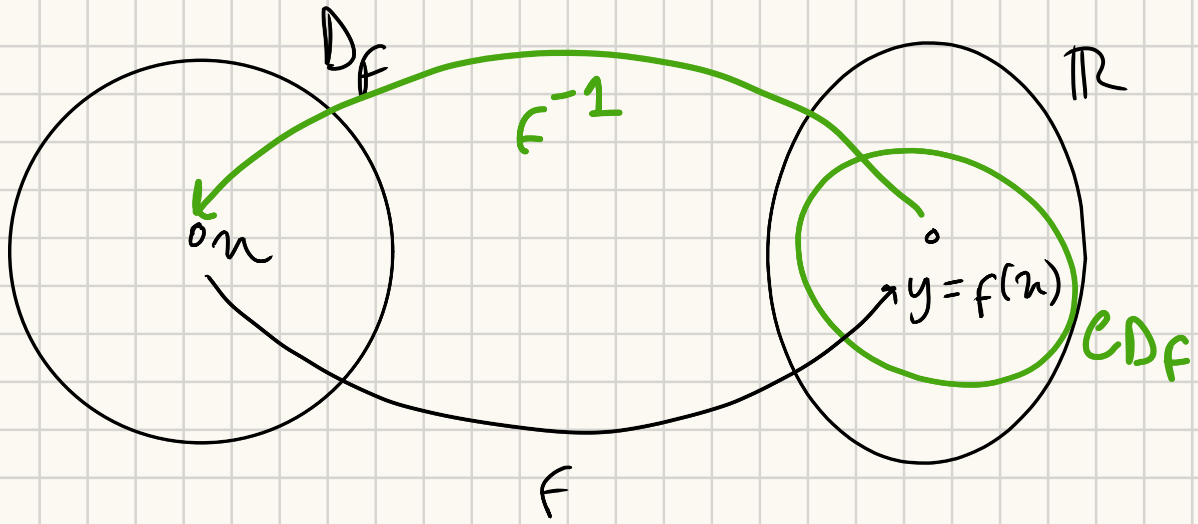
ou

$\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Função Inversa

Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função injetiva

A função $f^{-1} : CD_f \to \mathbb{R}$, $y \mapsto x$, onde x é tal que $y = f(x)$ chama-se função inversa



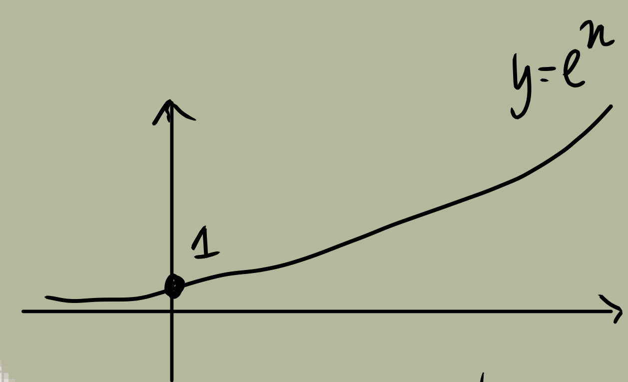
implica

$p \Rightarrow q$

é equivalente a

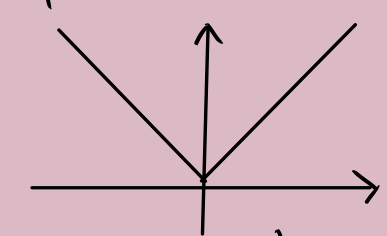
$\sim q \Rightarrow \sim p$

$h(x) = e^x, \; x \in \mathbb{R}$



h é injetiva

$f(x) = |x|$



f é não injetiva

$f(-1) = f(1)$

Consequencias da função Inversa

- $D_{f^{-1}} = CD_f$
- $CD_{f^{-1}} = D_f$
- f é invertível $\overset{sse}{\Leftrightarrow}$ f é injetiva

- $\forall x \in D_f : f^{-1}(f(x)) = x$
- $\forall y \in CD_f : f(f^{-1}(y)) = y$

$\left.\right\}$ $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ são função identidade

- $\forall x \in D_f \; \forall y \in CD_f : y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Propriedades

- Se $f: D_f \to \mathbb{R}$ é estritamente monótona, f é injetiva (logo invertível)
- Se f é estritamente crescente, então f^{-1} também é (f e f^{-1} têm o mesmo tipo de monotonia
- Se f é injetiva e contínua então f^{-1} é contínua

Ver slides quanto a ln

$f(x) = f(-x)$
$\uparrow$ f é par

$f(x) = -f(x)$
$\uparrow$ f é ímpar

Função Seno

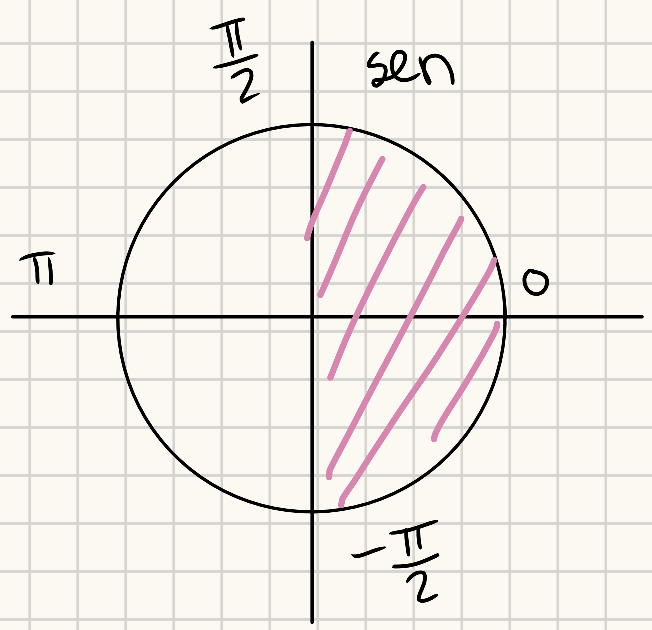
- $\text{sen}: D_f \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto y = \text{sen}\, x$
- $D = \mathbb{R}$
- $CD = [-1, 1]$
- ímpar ($\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$)
- periódica de período 2π ($\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x)$)

A função
$\text{sen}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \text{sen}\, x$
não é injetiva, logo não é invertível
Contudo, a restrição em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\text{sen}|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto y = \text{sen}\, x$

Restrição Principal da função seno

já é injetiva, logo invertível



A inversa desta função chama-se arco seno

$\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = \operatorname{arcsen} x$

onde $\boxed{y = \operatorname{arcsen} x \iff x = \operatorname{sen} y}$

$x \in [-1, 1]$, $y \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$CD_{\operatorname{arcsen}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x)) = x, \ \forall_x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) = x, \ \forall_x \in [-1, 1]$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Exemplos

$\operatorname{arcsen} 0 = 0$

$\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arcsen} -1 = -\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

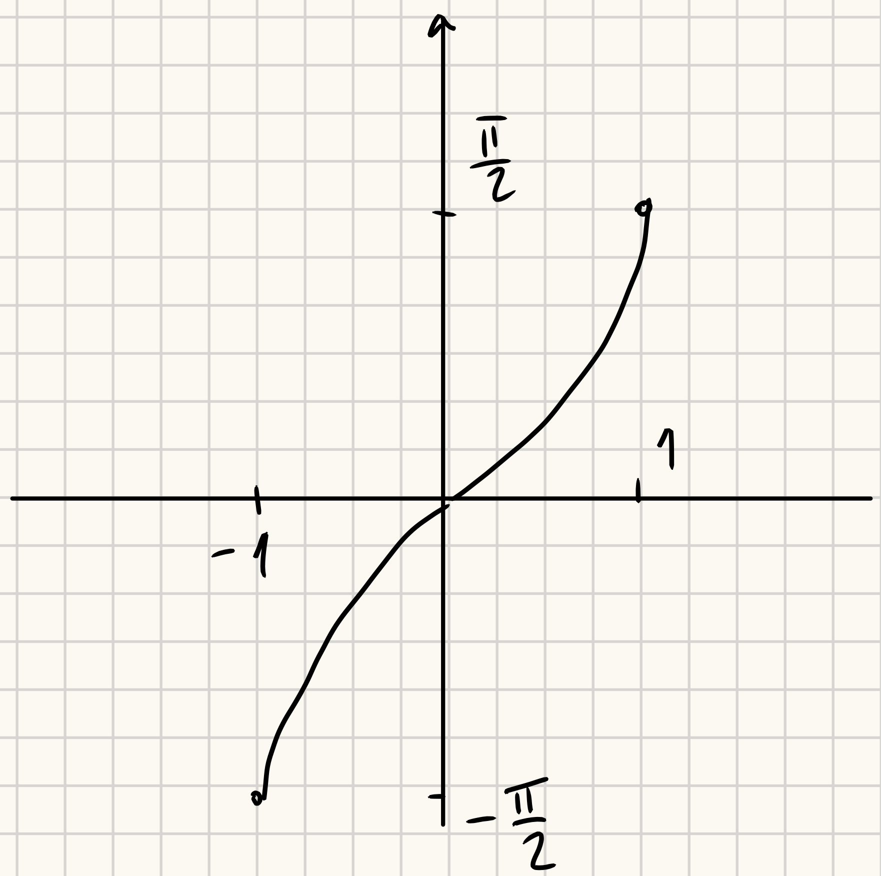
$\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{100}\right) = \frac{\pi}{100}$

$\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$= -1$



Ficha 1

5-

b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\arcsen(1-x)}{3}$ Caracterize f^{-1}

$D_{f^{-1}} = CD_f$

$CD_{f^{-1}} = D_f$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq 1-x \leq 1 \}$

$-1 \leq 1-x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -x \leq 0 \Leftrightarrow 2 \geq x \geq 0$

$x \in [0, 2]$

$\longrightarrow$ Para $x \in D_f$, $-1 \leq 1-x \leq 1$ logo $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsen(1-x) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\arcsen(1-x) \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \geq -\frac{2}{3}\arcsen(1-x) \geq -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \geq f(x) \geq -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} \geq f(x) \geq \frac{\pi}{6}$

$CD_f = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] = D_{f^{-1}}$

$C_f = CD_{f^{-1}}$

$f^{-1}(x) = ?$ $\rightarrow$ Para $x \in D_f$ e $y \in CD_f$:

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{2\arcsen(1-x)}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\arcsen(1-x)}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y - \frac{3\pi}{2} = -2\arcsen(1-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3y}{2} - \frac{3\pi}{4} = \arcsen(1-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3y}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = 1-x \Leftrightarrow \boxed{x = 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{3y}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)}$ f^{-1}

Recordar:

- $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ invertível

  $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, $x \in D_f$, $y \in CD_f$

  $D_{f^{-1}} = CD_f$

- Função arcsen — função contínua e estritamente crescente

  $y = \arcsen x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y$, $x \in [-1, 1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$D_{arcsen} = [-1, 1]$ $\quad CD_{arcsen} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

5) e) $f(x) = 2\text{arcsen}(\overset{[-1,1]}{\underset{\leq 0}{\sqrt{x}}}) - \pi$

- $D_f = ?$ $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \wedge -1 \leq \sqrt{x} \leq 1\}$

C.A. Condição universal

$-1 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1^2$

$D_f = [0, 1] = CD_{f^{-1}}$

- $CD_f = ?$ Para $x \in D_f = [0,1]$, $0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \text{arcsen}(\sqrt{x}) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq 2\text{arcsen}(\sqrt{x}) \leq \pi \overset{-\pi?}{\Leftrightarrow} -\pi \leq 2\text{arcsen}(\sqrt{x}) - \pi \leq 0$ $\quad CD_f = [-\pi, 0] = D_{f^{-1}}$

- $f^{-1}(x) = ?$

$y = 2\text{arcsen}(\sqrt{x}) - \pi \Leftrightarrow y + \pi = 2\text{arcsen}(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \frac{y+\pi}{2} = \text{arcsen}(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{y+\pi}{2}\right) = \sqrt{x} \Leftrightarrow \boxed{\text{sen}^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right) = x}$ $\quad f^{-1}(y)$

$f^{-1}(x) = \text{sen}^2\left(\frac{x+\pi}{2}\right)$

Função cosseno

$\cos : \quad \longrightarrow \mathbb{R}$

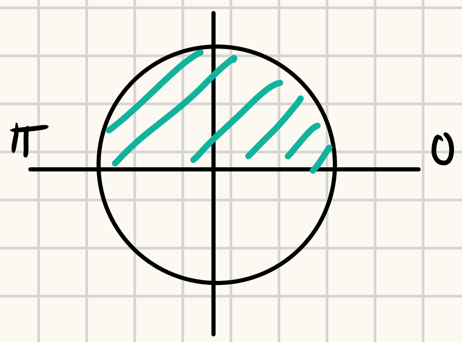
$x \longmapsto y = \cos x$

- Domínio : $\mathbb{R}$
- Contradomínio : $[-1, 1]$
- Função periódica : período 2π

- Função par (porque $\cos(-x) = \cos(x), \forall_x \in \mathbb{R}$)
- Não invertível mas :
- $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(x) = \cos x$ $\quad$ já é injetiva com $CD_g = [-1, 1]$

Restrição Principal da função cosseno



A inversa é a função arco cosseno :

$g^{-1} = \arccos : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = \arccos x$

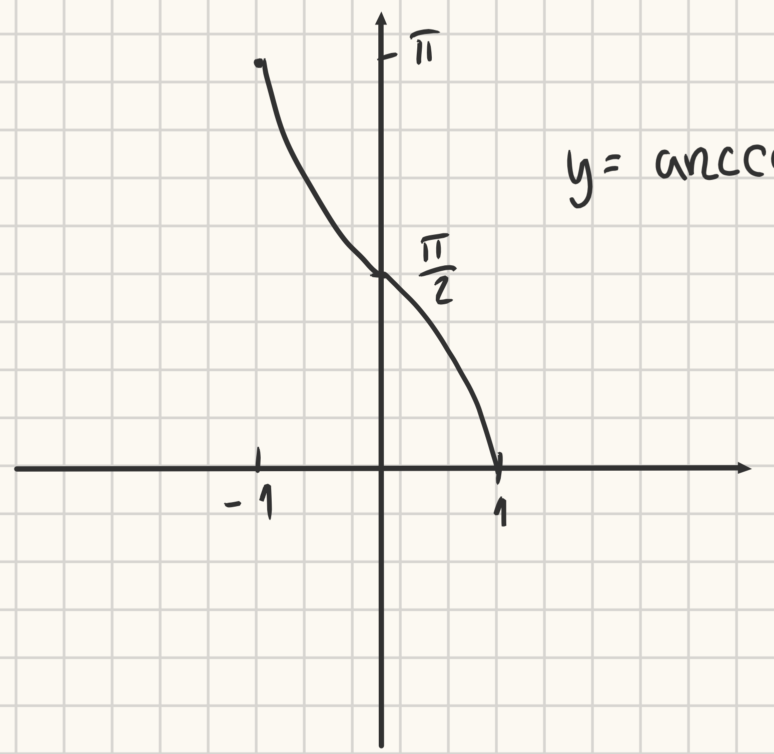
onde $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$, $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$

Exemplos:

- $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$
- $\arccos 1 = 0$
- $\arccos(-1) = \pi$
- $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$
- $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
- $\arccos\left(\cos \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

- $\cos(\arccos) = x, \ x \in [-1, 1]$
- $\arccos(\cos x) = x, \ x \in [0, \pi]$



$y = \arccos(x)$

6.?

g) $f(x) = \dfrac{1}{\pi + \arccos(x-2)}$ $\quad D_{f^{-1}}, \ CD_{f^{-1}}, \ f^{-1}(x) = ?$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : \pi + \arccos(x-2) \neq 0 \ \wedge \ -1 \leq x-2 \leq 1 \}$

C.A.

$-1 \leq x-2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$

$\pi + \arccos(x-2) \neq 0 \rightarrow \pi + \arccos(x-2) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x-2) = -\pi$
imp.

$D_f = [1, 3] = CD_{f^{-1}}$

CD_f) Para $x \in D_f = [1, 3]$: $-1 \leq x-2 \leq 1$

$0 \leq \arccos(x-2) \leq \pi$

$\pi \leq \pi + \arccos(x-2) \leq 2\pi$

$\frac{1}{\pi} \geq \dfrac{1}{\pi + \arccos(x-2)} \geq \frac{1}{2\pi}$ $\qquad CD_f = \left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right] = D_{f^{-1}}$

para $x \in D_f$ e $y \in CD_f$

$f^{-1}(x)$) $y = \dfrac{1}{\pi + \arccos(x-2)} \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} = \pi + \arccos(x-2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{y} - \pi = \arccos(x-2) \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{1}{y} - \pi\right) = x - 2 \Leftrightarrow \underbrace{\cos\left(\dfrac{1}{y} - \pi\right) + 2}_{f^{-1}(y)} = x$

$f^{-1}(x) = \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x} - \pi\right)}_{-\cos\frac{1}{x}} + 2$

Função Tangente

$$tg : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto tg\, x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

- Domínio $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio $= \mathbb{R}$
- Função periódica : período π

- Ímpar (pq $tg(-x) = \dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -tg\, x,\ \forall_x \in D$
- Não é invertível mas :
- $h : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ já é injetiva e $CD_h = \mathbb{R}$

  $x \longmapsto h(x) = tg\, x$

Restrição Principal da tangente

A sua inversa, arcotangente :

$$arctg : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = arctg\, x$$

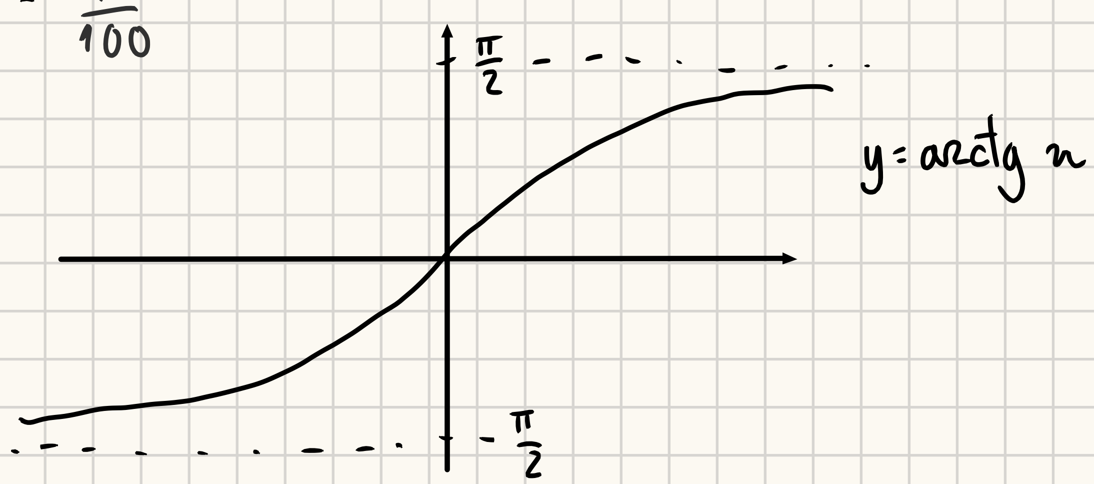
onde $y = arctg\, x \Leftrightarrow x = tg\, y,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exs:

- $arctg\ 0 = 0$
- $arctg\ 1 = \pi/4$
- $arctg\,(-1) = -\pi/4$
- $\lim_{x \to -\infty} arctg\, x = \pi/2$
- $\lim_{x \to +\infty} arctg\, x = -\frac{\pi}{2}$
- $arctg\left(tg \frac{\pi}{100}\right) = \frac{\pi}{100}$
- $tg(arctg(-100)) = 100$
- $arctg(\sqrt{3}) = \pi/3$

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

- $tg(arctg\, x) = x,\ x \in \mathbb{R}$
- $arctg(tg\, x) = x,\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$



6) c) $h(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right)$ $\quad D_h$, CD_h, zeros de h = ?

$D_h : \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\}$ $\quad D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

CD_h : Para $x \in D_f$,

$\frac{1}{x+1}$ toma todos os valores reais excepto o 0, logo $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ Donde $CD_h = \left]-\pi/2, \pi/2\right[\setminus \{0\}$

zeros de h = ? h não tem zeros

$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = tg(0)$ imp

TPC 01

(5) a) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\overbrace{x + \frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2} \leq \quad \leq \frac{\pi}{2}}\right)$ $\quad f^{-1} = ?$

Fazer todos até ao 9 (ignar arccotg)

Função cotangente

$$\operatorname{cotg} : D \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

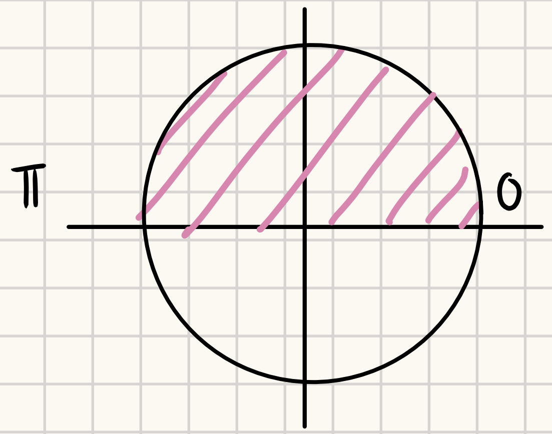
- Domínio $= \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio $= \mathbb{R}$
- Periódica : período π

- Ímpar porque $\operatorname{cotg}(-x) = \frac{\overset{= \cos x}{\cos(-x)}}{\underset{= -\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(-x)}} = -\operatorname{cotg} x, \forall x \in D$
-
- $h :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \mapsto h(x) = \operatorname{cotg} x$ $\Big\}$ restrição principal

A sua inversa chama-se arcocotangente :

$\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ onde $y = \operatorname{arccotg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{cotg} y$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in]0, \pi[$

$x \longrightarrow y = \operatorname{arccotg} x$



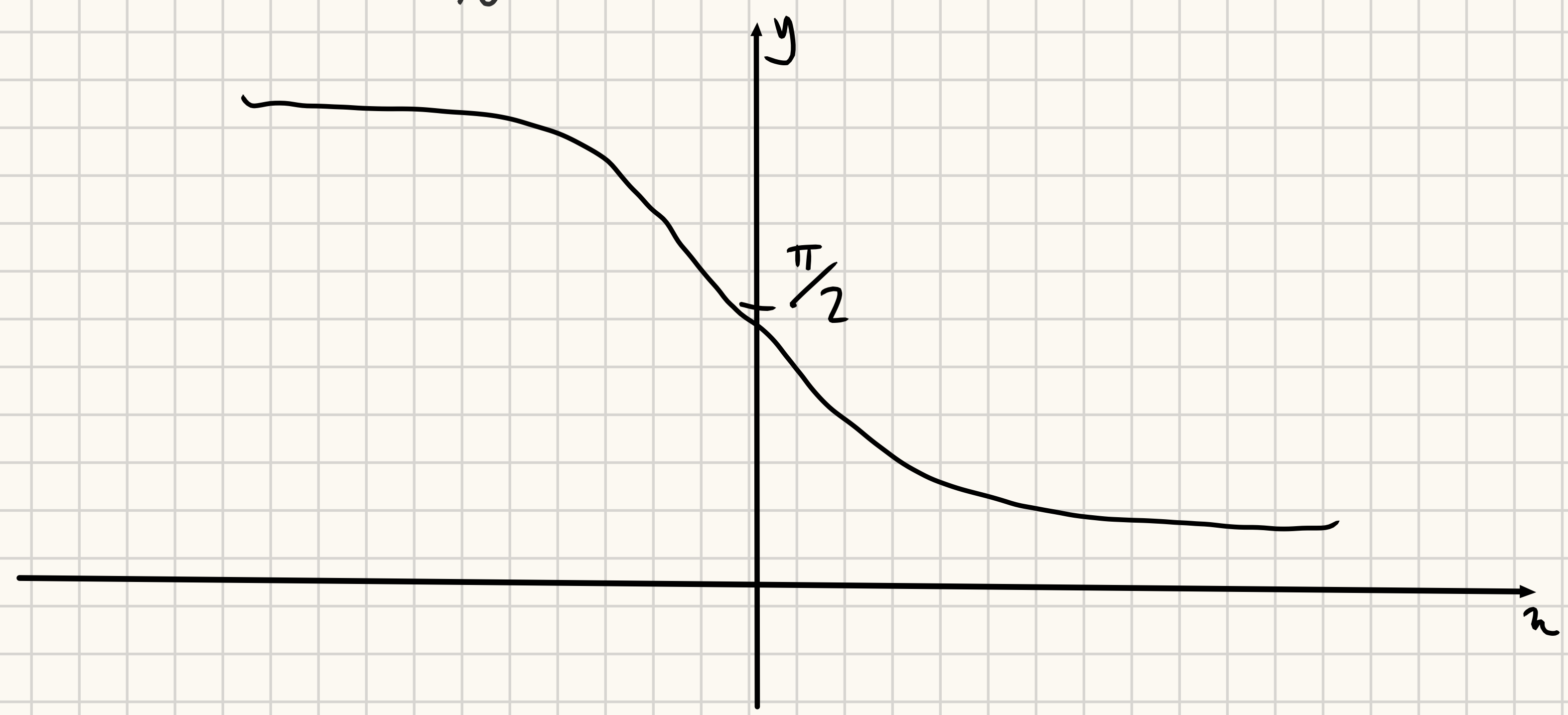
arccotg é estritamente decrescente

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cotg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

- $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x, \ x \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x, \ x \in]0, \pi[$

Ex:

- $\operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{arccotg}(1) = \frac{\pi}{4}$
- $\operatorname{arccotg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$
- $\operatorname{arccotg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$
- $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}(-100)) = -100$
- $\operatorname{arccotg}(\underbrace{\operatorname{cotg} \tfrac{3\pi}{2}}_{\to 0}) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} = \pi$



Ficha nº1

⑤ i) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\ln(\overbrace{x+1}^{>0}))$ $\quad D_{f^{-1}} = ?, \ CD_{f^{-1}} = ?, \ f^{-1}(x) = ?$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} =]-1, +\infty[= CD_{f^{-1}}$

CD_F) para $x \in D_F$, $\ln(x+1)$ toma todos os valores reais $\Rightarrow \text{arccotg}(\ln(x+1)) \in]0, \pi[$ logo $CD_F =]0, \pi[= D_{F^{-1}}$

F^{-1}) Para $x \in D_F$ e $y \in CD_F$:

$$y = \text{arccotg}(\ln(x+1)) \Leftrightarrow \text{cotg}\, y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^{\text{cotg}\, y} = x+1 \Leftrightarrow e^{\text{cotg}\, y} - 1 = x$$

logo $F^{-1}(x) = e^{\text{cotg}\, x} - 1$

Funções Inversas : Resumo :

Função	D	CD
arcsen	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctg	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
arccotg	$\mathbb{R}$	$]0, \pi[$

Função Secante

$$\sec : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

- Domínio : $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Contradomínio : $CD =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
- Periódica : período 2π
- Par

C.A

$$0 < |\cos x| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|\cos x|} \geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\cos x}\right| \geq 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} \leq -1 \vee \frac{1}{\cos x} \geq 1 \Leftrightarrow \sec x \leq -1 \vee \sec x \geq 1$

$\Leftrightarrow \sec x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

Função Cossecante

$\operatorname{cosec}: D \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \operatorname{cosec} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

- $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- $CD =]-\infty, 1] \cup [-1, +\infty[$

- Periódica: período 2π
- Ímpar

Formas Trigonométricas úteis

- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ ← Formula Fundamental da Trigonometria
- Divindo por $\operatorname{sen}^2 x$ (com $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$): $1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
- Dividindo por $\cos^2 x$ (com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$): $\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$

Resto das formulas: pag 34, slide 1 !

Exs Ficha 1

3.

a) $\cos^2(\operatorname{arcsen} x) = 1 - x^2$?, $\forall_x \in [-1, 1]$

$\cos^2(\underbrace{\operatorname{arcsen} x}_{y}) = ?$ $\quad \cos^2 y = ?$

$y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y$

Pela fórmula fundamental da trig.

$$\cos^2 y = 1 - \text{sen}^2 y$$
$$= 1 - x^2 \qquad \text{logo } \cos^2(\text{arcsen } x) = 1 - x^2$$

b) na OT

1. f) $\cos(2\,\overbrace{\text{arctg}(4/3)}^{y}) = ?$ $\quad \cos(2y) = \cos^2 y - \text{sen}^2 y$

$y = \text{arctg } 4/3 \Leftrightarrow \text{tg } y = 4/3$

- $1 + \text{tg}^2 y = \sec^2 y \Leftrightarrow 1 + \left(4/3\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2 y} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{16}{9} = \dfrac{1}{\cos^2 y} \Leftrightarrow \dfrac{25}{9} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = 9/25$
- $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - 9/25 = \dfrac{16}{25}$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 = 9/25 - 16/25 = -7/25$$

Função cosseno hiperbólico • Ímpar e Função seno hiperbólico • Par

- $\cosh: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

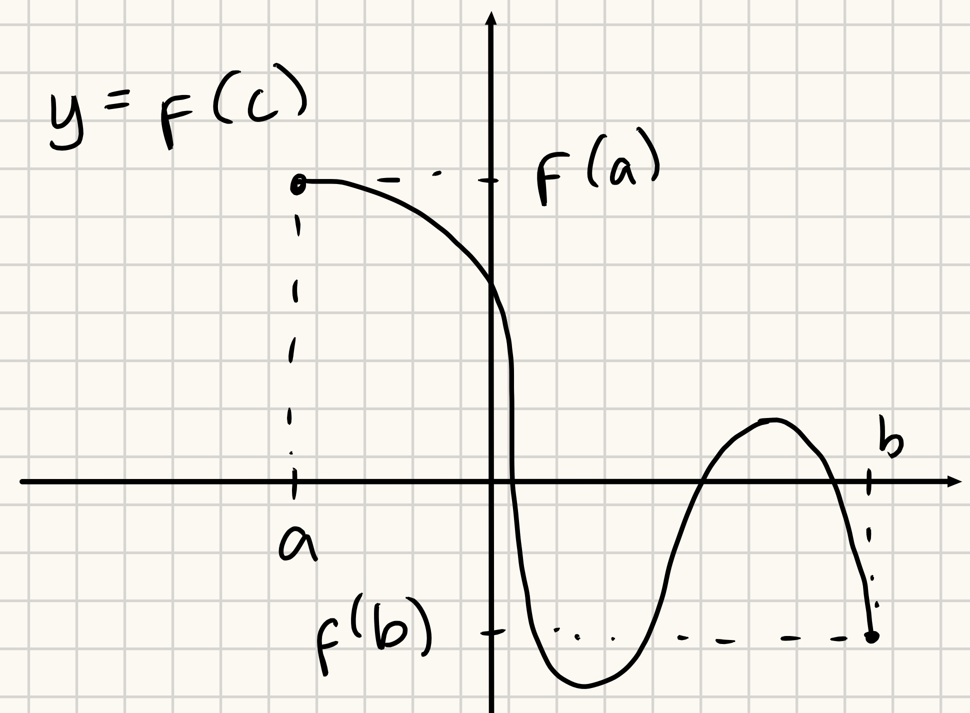
- $\text{senh}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Teorema de Bolzano-Cauchy/T. dos valores intermédios (T.V.I)

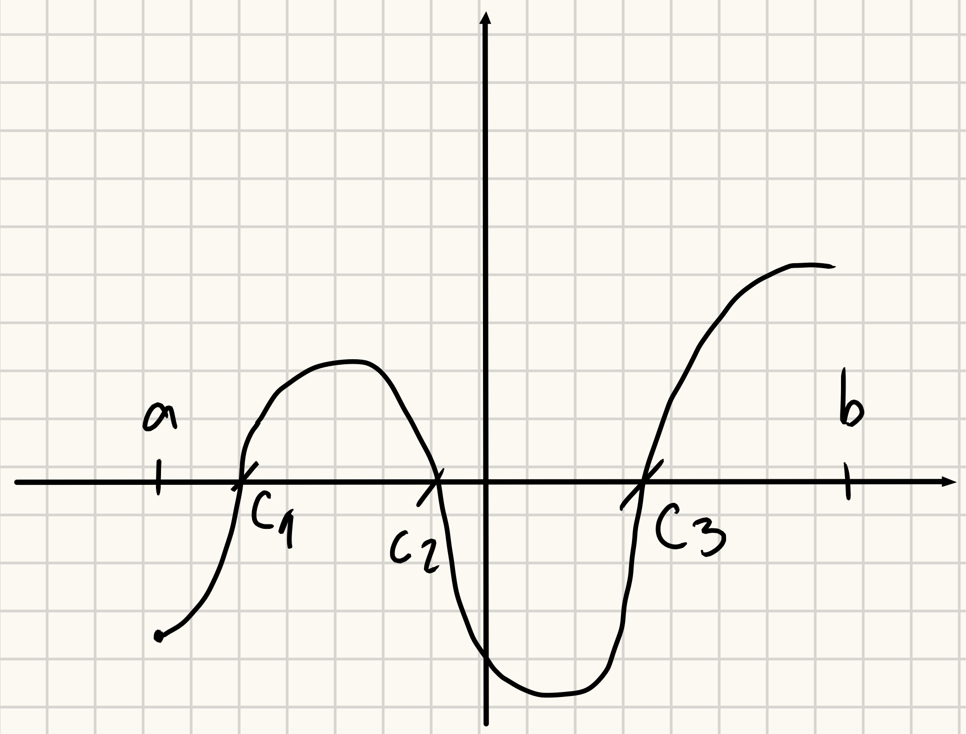
Seja $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua

Para qualquer y entre $f(a)$ e $f(b)$ existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que $y = f(c)$



Corolário do TVI: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua

Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe pelo menos um $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$



$f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$

Ex

15) $f(x) = 6x + \text{sen}(1-x^2) + 3\cos(x^2-1)$. Mostre que existe pelo menos um 0 em $]-1,1[$

Como:

- f é contínua em $\mathbb{R}$ e por isso em $[-1,1]$
- $f(-1) = -6 + \text{sen}(0) + 3\cos(0) = -6+0+3 = -3 < 0$
- $f(1) = 6 + \text{sen}(0) + 3\cos(0) = 6+0+3 = 9 > 0$

Então pelo TVI podemos concluir que $\exists_c \in]-1,1[: f(c) = 0$

Máximo, Mínimo e Maximizante e Minimizante

Contradomínio / y

Teorema de Weierstrass (TW)

Slides

Turma diferente

TPC era:

$f(x) = \arccos(\ln x)$

1) $D_f = \{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq \ln \leq 1 \wedge x > 0 \}$

C.A

$\ln x \geq -1 \wedge \ln x \leq 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} \wedge x \leq e \wedge x > 0$ $\qquad D_f = [e^{-1}, e] = CD_{f^{-1}}$

2) $D_{f^{-1}} = CD_f$

Com f é injetiva: $f(e^{-1}) = \arccos(\ln e^{-1}) = \arccos(-1) = \pi$ $\qquad CD_f = [0, \pi] = D_{f^{-1}}$

$f(e) = \arccos(\ln e) = \arccos(1) = 0$

Teorema de Weierstrass

- $f : D_f \to \mathbb{R}$, D_f intervalo compacto (fechado e limitado)
- f é contínua em D_f

ent tem máximo e mínimos globais

Derivadas

- Regra da cadeia / derivada da função composta

↳ $(g\circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

Ex:

- $\cos'(x^2) = -\text{sen}(x^2) \cdot (x^2)' = -2x\,\text{sen}(x^2)$
- $\ln'(x^3+x^2) = \frac{1}{x^3+x^2} \cdot (x^3+x^2)' = \frac{(x^3+x^2)'}{x^3+x^2} = \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}$
- $f(x) = 2^{x^2}$, $f'(x) = (x^2)' \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2$
- $g(x) = \log(x^2)$, $g'(x) = \frac{(x^2)'}{x^2 \cdot \ln 10}$

Exercícios Ficha 1 / Slide 45

b) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\text{sen}\, x}$. $f'(x) = ?$

$$\frac{-\text{sen}\, x \cdot (1-\text{sen}\, x) - \cos x \cdot (-\cos x)}{(1-\text{sen}\, x)^2} = \frac{-\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x + \cos^2 x}{(1-\text{sen}\, x)^2} =$$

$$= \frac{-\text{sen}\, x + 1}{(1-\text{sen}\, x)^2} = \frac{1-\text{sen}\, x}{(1-\text{sen}\, x)^2} = \frac{1}{1-\text{sen}\, x}$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$, $f'(x) = ?$

$$((2x-1)^2)^{1/3} = (2x-1)^{2/3} = \frac{2}{3}(2x-1)^{-1/3} \cdot (2x-1)' = \frac{2}{3}(2x-1)^{-1/3} \cdot 2$$

$$= \frac{4}{3}(2x-1)^{-1/3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-1}}$$

Ex 2: $g \circ f'(0)$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} x, & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

ponto de viragem

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

ou

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$\rightarrow \lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 0}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{x} = 0$

$\rightarrow \lim_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x - 0}{x} \Leftrightarrow \dfrac{0}{x} = 0$

$f'(0) = 0$

$g'(f(0)) = g'(0)$ $\qquad g'(0) = \left(\dfrac{x}{x-1}\right)' = \dfrac{1.(x-1) - x.1}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-x}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{1}$ $\qquad g'(0) = -1$

$(g \circ f)'(0) = g'(f(0)).f(0) = (g \circ f)'(0) = g'(0)\, f'(0) = -1 \times 0 = 0$

Derivada da função inversa

- f estritamente monótona (tem inversa)
- f contínua

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad f'(x_0) \neq 0$$

Ex slide 46

$f\ [1,4] \to \mathbb{R} \quad f(2) = 7 \quad f'(2) = 2/3 \ . \ (f^{-1})'(7) = ?$

$$(f^{-1})'(7) = (f^{-1})'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)} = 3/2$$

Ex 24 - Ficha 1

$f(x)\ 5x^7 + 6x^3 + x + 9 \quad f(-1) = -3 \ , \ f$ é invertível. $(f^{-1})'(-3) = ?$

$$(f^{-1})'(-3) = (f^{-1})'(f(-1)) = \frac{1}{f'(-1)}$$

$f'(x) = 35x^6 + 18x^2 + 1$

$f'(-1) = 35 + 18 + 1 = 54 \rightarrow \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{54}$

Derivada de arcsen x

$$\text{arcsen}'(x) = (\text{sen}^{-1})'(\text{sen } y)$$

Exs Slides pag 47

1) $f(x) = (1 + x^2) . \text{arctg } x \qquad f'(x) = 2x . \text{arctg}(x) + (1+x^2) . \frac{1}{1+x^2}$

$$= 2x \text{ arctg}(x) + \frac{1+x^2}{1+x^2} = 2x \text{ arctg}(x) + 1$$

2) $g(x) = e^x . \arccos x \qquad g'(x) = e^x . \arccos x + e^x . -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= e^x \arccos x - \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Slides pag 48

b) $g(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{sen}(4x^3))$ $\qquad g'(x) = -\dfrac{\operatorname{sen}'(4x^3)}{1+(\operatorname{sen}(4x^3))^2} = -\dfrac{12x^2\cos(4x^3)}{1+\operatorname{sen}^2(4x^3)}$

$$\operatorname{arccotg}'(\operatorname{sen} 4x^3)\,(\operatorname{sen}(4x^3))' = \dots$$

c) $h(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$h'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}} \qquad h'(x) = \frac{\frac{-2x}{x^4}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} = -\frac{2}{x^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x^4-1}{x^4}}} = -\frac{2}{x^3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{x^4-1}}$$

$$= -\frac{2}{x^3}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

Teorema de Fermat

Função contínua e derivável

- num ponto tem um extremo $\xrightarrow{\text{se tem derivada nesse ponto}}$ derivada nesse ponto = 0 $\qquad$ ponto crítico
- Se $f'(c) = 0 \rightarrow c$ é ponto crítico de f

Não quer dizer que todos extremantes têm derivada!!

Teorema de Rolle

Função contínua em $]a,b[$ e diferenciável

- Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$
- Contínua e duas imagens iguais então algures ela muda de direção

Corolário

- Entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f'
- Entre dois zeros consecutivos de f' existe no max um zero de f

Exs slide 51

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Mostra que f tem um único zero em $]1,3[$

T. Cauchy:

- f é contínua em $\mathbb{R} \rightarrow$ contínua em $]1,3[$
- $f(1) = 1 - 6 + 9 - 1 = 3$ $\quad 3 > 0$
- $f(3) = 27 - 6.9 + 9.3 - 1 = 27 - 54 = -1$ $\quad -1 < 0$

Pelo T. Cauchy, como $f(1).f(3) < 0$ sabemos que existe pelo menos 1 zero em $]1,3[$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4.3.9}}{6} \Leftrightarrow \dots \quad x = 3 \vee x = 1$$

Pelo T. Rolle entre dois zeros consecutivos de f' existe no máximo um zero de f.

$\therefore$ f admite um unico zero em $]1,3[$

2) $x=0$ é raiz de $e^x = 1+x$? é a unica raiz real?

$e^0 = 1+0$ ✓ $x=0$ é solução

$e^x = 1+x \Leftrightarrow \underbrace{e^x - 1 - x}_{f(x)} = 0$ $\qquad f(x) = e^x - 1 - x$

$f'(x) = e^x - 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$??

Pelo T. Rolle, como só há um zero de f', existe no máximo um zero de f

"Como n existem dois zeros de f' n se aplica o 2º ponto do corolario então só tem, no máximo, um zero"

Exs ficha 1

56) $x=2$ é o unico zero de $h(x) = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - x + 2$?

$h(2) = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 + 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - 0 = 0 \rightarrow h(2) = 0$ ✓

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	3
cos			
tan			

(Se tivessemos visto se era estritamente crescente → só podia ter 1 zero)

$$h'(x) = -\frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)'}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{4}}} = \cdots = -\frac{1}{2\sqrt{4x-x^2}} - 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{2^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4}$$

$$Dh = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{\sqrt{x}}{2} \leq 1 \wedge x \geq 0\right\}$$

C.A

$$-1 \leq \frac{\sqrt{x}}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt{x} \leq 2 \rightarrow -2 \leq \sqrt{x} \text{ sempre}$$

$$\rightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4$$

$$Dh = [0, 4]$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sqrt{4x-x^2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{4x-x^2}} = -1 \leftarrow \text{imp.}$$

A função derivada não tem zeros

Como $h'(x)$ não tem zeros e sabemos que entre dois zeros de h existe pelo menos um zero de $h'(x)$, pelo T. Rolle, a função h só tem o zero $x = 2$

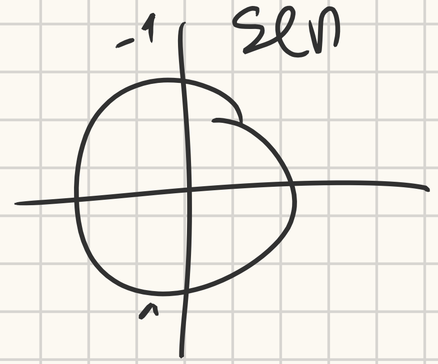
OU

Como $h'(x) < 0$, $\forall x \in \,]0,4[$, h é estritamente decrescente, logo injetiva, e o zero $x = 2$ é único

T. Lagrange

Função f contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$

- $\exists\, c \in]a,b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Ex Slide 53

$f(x) = \arcsin(\ln x)$

a) Domínio = ? $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \wedge -1 \leq \ln x \leq 1\}$ $D_f = [e^{-1}, e]$

b) Mostra que $\exists\, c\ ]1, e[$ tal que $f'(c) = \frac{\pi}{2(e-1)}$

Pelo T. Lagrange existe $c \in]1, e[$ tal que $f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e-1}$ $\Leftrightarrow f'(c) = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{e-1}$

$\Leftrightarrow f'(c) = \frac{\pi}{2(e-1)}$

I intervalo

int(i) → interior do intervalo (sem fronteiras)

Seja $x_0 \in \text{int}(I)$ com f contínua e diferenciável em I. Seja $h \in \mathbb{R}^+$

Pelo T. Lagrange, para cada intervalo $]x_0, x_0+h[\subset I$, existe $c \in]x_0, x_0+h[$

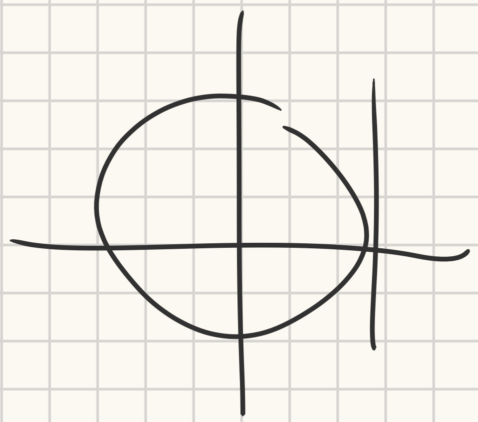
tal que $f'(c) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Suponhamos que $f'(x) > 0, \forall x \in I$ então $f'(c) > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$

$\Leftrightarrow f(x_0+h) - f(x_0) > 0 \Leftrightarrow f(x_0+h) > f(x_0)$

Então f é estritamente crescente

- $f'(x) > 0 \rightarrow f$ é estritamente crescente
- $f'(x) \geq 0 \rightarrow f$ é crescente
- $f'(x) < 0 \rightarrow f$ é estritamente decrescente
- $f'(x) \leq 0 \rightarrow f$ é decrescente



Ex. Ficha 1

34)

$h(x) = \arctan(x^2 - 4x)$

a) Extremos e monotonia?

1) $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x \in \mathbb{R}\}$ $D_h = \mathbb{R}$

2) $h'(x) = \arctan(x^2 - 4x)' = \frac{(x^2-4x)'}{1+(x^2-4x)^2} = \frac{2x-4}{1+(x^2-4x)^2}$

3) $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-4}{1+(x^2-4x)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \wedge \underbrace{1 + (x^2-4x)^2 \neq 0}_{\text{cond universal}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 2}$

4) algum x em que a derivada não exista? (se sim são candidatos a extremos)

Não

5)

	$-\infty$	2	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

6) $]-\infty, 2[$ é estritamente decrescente

$]2, +\infty[$ é est. crescente

2 é minimizante global

$h(2) = \arctan(2^2 - 4.2) = \arctan(-4)$ é o mínimo global de h

33) $f(x) = \arcsen(1-x) + \sqrt{2x - x^2}$

a) $D_f = ?$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - x^2 \geq 0 \wedge -1 \leq 1 - x \leq 1\}$

CA

$-1 \leq 1 - x \Leftrightarrow -2 \leq x$

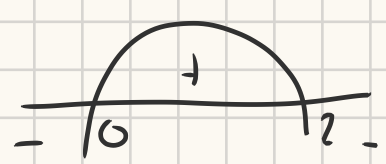
$1 - x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

$D_f = [0, 2]$

$2x - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(2-x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$



b) $f'(x) = \arcsin'(1-x) + (2x-x^2)^{\frac{1}{2}\,'}$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} + \frac{1}{2}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2-2x = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{2x-x^2}} \cdot 2-2x = \frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} + \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-1^2+2x-x^2}} + \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{-1+1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

c) Max e min globais?

D é Intervalo limitado e fechado = compacto }
f é contínua em D } $\xrightarrow{\text{T. Weierstrass}}$ admite max. e mins globais

$$-\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} = 0$$

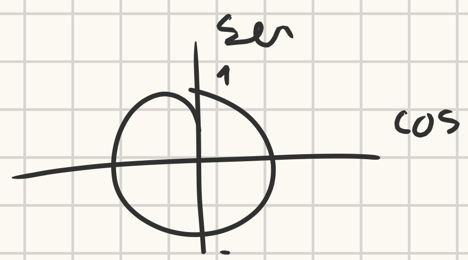
Como calculamos visto antes, $-x = 0 \wedge 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \in]0,2[$

	0		2
f'		—	
f	$\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{\pi}{2}$

$f(0) = \arcsin(1-0) + \sqrt{2.0 - 0^2}$
$= \frac{\pi}{2} + 0$

$f(2) = \arcsin(1-2) + \sqrt{4-2^2}$
$= -\frac{\pi}{2} + 0$

Máximo global $= \frac{\pi}{2}$ Maximizante $= 0$
Mínimo global $= -\frac{\pi}{2}$ Minimizante $= 2$



35) $g(x) = \arcsin((x-1)^2)$

a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq (x-1)^2 \leq 1\}$

C.A • $(x-1)^2 \leq 1$ ↗ $x-1 = +1 \Leftrightarrow x = 2$?
↘ $x-1 = -1 \Leftrightarrow x = 0$

• $(x-1)^2 \geq -1$ — cond. universal

$D_g = [0, 2]$

b) Extremos e monotonia?

$$g'(x) = \arcsin'((x-1)^2) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^4}}$$

$g(x)=0 \quad \dfrac{2(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^4}} = 0 \longrightarrow 2(x-1)=0 \wedge 1-(x-4)^4 > 0$

$2x = 2 \wedge (x-4)^4 > -1$

$x = 1 \wedge x \in]0,2[$

	0		1		2
g'		$-$	0	$+$	
g	$\frac{\pi}{2}$	↘	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

$g(0) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$g(1) = \arcsin(0) = 0$

$g(2) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$CDg = [0, \frac{\pi}{2}]$

g é estrita/ decrescente em $[0, 1]$

g é estrita/ crescente em $[1, 2]$

Máximo global $= \frac{\pi}{2}$, maximizantes $= 0, 2$

Mínimo global $= 0$, minimizante $= 1$

c) É invertível?

Não é injetiva $(g(0) = g(2))$ então não é invertível

Regra de Cauchy

- indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ } Derivamos ambas as funções
- se ambas as funções são contínuas }

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \lim_{x\to 0^+_-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+_-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exs Slides pag 60

a) $$\lim_{x\to 0^+} x \ln x \overset{0\times(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln' x}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \overset{\text{R. Cauchy}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

b) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{3x^2} \xrightarrow[\text{R. Cauchy}]{\frac{0}{0}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{arctg}'(x^2)}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2x}{1+x^4}}{6x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{1+x^4} \cdot \frac{1}{6x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{6x(1+x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{3+3x^4}$$

f) $$\lim_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}} \overset{\infty^0}{=} \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left[(x+1)^{\frac{1}{\ln x}}\right]} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}} = e^1 = e$$

Aproximações lineares

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

↳ reta tangente em $(a, f(a))$

Ex Slide 61

$h(x) = (f(x))^3 - 2f(x)$, $f(0) = -1$, $f'(0) = 7$, f diferenciavel em $x=0$

Aproximação linear de h numa vizinhança de $x=0$?

$h(0) = (f(0))^3 - 2f(0) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = 1$

$h'(x) = [(f(x))^3 - 2f(x)]' = 3(f(x))^2 f'(x) - 2f'(x)$

$h'(0) = 3(f(0))^2 f'(0) - 2f'(0) = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 7 = 7$

$g(x) = 1 + 7(x-0) = 1 + 7x$ ← Aproximação linear de h numa vizinhança de $x=0$ ≡ eq. reta tangente a h em $x=0$

Polinómio de Taylor

- f.r.v.r
- admite derivadas até á ordem $n \in \mathbb{N}$

ordem

$$T^n_c f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

centro

$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Se $c = 0$ → Polinómio de maclaurin

Ficha 1

42) polinómio Taylor de:

c) $T^3_1(xe^x) = ?$

$f(x) = xe^x \rightarrow f(1) = e$

$(xe^x)' = e^x + e^x x \qquad f'(1) = 2e$

$(xe^x)'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x \qquad f''(1) = 3e$

$(xe^x)''' = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x \qquad f'''(1) = 3e + e = 4e$

$$T_1^3(xe^x) = e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2!}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3$$

$T_c^n f(x) \rightarrow$ polinómio de Taylor, grau n, em torno do ponto $x = c$

$T_0^n f(x) \rightarrow$ Polinómio de Mac Laurin de ordem n / Pol. Taylor de ordem n, em torno de $x = 0$

Ex Slide 63

3) $T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(0) = \frac{1}{1} = 1$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad f''(0) = 2 = 2!$

$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \qquad f'''(0) = 6 = 3!$

$\dots \qquad f^{IV}(0) = 24 = 4!$

$\vdots$

$f^{n}(0) = n!$

$$T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + 1(x-0) + \frac{2!}{2!}(x-0)^2 + \frac{3!}{3!}(x-0)^3 + \dots + \frac{n!}{n!}(x-0)^n$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Fórmula de Taylor

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{\text{Polinómio de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{(n+1)}}_{\text{Resto de Lagrange}} \qquad \theta \in]c, x[\text{ ou } \theta \in]x, c[$$

$$\boxed{|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)|}$$

Ficha 1

44) $f(x) = e^x$

a) Forma de Maclaurin de ordem n de f?

$f = e^x \qquad f(0) = 1$

$f' = e^x \qquad f'(0) = 1$

$f'' = e^x \qquad f''(0) = 1$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1$

$$f(x) = 1 + 1(x-0)^1 + \frac{1}{2!}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(x-0)^n + \frac{e^\theta}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$$

b) Mostra que o polinómio de Maclaurin de ordem n permite aproximar e^x, $x \in]-1, 0[$ com erro absoluto inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$

Majorar o resto de Lagrange (em valor absoluto)

$$R_0^n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad , \quad x \in]-1,0[\ , \ c=0 \Rightarrow \theta \in]x,0[\Leftrightarrow \theta \in]-1,0[$$

no max $e^{\theta} = 1$ (nunca chega a ser 1) no max $= 1^2 = 1$

$$\left| R_0^n f(x) \right| = \left| \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left| \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \right| \left| x^{n+1} \right| < \frac{1}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{1}{(n+1)!}$$

c) Escolher um polinómio de MacLaurin de f e usá-lo para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$ e indicar uma estimativa do erro

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-1/2} = f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\underbrace{T_0^2 f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}}_{\text{Da alínea a)}} \longrightarrow f\left(-\tfrac{1}{2}\right) \simeq 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right) + \frac{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2}{2!} = \frac{5}{8}$$

$$x = -\frac{1}{2} \ , \ c = 0 \longrightarrow \theta \in]x,c[\Leftrightarrow \theta \in]-\tfrac{1}{2},0[$$

$$R_0^2 f(x) = \frac{f'''(\theta)}{3!} x^3 \qquad \left| \frac{e^{\theta}}{6} \cdot x^3 \right| < \frac{1}{6} \cdot \left| -\frac{1}{2} \right|^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$$

$$\frac{1}{\sqrt{e}} < e^{\theta} < e^{0}$$

57) $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in]-1, +\infty[$ → Domínio do ln

a) Polinomio Maclaurin de ordem 2?

$$T_0^2 F(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{F^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \frac{0}{1}(x-0)^1 + \frac{1}{2!}(x-0)^2$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 = x - \frac{x^2}{2}$$

$f(x) = \ln(1+x) \qquad F(0) = \ln(1) = 0$

$F'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad F'(0) = 1$

$F''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad F''(0) = -1$

b) Usando $T_0^2 F(x)$ determina um valor aprox de $\ln(1,1)$ e mostra que o erro é inferior a $\frac{1}{3} \times 10^{-3}$

$\ln(1+x)$

$\ln(1,1) \to x = 0,1 \to f\left(\frac{1}{10}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{10}\right)$

$$F(0,1) \simeq T_0^2 F(0,1)$$
$$\simeq \frac{1}{10} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{19}{200}$$

Majorar o erro)

$$R_0^2 F = \frac{F^{(3)}(\theta)}{3!}(x-0)^3 = \frac{\frac{2}{(\theta+1)^3}}{3!}x^3$$

$$F'''(x) = \frac{+2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x+1}{(x+1)^3}$$

$\boxed{x = 0,1 = \frac{1}{10}}$ e $\boxed{c = 0}$ $\to \theta \in \,]0, 1/10[$

$$\left|R_0^2 F\left(\frac{1}{10}\right)\right| = \left|\frac{\frac{2}{(\theta+1)^3}}{3!}\right| |x^3| =$$

$\theta = 0$

$$= \left|\frac{2}{6(\theta+1)^3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3\right| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10^3}\left|\frac{1}{(\theta+1)^3}\right| < \frac{1}{3}\cdot 10^{-3}$$