Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I - C — Mini-teste 2 Modelo

Duração: **25 min**

N.° Mec.: ____________ Nome: ____

Declaro que desisto: ____

A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
Resposta correta: 4 valores
Resposta errada: -1 valores
Ausência de resposta ou resposta nula: 0 valores

1. O integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^{3/2}}{1+x^2}\,dx$ é

- [ ] convergente e o seu valor é $\frac{\sqrt{\pi}}{10\sqrt{2}}$.
- [x] convergente e o seu valor é $\frac{\pi^{5/2}}{10\sqrt{2}}$.
- [ ] convergente e o seu valor é $\frac{\pi^{5/2}}{\sqrt{2}}$.
- [ ] divergente.

2. Sendo $f(x) = \dfrac{1+e^{-x}}{x}$ e $g(x) = e^{2x}$, escolha a afirmação verdadeira:

- [ ] $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ são convergentes.
- [x] $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ são divergentes.
- [ ] $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente e $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente.
- [ ] $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente e $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ é convergente.

3. A Transformada de Laplace de $f(t) = \mathrm{e}^{-3t}\operatorname{senh}(2t)$ é

- [ ] $F(s) = \dfrac{4}{s^2+6s+5}$, $s > -1$.
- [ ] $F(s) = \dfrac{2}{s^2+6s+5}$, $s > -3$.
- [ ] $F(s) = \dfrac{2}{s^2+6s+13}$, $s > 2$.
- [x] $F(s) = \dfrac{2}{s^2+6s+5}$, $s > -1$.

4. Usando a Transformada de Laplace, podemos concluir que o valor do integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}t\operatorname{sen}(t)\,dt$ é

- [ ] $\frac{4}{5}$
- [ ] $-\frac{4}{5}$
- [x] $\frac{4}{25}$
- [ ] $-\frac{4}{25}$

5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{(s-3)^4}\right\}(t)$ é igual a:

- [x] $\frac{5}{3}t^3e^{3t}, t \geq 0$.
- [ ] $\frac{5}{3}t^3e^{-3t}, t \geq 0$.
- [ ] $\frac{5}{3}t^4e^{3t}, t \geq 0$.
- [ ] $\frac{5}{3}t^4e^{-3t}, t \geq 0$.

Mini-teste ② Modelo

①

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{arctg} x)^{3/2}}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} \frac{(\operatorname{arctg} x)^{3/2}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{(\operatorname{arctg} x)'} \cdot (\operatorname{arctg} x)^{3/2}\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\operatorname{arctg} x)^{5/2}}{5/2} \right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{2}{5} \cdot (\operatorname{arctg} x)^{5/2} \right]_0^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{2}{5} (\operatorname{arctg} t)^{5/2} - \frac{2}{5} (\operatorname{arctg}(0))^{5/2} \right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/2} - \frac{2}{5}\, 0^{5/2} = \frac{2}{5}\,\frac{\pi^{5/2}}{2^{5/2}}$$

$$= \frac{\pi^{5/2}}{2^{3/2}\times 5} = \frac{\pi^{5/2}}{\sqrt{2^3}\times 5} = \frac{\pi^{5/2}}{2\sqrt{2}\times 5} = \frac{\pi^{5/2}}{10\sqrt{2}}$$

②

- $\int_1^{+\infty} e^{2x}\,dx$ é <u>divergente</u>

(O integral $\int_0^{+\infty} e^{\beta x}\,dx$ é divergente para $\beta \geq 0$. O integral $\int_0^{+\infty} e^{\beta x}\,dx$ tem a mesma natureza do integral $\int_1^{+\infty} e^{\beta x}\,dx$)

Vamos usar o critério do limite para o integral $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ comparamos com o integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ que é divergente.

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1+e^{-x}}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} (1+e^{-x}) = 1 \in \mathbb{R}^+$$

ou seja, o integral $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ tem a mesma natureza do integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, ou seja, é divergente.

③

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \operatorname{senh}(2t)\} = F(s+3) = \frac{2}{(s+3)^2-4} \quad , s > 2-3$$

$$= \frac{2}{s^2+6s+5} \quad , s > -1$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2-2^2} = \frac{2}{s^2-4} \quad s > 2}$$

Nota $\lambda = -3$

$s > s_f + \lambda$

$\Updownarrow$

$s > 2 + (-1)$

④

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t} \, t \operatorname{sen}(t) \, dt = \mathcal{L}\{t \operatorname{sen}(t)\}(2)$$

$$= (-1)^1 (\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\})'(2)$$

$$= -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\Big|_{s=2}$$

$$= -\left(-\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right)\Big|_{s=2} = \frac{2 \times 2}{(2^2+1)^2} = \frac{4}{25}$$

⑤ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{(s-3)^4}\right\}(t)$

Sabemos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s^4}\right\}(t) =$

$$= 10\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}(t)$$

$$= \frac{10}{3!}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^{3+1}}\right\}(t)$$

$$= \frac{10}{6}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \qquad , s>0$$

$$= \frac{5}{3}t^3 \qquad , t\geq 0$$

Então $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{(s-3)^4}\right\}(t) = e^{3t}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s^4}\right\}(t)$

$$= \frac{5}{3}e^{3t}t^3 \qquad , t\geq 0$$