

Mini relatório referente ao exercício 1 e 2 das aulas 21 e 22

Exercício 1:

Neste exercício nos considerei uma partícula submetida ao potencial Morse $U(r) = -D(1 - [1 - \exp(-a(r - r_e))^2])$ onde nos foi dado os valores $D = 1$, $a = 1$, $r_e = 0$, $e = -0.8$, $m = 1$ e com isso fui capaz de encontrar a força : $F(r) = \frac{dU}{dr}(r) = -2e^{-r}(1 - e^{-r})$. Sabe-se que $\frac{F}{m} = a$, como $m = 1$ encontrei deste modo a aceleração da partícula dada por 1.

$$a = -2e^{-r}(1 - e^{-r}) \quad (1)$$

a-

Nessa primeira alternativa o objetivo foi utilizar os métodos de verlet original, e velocity verlet para resolver equações diferenciais de segunda ordem, e a partir da aceleração obter as velocidades e posições em função do tempo de uma partícula. Eu utilizei dois programas para resolver toda a questão 1, alternativas a e b, cujos nomes são "ex01a.f90" e "ex01aRunge - kutta.f90" e estao na pasta ex01. Os resultados serão mostrados abaixo.

A figura 1 mostra os resultados para os valores de posição da partícula $r(t)$ encontrados utilizando os métodos de Verlet original, velocity Verlet e Runge Kutta. O gráfico 2 mostra os resultados para os valores das velocidades da partícula $v(t)$ encontradas utilizando os três métodos. Podemos notar que para qualquer um dos métodos foram encontrados valores próximos de posição e velocidade para a partícula como pode ser visto nos gráficos 1 e 2.

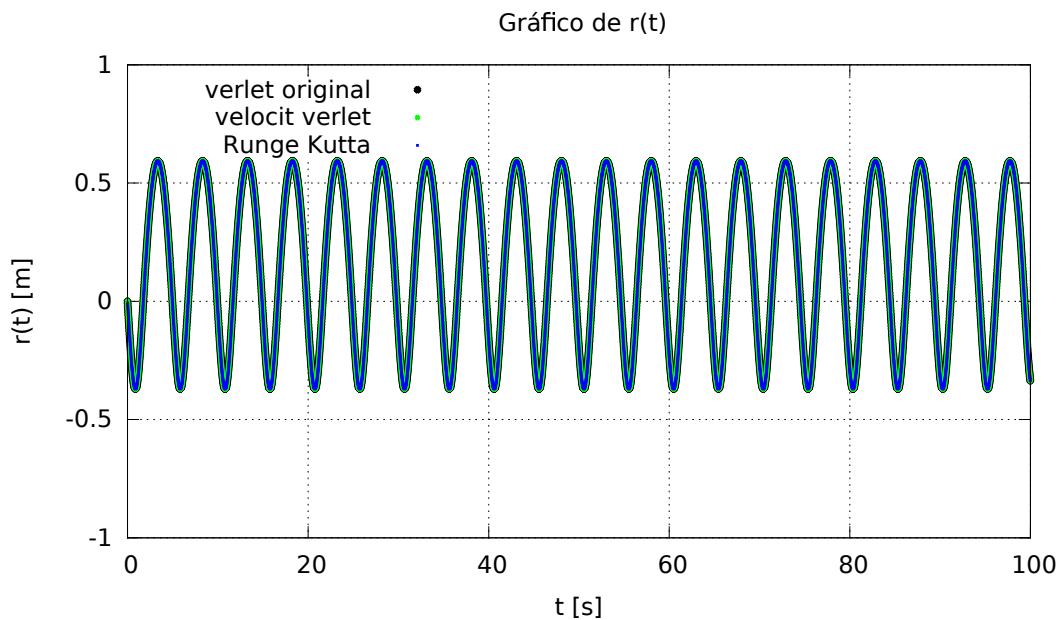


Figura 1: Gráfico comparando as posições da partícula para os métodos de verlet original, velocit verlet e Runge Kutta.

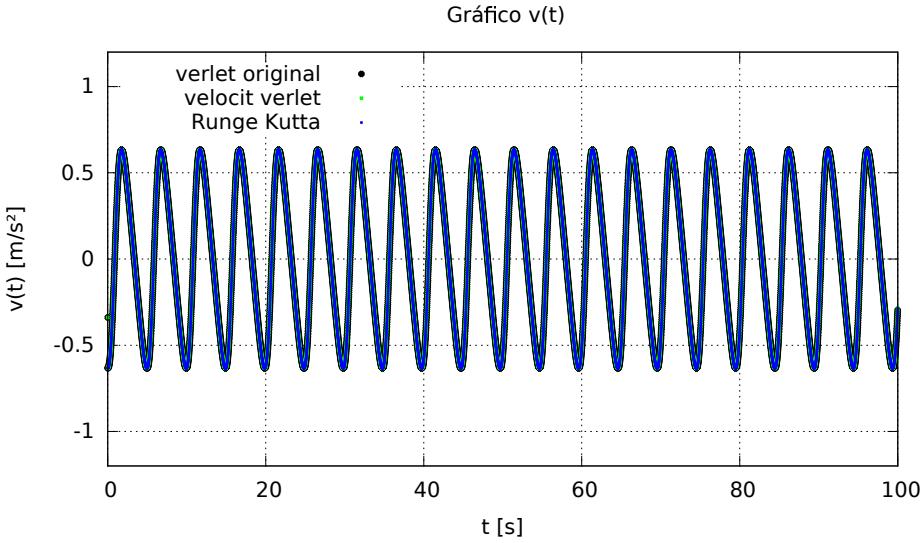


Figura 2: Gráfico comparando as velocidades da partícula para os métodos de verlet original, velocit verlet e Runge-Kutta.

Sabendo-se que a solução exata do PVI é dada por 2, já que esta nos foi dada pela referência [2], podemos comparar então a solução exata com os métodos computacionais utilizados aqui para se obter a posição $r(t)$ da partícula e ver o quanto precisos são tais ferramentas.

$$r(t) = r_0 + a^{-1} \ln[s(t)] \quad (2)$$

onde,

$$s(t) = \frac{(-1 + \sqrt{e+1} \cos(\sqrt{-2e}t - \arccos(\sqrt{e+1})))}{e} \quad (3)$$

Na figura 3 compara-se respectivamente as posições da partícula $r(t)$ obtidas pelos métodos de verlet original, velocity verlet e Runge Kutta com a solução exata. Pode-se notar que as posições obtidas por estes métodos se sobrepõem.

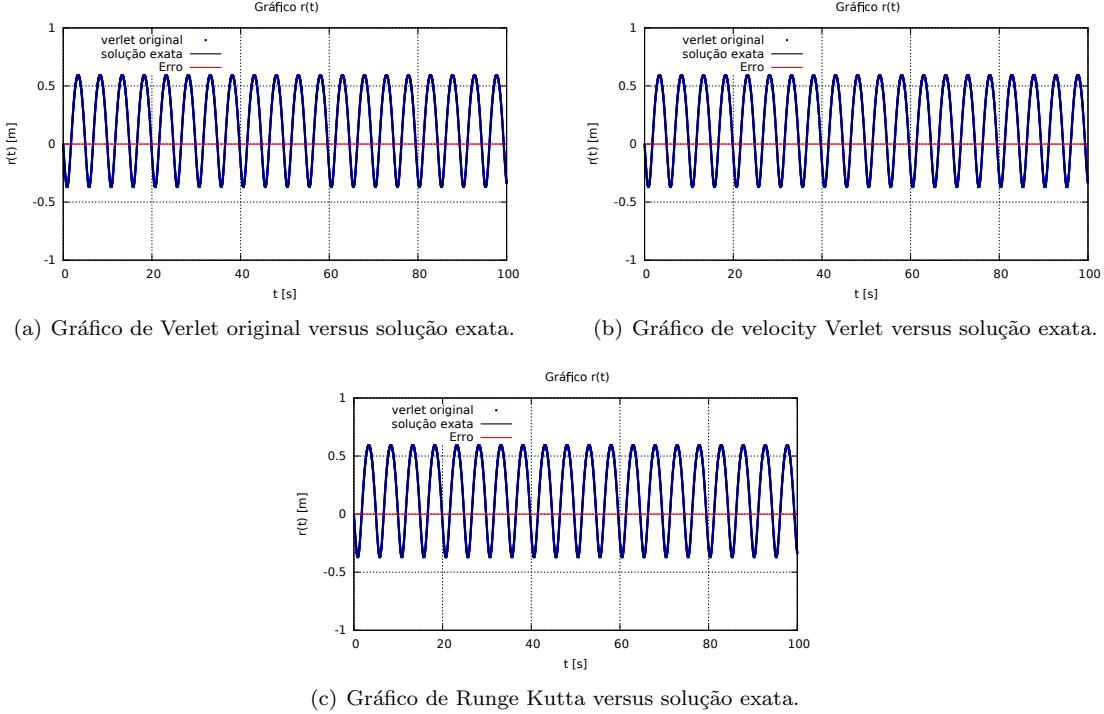


Figura 3: Gráficos comparando as posições obtidas pelos métodos de verlet original, velocit verlet e Runge-Kutta com a solução exata

Derivando a equação 2 podemos encontrar a solução exata para a velocidade da partícula $v(t)$, dado pela equação 4, e assim também podemos comparar o quanto preciso são os métodos para se calcular a velocidade da partícula e vermos qual dos métodos é mais preciso.

$$v(t) = \frac{-\sqrt{-2e(e+1)}\sin(\sqrt{-2e}t - \text{acos}(\sqrt{e+1}))}{-1 + \sqrt{e+1}\cos(\sqrt{-2e}t - \text{acos}(\sqrt{e+1}))} \quad (4)$$

Na figura 4 contrapomos respectivamente as velocidades $v(t)$ obtidas pelos métodos de verlet original, velocity verlet e Runge Kutta com a solução exata.

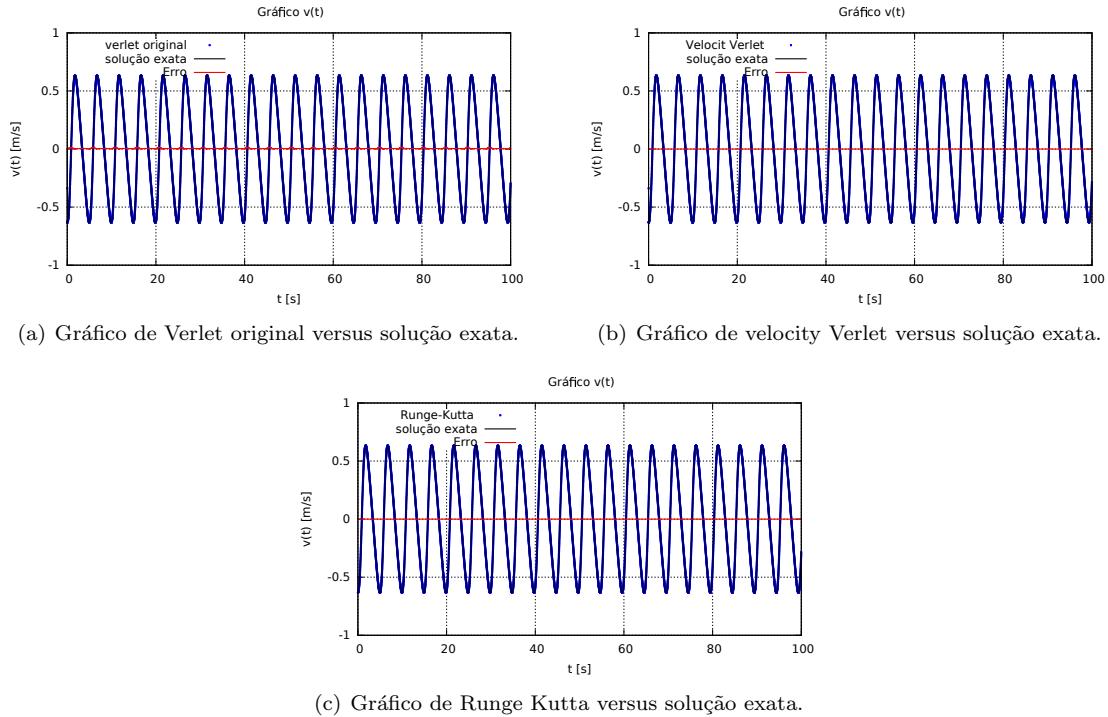


Figura 4: Gráficos comparando as velocidades obtidas pelos métodos de verlet original, velocit verlet e Runge-Kutta com a solução exata

Na figura 5 tem-se dois gráficos que mostram respectivamente os erros absolutos da posição e da velocidade para os três métodos. Observe que a solução exata para a posição e para a velocidade são dados pela equação 2 e 4 respectivamente, note que tanto para a obtenção da posição quanto para a da velocidade o método de Runge Kutta se mostrou o mais preciso, já que seu erro se mostrou como sendo o menor.

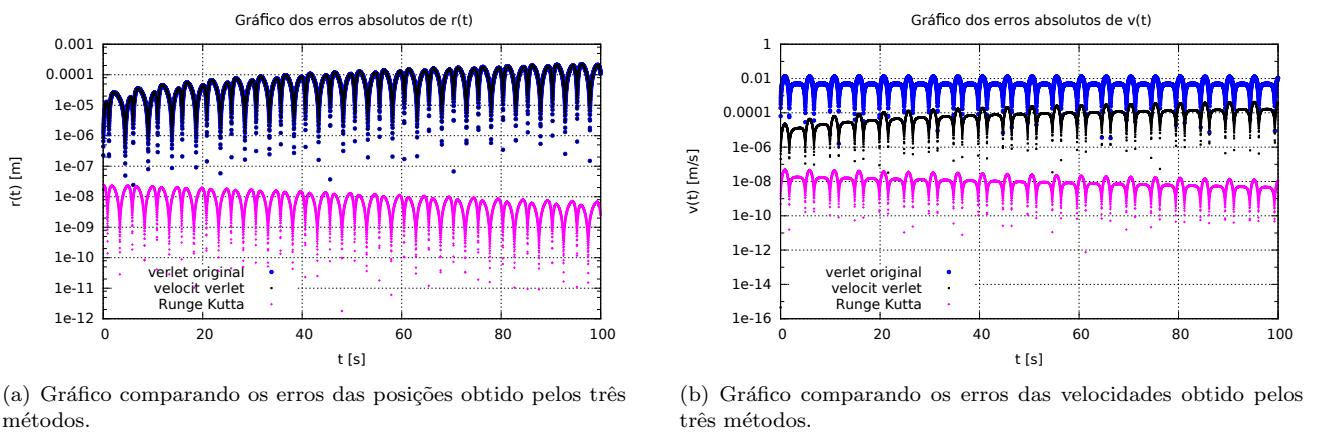


Figura 5: Gráficos dos erros absolutos para $r(t)$ e $v(t)$.

b-

Os cálculos de energia cinética (K), energia potencial (U) e energia mecânica (E) foram implementados nos programas "*ex01a.f90*" e "*ex01aRunge – kutta.f90*", que por sua vez retornou dados sobre as energias da partícula nos respectivos arquivos *.dat* de cada método.

O gráfico 6 mostra as três energias da partícula obtidas pelo método **Runge Kutta**.

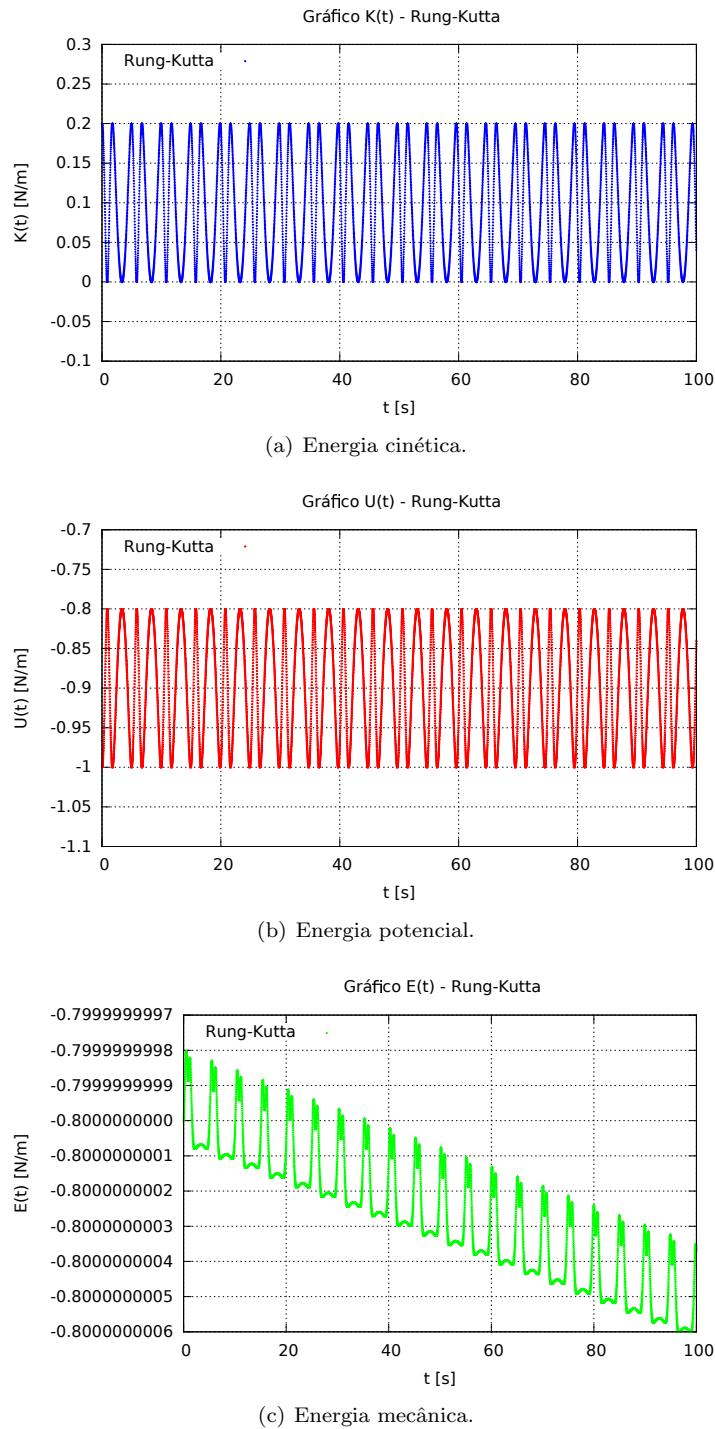


Figura 6: Gráficos das energias calculadas pelo método de Runge Kutta.

O gráfico 7 mostra as três energias da partícula obtidas pelo método **Verlet original**.

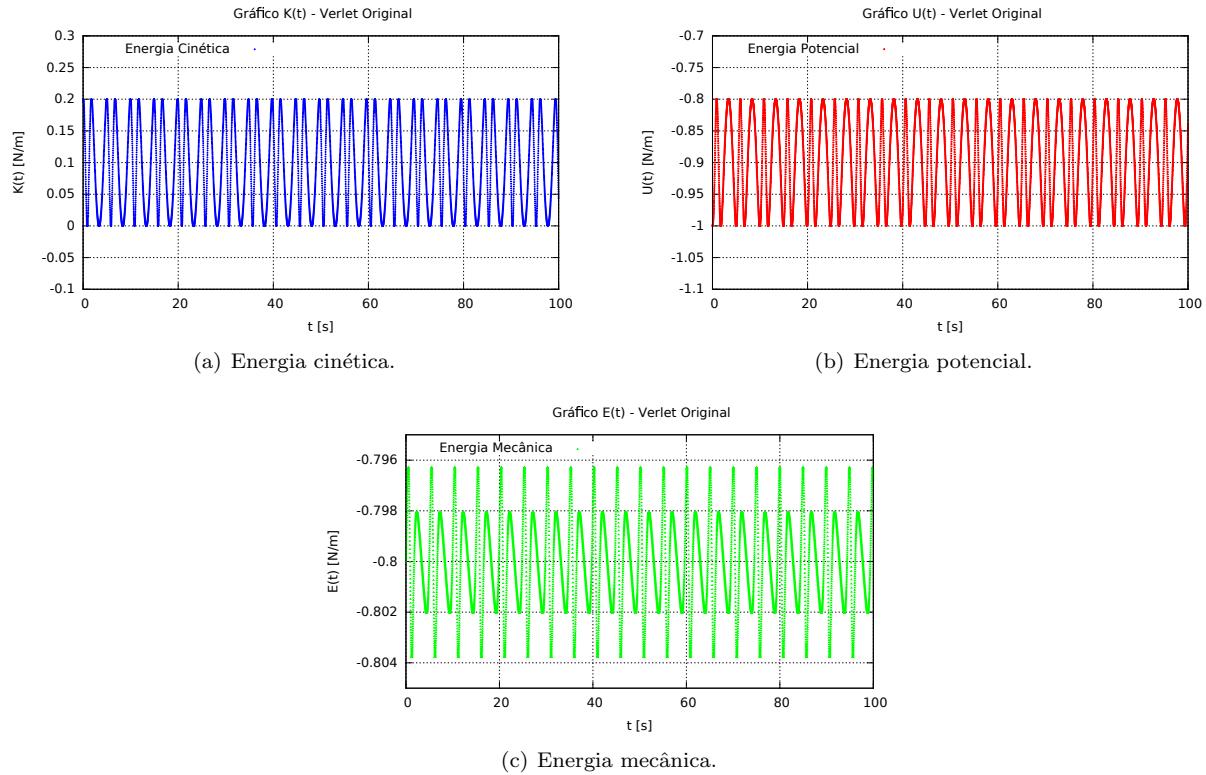


Figura 7: Gráficos das energias calculadas pelo método de Verlet original.

O gráfico 8 mostra as três energias da partícula obtidas pelo método **Velocity Verlet**.

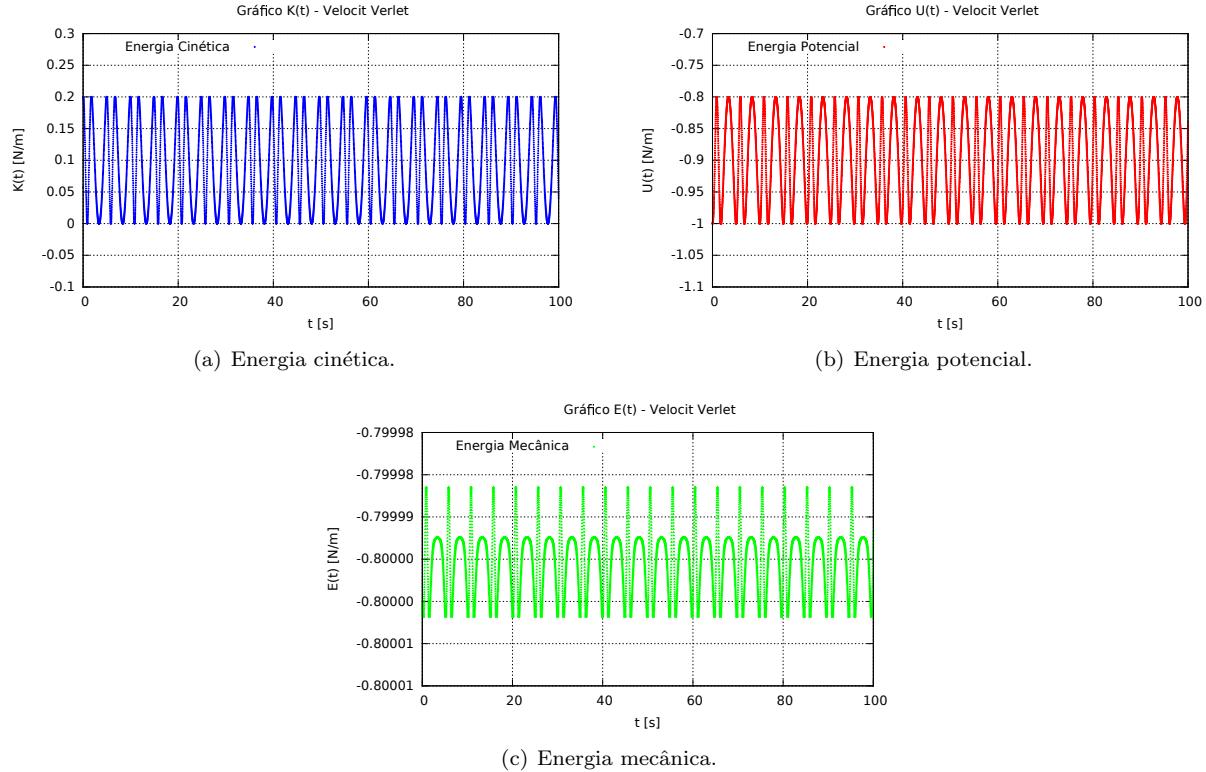


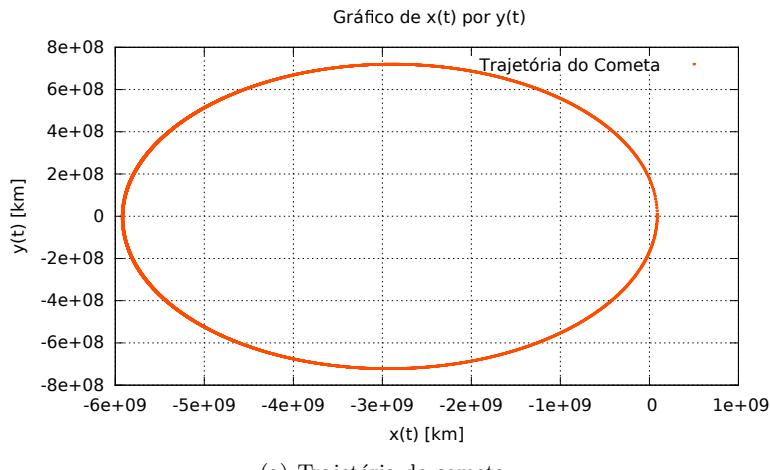
Figura 8: Gráficos das energias calculadas pelo método de Velocity Verlet.

Exercício 2:

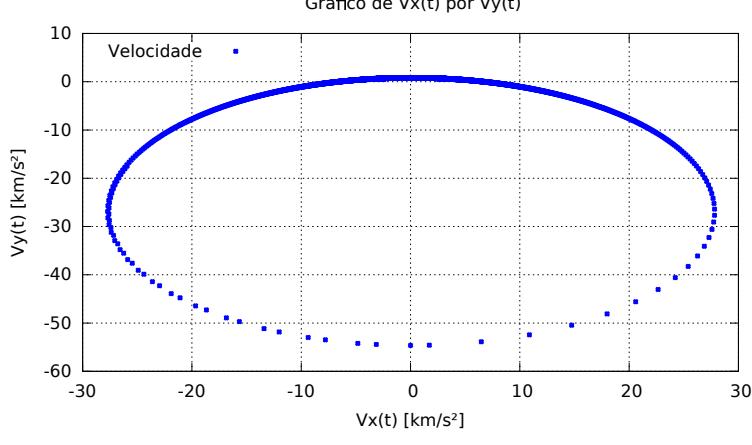
Nesta questão foi simulado a passagem de um cometa de massa $M_h = 2.2 \times 10^{14} \text{ Kg}$ perto de uma estrela cuja massa vale $M_s = 2.0 \times 10^{30} \text{ Kg}$. Nos consideramos que a estrela estava parada na origem do sistema e consideramos também que a força que a estrela exerce no cometa seja dada pela lei da gravitação de Newton : $\vec{F}(r) = -\frac{GM_s M_h}{r^2} \hat{r}$ com $G = 6.67408 \times 10^{-20} \text{ Km}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Foi feito tudo em um único programa cujo nome é "ex02a.f90".

a-

Nessa alternativa uma variação do método velocity Verlet foi aplicada. A aceleração tanto na componente i quanto na componente j dependem de $x(t)$ e $y(t)$, então o algoritmo foi aplicado simultaneamente para o movimento em i e em j. Foram encontrados os valores $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ e $v_y(t)$ a partir disso os gráficos 9a e 9b foram construídos. O valor da discretização foi escolhido de modo que ao final dos passos o cometa evolua algo próximo de 90 anos e complete sua órbita entorno da estrela, $\Delta t = \frac{t_f - t_i}{N}$ onde t_f é o tempo final em segundos, t_i é o tempo inicial em segundos e N é o número de intervalos. E essa discretização nos dá intervalos de tempo muito grandes já que estipulei que t_f valha 90 anos, no entanto se aumentarmos N conseguimos pegar intervalos menores porém, o computador não consegue compilar o programa que chega até a travar, por esse motivo escolhi um intervalo de tempo maior com um número menor de intervalos para completar a simulação, cerca de 10 mil intervalos .



(a) Trajetória do cometa.



(b) Velocidade do cometa.

Figura 9: Gráficos da posição e da velocidade do cometa.

b-

Aqui foi pedido para que graficasse as energias potencial, cinética e mecânica e também o módulo do momento angular do cometa. Isso está disposto na figura 10 que se encontra abaixo. Na figura 11 tem-se um único gráfico contendo todas as três formas de energia.

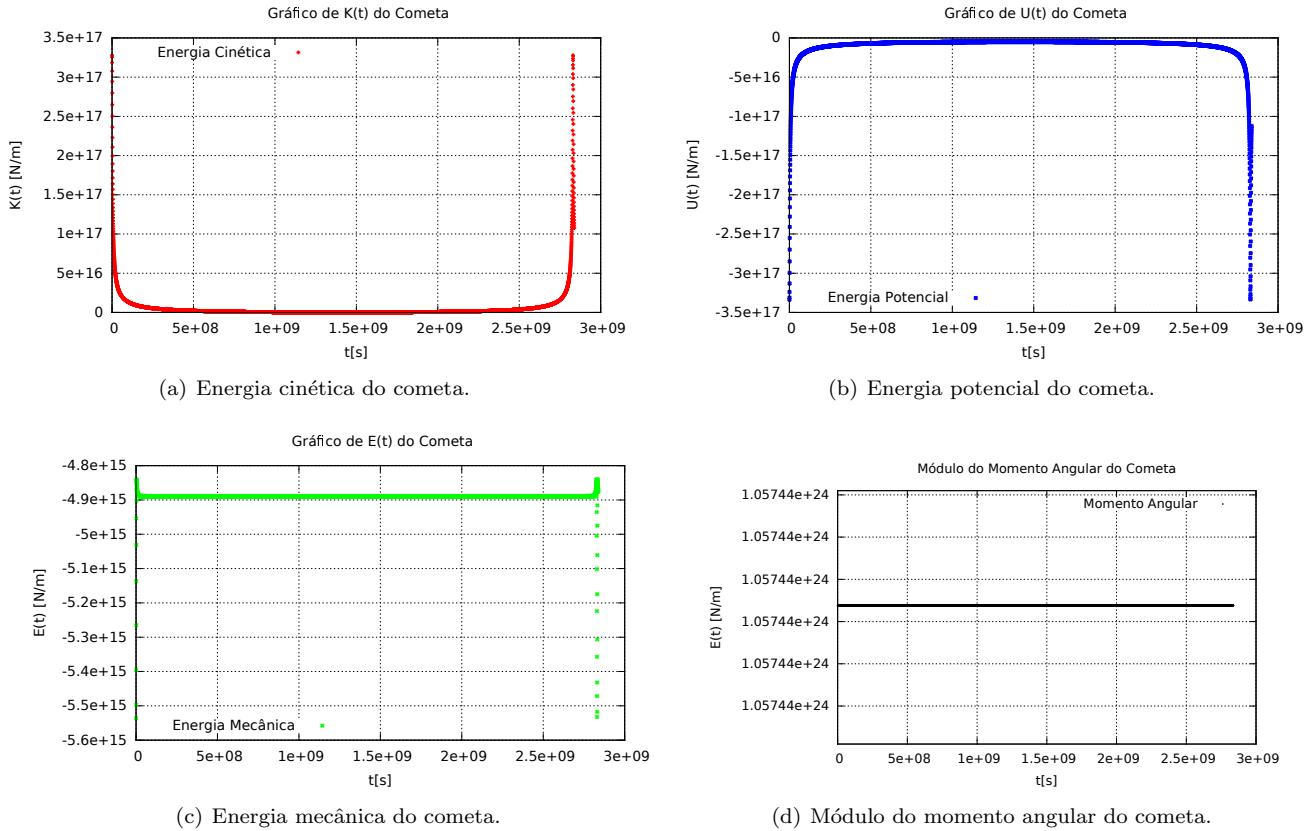


Figura 10: Gráficos das energias cinética, potencial e mecânica e gráfico do módulo do momento angular.

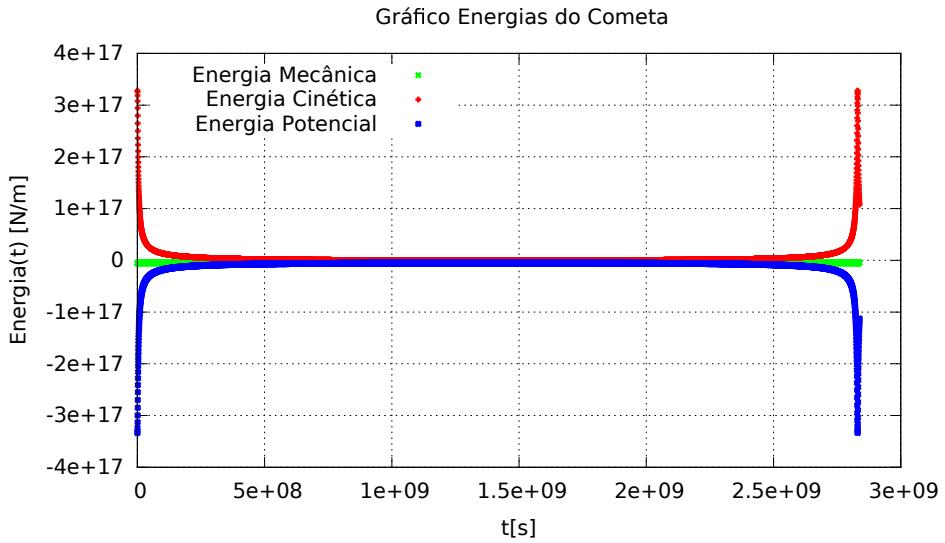


Figura 11: Gráfico único contendo as energias cinética, potencial e mecânica .

Sim, a trajetória deste cometa é uma órbita fechada como podemos ver na figura 9a, que mostra a sua trajetória ao redor da estrela. Eu calculei o período teórico deste cometa através da conservação de energia e da lei dos períodos e cheguei a um período teórico bem interessante. Observe os cálculos feitos estão apresentados abaixo.

Inicialmente tem-se as energias inicial e final, dadas respectivamente por 5 e 6:

$$E_i = \frac{M_h v_0^2}{2} - \frac{GM_h M_s}{r_0} \quad (5)$$

$$E_i = \frac{M_h v_f^2}{2} - \frac{GM_h M_s}{r} \quad (6)$$

Sabe-se que $F = ma$ e como se trata de um cometa em órbita consta que a aceleração do cometa é uma aceleração centrípeta, assim consegue-se encontrar v_f de forma bem tranquila e substitui-lo na equação 6, assim tem-se:

$$E_i = -\frac{GM_h M_s}{2r} \quad (7)$$

Agora que sabe-se a equação 7 foi possível encontrar o valor do semi eixo maior da órbita do cometa, r . Ao igualar as energias final e inicial encontrei que r é dado pela equação 8 abaixo:

$$r = -\frac{GM_h M_s}{2E_i} \Leftrightarrow r = -\frac{GM_s r_0}{v_0^2 r_0 - 2GM_s} \quad (8)$$

Assim pela lei dos períodos e pela equação 8 que me fornece o valor do semi eixo maior da trajetória do cometa encontrei um valor para o período teórico do cometa em anos, que se encontra abaixo:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_s}} \Rightarrow T = 74.486 \quad (9)$$

Observe que o erro entre o período que estipulei, de 90 anos, e o período teórico encontrado é de cerca de 20%.

Bibliografia

- [1] J. D. Faires e R. L. Burden. Numerical Methods (3 rd ed.)
- [2] F. L. Moraes Barboza et al., Rev. Bras. Ens. Fís. 29 (2007) 543.
- [3] C. Scherer. Metodos Computacionais da Física (2nd ed.,2010)
- [4] AULAS 21 E 22: FIS-271 - Física Computacional I
- [5] AULAS 17 E 18: FIS-271 - Física Computacional I