AULAS 11 E 12: FIS271 - Física Computacional I

Exercício 1. Considere o circuito elétrico representado pela Figura 1. De acordo com as leis de Kirchhoff é possível definir três laços independentes. Escolhendo o primeiro laço como passando pela fonte e pelas resistências r_1 e r_2, e o segundo e terceiro laços como, respectivamente, à esquerda e à direita do amperímetro, as equações de voltagem para cada laço são dadas pelo sistema linear:

$$\begin{aligned} r_s i_1 + r_1 i_2 + r_2 i_3 &= \nu_0 \\ -r_x i_1 + (r_1 + r_x + r_a) i_2 - r_a i_3 &= 0 \\ -r_3 i_1 - r_a i_2 + (r_2 + r_3 + r_a) i_3 &= 0 \end{aligned}$$

as quais podem ser escritas na forma matricial como

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{V} \quad ,$$

onde

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

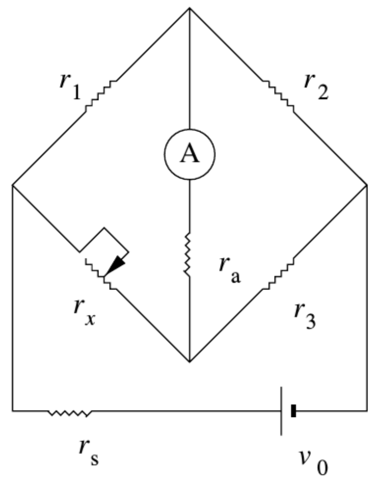

Figura 1: Circuito elétrico de uma ponte de Wheatstone. As resistências internas r_s e r_a indicam componentes não ideais.

a) Escreva a expressão analítica para a matriz **R**.
b) Considere o método de decomposição LU (vide páginas 26 à 29 da Ref. [1]) para matrizes $n \times n$, onde a matriz **R** é reescrita como a multiplicação das matrizes **L** e **U**. Escreva as expressões analíticas para matrizes **L** e **U**, isto é, explicitando como os seus elementos em função das resistências.
c) Implemente o método de decomposição LU para a solução de sistemas lineares envolvendo matrizes $n \times n$ e use-o para encontrar numericamente o vetor solução **i** assumindo $\nu_0 = 1.5\,\mathrm{V}$, $r_1 = r_2 = 100\,\Omega$, $r_3 = 150\,\Omega$, $r_x = 120\,\Omega$, $r_a = 1000\,\Omega$ e $r_s = 10\,\Omega$.
d) Qual será a corrente i_a no amperímetro? Indique se a ponte está balanceada.

Exercício 2. A interpolação de um conjunto de $n+1$ dados experimentais (x_k, y_k), com $k = 0, \ldots, n$, pode ser realizada utilizando um polinômio $p(x)$ de grau n,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad , \tag{1}$$

impondo que $p(x_k) = y_k \ \forall \ k$. Tais condições podem ser escritas na forma de um sistema linear $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{y}$, onde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & x_0^{n-2} & \ldots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \ldots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \ldots & x_n & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad .$$

a) Utilize o método de decomposição LU para encontrar os coeficientes a_k da função polinomial $p(x)$ que interpola os dados experimentais do arquivo *planck.dat.*
b) Faça um gráfico com os dados experimentais e inclua também a curva da função polinomial $p(x)$ encontrada no item (a) dentro do intervalo $x \in [0.01, 1.0]$. Verifique (visualmente) se a curva passa pelos pontos experimentais.
c) Faça um gráfico para comparar o polinômio $p(x)$ encontrado com a função exata para a distribuição de Planck

$$P(x) = \frac{1}{x^5 [e^{\frac{1}{x}} - 1]} \quad .$$

d) Obtenha expressões analíticas para as derivadas $p'(x)$ e $P'(x)$ e faça o gráfico incluindo as duas funções obtidas. Comente sobre quão semelhante são essas duas curvas em termos dos pontos de máximo, mínimo e/ou de inflexão.

Referências:

[1] F. J. Vesely. Computational Physics: An Introduction (2nd ed., 2001).
[2] C. Scherer. Métodos Computacionais da Física (2nd ed.,2010).