Politécnica UFRJ

Metodos Matematicos para Engenharia Eletrônica

Trabalho do Grupo

Prof. Eduardo Nunes

Grupo 3:

Nome: André Leão……………..……………………..……………………..……..DRE: 121078556

Nome: Lincoln Rodrigues Proença………..…………………………………...DRE:121076407

Nome: Luiz Fernando Perrout……...……………………....………………...DRE: 121055778

Nome: Pedro Nunes……………...…………………………………………...DRE: 121063250

Nome: Theo Rudra……………………………………………………………...DRE: 121096596

Sumário

Desenvolvimento 1

Enunciado da questão:

1. Considere a seguinte função

$$f(x) = \sqrt{x}$$

(a) Encontre os polinômios de Taylor do grau 1 até o grau 4 em torno de $x = 16$. Para cada um dos polinômios obtidos faça uma figura com o gráfico de $f(x)$ e do polinômio $P_i(x), i = 1, \ldots, 4$ (4 figuras). Comente como os polinômios convergem para $f(x)$. Considere o seguinte intervalo $0 \leq x \leq 32$ para gerar as figuras.

(b) Use a desigualdade de Taylor para estimar a exatidão da aproximação $f(x) \approx P_4(x)$ no seguinte intervalo $16 \leq x \leq 17$. Verifique o resultado obtido plotando $R_n(x)$ no intervalo considerado.

Para resolução do sub item (a) desta questão, primeiramente, foram calculadas as derivadas até a quinta ordem e , após isso, foram calculados os valores para as derivadas em x=16, estes que seriam posteriormente utilizados para encontrar os polinômios de Taylor:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{4} x^{\frac{-3}{2}}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot x^{\frac{-5}{2}} = \frac{3}{8} x^{\frac{-5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2} \cdot x^{\frac{-7}{2}} = \frac{-15}{16} x^{\frac{-7}{2}}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2} \cdot \frac{-7}{2} \cdot x^{\frac{-9}{2}} = \frac{105}{32} x^{\frac{-7}{2}}$$

$$f(16) = 16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$f'(16) = \frac{1}{2} 16^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$f''(16) = \frac{-1}{4} 16^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{256}$$

$$f'''(16) = \frac{3}{8} 16^{\frac{-5}{2}} = \frac{3}{8192}$$

$$f''''(16) = \frac{-15}{16} 16^{\frac{-7}{2}} = \frac{-15}{2^{18}}$$

Posteriormente, foram calculados os respectivos polinômios de Taylor :

$$P_i(x) = \sum_{n=0}^{i} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

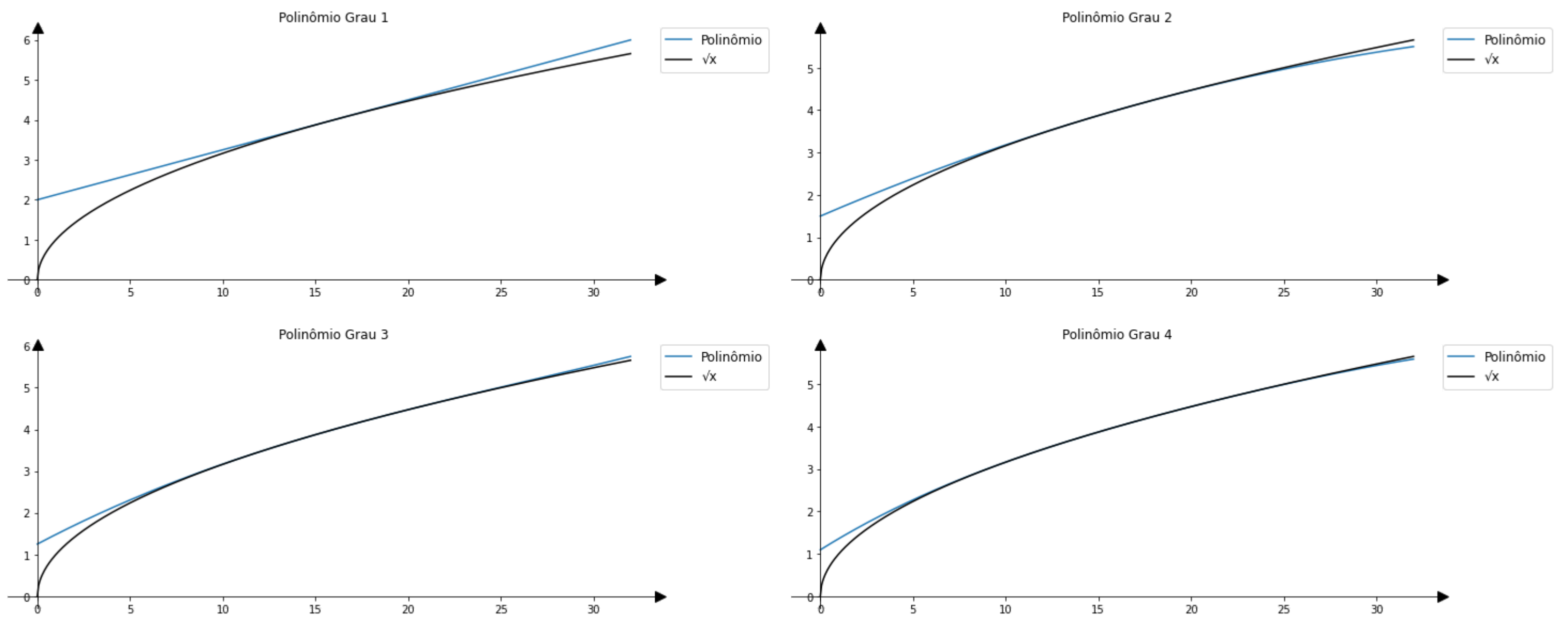
$$P_1(x) = 4 + \frac{(x-16)}{8}$$

$$P_2(x) = 4 + \frac{(x-16)}{8} - \frac{1}{256} \cdot \frac{(x-16)^2}{2!}$$

$$P_3(x) = 4 + \frac{(x-16)}{8} - \frac{1}{256} \cdot \frac{(x-16)^2}{2!} + \frac{3}{8192} \cdot \frac{(x-16)^3}{3!}$$

$$P_4(x) = 4 + \frac{(x-16)}{8} - \frac{1}{256} \cdot \frac{(x-16)^2}{2!} + \frac{3}{8192} \cdot \frac{(x-16)^3}{3!} - \frac{15}{2^{18}} \cdot \frac{(x-16)^4}{4!}$$

Com os Polinômios de Taylor em mãos foi possível plotar os gráficos da função juntamente com os polinômios, onde é possível fazer uma análise qualitativa da aproximação:



Para resolução do sub item (b) desta questão foi utilizada a derivada de quinta ordem, anteriormente calculada e a desigualdade de taylor para encontrar um majorante para o resto da seguinte forma:

Desigualdade de Taylor Se $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, então o resto $R_n(x)$ da série de Taylor satisfaz a desigualdade

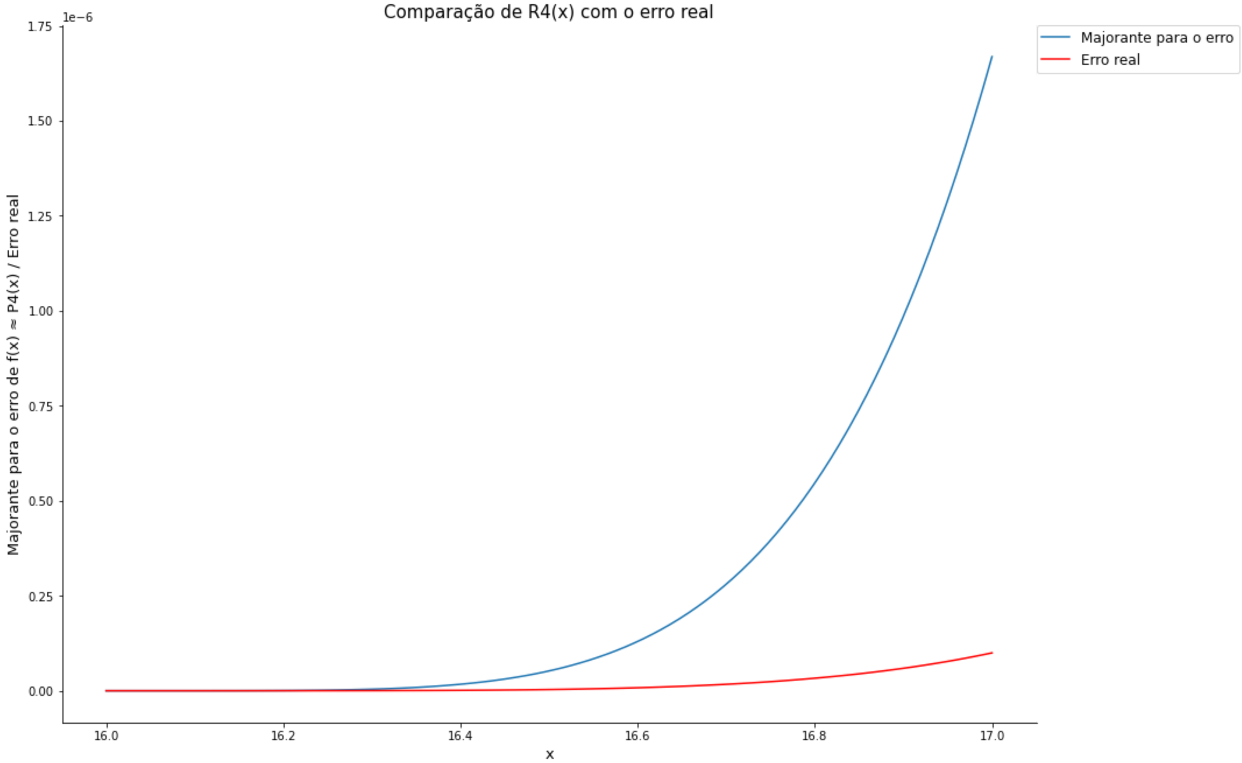
$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Para 16 < x < 17,

$$M = |f^{(5)}(16)| = \frac{105}{32}\,16^{\frac{-7}{2}} = \frac{105}{524288}$$

$$|R_4(x)| \leq \frac{M}{5!}|x - 16|^5$$

Dessa forma, é possível plotar um gráfico do resto em função de x, onde é possível fazer uma análise quantitativa do erro da aproximação.



Desenvolvimento 2

Enunciado da questão:

2. A resistividade ρ de um fio condutor é o recíproco da condutividade podendo ser medido em ohm-metros $(\Omega \cdot m)$. A resistividade de um dado metal depende da temperatura de acordo com a seguinte equação

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)},$$

sendo que t é a temperatura em ^oC. Existem tabelas que listam o valor de α (chamado de coeficiente de temperatura) e ρ_{20} (a resistividade em 20^oC) para vários metais. Em condições climáticas normais a resistividade varia quase de forma linear com a temperatura sendo comum aproximar $\rho(t)$ por seu polinômio de Taylor de primeiro ou segundo grau em $t = 20^oC$.

   (a) Encontre expressões para essas aproximações linear e quadrática.

   (b) Considerando o cobre, temos que $\alpha = 0.0039/^oC$ e $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8}\Omega - m$. Faça um gráfico da função $\rho(t)$ e dos seus polinômios de Taylor de primeiro e segundo graus para $-250^oC \leq t \leq 1000^oC$.

   (c) Faça uma figura para verificar os valores de t para os quais a aproximação linear fica dentro de uma faixa de 1% do valor exato da resistividade. Indique o intervalo de valores observado com uma casa decimal.

Para resolução do sub item (a) desta questão, foi realizado o cálculo das expressões para os polinômios de Taylor de primeiro e segundo grau. Para realização desses cálculos foi preciso saber as derivadas de primeira e segunda ordem, sendo estas:

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)} \qquad \rho(20) = \rho_{20} e^{\alpha(20-20)} = \rho_{20}$$

$$\rho'(t) = \rho_{20} \alpha e^{\alpha(t-20)} \qquad \rho'(20) = \rho_{20} \alpha e^{\alpha(20-20)} = \rho_{20}\alpha$$

$$\rho''(t) = \rho_{20} \alpha^2 e^{\alpha(t-20)} \qquad \rho''(20) = \rho_{20} \alpha^2 e^{\alpha(20-20)} = \rho_{20}\alpha^2$$

Com isso as expressões ficaram da seguinte forma:

Inicialmente temos a seguinte função para a resistividade:

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

Usando o Polinômio de Taylor:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Foram encontrados:

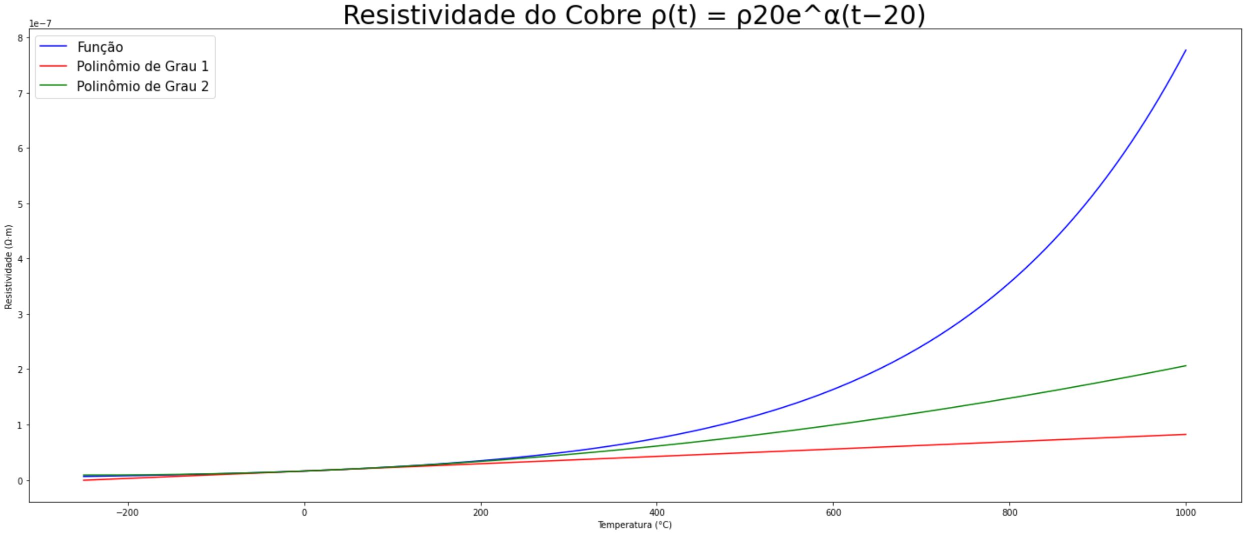
$$P_1(t) = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha(t-20))$$

$$P_2(t) = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha(t-20) + \alpha^2 \frac{(t-20)^2}{2})$$

Onde:

$$\rho_{20} = 1.7 \cdot 10^{-8} \qquad \alpha = 0.0039$$

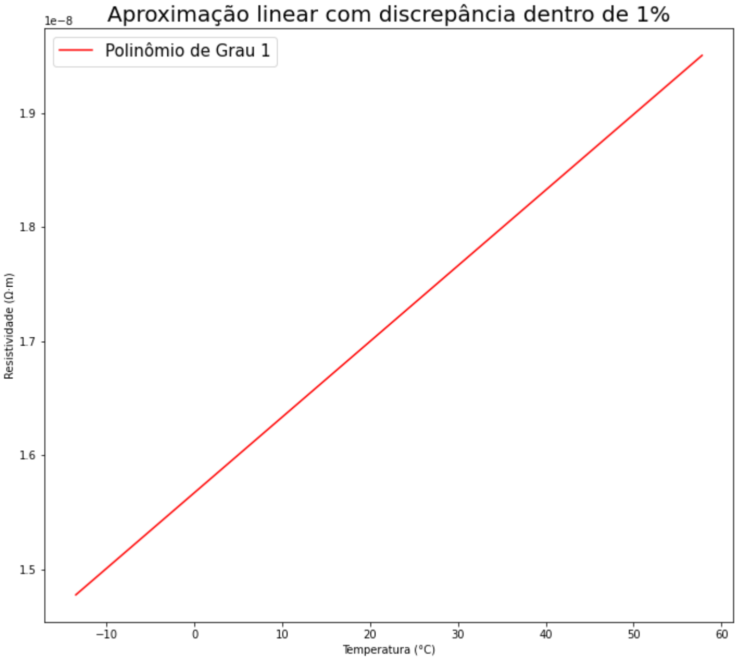
Para resolução do sub item (b) desta questão foi realizada a representação gráfica da temperatura pela resistividade, para isto foi definido um eixo "X" dentro do intervalo de -250 a 1000 e 3 variáveis ("Y0" representando a função, "Y1" o polinômio de grau 1 e "Y2" o polinômio de grau 2). Por fim, foi feito um gráfico contendo as 3 curvas para observar o comportamento de resistividade e dos polinômios com o aumento da temperatura. Esse gráfico ficou da seguinte forma:

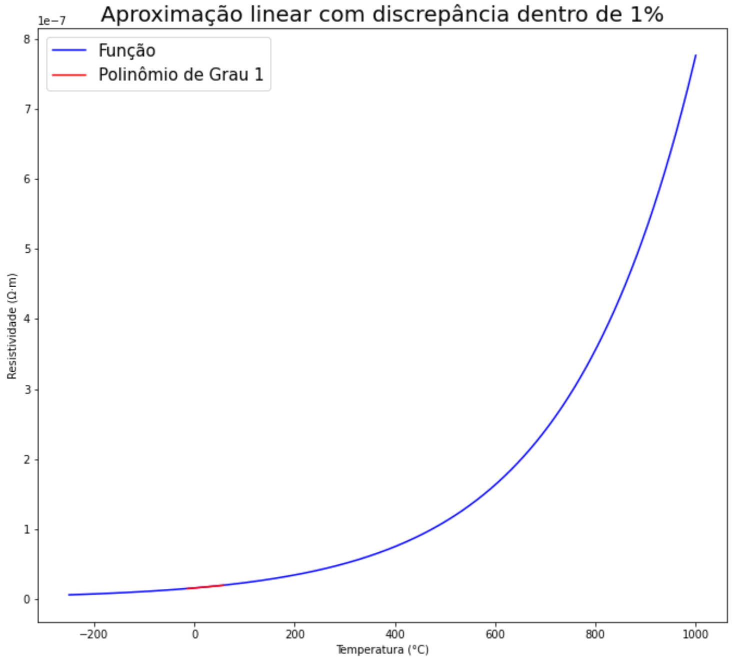


Para resolução do sub item (c) desta questão foram verificados os valores de t, tais que:

$$\frac{|\rho(t) - P_1(t)|}{\rho(t)} \cdot 100 \leq 1$$,onde $\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$ e $P_1(t) = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha(t-20))$

Após isso, é possível plotar o gráfico que representa os valores de t para os quais a aproximação está dentro de uma faixa de 1% do valor real, ou seja, a discrepância relativa entre os dois valores é menor ou igual a 1%. O gráfico ficou da seguinte forma:





Com o resultado do programa, foi possível observar que os valores de x que satisfazem a restrição são aproximadamente:

$$-13,5 \leq x \leq 57,8$$

Desenvolvimento 3

Enunciado da questão:

3. Considere a função complexa

$$w = f(z) = z^2 + 2z + 2,$$

sendo que $z = x + iy$, $w = u + iv$. Considere que $-4 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 2$.

(a) Determine todos os valores de z = x +iy que são mapeados por meio da função $w = f(z) = z^2 + 2z + 2$ no eixo imaginário do plano complexo w, i.e., $\text{Re}(w) = 0$

(b) Determine todos os valores de z = x +iy que são mapeados por meio da função $w = f(z) = z^2 + 2z + 2$ no eixo real do plano complexo w, i.e., $\text{Im}(w) = 0$

(c) Determinar as raízes da equação $z^2+2z+2 = 0$

(d) Criar uma Figura em Pyhton plotando um gráfico 3D usando Surface do módulo plotly.graph_objs, sendo que as três dimensões espaciais serão dadas por x, y e u. Os valores de v devem ser representados por um mapa de cores (colorscale = 'jet'), sendo que a escala de cores deve aparecer na figura.

Além disso, nessa mesma figura devem ser plotadas as curvas para $u = 0$ **em preto** e $v = 0$ **em azul**. De modo a poder identificar graficamente as raízes da equação. Para cada uma das curvas encontradas vocês devem calcular os valores de x, y, u, v nos pontos iniciais e finais da curvas.

Os gráficos dessas curvas devem se estender até os limites da superfície, mas sem ultrapassá-los. Para plotar essas curvas vocês poderão usar Scatter3d (mode= 'lines ').

Por último, O título da figura deve ser a expressão de $f(z)$ e os eixos devem ser identificados por x, y e u.

Para resolução do sub item (a) desta questão.

Substituindo z = x + yi é possível encontrar:

$$w = f(z) = z^2 + 2z + 2 = (x + yi)^2 + 2(x + yi) + 2 = x^2 - y^2 + 2xyi + 2x + 2yi + 2$$

$$w = (x^2 - y^2 + 2x + 2) + i(2xy + 2y)$$

Após isso, separando a parte real e igualando a zero é possível encontrar:

$$Re(w) = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 + 2x + 2 = 0$$

$$(x + 1)^2 - y^2 = -1$$

$$y^2 - (x + 1)^2 = 1$$

Para resolução do sub item (b) desta questão foi separada a parte imaginária anteriormente encontrada e igualada a zero da seguinte forma:

$$Im(w) = 0 \Rightarrow 2xy + 2y = 0$$

$$xy + y = 0$$

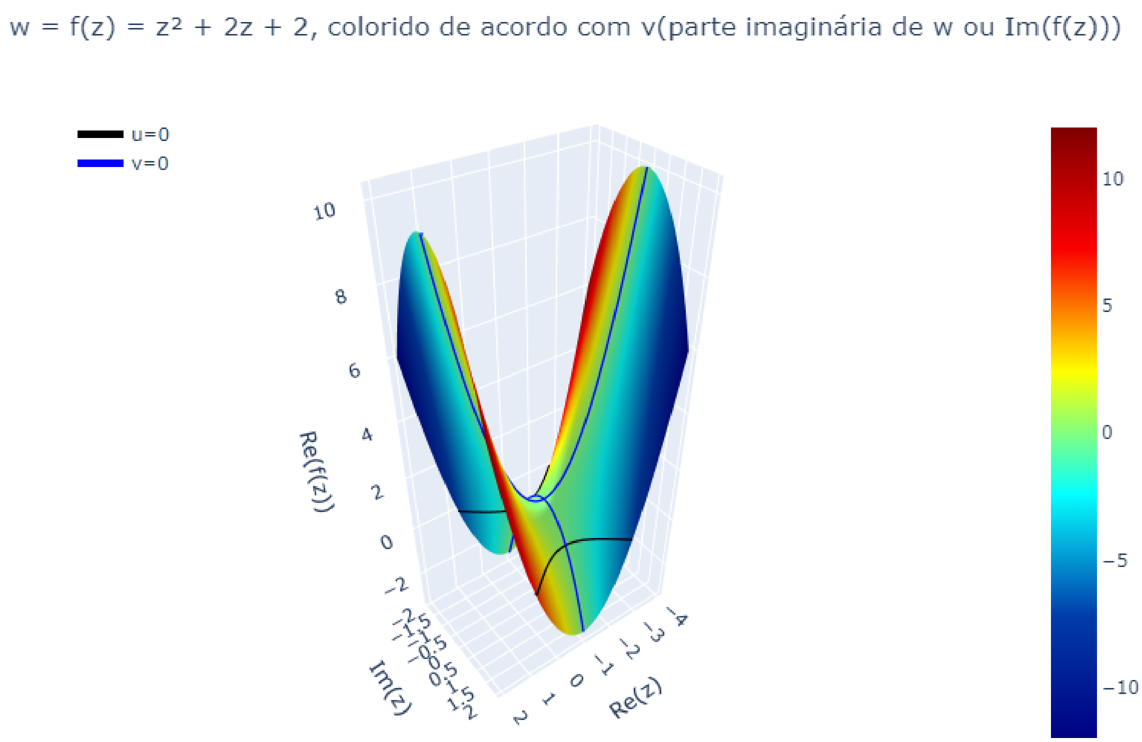
$$y = 0 \quad ou \quad x = -1$$

Para resolução do sub item (c) desta questão foi observado que, para encontrar as raízes da equação era necessário atender às duas restrições anteriores, ou seja, resolver o sistema Re(w)=0 e Im(w)=0.

$Caso\ 1$	$Caso\ 2$
$y = 0$	$x = -1$
$(x + 1)^2 = -1$	$y^2 = 1$
$x \notin \Re$	$y = \pm 1$

$$z = -1 \pm i$$

Para resolução do sub item (d) desta questão, foi criado um gráfico 3d em python que pode ser encontrado no jupyter notebook e em um html separado. O gráfico tem a seguinte aparência:



Desenvolvimento 4

Enunciado da questão:

4. Usando o método dos resíduos, encontre a função causal $f(t)$ cuja Transformada de Laplace é dada por:

   (a) $\dfrac{s}{(s+2)(s+4)}$

   (b) $\dfrac{2s^2+8s+24}{(s+2)(s^2+4s+20)}$

Para a questão 4, utilizamos a relação de igualdade para Transformada inversa de Laplace e resíduos de polos simples.

$$L^{-1}\{f(s)\} = \sum(Res[f(s)e^{st}])$$

Para os dois subtópicos o processo foi o mesmo, primeiramente foi igualada a transformada inversa de Laplace e os resíduos de polos simples para os f(x). Posteriormente a isto, foram determinados os polos simples, tornando possível assim a descoberta da função causal.

$$Res_{x=a}[f(x)] = \lim_{x \to a} (f(x)(x-a))$$

a)

$$L^{-1}\{\frac{s}{(s+2)(s+4)}\} = \sum(Res[\frac{se^{st}}{(s+2)(s+4)}])$$

$$\frac{se^{st}}{(s+2)(s+4)} \; possui\ polos\ simples\ em \quad s=-2 \quad e \quad s=-4$$

$$\sum(Res[\frac{se^{st}}{(s+2)(s+4)}]) = \lim_{s \to -2}(\frac{s(s+2)e^{st}}{(s+2)(s+4)}) + \lim_{s \to -4}(\frac{s(s+4)e^{st}}{(s+2)(s+4)})$$

$$L^{-1}\{\frac{1}{(s+2)(s+4)}\} = \lim_{s \to -2}(\frac{se^{st}}{(s+4)}) + \lim_{s \to -4}(\frac{se^{st}}{(s+2)}) = \frac{-2e^{-2t}}{2} + \frac{-4e^{-4t}}{-2} = 2e^{-4t} - e^{-2t}$$

b) $L^{-1}\{\frac{2s^2+8s+24}{(s+2)(s^2+4s+20)}\} = \sum(Res[\frac{(2s^2+8s+24)e^{st}}{(s+2)(s^2+4s+20)}])$

$\frac{(2s^2+8s+24)e^{st}}{(s+2)(s^2+4s+20)}$ *possui polos simples em* $s =- 2 \quad s =- 2 + 4i \quad e \quad s =- 2 - 4i$

$$\lim_{s \to -2}(\frac{(s+2)(2s^2+8s+24)e^{st}}{(s+2)(s^2+4s+20)}) + \lim_{s \to -2+4i}(\frac{(s+2-4i)(2s^2+8s+24)e^{st}}{(s+2)(s^2+4s+20)}) + \lim_{s \to -2+4i}(\frac{(s+2-4i)(2s^2+8s+24)e^{st}}{(s+2)(s^2+4s+20)})$$

$$\lim_{s \to -2}(\frac{(2s^2+8s+24)e^{st}}{(s^2+4s+20)}) + \lim_{s \to -2+4i}(\frac{(2s^2+8s+24)e^{st}}{(s+2)(s+2+4i)}) + \lim_{s \to -2+4i}(\frac{(2s^2+8s+24)e^{st}}{(s+2)(s+2-4i)})$$

$$(\frac{16e^{-2t}}{16}) + (\frac{-16e^{(-2+4i)t}}{(4i)(8i)}) + (\frac{-16e^{(-2-4i)t}}{(-4i)(-8i)}) = e^{-2t} + \frac{(e^{(-2+4i)t}+e^{(-2-4i)t})}{2}$$

$$e^{-2t} + e^{-2t}\frac{(e^{4it}+e^{-4it})}{2} = e^{-2t} + e^{-2t}cos(4t)$$