Études

ESTIMATION D'UNE STRUCTURE PAR TERME DES TAUX D'INTÉRÊT SUR DONNÉES FRANÇAISES

La structure par terme des taux d'intérêt, à savoir la relation entre les durées des placements et des emprunts et les taux d'intérêt qui leur sont associés, est utilisée tant par les opérateurs des marchés financiers que par les économistes. Les premiers cherchent à détecter des produits financiers sur- ou sous-évalués tandis que les seconds s'intéressent aux anticipations de taux d'intérêt. Cette différence d'utilisation s'est traduite par des méthodes de mesure spécifiques. À la technologie sophistiquée des taux zéro-coupon des salles de marchés s'oppose la mesure plus directe des taux de rendement actuariels des économistes. On montre ici que les deux approches conduisent à des résultats quantitativement assez proches. Cependant, l'avantage relatif de l'estimation d'une courbe de taux zéro-coupon réside dans la souplesse de son utilisation et dans
la capacité d'en déduire les taux à terme implicites. Cet avantage semble être de plus en plus reconnu car il permet de représenter les anticipations des marchés. Cet article présente les travaux réalisés à la Banque de France dans cette optique et la méthode choisie pour construire les courbes de taux zéro-coupon qui seront désormais publiées dans le chapitre 5.1.4. de chaque numéro du *Bulletin de la Banque de France*.

ROLAND RICART
PIERRE SICSIC
Direction des Études économiques et de la Recherche [1]
Service d'Études macroéconomiques sur la France

[1] Antoine Frachot et Anne-Marie Rieu ont participé au travail dont cet article rend compte.

Études

Centre de recherche

1. Notations et définitions

1.1. Bon et taux zéro-coupon

La construction d'une structure par terme des taux d'intérêt fait le plus souvent référence à la notion de bon zéro-coupon [1]. Un bon zéro-coupon de maturité *m*, noté $B(t,m)$, correspond à la valeur aujourd'hui (en *t*) d'un franc payé dans *m* périodes, sans paiements intermédiaires. Le rendement implicite associé à ce bon représente le taux d'intérêt, noté $y(t,m)$, d'un bon zéro-coupon [2]. Une relation simple lie le bon à son taux, ce qui permet de travailler indifféremment sur l'un ou l'autre. Cette relation prend deux formes selon qu'elle est écrite en temps discret (1a) ou continu (1b). À un instant donné, la structure par terme des taux d'intérêt se définit comme la valeur prise par $y(t,m)$ pour différentes valeurs de *m*. Cependant, pour un prix donné, le taux de rendement du bon zéro-coupon est différent suivant le mode de calcul retenu. Sur la base d'un développement limité d'ordre deux, on montre que l'écart entre les taux discrets (y_d) et continus (y_c) est de l'ordre de la moitié du carré du taux discret (1c). Dans la mesure où les calculs en temps continu sont plus simples, c'est cette représentation qui est utilisée par la suite. Néanmoins, dans les graphiques présentés plus bas les taux zéro-coupon sont calculés sous forme discrète, afin de permettre la comparaison avec les données de taux d'intérêt habituellement observées sur les marchés.

(1a) temps discret : $B(t,m) = \dfrac{1}{(1+y_d(t,m))^m}$

(1b) temps continu : $B(t,m) = exp(-my_c(t,m))$

(1c) $y_d - y_c \cong \dfrac{y_d^2}{2}$

1.2. Taux à terme

Le taux à terme à la date *t*, pour la date future *t* + *n*, à l'échéance *t* + *m* (*m* > *n*), est par définition le rapport de l'opération double, à la date *t*, comprenant l'achat d'un bon zéro-coupon d'échéance *t* + *m*, et la vente d'un bon zéro-coupon d'échéance *t* + *n*. On appelle ce taux à terme, noté $f(t,n,m)$, le taux à terme « en *t* à *m* (périodes) pour *t* + *n* (dans *n* périodes) ». La limite de ce taux quand *n* tend vers *m*, noté $f(t,m)$, s'interprète comme le taux à terme instantané.

(2) $f(t,n,m) = -log\left(\dfrac{B(t,m)}{B(t,n)}\right)\dfrac{1}{m-n} = \dfrac{my(t,m)-ny(t,n)}{m-n}$

Le taux zéro-coupon à une échéance donnée est la moyenne des taux à terme successifs. Algébriquement, en notant $y(t,ld)$ le taux zéro-coupon en *t* d'échéance *t* + *ld*, et $f(t,id,d)$ le taux à terme en *t* pour la date *t* + *id* d'échéance *t* + *id* + *d*, on a, par définition des taux à terme :

[1] Une présentation détaillée se trouve dans Shiller (1990).
[2] Les taux d'intérêt utilisés sont sous la forme 0,08 pour indiquer un taux de 8 %.

(3) $y(t, ld) = \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{l-1} f(t, id, d)$

Études

Autrement dit, le taux zéro-coupon à 5 ans (l = 5, d = 1 an) est la moyenne des cinq taux suivants : le taux à terme dans 0 à un an (ce taux à terme est évidemment le taux zéro-coupon à un an), le taux à terme à un an dans un, deux, trois et quatre ans. De la même manière, le taux (comptant) à un an (l = 4, d = 1/4 d'année) est la moyenne du taux (comptant) à trois mois, et des taux à terme à trois, six et neuf mois. Cette décomposition peut être faite pour une fréquence plus élevée. Il est, par exemple, courant de présenter des courbes de taux à terme instantanés (pour lesquels m est très petit), le taux zéro-coupon en t de durée m est alors la moyenne de ces taux instantanés pour un horizon variant de t à $t + m$. Il est donc équivalent de connaître une courbe de taux zéro-coupon ou une courbe de taux à terme, l'une pouvant se déduire de l'autre. La présentation sous forme de taux à terme offre l'avantage de permettre une lecture des anticipations des marchés pour une date future. Si on s'engage aujourd'hui (t) sur un placement de durée m pour un horizon $t + n$ ($n < m$) qui aura un rendement de y (à la date $t + m$), c'est en anticipant que le taux de rendement entre $t + n$ et $t + m$ sera proche de y. L'approche qui identifie le taux à terme et l'anticipation du taux zéro-coupon comptant à venir consiste à admettre que la prime de terme, qui est l'écart entre le taux à terme et l'espérance du taux comptant qui sera en vigueur à l'horizon du terme, est nulle.

1.3. Prix et taux de rendement actuariel d'une obligation

Des titres sans coupon sont déjà cotés sur le marché français (BTF, OAT démembrées). Mais le spectre couvert par leur durée de vie résiduelle ou la faible liquidité de leurs marchés rend insuffisante leur utilisation pour construire une gamme complète des taux d'intérêt à une date donnée. La solution retenue consiste alors à extraire des bons avec coupons, comme les obligations, l'information dont on a besoin. On utilise le fait qu'une obligation peut s'interpréter comme un portefeuille de bons zéro-coupon. La valeur de marché d'une obligation, notée $P(t,m)$, de coupon c, de durée de vie résiduelle m années, exprimée en pourcentage du nominal, est égale à la somme actualisée des coupons restant à payer et du capital prêté. Le taux de rendement interne qui permet cette égalisation, noté $r(t,m)$, est le taux d'intérêt actuariel.

$$(4)\quad P(t,m) = c\sum_{i=1}^{[m]+1} \frac{1}{(1+r(t,m))^{m-[m]+i-1}} + \frac{100}{(1+r(t,m))^{m}}$$

où $[m]$ est la partie entière de m.

À chaque coupon c versé en $t+i-1$ correspond en $t+m-[m]+i-1$ un bon zéro-coupon $B(t, m-[m]+i-1)$, si bien que le prix de l'obligation est égal à une somme de prix de bons zéro-coupon :

$$(5)\quad P(t,m) = c\sum_{i=1}^{[m]+1} B(t, m-[m]+i-1) + 100\,B(t,m)$$

En principe, il y a une différence entre le taux de rendement actuariel d'une obligation de durée de vie restant à courir m, et le taux zéro-coupon de durée m. En effet, une obligation de durée de vie m peut s'interpréter comme un portefeuille constitué de m bons zéro-coupon payant un montant égal au coupon à chaque date de tombée, et d'un bon zéro-coupon payant le capital nominal à la date d'échéance de l'obligation. Le rendement actuariel de cette obligation peut donc s'interpréter, *grosso modo*, comme une moyenne de taux d'intérêt de bon zéro-coupon [1]. Cependant, avec des simulations portant sur différentes structures par terme de taux zéro-coupon (cf. graphique 1 en annexe), on montre que l'écart entre ces deux types de taux reste faible pour des échéances courtes. Pour des maturités inférieures à six ans, la différence entre les deux taux est comprise dans la fourchette de ± 0,1 point. Le sens de l'écart varie cependant en fonction de la pente de la structure des taux. Dans la mesure où le taux actuariel peut s'interpréter comme une moyenne de taux zéro-coupon, le taux actuariel est inférieur au taux zéro-coupon de même échéance lorsque la structure des taux est ascendante (voir les deux courbes croissantes du graphique 1). Ainsi, à structure des taux donnée, les variations de taux de rendement actuariel sont très proches de celles de taux zéro-coupon puisque l'écart entre taux zéro et taux actuariel varie peu. Au contraire, un renversement de la courbe des taux provoque un changement de signe de l'écart, et l'accroissement des taux actuariels est alors inférieur à celui des taux zéro-coupon (les deux courbes décroissantes du graphique 1 se coupent pour une durée de vie résiduelle proche de 9 ans). Si l'aspect visuel des courbes de taux actuariels ou de taux zéro-coupon n'est pas très différent, l'élaboration de taux zéro-coupon présente cependant un avantage majeur. Comme les taux zéro-coupon peuvent être calculés à toute échéance, ils permettent la détermination des taux à terme qui renseignent sur les anticipations de taux futurs.

2. Famille d'interpolation

Le principe de l'estimation des bons zéro-coupon consiste à donner une spécification analytique à $B(t, m)$ en fonction de m et de paramètres puis à estimer ces paramètres à une date donnée.

Il existe plusieurs méthodes pour estimer des courbes de taux zéro-coupon. Leur point de départ est le même : les données du marché ne permettent pas de reconstituer l'ensemble de la gamme des taux pour toutes les échéances ; il est donc nécessaire de contraindre la courbe des taux zéro-coupon à appartenir à une famille particulière de courbes (dite *famille d'interpolation*) avec un nombre raisonnable de paramètres à estimer. Cette famille d'interpolation doit être suffisamment grande pour contenir les principales formes caractéristiques de la gamme des taux (courbes des taux ascendantes, inversées, concaves, convexes…) mais être en même temps suffisamment restreinte pour pouvoir trouver rapidement celle qui s'ajuste le mieux à nos données à un instant précis.

Deux approches sont possibles pour préciser cette famille. La première repose sur des modèles d'équilibre où les agents maximisent leur utilité alors que la seconde est sans fondement théorique et vise à reproduire l'allure de la courbe de taux avec le moins de paramètres possible. Le choix entre ces deux voies dépend de l'utilisation que l'on souhaite faire de cette courbe. Ainsi, lorsque cette courbe doit être utilisée par des financiers pour détecter sur un marché les titres obligataires sur- ou sous-évalués ou pour évaluer des produits dérivés (options, contrats à terme…), la première voie est préférable car elle repose sur des modèles qui proposent une méthodologie cohérente d'évaluation des actifs dérivés. En revanche, si on souhaite seulement disposer de l'allure générale de la courbe à des fins d'analyse économique, alors il est raisonnable de se concentrer sur la seconde voie décrite.

---

[1] Rappelons que la relation entre :
– le prix en t d'une obligation de coupon c, et de durée de vie restant à courir m années, c'est-à-dire d'échéance $t+m$;
– le taux de rendement actuariel r de cette obligation ;
– les taux zéro-coupon $y(t, i)$, quand ils sont définis en temps discret, est :

$$P(t, m) = c \sum_{i=1}^{[m]+1} \frac{1}{(1+r(t, m))^{m-[m]+i-1}} + \frac{100}{(1+r(t, m))^{m}} = c \sum_{i=1}^{[m]+1} \frac{1}{(1+y(t, i))^{m-[m]+i-1}} + \frac{100}{(1+y(t, m))^{m}}$$

Le membre du milieu de cette relation correspond à la définition de la cotation d'une obligation. Le taux de rendement associé (r) est constant. Le membre de droite s'analyse comme un portefeuille de bons zéro-coupon d'échéances différentes. À chaque bon est associé un taux de rendement (y) spécifique. Le taux de rendement actuariel peut donc s'interpréter comme une moyenne de taux de rendement de bon zéro-coupon.

Quelle que soit l'orientation choisie *a priori*, des critères relativement simples doivent néanmoins permettre de faire une sélection parmi ces deux groupes. On cherche, en effet, une fonction dont le nombre de paramètres à estimer reste raisonnable et dont la forme est suffisamment souple pour pouvoir s'adapter à des configurations de marché très différentes. On souhaite aussi que la courbe obtenue soit relativement lisse pour faciliter la lecture des taux à terme. Compte tenu de ces critères, les familles d'interpolation issues de modèles théoriques ne sont pas satisfaisantes. Des comportements numériques erratiques et des durées d'estimation relativement longues rendent leur interprétation et leur utilisation souvent difficiles [1]. On préfère donc retenir une fonction issue de la voie pragmatique.

Parmi ces fonctions, plusieurs spécifications sont disponibles. Les tests réalisés montrent cependant que la fonction proposée par Nelson et Siegel (1987) répond à la plupart des critères invoqués. Le point de départ consiste à supposer que le taux à terme est la solution d'une équation différentielle du deuxième ordre qui prend la forme suivante :

$$(6)\quad f(t,m,\alpha) = \mu_1 + \mu_2 e^{\left(-m/\tau_1\right)} + \mu_3 \frac{-m}{\tau_1} e^{\left(-m/\tau_1\right)}$$

où α est le vecteur de paramètres.

Le taux d'intérêt zéro-coupon se déduit par intégration du taux à terme sur l'intervalle $[0, m]$ divisée par *m*. Cela conduit à la relation (7). Cette expression, tout comme la relation (6), admet deux limites suivant les valeurs extrêmes de *m*. Pour une durée de vie égale à zéro, $y(t,m,\alpha)$ est égal à $\mu_1 + \mu_2$ qui s'analyse comme un taux court au comptant. Il est alors facile, pour l'estimation, de contraindre la fonction à passer par le taux court observé. Lorsque la durée de vie résiduelle tend vers l'infini, le taux zéro-coupon tend vers le paramètre μ_1 qui correspond au taux long. Ainsi, par construction, le taux zéro-coupon, comme le taux à terme instantané, tend vers une asymptote horizontale quand le terme de l'échéance tend vers l'infini. Connaissant la forme du taux zéro-coupon, on déduit le prix associé, en temps continu, à partir de la relation (1b).

$$(7)\quad y(t,m,\alpha) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1-e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1} + \mu_3\left(\frac{1-e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1} - e^{(-m/\tau_1)}\right)$$

La relation (7) permet de représenter une large gamme de configurations de la structure par terme des taux d'intérêt. À titre d'exemple, pour le cas extrême où les taux d'intérêt à court et long terme sont de 10 % ($\mu_1 = \mu_1 + \mu_2 = 0{,}1$) et pour τ_1 égal à un, la relation (7) dépend uniquement du paramètre μ_3. En prenant pour ce dernier cinq valeurs comprises entre – 0,2 et 0,2, on obtient des structures par terme des taux d'intérêt très différentes alors que la pente moyenne des taux est nulle (cf. graphique 2 en annexe). Ce large éventail de configurations possibles se retrouve aussi dans les séries de taux à terme, permettant de représenter des anticipations de nature très variées. De surcroît, cette spécification permet de calculer des taux à terme « lisses » correspondant à l'idée usuelle qu'on peut avoir des anticipations formées sur les marchés financiers [2].

---

1 Voir par exemple Dahlquist et Svensson (1993) ou Brown et Dybvig (1986)

2 Les méthodes alternatives comme celles proposées par McCulloch (1971) ou Vasicek et Fong (1982) peuvent conduire à des taux à terme très mouvementés voire négatifs. Pour une comparaison des différentes méthodes consulter Bekdache et Baum (1994).

Les formes de la structure par terme des taux présentent, en période de troubles importants sur les marchés, des configurations parfois complexes pour les maturités très courtes. Pour tenir compte de ces possibilités et pour accroître la flexibilité de la fonction de base, Svensson (1994) a proposé d'ajouter deux paramètres supplémentaires dans l'équation de détermination du taux à terme. La formulation du taux zéro-coupon qui en découle est donnée par la relation (8). Elle présente les mêmes propriétés que la relation (7) pour les valeurs extrêmes de *m*. Les deux derniers termes du membre de droite se distinguent uniquement par leurs paramètres (μ_3 et τ_1 d'une part, μ_4 et τ_2 d'autre part). Leur rôle respectif est de capter les inflexions de la courbe de taux pour des maturités différentes.

$$(8)\quad y(t,m,\alpha)=\mu_1+\mu_2\frac{1-e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1}+\mu_3\left(\frac{1-e^{(-m/\tau_1)}}{m/\tau_1}-e^{(-m/\tau_1)}\right)+\mu_4\left(\frac{1-e^{(-m/\tau_2)}}{m/\tau_2}-e^{(-m/\tau_2)}\right)$$

Un exemple de contribution des quatre composantes de (8) au taux zéro-coupon est présenté dans le graphique 3 en annexe. Les valeurs des paramètres sont les suivantes : $\mu_1 = 0{,}1$; $\mu_2 = -0{,}05$; $\mu_3 = -0{,}3$; $\mu_4 = 0{,}5$; $\tau_1 = 1{,}5$; $\tau_2 = 0{,}5$. Le taux long est donc à 10 % et le taux court à 5 %. Le taux zéro-coupon est fortement croissant avec un maximum pour une maturité de 0,7 année. Il décroît par la suite pour remonter lentement pour des maturités supérieures à 4 ans. L'inflexion initiale de la courbe des taux est donnée par le terme additionnel proposé par Svensson (courbe de légende c3, paramètres μ_4 et τ_2) et la remontée des taux au-delà de 4 ans (courbe de légende c2, paramètres μ_3 et τ_1) correspond au troisième terme du membre de droite de (8). Le taux long figuré par une droite (petits pointillés, paramètre μ_1) représente l'asymptote vers laquelle le taux zéro-coupon tend lorsque la maturité augmente. La dernière courbe est la composante tendanciellement croissante du taux zéro-coupon (courbe de légende c1, paramètres μ_2 et τ_1).

3. Données utilisées

Les données utilisées pour l'estimation regroupent trois catégories de produits émis par l'État. Les OAT (obligations assimilables du Trésor) en francs et à taux fixe représentent, à partir du milieu des années quatre-vingt, le mode de financement principal avec des produits dont l'échéance à l'émission est comprise entre 7 ans et 30 ans. Les BTAN (bons du Trésor à taux fixe et intérêts annuels) correspondent au financement à moyen terme avec des produits émis pour des durées allant de 2 ans à 5 ans. Les BTF (bons du Trésor à taux fixe et intérêts précomptés) sont émis pour des durées inférieures à l'année. La gamme des échéances à l'émission est ainsi très large. Les cotations retenues sont celles du vendredi de chaque semaine. Les OAT d'une durée de vie inférieure à un an ont été supprimées. On constate en effet qu'en deçà de cette durée de vie, la liquidité de ces produits tend à se réduire, ce qui provoque des mouvements parfois heurtés sur les prix. En effet, les arbitrages sur les marchés étant faits sur la base de taux de rendement actuariels, une faible variation de ces derniers a une répercussion très forte sur le cours des actifs lorsque leur durée de vie résiduelle est faible. Un phénomène comparable apparaît pour les BTAN, ce qui conduit à supprimer les produits de durée de vie inférieure à un mois. Enfin, les prix et les taux de rendement actuariels des BTF ont été calculés afin de les rendre homogènes aux données des OAT et des BTAN [1]. Au total, on dispose de près de 50 titres pour chaque date d'observation dont la signature est homogène.

[1] Les taux de rendement des BTF sont habituellement exprimés comme des taux monétaires (dits *in fine*) établis sur la base d'une année de 360 jours.

4. Critère optimisé

Pour chaque date d'observation, le paramètre α est obtenu en minimisant, avec une méthode d'estimation non linéaire, la somme pondérée du carré des erreurs prises sur les prix de l'ensemble des titres. Les poids sont des facteurs de sensibilité des prix aux taux d'intérêt. Cette fonction s'analyse en fait comme un critère défini sur les taux de rendement actuariels.

La démarche est la suivante. Des relations (8), (1b) et (5), on déduit une expression définissant le prix d'une obligation, noté $P(t, m, \alpha)$, en fonction du paramètre α. Le taux de rendement interne de cette obligation, c'est-à-dire, le taux d'intérêt pour lequel la relation (4) est vérifiée, dépend lui-même de α et est noté $r(t, m, \alpha)$. Dans la mesure où on impose à la structure par terme des taux de passer par le taux court [1] (TC), défini comme le rendement du BTF de durée de vie résiduelle la plus courte dont on dispose, le nombre de paramètres à estimer est réduit à $\tilde{\alpha} = (TC - \mu_2, \tau_1, \mu_3, \mu_4, \tau_2)$ [2] et la fonction à minimiser peut prendre la forme d'une somme de carré d'erreurs sur les taux d'intérêt. Ce critère est plus exigeant que celui qui repose sur la minimisation des prix en raison de la forte non-linéarité entre prix et taux pour des produits dont la durée de vie résiduelle est faible. En effet, une erreur d'estimation sur le prix se reporte sur le taux d'autant plus fortement que la durée de vie est faible. Cette fonction objectif renforce donc la qualité de l'ajustement sur les taux de la partie courte de la structure par terme. Ce choix compense le défaut de l'estimation sur les prix, plus favorable en général à la partie longue de la courbe. Néanmoins, cette démarche présente l'inconvénient de rendre l'estimation relativement longue puisqu'il faut résoudre pour chaque itération un système d'équations non linéaires. On a donc substitué à cette fonction un critère obtenu en prenant une approximation de $r(t, m, \alpha)$ sur la base d'un développement limité d'ordre un. La fonction effectivement minimisée s'interprète alors comme un critère établi sur les prix à un poids près. Ce dernier représente la dérivée du prix par rapport aux taux d'intérêt actuariels c'est-à-dire la sensibilité des prix aux taux d'intérêt [3].

$$(9)\quad \underset{\tilde{\alpha}}{Min} \sum_{i=1}^{n} \left\{ (P_i(t, m) - P_i(t, m, \tilde{\alpha})) / \Phi_i \right\}^2$$

où

$$\Phi_i = \frac{\partial P_i(t, m)}{\partial r_i(t, m)} = c \sum_{i=1}^{[m]+1} \frac{-(m - [m] + i - 1)}{(1 + r_i(t, m))^{m-[m]+i}} - \frac{100m}{(1 + r_i(t, m))^{m+1}}$$

D'une manière plus pratique, compte tenu du nombre de coefficients et du caractère fortement non linéaire de la fonction à optimiser, les paramètres de la relation (8) sont obtenus en deux étapes [4]. On limite ainsi le temps d'estimation et les risques de mauvaises convergences. Dans un premier temps, on procède à l'estimation de la fonction de base proposée par Nelson et Siegel en prenant comme

---

[1] La contrainte se justifie par le fait qu'on souhaite avoir une estimation précise du début de la courbe des taux. Avec des fonctions d'interpolation plus traditionnelles, cette possibilité est obtenue au prix d'une augmentation du nombre de paramètres à estimer.

[2] La contrainte prend la forme $\mu_1 + \mu_2 = -\frac{1}{m_0} \log(BTF(t, m_0))$, où $BTF(t, m_0)$ est le prix du BTF de durée de vie résiduelle, m_0, la plus courte pour chaque date d'observation.

[3] Cette pondération est proche du concept de duration (D) : $D_i = -\Phi_i \frac{(1 + r_i(t, m))}{P_i(t, m)}$.

[4] Les estimations ont été réalisées avec le logiciel Gauss.

coefficients initiaux des valeurs pouvant convenir à l'ensemble des configurations possibles de la structure par terme des taux [1]. Après convergence, les résultats sont repris pour servir de valeurs initiales à l'estimation de la fonction de Nelson et Siegel « augmentée ». Les deux paramètres spécifiques à la partie augmentée de la fonction, non disponibles dans la première étape, sont initialisés avec 0 et 1 (respectivement pour μ_4 et τ_2). Cette procédure permet pour la deuxième étape de partir de valeurs dont on peut supposer qu'elles sont proches des vrais paramètres du modèle. À l'issu de ces estimations, on vérifie que la structure des taux d'intérêt observée justifie l'utilisation de la relation (8) plutôt que la relation (7).

5. Exemple de graphique de résultats

Une fois les paramètres estimés, il est possible de construire, simplement les courbes de taux. La courbe de taux zéro-coupon est obtenue en deux temps. Dans une première étape, on calcule le prix d'un bon zéro-coupon sur la base de la relation (1b) définie en temps continu. Dans un second temps, on détermine les taux de rendement actuariels en temps discret associés, avec la relation (10).

$$(10)\quad y_d(t,m) = \left(\frac{1}{B(t,m)}\right)^{1/m} - 1$$

Le taux à terme se déduit de la comparaison du rendement d'un bon zéro-coupon à deux échéances différentes. Si on appelle k la durée de placement, définie en t pour la période allant de $t + m$ à $t + m + k$, le taux à terme en temps discret résulte alors de la relation (11). La courbe des taux à terme, en temps discret, se calcule donc pour une valeur de k donnée en faisant varier m.

$$(11)\quad f_d(t,m,k) = \left(\frac{B(t,m)}{B(t,m+k)}\right)^{1/k} - 1$$

Le graphique 4 en annexe présente les résultats de ces calculs pour le 31 décembre 1993. Les taux d'intérêt zéro-coupon sont en trait plein, les taux à terme au jour le jour en pointillés longs. On montre sur ce même graphique les taux de rendement actuariels observés sur les différents produits (BTF, BTAN et OAT) ainsi que les taux actuariels recalculés sur la base des paramètres estimés, ce qui permet d'avoir une idée de la qualité de l'ajustement.

6. Conclusion

Le travail qui a été présenté permet à la Banque de France de disposer de données sur la structure des taux d'intérêt en France ou, ce qui est équivalent, sur les taux à terme implicites. Des graphiques de taux zéro-coupon seront désormais publiés régulièrement dans le chapitre 5.1.4. du *Bulletin de la Banque de France*. Une étude à paraître dans le supplément « Études » du *Bulletin* du quatrième trimestre présentera les différents avantages de l'utilisation d'une courbe de taux telle qu'elle a été décrite et l'utilisation qui peut en être faite sur quelques exemples simples.

[1] Ces valeurs initiales, constantes quelle que soit la date d'estimation, ont été obtenues en testant différentes possibilités de telle sorte que le nombre de non-convergence sur la période allant de 1992 à la fin de 1994 soit le plus faible possible. L'expérience montre que cette stratégie est supérieure à celle consistant à prendre pour valeurs initiales à la période t les valeurs obtenues à la période $t - 1$.

Études

Références bibliographiques

Bekdache B. and Baum C. F. (1994), « Comparing Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates », Boston College, Working paper, N° 271.

Brown S. J. and Dybvig P. H. (1986), « The Empirical Implication of the Cox, Ingersol, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Finance*, 41.

Dahlquist M. and Svensson L. E. O. (1993), « Estimating the Term Structure of Interest Rates with Simple and Complex Functional Forms : Nelson & Siegel vs. Longstaff & Schwartz », mimeo, Institute for International Economic Studies, Stockholm University.

Mc Culloch J. H. (1971), « Measuring the Term Structure of Interest Rates », *Journal of Finance*, 30.

Nelson C. R. and Siegel A. F. (1987), « Parsimonious Modeling of Yield Curves », *Journal of Business*, 60.

Shiller R. J. (1990), « The Term Structure of Interest Rates », *Handbook of Monetary Economics*, Vol. 1, B. Friedman and F. H. Hahn (eds.).

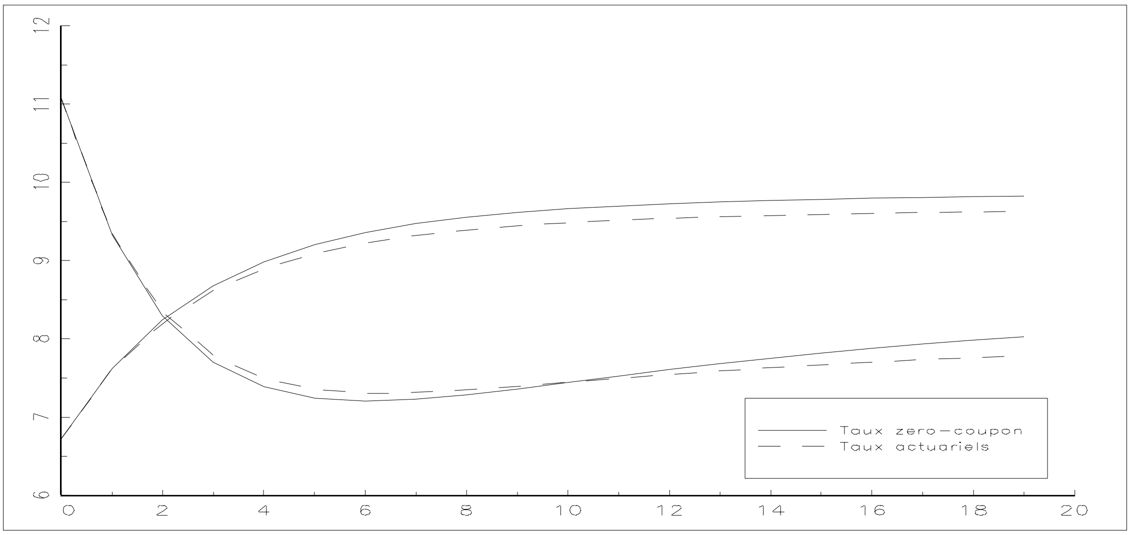
Svensson L. E. O. (1994), « Estimating and Interpreting Forward Interest Rates : Sweden 1992-4 », CEPR, *Discussion Paper Series*, N° 1051.

Vasicek O. A. and Fong H. G. (1982), « Term Structure Modeling Using Exponential Splines », *Journal of Finance*, 37.

ANNEXE

Graphique 1

TAUX ZÉRO-COUPON ET TAUX ACTUARIELS

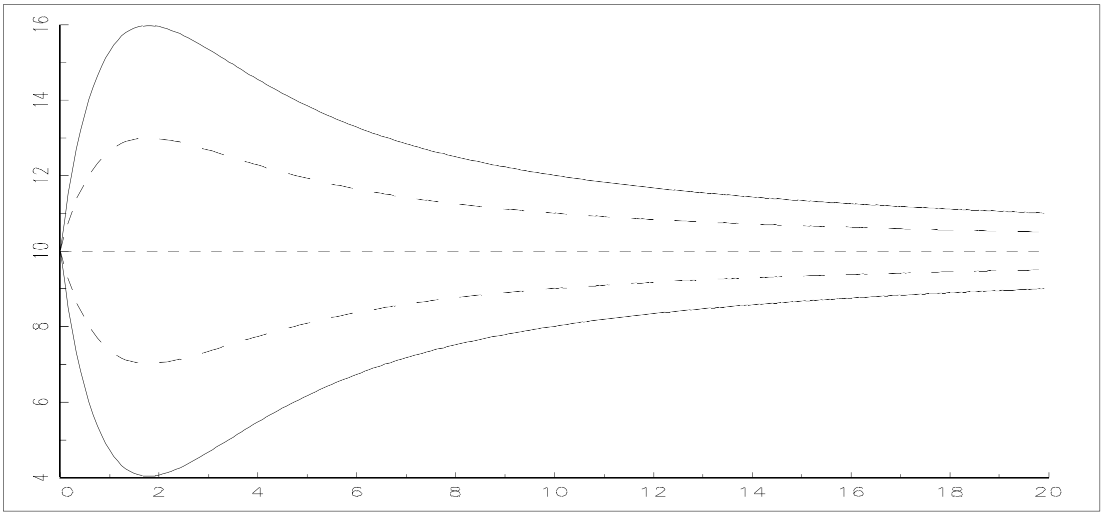


Maturité en années

Source et réalisation : Banque de France

Graphique 2

DIFFÉRENTES CONFIGURATIONS DU TAUX ZÉRO DE NELSON-SIEGEL

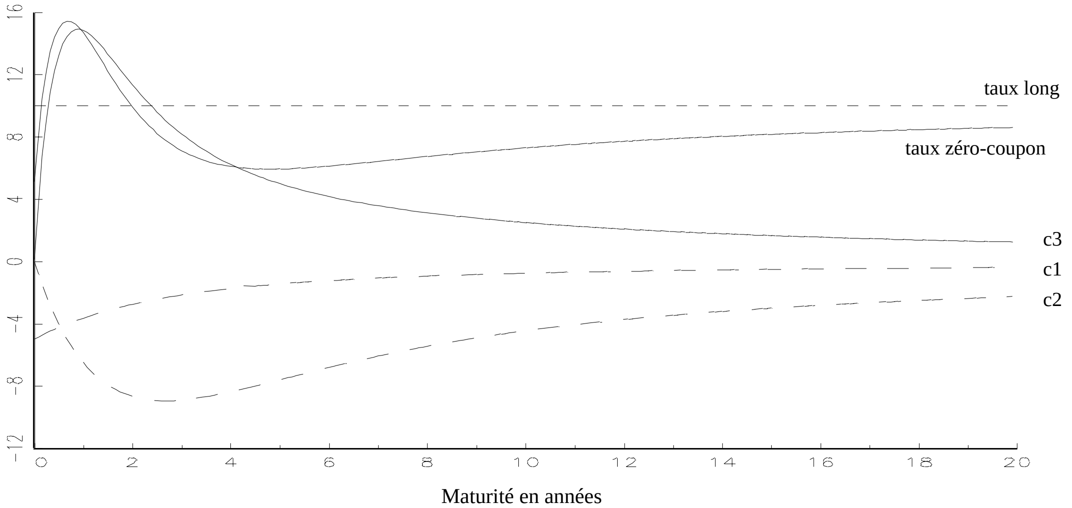


Maturité en années

Source et réalisation : Banque de France

Graphique 3

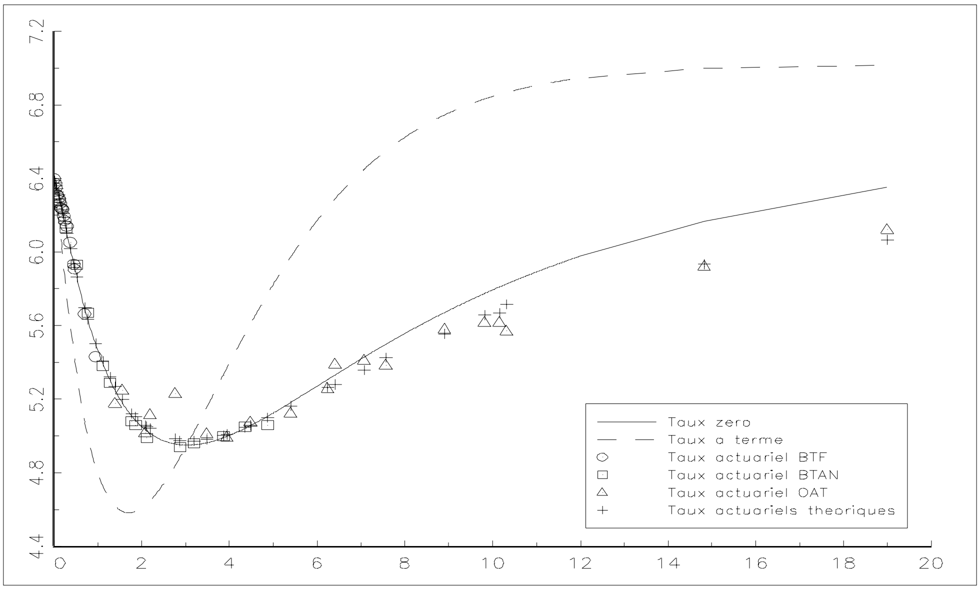
DÉCOMPOSITION DE NELSON-SIEGEL AUGMENTÉ POUR LE TAUX ZÉRO



Source et réalisation : Banque de France

Graphique 4

TAUX DE RENDEMENT ACTUARIELS, TAUX ZÉRO-COUPON ET TAUX À TERME AU JOUR LE JOUR au 31 décembre 1993



Source et réalisation : Banque de France