Resoluções Quizzes

27 de julho de 2022

Sumário

Capítulo 1

QBronze

1.1 Classical systems and introduction to quantum systems

1.1.1 Pergunta 1

Which one(s) of the following operators are reversible?

☐ ONE
☐ IDENTITY
☐ NOT
☐ ZERO

— **Resolução** —

Se é possível recuperar os valores iniciais a partir do valor final, depois do operador ter sido aplicado, então o operador é **reversível** Se não é possível saber os valores iniciais a partir

do valor final, depois do operador ter sido aplicado, então o operador é **irreversível Logo,**

pela definição de como cada operador funciona, os reversíveis são IDENTITY e NOT

1.1.2 Pergunta 2

You are given a classical biased coin with probability of heads 0.2 and probability of tails 0.8. The coin is flipped for 1000 times. What is the most likely outcome?

☐ Heads: 320 Tails: 680
☐ Heads: 102 Tails: 898

☐ Heads: 203 Tails: 797
☐ Heads: 500 Tails: 500

— Resolução —

O resultado mais provável com essas probabilidades pode ser calculado ao se multiplicar a chance de cada resultado pelo número total de jogadas:

$$heads : 0.2 \cdot 1000 = 200$$

$$tails : 0.8 \cdot 1000 = 800$$

Analisando as alternativas, é possível perceber que há uma que mais se aproxima da previsão teórica.

Logo, a resposta é Heads: 203 Tails: 797.

1.1.3 Pergunta 3

Given a probabilistic system with states {1,2,3,4} and operator,

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}$$

what is the probability of going from state 2 to state 3?

— **Resolução** —

O primeiro passo é montar uma tabela que possua todas as informações necessárias para a resolução do problema. Os estados probabilísticos estarão em negrito.

	1	**2**	**3**	**4**
1	0.1	0.2	0.3	0.4
2	0.9	0	0	0
3	0	0.8	0	0
4	0	0	0.7	0.6

Para sair do estado 2 para o estado 3, basta olhar a tabela.

	1	**2**	**3**	**4**
1	0.1	0.2	0.3	0.4
2	0.9	0	0	0
3	0	0.8	0	0
4	0	0	0.7	0.6

Logo, a resposta é 0.8

1.1.4 Pergunta 4

Which statements are true for probabilistic operators.

- ☐ All entries are real.
- ☐ All entries should be positive.
- ☐ Row sum adds up to 1.
- ☐ Column sum adds up to 1.
- ☐ All entries are non-negative.

— **Resolução** —

Por definição:
Os valores devem ser reais
A coluna deve somar 1 (probabilidade total dos eventos)
Os valores são não negativos. Assim, admitem valores nulos e positivos

1.1.5 Pergunta 5

If we have two probabilistic bits whose state is represented by the vectors, $\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix}$, what is the probability of observing state 10?

— Resolução —

O primeiro passo é representar o problema de forma que facilite a visualização.

$$\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix} = 0.2\lceil 0 \rfloor + 0.8\lceil 1 \rfloor$$

E

$$\begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \end{pmatrix} = 0.9\lceil 0 \rfloor + 0.1\lceil 1 \rfloor$$

Dai, o estado probabilístico do sistema composto é

$$\Big(0.2\lceil 0 \rfloor + 0.8\lceil 1 \rfloor\Big) \bigotimes \Big(0.9\lceil 0 \rfloor + 0.1\lceil 1 \rfloor\Big)$$

Esse símbolo define o **produto tensorial**. O produto tensorial possui a propriedade distributiva sobre a adição. Assim, o estado probabilístico do sistema composto é dado por:

$$\Big(0.2\lceil 0 \rfloor + 0.8\lceil 1 \rfloor\Big) \bigotimes \Big(0.9\lceil 0 \rfloor + 0.1\lceil 1 \rfloor\Big) =$$

$$= 0.18\Big(\lceil 0 \rfloor \otimes \lceil 0 \rfloor\Big) + 0.02\Big(\lceil 0 \rfloor \otimes \lceil 1 \rfloor\Big) + 0.72\Big(\lceil 1 \rfloor \otimes \lceil 0 \rfloor\Big) + 0.08\Big(\lceil 1 \rfloor \otimes \lceil 1 \rfloor\Big) =$$

$$= 0.18\lceil 00 \rfloor + 0.02\lceil 01 \rfloor + 0.72\lceil 10 \rfloor + 0.08\lceil 11 \rfloor$$

Logo, a resposta é 0.72.

1.1.6 Pergunta 6

If we want to simulate a biased coin with probability of heads=0.7, what should be the value of x in the following code?

```
heads = tails = 0
for i in range(1000):
        if randrange(100) < x:
            heads = heads + 1
        else:
            tails = tails + 1
```

— Resolução —

O código mostrado adiciona ao contador de heads (cara) o valor 1 sempre que o valor sorteado pela função randrange(100) for menor que x. Como queremos que o número de caras seja 70% do número total de jogadas, então x só pode assumir o valor 70, já que os números de 0 a 69 (incluso) compõe 70% dos números de 0 a 100 (não incluso). Pense o seguinte: Quantos números há de 0 a 69? E de 70 até 99?

Logo, x = 70

1.1.7 Pergunta 7

What is the dimension of the vector representing a system with 3 coins?

☐ 8
☐ 9
☐ 6
☐ 3

— Resolução —

Cada moeda possui 2 resultados possíveis, cara ou coroa. Então, o total é

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

Logo, o vetor que representa um sistema com 3 moedas possui 8 dimensões.

1.1.8 Pergunta 8

Mark the vectors which represent valid probabilistic states.

$$(1, 0, 0, 0)$$

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$$

$$\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$$

— Resolução —

Como visto antes, vetores probabilísticos só podem possuir valores não negativos (positivos ou nulos), a soma dos valores deve ser igual a 1 e os valores devem ser reais.
Logo, as únicas entradas que atendem os requerimentos são (1 0 0 0), (1/2 1/2 0 0) e (1/3 2/3 0)

1.1.9 Pergunta 9

You are given the following probabilistic operator:

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Suppose that we represent the weather being sunny with state 0 and rainy with state 1. The transition probabilities can be interpreted as follows:

- If today is sunny, the probability that tomorrow is sunny is 0.2
- If today is sunny, the probability that tomorrow is rainy is 0.8
- If today is rainy, the probability that tomorrow is sunny is 0.4
- If today is rainy, the probability that tomorrow is rainy is 0.6

Given that it is sunny on Monday, what is the probability that it will be rainy on Wednesday?

— Resolução —

O primeiro passo é montar a tabela com o protocolo.

$$\text{Tempo do dia} = \begin{array}{r|cc} & \textbf{ensolarado} & \textbf{chuvoso} \\ \hline \textbf{ensolarado} & 0.2 & 0.4 \\ \textbf{chuvoso} & 0.8 & 0.6 \end{array} = \begin{array}{r|cc} & \textbf{0} & \textbf{1} \\ \hline \textbf{0} & 0.2 & 0.4 \\ \textbf{1} & 0.8 & 0.6 \end{array}$$

O estado inicial é ensolarado. Assim, o estado inicial é 0: $e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Reescrevendo o problema:

$$\left(\textit{tempo do dia} = \begin{array}{r|cc} & \textbf{ensolarado} & \textbf{chuvoso} \\ \hline \textbf{ensolarado} & 0.2 & 0.4 \\ \textbf{chuvoso} & 0.8 & 0.6 \end{array} \right) \left(\textit{estado atual} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

É necessário calcular o novo vetor de estado. Dessa forma,

$$\begin{pmatrix} 0.2 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0 \\ 0.8 \cdot 1 + 0.6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Essa mudança de estado representa a mudança de dia. O estado atual representa o de terça-feira e mudou para $\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$

Agora é necessário calcular o estado de quarta-feira. Novamente é preciso fazer a operação. Dai,

$$\left(\textit{tempo do dia} = \begin{array}{r|cc} & \textbf{ensolarado} & \textbf{chuvoso} \\ \hline \textbf{ensolarado} & 0.2 & 0.4 \\ \textbf{chuvoso} & 0.8 & 0.6 \end{array} \right) \left(\textit{estado atual} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix} \right)$$

Assim, o novo estado é dado por

$$\begin{pmatrix} 0.2 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.8 \\ 0.8 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.64 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, para quarta-feira, tem-se o estado $e_{quarta} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.64 \end{pmatrix}$

Logo, há uma chance de 0.64 de quarta-feira ser um dia chuvoso

1.2 Basics of a Quantum Program

1.2.1 Pergunta 1

Which of the following vectors are valid quantum states.

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

— Resolução —

Um vetor que representa um estado quântico válido é aquele cujo tamanho é 1. Em outras palavras, a soma dos quadrados das amplitudes deve ser 1.

Logo, os únicos vetores que atendem a esse requisito são $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

1.2.2 Pergunta 2

Which of the following vectors are not valid quantum states.

$$\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$
$$\left(0, -1, 0, 0\right)$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$
$$\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

— **Resolução** —

Como visto anteriormente, um estado quântico válido é aquele cujo tamanho é 1. Em outras palavras, a soma dos quadrados das amplitudes deve ser 1.
Logo, as alternativas que não atendem a esse requisito são $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0\right)$,

1.2.3 Pergunta 3

If the angle of a real valued qubit is , what is the probability of observing state $|0\rangle$?

$$\cos(x)$$
$$\sin^2(x)$$
$$\cos^2(x)$$
$$\sin(x)$$
$$\cos(x) + \sin(x)$$

— **Resolução** —

Como é possível observar, o vetor de probabilidade é definido por meio de $\sin(x)$ e $\cos(x)$. A partir dai, é possível calcular a probabilidade, que é o quadrado da amplitude relacionada com o estado. Para o estado $|0\rangle$, a amplitude é $\cos(x)$.
Logo, a alternativa correta é $\cos^2(x)$.

Restricting amplitudes to real numbers

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Instead of a probabilistic combination, we have a superposition!

$$\hat{v} = \underbrace{\cos\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{What is the physical reality of this state.}}$$

Figura 1.1: Transformação do vetor de probabilidade

1.2.4 Pergunta 4

We have a circuit with a single qubit created with the code given below. What should replace “#Your code here” if we want to apply a NOT operator to the qubit?

```
q = QuantumRegister(1)
c = ClassicalRegister(1)
qc = QuantumCircuit(q,c)
#Your code here
qc.measure(q[0],c[0])
job = execute(qc,Aer.get_backend('qasm_simulator'),shots=1024)
counts = job.result().get_counts(qc)
print(counts) # counts is a dictionary
```

— Resolução —

Para aplicar o operador NOT no qubit, basta escrever:

$$qc.x(q[0])$$

1.2.5 Pergunta 5

What will be the output of the code shown below?

```
q = QuantumRegister(1)
c = ClassicalRegister(1)
qc = QuantumCircuit(q,c)
qc.x(q[0])
```

```
    qc.measure(q[0],c[0])
    job = execute(qc,Aer.get_backend('qasm_simulator'),shots=1024)
    counts = job.result().get_counts(qc)
    print(counts) # counts is a dictionary
```

☐ $\{'1' : 502, '0' : 522\}$
☐ $\{'11' : 1024\}$
☐ $\{'0' : 1024\}$
☐ $\{'1' : 1024\}$

— Resolução —

O qubit é iniciado no estado $|0\rangle$. Ao aplicar o operador NOT, ele inverte o valor, resultando em um qubit no estado $|1\rangle$. O parâmetro **shots** é o **número de vezes que o simulador roda.**
Exemplificando como ocorre a aplicação da porta quântica X:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando X em $|0\rangle$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

Como o estado $|1\rangle$ tem uma probabilidade 1 de ser medido, todas as 1024 medições apresentarão o valor 1. **Logo, 1 será medido 1024 vezes. {'1': 1024}**

1.2.6 Pergunta 6

In the quantum coin flipping experiment, what happens when a photon is send through the beam splitter?

☐ It is reflected with probability 1.
☐ It is reflected with probability 1/4 and transmitted with probability 3/4.
☐ It is reflected with probability 1/2 and transmitted with probability 1/2.
☐ It is transmitted with probability 1.

— Resolução —

'Beam splitter', ou divisor de feixe, é um dispositivo óptico que divide a luz em dois. No experimento mencionado no enunciado, **o feixe tem as probablidades $\frac{1}{2}$ de ser transmitido e $\frac{1}{2}$ de ser refletido.**

1.2.7 Pergunta 7

In the following code, what should replace "#Your code here", if we want to create the quantum state $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$?

(Hint: Think about the vector representation of this state to start with if you are stuck)

```
q2 = QuantumRegister(1,"qreg")
c2 = ClassicalRegister(1,"creg")
qc2 = QuantumCircuit(q2,c2)
qc2.x(q2[0])
#Your code here
qc2.measure(q2,c2)
job = execute(qc2,Aer.get_backend('qasm_simulator'),shots=100)
counts = job.result().get_counts(qc2)
print(counts) # counts is a dictionary
```

— Resolução —

Partindo do que foi concluído na questão 5, o qubit está no estado $|1\rangle$ após ser iniciado e aplicado uma porta quântica X. A partir daqui, é necessário pensar em que operação aplicar.

$$q2[0] = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando Hadamard, temos:

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pode-se decompor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ da seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Porém, sabe-se que

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando o $|1\rangle$ por (-1):

$$(-1)|1\rangle = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Assim, pode-se fazer:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle-|1\rangle\,\big)$$

Assim, voltando para a aplicação de Hadarmard no início:

$$H\,|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle-|1\rangle\,\big)$$

que é exatamente onde queremos chegar. Dessa forma, Hadamard é a operação a ser aplicada.
Logo, a operação a ser aplicada é qc2.h(q2[0]).

1.2.8 Pergunta 8

You are given the following probabilistic operator:

$$\begin{pmatrix}0.2 & 0.4\\0.8 & 0.6\end{pmatrix}$$

Suppose that we represent the weather being sunny with state 0 and rainy with state 1. The transition probabilities can be interpreted as follows:

- If today is sunny, the probability that tomorrow is sunny is 0.2
- If today is sunny, the probability that tomorrow is rainy is 0.8
- If today is rainy, the probability that tomorrow is sunny is 0.4
- If today is rainy, the probability that tomorrow is rainy is 0.6

Given that it is sunny on Monday, what is the probability that it will be rainy on Wednesday?

— **Resolução** —

O primeiro passo é montar a tabela com o protocolo.

$$\text{Tempo do dia} = \begin{array}{r|cc} & \textbf{ensolarado} & \textbf{chuvoso}\\ \hline \textbf{ensolarado} & 0.2 & 0.4\\ \textbf{chuvoso} & 0.8 & 0.6\end{array} = \begin{array}{c|cc} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \hline \mathbf{0} & 0.2 & 0.4\\ \mathbf{1} & 0.8 & 0.6\end{array}$$

O estado inicial é ensolarado. Assim, o estado inicial é 0: $e_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Reescrevendo o problema:

$$\left(\textit{tempo do dia} = \begin{array}{c|cc} & \textbf{ensolarado} & \textbf{chuvoso} \\ \hline \textbf{ensolarado} & 0.2 & 0.4 \\ \textbf{chuvoso} & 0.8 & 0.6 \end{array} \right) \left(\textit{estado atual} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

É necessário calcular o novo vetor de estado. Dessa forma,

$$\begin{pmatrix} 0.2 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0 \\ 0.8 \cdot 1 + 0.6 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Essa mudança de estado representa a mudança de dia. O estado atual representa o de terça-feira e mudou para $\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}$

Agora é necessário calcular o estado de quarta-feira. Novamente é preciso fazer a operação. Dai,

$$\left(\textit{tempo do dia} = \begin{array}{c|cc} & \textbf{ensolarado} & \textbf{chuvoso} \\ \hline \textbf{ensolarado} & 0.2 & 0.4 \\ \textbf{chuvoso} & 0.8 & 0.6 \end{array} \right) \left(\textit{estado atual} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix} \right)$$

Assim, o novo estado é dado por

$$\begin{pmatrix} 0.2 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.8 \\ 0.8 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.64 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, para quarta-feira, tem-se o estado $e_{quarta} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.64 \end{pmatrix}$

Logo, há uma chance de 0.64 de quarta-feira ser um dia chuvoso

1.2.9 Pergunta 9

What will be the output of the following code?

```
q2 = QuantumRegister(2,"qreg")
c2 = ClassicalRegister(2,"creg")
qc2 = QuantumCircuit(q2,c2)

qc2.x(q2[0])

qc2.measure(q2,c2)
job = execute(qc2,Aer.get_backend('qasm_simulator'),shots=100)
counts = job.result().get_counts(qc2)
```

```
    print(counts) # counts is a dictionary
```

☐ $\{'10' : 100\}$
☐ $\{'01' : 100\}$
☐ $\{'10' : 1024\}$
☐ $\{'11' : 100\}$

— Resolução —

Nesse exercício, são inicializados **dois qubits**, sendo eles q2[0] e q2[1]. A porta quântica X é aplicada no **primeiro qubit**, sendo ele **q2[0]**.
É importante lembrar que a contagem de bits (e qubits), acontecem da direita para a esquerda.
Ao aplicar a porta quântica X, o qubit q2[0] vai do estado $|0\rangle$ para o estado $|1\rangle$, enquanto que o o qubit q2[1] mantém seu estado $|0\rangle$. Dessa forma, a dupla de qubits fica 01. É importante notar também que o simulador é executado apenas 100 vezes.
Logo, a única respostas possível é {'01': 100}

1.3 Quantum Operators on a Qubit

1.3.1 Pergunta 1

We have a circuit with a single qubit created with the code given below. What should replace "#Your code here" if we want to rotate the qubit by an angle of 120 degrees?

If your answer includes a fraction, write it in reduced form e.g. instead of $10 * pi/4$, write $5 * pi/2$. Moreover, do not leave any space next to commas.

```
from math import pi
q = QuantumRegister(1) # quantum register with a single qubit
c = ClassicalRegister(1) # classical register with a single bit
qc = QuantumCircuit(q,c) # quantum circuit with quantum and classical
   reg
isters
#Your code here
# measure the qubit
qc.measure(q,c)
```

— Resolução —

Queremos rotacionar o qubit em 120 graus, isso equivale a $2 * pi/3$.

Para realizar uma rotação, devemos utilizar o ry-gate:

Rotations with ry-gate

In Qiskit, the ry-gate can be used for the rotations on the unit circle.

The default direction of a rotation by ry-gate is counterclockwise. It is used as follows:

```
quantum_circuit.ry(2 * angle_of_rotation,qubit)
```

Figura 1.2: Notebook: Q40_Operations_on_the_Unit_Circle

Dessa forma, a aplicação que devemos fazer é: **qc.ry(2*2*pi/3,q[0])**.

1.3.2 Pergunta 2

What is the result of $Z\left|0\right\rangle$?

- ☐ $-\left|0\right\rangle$
- ☐ $\left|1\right\rangle$
- ☐ $\left|-1\right\rangle$
- ☐ $\left|0\right\rangle$

— **Resolução** —

Aplicando Z no $\left|0\right\rangle$:

$$Z\left|0\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|0\right\rangle$$

Logo, o resultado é $\left|0\right\rangle$.

1.3.3 Pergunta 3

What is the result of $HZH\left|0\right\rangle$?

- ☐ $-\left|0\right\rangle$
- ☐ $\left|1\right\rangle$
- ☐ $\left|-1\right\rangle$
- ☐ $\left|0\right\rangle$

— **Resolução** —

$$
\begin{aligned}
HZH\left|0\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \left|1\right\rangle
\end{aligned}
$$

Logo, o resultado é $\left|1\right\rangle$.

1.3.4 Pergunta 4

Mark the true statements.

☐ In the real plane, the angle between the state $\left|0\right\rangle$ and $\left|1\right\rangle$ is 90 degrees.
☐ Square of a reflection operator is the identity matrix.
☐ Hadamard is a rotation operator.
☐ All entries of a rotation operator should be positive.
☐ Square of a rotation operator is identity matrix.

— **Resolução** —

Vamos analisar cada alternativa, uma a uma.
Para a **primeira**, é necessário visualizar o plano com os estados:

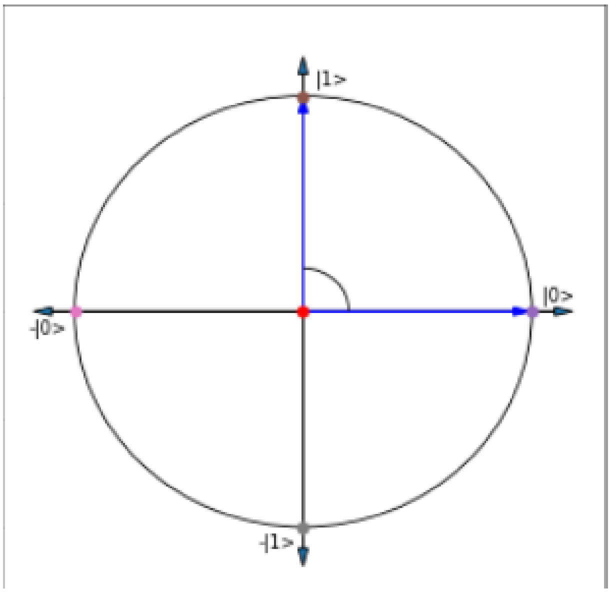


Figura 1.3: Representação dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ no plano

Por definição, é possível afirmar que **a primeira afirmativa está certa.**

Para a **segunda alternativa**, sabe-se que a matriz identidade I assume a seguinte forma:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Os operadores de reflexão são os seguintes, onde $Ref(\theta)$ é a forma geral deles:

Reflection Operators

As we have observed, the following operators are reflections on the unit circle.

Z operator: $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. The line of reflection is x-axis.

NOT operator: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. The line of reflection is $y = x$.

Hadamard operator: $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. The line of reflection is $y = \frac{\sin(\pi/8)}{\cos(\pi/8)}x$.

It is the line passing through the origin making an angle $\pi/8$ radians with x-axis.

Arbitrary reflection operator: Let θ be the angle of the line of reflection. Then, the martix form of reflection is represented as follows:

$$Ref(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Figura 1.4: Operadores reflexivos

Dessa forma, basta mostrar que o quadrado da forma geral atende ou não a afirmação. Começando os cálculos, considere que $2\theta = \alpha$:

$$X = Ref(\theta) \cdot Ref(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \sin\alpha & \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \sin\alpha \cdot (-\cos\alpha) \\ \sin\alpha \cdot \cos\alpha + (-\cos\alpha) \cdot \sin\alpha & \sin\alpha \cdot \sin\alpha + (-\cos\alpha) \cdot (-\cos\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

Relembrando a **identidade trigonométrica fundamental:**

$$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1$$

Substituindo na matriz:

$$X = Ref(\theta) \cdot Ref(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por definição, é possível afirmar que **a segunda afirmativa está certa.**

Para a terceira alternativa, basta olhar a imagem anterior, que trata dos operadores de **reflexão**

Por definição, é possível afirmar que **a terceira afirmativa está incorreta.**

Para a quarta alternativa, basta considerar a definição do operador de rotação:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Por definição, é possível afirmar que **a quarta afirmativa está incorreta.**

Por fim a quinta alternativa, basta realizar os cálculos de forma similar ao que foi feito para a afirmativa dois:

$$X = R(\theta) \cdot R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\theta - \sin\theta \cdot \sin\theta & \cos\theta \cdot (-\sin\theta) + (-\sin\theta) \cdot \cos\theta \\ \sin\theta \cdot \cos\theta + \cos\theta \cdot \sin\theta & \sin\theta \cdot (-\sin\theta) + \cos\theta \cdot \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

Com essas relações trigonométricas não é possível transformar essa matriz em uma matriz identidade.
Por definição, é possível afirmar que **a quinta afirmativa está incorreta.**

1.3.5 Pergunta 5

What should be the dimension of a vector representing a quantum system with 5 qubits?

☐ 5
☐ 1
☐ 32
☐ 10

— Resolução —

Para encontrarmos a dimensão do vetor representando um sistema quântico com 5 qubits, devemos fazer o seguinte cálculo:

$$2^n = 2^5 = 32$$

1.3.6 Pergunta 6

What is the result of applying CNOT to the quantum state $\frac{|01\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ if the first qubit is the control and second qubit is the target? The ordering followed is $|firstqubit|secondqubit\rangle$

☐ $\frac{|11\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}$
☐ $|01\rangle$
☐ $|11\rangle$
☐ $\frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$

— Resolução —

Para começar a resolver a questão, é necessário lembrar que a porta CNOT opera em um registrador quântico de 2 qubits. Ela inverte o segundo qubit (o qubit alvo) se e somente se o primeiro qubit (o qubit de controle) for $|1\rangle$.

Antes		Depois	
Controle	Alvo	Controle	Alvo
$\vert 0\rangle$	$\vert 0\rangle$	$\vert 0\rangle$	$\vert 0\rangle$
$\vert 0\rangle$	$\vert 1\rangle$	$\vert 0\rangle$	$\vert 1\rangle$
$\vert 1\rangle$	$\vert 0\rangle$	$\vert 1\rangle$	$\vert 1\rangle$
$\vert 1\rangle$	$\vert 1\rangle$	$\vert 1\rangle$	$\vert 0\rangle$

Figura 1.5: Operações com a porta CNOT

O primeiro passo é aplicarmos em $|01\rangle$. Ao observar na tabela, chega-se à conclusão que, ao aplicar o CNOT:

$$CNOT\,|01\rangle = |01\rangle$$

O segundo passo é aplicarmos em $|11\rangle$:

$$CNOT\,|11\rangle = |10\rangle$$

Logo, a resposta correta é $\frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$

1.3.7 Pergunta 7

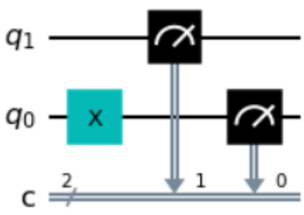
We have a circuit with two qubits created using the code given below. What should replace “#Your code here” if we want to obtain the state $\frac{|00\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}$? (Follow Qiskit’s ordering of qubits)

```
qc = QuantumCircuit(2)
#Your code here
```

— Resolução —

Primeiro é necessário entender como o Qiskit avalia a ordem dos qubits.

```
q =  QuantumRegister(2,"q") # quantum register with 2 qubits
c = ClassicalRegister(2,"c") # classical register with 2 bits

qc = QuantumCircuit(q,c) # quantum circuit with quantum and classical registers

# the up qubit is in |0>

# set the down qubit to |1>
qc.x(q[0]) # apply x-gate (NOT operator)

# measure both qubits
qc.measure(q,c)

# draw the circuit in Qiskit reading order
display(qc.draw(output='mpl',reverse_bits=True))

# execute the circuit 100 times in the local simulator
job = execute(qc,Aer.get_backend('qasm_simulator'),shots=100)
counts = job.result().get_counts(qc)
print(counts)
```




```
{'01': 100}
```

Figura 1.6: Ordem de avaliação dos qubits no Qiskit

Dessa forma, é possível observar que o primeiro qubit é dado por q0 e o segundo por q1. Dos exercícios anteriores, sabe-se que

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Precisamos achar alguma porta lógica que resulte no estado dado pelo enunciado, o denominador é um indicativo de qual tentar: Hadamard. Falta descobrirmos se é necessário aplicar no primeiro ou no segundo qubit.

$$H|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Como queremos os estados $|00\rangle$ e $|01\rangle$, podemos deduzir que o $|1\rangle$ deve estar no segundo fator do produto. Dessa forma,

$$|0\rangle \otimes H|0\rangle = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|0\rangle \otimes H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$$

Esse resultado justamente é onde queremos chegar. Precisamos aplicar Hadamard ao primeiro qubit.

Dessa forma, o código a ser adicionado é qc.h(0)

1.3.8 Pergunta 8

Mark the true statements.

☐ Unitary simulator returns the current state vector.

☐ It is possible to apply a NOT gate to a target qubit depending on whether some qubit is in state 0.

☐ It is not possible to apply a NOT operator controlled by two qubits at the same time.

☐ We can check the value of a qubit by the statement if(q[0]==1).

— **Resolução** —

Para a primeira afirmação:

Unitary backend

Unitary_simulator gives a single matrix representation of all gates in the circuit until that point.

Figura 1.7: Notebook: Q60_Two_Qubits

Por definição, é possível afirmar que **a primeira afirmativa está incorreta.**

Para a segunda afirmação:

Por definição, é possível afirmar que **a segunda afirmativa está correta.**

Para a terceira afirmação:

Por definição, é possível afirmar que **a terceira afirmativa está incorreta.**

Para a quarta afirmação:

Não se pode acessar o valor do qubit dessa forma, como visto nos notebooks.

Por definição, é possível afirmar que **a quarta afirmativa está incorreta. Por definição, é possível aplicar a somente um dos qubits**

Logo, a única alternativa certa é: É possível aplicar uma porta NOT a um qubit alvo dependendo se algum qubit está no estado 0.

1.3.9 Pergunta 9

If the output of the following code is to be $\{'01' : 500, '10' : 500\}$, what should you replace "#Your code here" with?

```
q2 = QuantumRegister(2,"qreg")
c2 = ClassicalRegister(2,"creg")
qc2 = QuantumCircuit(q2,c2)
qc2.h(q2[0])
qc2.cx(q2[0],q2[1])
#Your code here
qc2.measure(q2,c2)
job = execute(qc2,Aer.get_backend('qasm_simulator'),shots=1000)
counts = job.result().get_counts(qc2)
print(counts) # counts is a dictionary
```

— Resolução —

Temos um circuito com 2 qubits. Sabemos que no início, os qubits estão no estado $|00\rangle$.

Olhando para o código, vemos que primeiro temos um operador H aplicado no qubit q2[0], isso fará com que o estado mude para $|00\rangle + |01\rangle$:

```
from qiskit import QuantumCircuit, QuantumRegister, ClassicalRegister
from qiskit import execute, Aer

q2 = QuantumRegister(2,"qreg")
c2 = ClassicalRegister(2,"creg")
qc2 = QuantumCircuit(q2,c2)

qc2.h(q2[0])

qc2.measure(q2,c2)
job = execute(qc2,Aer.get_backend('qasm_simulator'),shots=1000)
counts = job.result().get_counts(qc2)
print(counts)
```

```
{'00': 544, '01': 456}
```

Figura 1.8: Primeiro passo aplicando o Hadamard no q2[0].

Depois, é aplicado o operador CNOT (.cx) nos qubits q2[0] e q2[1]:

```
from qiskit import QuantumCircuit, QuantumRegister, ClassicalRegister
from qiskit import execute, Aer

q2 = QuantumRegister(2,"qreg")
c2 = ClassicalRegister(2,"creg")
qc2 = QuantumCircuit(q2,c2)

qc2.h(q2[0])
qc2.cx(q2[0],q2[1])

qc2.measure(q2,c2)
job = execute(qc2,Aer.get_backend('qasm_simulator'),shots=1000)
counts = job.result().get_counts(qc2)
print(counts)

{'11': 498, '00': 502}
```

Figura 1.9: Aplicando agora o operador CNOT em q2[0] e q2[1].

Obtemos os estados $|00\rangle$ e $|11\rangle$.

Como queremos encontrar os estados $|01\rangle$ e $|10\rangle$, podemos 'flipar' o primeiro qubit, para isso utilizamos o X-gate.

```
from qiskit import QuantumCircuit, QuantumRegister, ClassicalRegister
from qiskit import execute, Aer

q2 = QuantumRegister(2,"qreg")
c2 = ClassicalRegister(2,"creg")
qc2 = QuantumCircuit(q2,c2)

qc2.h(q2[0])
qc2.cx(q2[0],q2[1])
qc2.x(q2[0])

qc2.measure(q2,c2)
job = execute(qc2,Aer.get_backend('qasm_simulator'),shots=1000)
counts = job.result().get_counts(qc2)
print(counts)

{'10': 522, '01': 478}
```

Figura 1.10: Aplicando agora o X-gate em q2[0].

Logo, o código a ser adicionado é qc2.x(q2[0]).

1.3.10 Pergunta 10

How do you obtain the state $\frac{|10\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}$ if you start with the state $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ (Order: $|$first,second$\rangle$)

☐ Apply X to first qubit.

☐ Apply CNOT where second qubit is the control first qubit is the target.

☐ Apply H to both qubits.

☐ Apply Z to second qubit.

— **Resolução** —

Para obter o estado $\frac{|10\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}$, devemos "flipar" o primeiro qubit do estado inicial $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$.

O operador que realiza o *flip* é o X.

Logo, aplicamos X no primeiro qubit.

1.3.11 Pergunta 11

Suppose you have a circuit with 3 qubits. What happens when you apply H to only the second qubit?

☐ Others are not changed, as if I is applied to them.

☐ We obtain an equal superposition of eight states.

☐ This is not possible.

☐ H is applied to others as well.

☐ We obtain the state $\frac{|010\rangle+|000\rangle}{\sqrt{2}}$.

— **Resolução** —

Para a primeira afirmação: Pela definição da porta I, **a afirmativa está correta**

Para a segunda afirmação: Ao aplicar o operador H, não obtemos uma superposição de 8 estados. **Logo, está incorreta**.

Sugestão de exercício: Calcular usando Qiskit ou no papel.

Para a terceira afirmação: **É possível logo, está incorreta**.

Para a quarta afirmação: **É aplicado só ao segundo, logo está incorreta**.

Para a quinta afirmação: **Está correta**.

Sugestão de exercício: Calcular usando Qiskit ou no papel.

Resposta final:

Neste caso, temos um circuito com 3 qubits, ao aplicarmos o operador H apenas no segundo qubit:

- Nós obtemos o estado

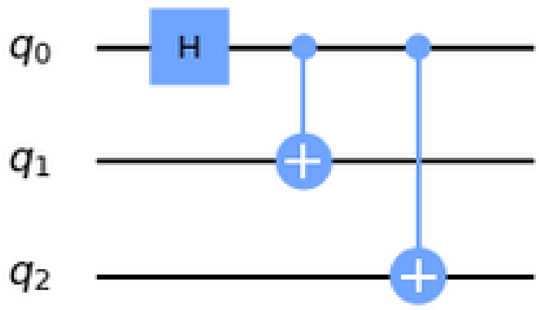
$$\frac{|010\rangle + |000\rangle}{\sqrt{2}}$$

- Os outros não mudam quando aplicamos o operador I neles.

1.4 Entanglement and basics of quantum protocols

1.4.1 Pergunta 1

What can be an outcome if the following circuit is measured and simulated 1000 times?



— Resolução —

$\{'000' : 480, '111' : 520\}$

1.4.2 Pergunta 2

Which states out of the following are entangled?

☐ $\frac{|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle}{2}$
☐ $\frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}$
☐ $\frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}$
☐ $\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$

— Resolução —

☐ $\frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}$
☐ $\frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}$

1.4.3 Pergunta 3

Which statements are true about the following state: $\frac{|000\rangle+|001\rangle+|111\rangle}{\sqrt{3}}$ (Order: |first,second,third)

— Resolução —

When the first qubit is measured and the outcome is 1, then the third qubit will be also measured as 1 with probability 1.

When the first qubit is measured and the outcome is 0, then the second qubit will be also measured as 0 with probability 1.

1.4.4 Pergunta 4

Suppose that Asja want to send the message '1302' to Balvis using superdense coding. Asja will send the digits one by one: first 1, then 3, then 0 and finally 2 and she makes the following encoding: 0:00 1:01 2:10 3:11. Hence, to send 1302, she will send 8 bits of information. As you know, in superdense coding we can send 2 bits at once, therefore she will use the protocol 4 times.

How many entangled pair of qubits do Asja and Balvis need in total?

— Resolução —

4 pairs (8 qubits), we need a different pair each time.

1.4.5 Pergunta 5

Suppose that Asja want to send the message '1302' to Balvis using superdense coding. Asja will send the digits one by one: first 1, then 3, then 0 and finally 2 and she makes the following encoding: 0:00 1:01 2:10 3:11. Hence, to send 1302, she will send 8 bits of information. As you know, in superdense coding we can send 2 bits at once, therefore she will use the protocol 4 times.

To start with, Asja sends '01'. Which operations should she apply to her qubit?

— Resolução —

Apply X

1.4.6 Pergunta 6

Suppose that Asja want to send the message '1302' to Balvis using superdense coding. Asja will send the digits one by one: first 1, then 3, then 0 and finally 2 and she makes the following encoding: 0:00 1:01 2:10 3:11. Hence, to send 1302, she will send 8 bits of information. As you know, in superdense coding we can send 2 bits at once, therefore she will use the protocol 4 times.

Balvis has received the first qubit from Asja but he has lost his own qubit which was initially entangled with Asja's qubit. Is it possible for him to recover the message?

— Resolução —

It is not possible to recover the message.

1.4.7 Pergunta 7

What will be the output of the following code?

```
q = QuantumRegister(2,"q")
c = ClassicalRegister(2,"c")
qc = QuantumCircuit(q,c)

qc.x(q[0])

qc.measure(q[0],c[0])

qc.h(q[1]).c_if(c,0)

qc.measure(q,c)
```

— Resolução —

$\{'01' : 1024\}$

1.4.8 Pergunta 8

Mark the true statements.

Faster than light communication is possible with entanglement.

There is only a single entangled state, namely .

Using teleportation, we can create multiples copies of the same qubit.

In superdense coding we send 2 bits of information using 1 qubit.

In superdense coding, operations applied by the receiver depends on the message to be send.

— Resolução —

In superdense coding we send 2 bits of information using 1 qubit.

1.4.9 Pergunta 9

Asja teleports a state of a qubit to Balvis. In the following code, you see the post processing performed by Balvis at the end of the quantum teleportation protocol. If Asja tells him that she has measured '10', what is a?

```
# post-processing done by Balvis
qc.a(q[0])
```

— Resolução —

z

1.4.10 Pergunta 10

Asja is teleporting a quantum state to Balvis. Suppose that Asja makes the measurement and we use statevector simulator to get the current vector. All entries of the vector are 0 except the last 2. What can you conclude about the measurement result of Asja? (Assuming that qubits are in the same order as described in the notebook)

— **Resolução** —

11

1.4.11 Pergunta 11

At the end of quantum teleportation protocol, how many qubits does Balvis have?

— **Resolução** —

1

1.5 Quantum Search Algorithm: Grover

1.5.1 Pergunta 1

Which one is true about Grover's Search?

○ All of the above.

○ Grover's search provides exponential speedup.

○ You need to know what is inside the oracle to flip the sign of the marked element.

○ In Grover's search, if you run the algorithm for more iterations you get a better result.

○ None of the above.

— **Resolução** —

A resposta correta é nenhuma das acima

1.5.2 Pergunta 2

In Grover's algorithm, how do we flip the sign of the marked element without knowing which element is marked?

○ We use a procedure called phase kickback.

○ We multiply all amplitudes by -1.

○ We can not, we should know the marked element beforehand.

— **Resolução** —

We use a procedure called phase kickback.

Shor's algorithm is a quantum computer algorithm for finding the prime factors of an integer. If Shor's algorithm was run in a quantum computer with a sufficient number of qubits, then it could be used to break some public-key cryptography schemes. What is the time complexity (running time) of Shor's algorithm on a quantum computer?

- Polynomial time
- Exponential Time
- Constant Time

Figura 1.11: Pergunta 4 - Quiz Introduction to quantum computing

2. Consulting an Oracle

Many quantum algorithms are based around the analysis of some function $f(x)$. Often these algorithms simply assume the existence of some 'black box' implementation of this function, which we can give an input x and receive the corresponding output $f(x)$. This is referred to as an *oracle*.

Figura 1.12: Qiskit Textbook - Definição de oracle

1.5.3 Pergunta 3

This question relates to Grover's algorithm. You are given a circuit named mycircuit and a quantum register named qreg. There are 32 elements in the search space.

You are given the following code piece:

```
for i in range(a):
    mycircuit.b(qreg[i])
```

What should replace a and b to create an equal superposition of the elements in the search space?

(Assuming that qubits starting from 0 represent the search space)

Write your answer as a,b e.g. 10,x

— Resolução —

Temos 32 elementos, esses elementos podem ser resumidos em 5 qubits. Precisamos, então, iterar em 5 qubits.

Sabemos que há um operador que aplicado ao $|0\rangle$ fornece um qubit com amplitudes iguais para seus estados. Esse operador é o Hadamard.

Logo, a respostaé 5,h

The number of iterations

If there is a single marked element in a list of size N, then $\pi\frac{\sqrt{N}}{4}$ iterations can give the marked element with high probability.

If there are k marked elements, then it is better to iterate $\pi\frac{\sqrt{\frac{N}{k}}}{4}$ times.

If k is unknown, then we can execute the algorithm with different iterations. One way of doing this is to iterate the algorithm

Figura 1.13: Q88_Grovers_Search_One_Qubit_Representation

N	10		N	10		N	10
K	10		K	20		K	100
0,785398			0,55536			0,248365	

Figura 1.14: Exemplo de interações algoritmo de Grover

1.5.4 Pergunta 4

In Grover's algorithm, which operator(s) do you apply to set the ancilla qubit to the state $|-\rangle$?

— **Resolução** —

First X, then H

1.5.5 Pergunta 5

For Grover's algorithm, let's say we have 4 elements in the database. If after the first query phase the resulting state is $\frac{|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$, which one is the marked element?

— **Resolução** —

Ler a definição do phase kickback na pergunta 2.
$|01\rangle$

1.5.6 Pergunta 6

This question relates to Grover's algorithm.

Suppose that there are 32 elements in the search space. How many qubits do you need to represent 32 elements? (Don't count any extra qubits, only the ones required to represent the elements)

Sign flip

In the rest of the discussion, we will assume that we are given a quantum circuit implementing the operator U_f. An operator which flips the sign of the amplitude of the state corresponding to the marked element x can be constructed using phase-kickback.

Figura 1.15: Q92_Grovers_Search_Implementation

Inversion operator

Watch Lecture

To implement the inversion (diffusion) operation, we will need additional (ancilla) qubit. This is how we implement the inversion operator:

- Set the ancilla qubit to $|-\rangle$ by applying X and H.

Figura 1.16: Q92_Grovers_Search_Implementation

— Resolução —

5

1.5.7 Pergunta 7

When represented visually, what does the inversion phase in Grover's algorithm correspond to?

— Resolução —

Step 1: The amplitude amplification procedure starts out in the uniform superposition $|s\rangle$, which is easily constructed from $|s\rangle = H^{\otimes n}|0\rangle^n$.

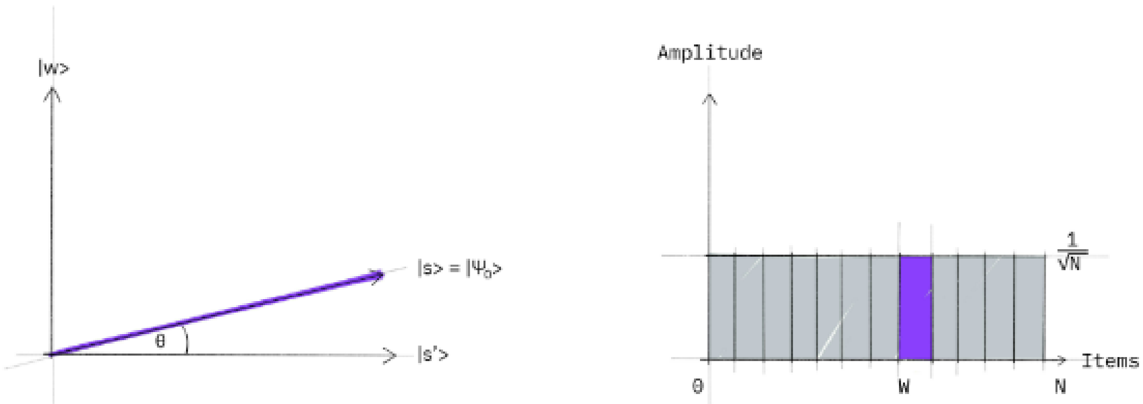
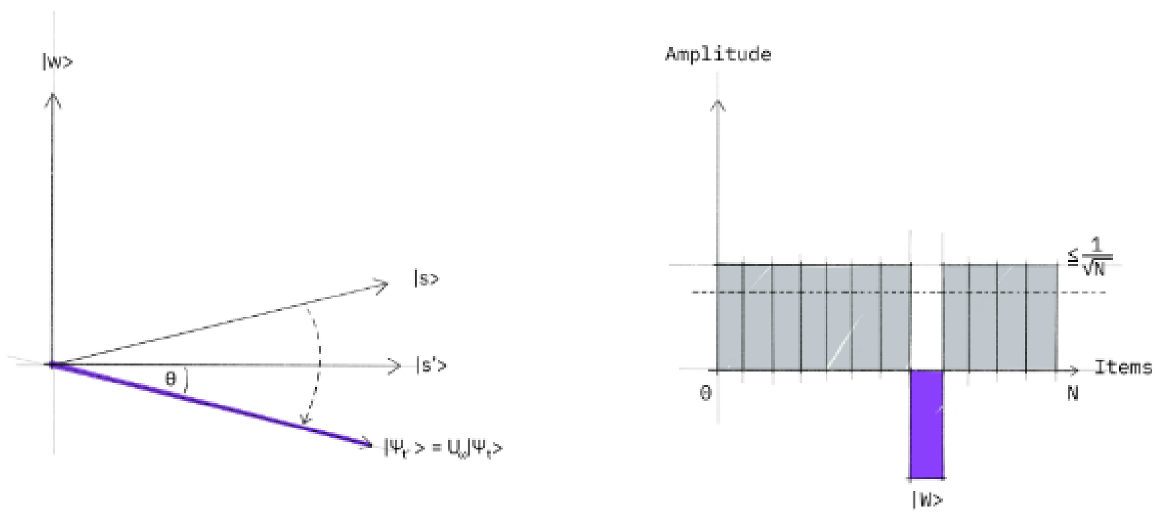


Figura 1.17: Qiskit Textbook

Reflection over the equal superposition state.

Step 2: We apply the oracle reflection U_f to the state $|s\rangle$.



Geometrically this corresponds to a reflection of the state $|s\rangle$ about $|s'\rangle$. This transformation means that the amplitude in front of the $|w\rangle$ state becomes negative, which in turn means that the average amplitude (indicated by a dashed line) has been lowered.

Figura 1.18: Qiskit Textbook

Capítulo 2

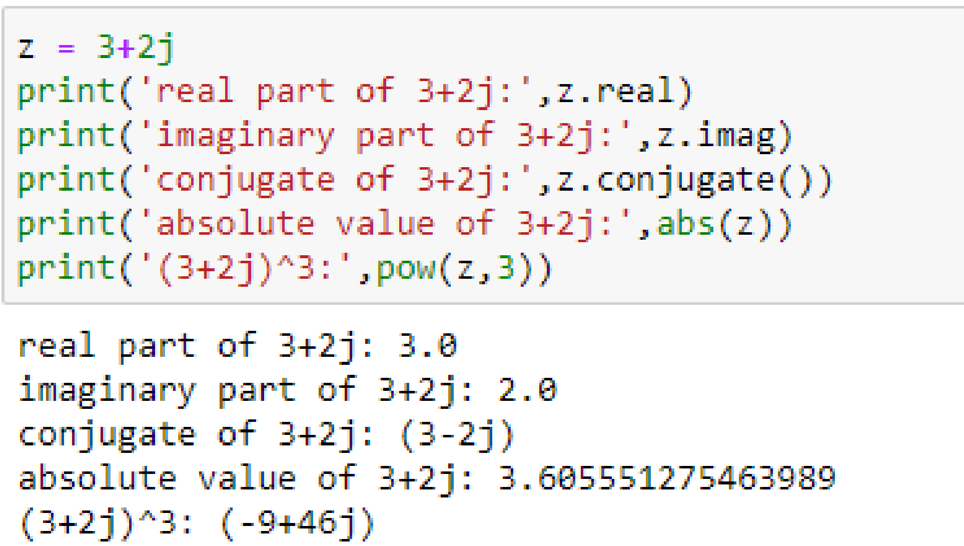
QSilver

2.1 Introduction to Complex Numbers I

2.1.1 Pergunta 1

How do you compute and print the conjugate of the number $z = 2 + 3i$ in Python?

— **Resolução** —



```
z = 3+2j
print('real part of 3+2j:',z.real)
print('imaginary part of 3+2j:',z.imag)
print('conjugate of 3+2j:',z.conjugate())
print('absolute value of 3+2j:',abs(z))
print('(3+2j)^3:',pow(z,3))
```

```
real part of 3+2j: 3.0
imaginary part of 3+2j: 2.0
conjugate of 3+2j: (3-2j)
absolute value of 3+2j: 3.605551275463989
(3+2j)^3: (-9+46j)
```

Figura 2.1: C01_Complex_Number_Basics

```
z=2+3j
print(z.conjugate())
```

2.1.2 Pergunta 2

What is a qubit?

— Resolução —

quantum system with exactly two discrete eigenstates.

2.1.3 Pergunta 3

Select the unitary matrices.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

— Resolução —

Para saber se uma matriz é unitária, devemos multiplicá-la pela sua transposta conjugada, se o resultado for igual a matriz identidade, então a matriz é unitária.

Por exemplo, pegando a primeira matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, a primeira não é uma matriz unitária.

Já a segunda matriz,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, a matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ é uma matriz unitária.

2.1.4 Pergunta 4

How do you compute polar form of $2 - 3i$ in Python?

— Resolução —

```
r = abs(2-3j)
alpha = asin(-3/r)
```

2.1.5 Pergunta 5

Hadamard Operator is a length preserving square matrix.

— Resolução —

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

It is easy to see that $H^{\dagger} = H$. Also you may remember that $HH = I$, which means that the property of length preserving operator is fulfilled for Hadamard operator.

Figura 2.2: C03_Quantum_Operators_With_Complex_Numbers

True

2.1.6 Pergunta 6

What is $2e^{i\pi/3}$ in rectangular form?

— Resolução —

```
from math import pi, cos, acos, sin, asin

r2 = 2
alpha2 = pi/3

print("2*e^i*pi/3 is equal to", r2*complex(cos(alpha2),sin(alpha2)))
```

```
2*e^i*pi/3 is equal to (1.0000000000000002+1.7320508075688772j)
```

Figura 2.3: C01_Complex_Number_Basics

Dessa forma, a partir do nosso código, obtemos a seguinte reposta:

$$1 + \sqrt{3}i$$

Ou, podemos fazer da seguinte forma:

$$r = 2 \text{ e } a = \pi/3$$

$$e^{\pi/3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$e^{\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo,

$$2e^{i\pi/3} = 2 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore 1 + \sqrt{3}i$$

2.1.7 Pergunta 7

We have the following CCNOT gate in Python: circuit.ccx(0,1,2) When will the CC-NOT gate take effect on qubit 2?

— Resolução —

Toffoli gate (CCX gate) ¶

This gate has two control qubits, and if both are in state $|1\rangle$, then X is applied to the target qubit. Matrix form of the operation is the following:

$$CCX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Figura 2.4: C09_Multiqubit_Operations

When the qubit 0 and the qubit 1 are both at state 1.

2.1.8 Pergunta 8

Given quantum state $|\psi\rangle = \frac{-2i}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}(1-i)|11\rangle$, compute $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ where $|\phi\rangle = |11\rangle$. Write your answer as a fraction in reduced form without any spaces. (Ex: 1/2)

— Resolução —

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Figura 2.5: Q60_Two_Qubits

Começaremos analisando o $\langle\phi|$, como $|\phi\rangle = |11\rangle$, então $\langle\phi| = \langle 11|$, ou seja

$$\langle\phi| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora, escrevendo $|11\rangle$ na forma matricial, temos:

$$|\psi\rangle = \frac{-2i}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{6}}(1-i) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1-i) \end{pmatrix}$$

Realizaremos agora a seguinte operação:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2i}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}}(1-i) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(1-i)$$

Fazendo,

$$\left|\tfrac{1}{\sqrt{6}}(1-i)\right|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{3}$$

2.1.9 Pergunta 9

Given the quantum state $\begin{pmatrix} \frac{2-i}{3} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{3} \end{pmatrix}$, what is the probability of observing $|0\rangle$?

— Resolução —

Lembrando que com esse estado, tem-se:

$$\frac{2-i}{3}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{3}|1\rangle$$

A probabilidade de observar $|0\rangle$ é

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9}$$

$$\therefore \frac{5}{9}$$

2.1.10 Pergunta 10

Given that $|\psi\rangle = -(2+i)|00\rangle + (1-i)|01\rangle + \frac{1-i}{3}|11\rangle$, what is $\langle\psi|$?

— Resolução —

Para encontramos o $\langle\psi|$ devemos encontrar a transposta do conjugado complexo de $|\psi\rangle$, isto é, trocamos o sinal do número complexo da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = -(2+i)|00\rangle + (1-i)|01\rangle + \frac{1-i}{3}|11\rangle$$
$$\Rightarrow \langle\psi| = -(2-i)\langle 00| + (1+i)\langle 01| + \frac{1+i}{3}\langle 11|$$

2.1.11 Pergunta 11

Given that $\begin{pmatrix} a \\ \frac{1-i}{2} \end{pmatrix}$ is a valid quantum state, select the possible values for a.

— Resolução —

Para ser um estado quântico válido, devemos calcular a probabilidade, temos então:

$$a^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2$$

$$a^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$a^2 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Analisando as opções, essas duas retornam este valor para a:

$$\Rightarrow \frac{i-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{-i}{\sqrt{2}}$$

2.1.12 Pergunta 12

What is the resulting state if Y operator is applied to the state $\begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2+i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$?

— Resolução —

O operador Y é dado por:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando Y no estado mencionado no exercício, temos:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2+i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} =$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$