10-11 класс. Теория чисел

начинаем разбирать 6-го апреля в 16:00

1. Игорь выписал на доску натуральное число N. Каждую минуту он берет число M, полученное из N перемещением первой цифры числа N в конец, а затем вместо N на доску записывает число $N+M$. Мог ли он через некоторое ненулевое количество шагов получить число, которое при увеличении на 3 будет точной степенью числа 2025?

2. Пусть $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ — все натуральные делители натурального числа n. Оказалось, что разности $d_2-d_1, \ldots, d_k-d_{k-1}$ равны $1, 3, \ldots, 2k-3$ в некотором порядке. Чему может быть равно n?

3. На доске написано 100 различных натуральных чисел. К каждому из этих чисел прибавили НОД всех остальных. Могло ли среди 100 чисел, полученных в результате этих действий, оказаться три одинаковых?

4. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $3^p - np = n + p$.

5. Известно, что $(n+1)! - n! - 1$ делится на $n! - (n-1)! + m^2$ при некоторых натуральных m и n. Может ли число $n+2$ быть точным квадратом?

6. Дано нечётное натуральное число $n > 1$. На доске записаны числа n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n-1$. Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел не делилась ни на одно из оставшихся чисел.

7. На доске написаны четыре попарно различных целых числа, модуль каждого из которых больше миллиона. Известно, что не существует натурального числа, большего 1, на которое бы делилось каждое из четырех написанных чисел. Петя записал в тетрадку шесть попарных сумм этих чисел, разбил эти шесть сумм на три пары и перемножил числа в каждой паре. Могли ли все три произведения оказаться равными?

8. Для натурального n обозначим $S_n = 1!+2!+\ldots+n!$. Докажите, что при некотором n у числа S_n есть простой делитель, больший 10^{2012}?