课题：函数的积分

讲师:Seven老师

2018-03-26（周一）上课时间8:30-10:00

Tanzhou EDU

Artificial Intelligence

AI学院 VIP

- 不定积分
- 定积分
- 微积分

已会求已知函数的导数和微分的运算. 常要解决相反的问题，就是已知函数的导数或微分，求原来那个函数的问题. 例如

1. 已知某曲线的切线斜率为 $2x$, 求此曲线的方程.

2. 某质点作直线运动,已知运动速度函数

$v = at + v_0$, 求路程函数.

研究微分运算的逆运算 ——*不定积分.*

不定积分

定义 设$F(x)$是$f(x)$的任一原函数，则$f(x)$的全部原函数的一般表达式 $F(x)+C$ 称为函数$f(x)$的**不定积分**. 记为$\int f(x)\mathrm{d}x$

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$$

积分号 被积函数 被积表达式 积分变量 积分常数

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}[F(x)+C]'$$

1. 被积函数是原函数的导数，被积表达式是原函数的微分.

2. 不定积分表示那些导数等于被积函数的所有函数．或说其微分等于被积表达式的所有函数. 因此***绝不能漏写积分常数C.***

3. 求已知函数的原函数或不定积分的运算称为积分运算，它是微分运算的逆运算.

基本积分公式

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (k是常数)

(2) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

(3) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

说明：$x > 0, \Rightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C$

$x < 0, \ [\ln(-x)]' = \dfrac{1}{-x}(-x)' = \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(-x) + C \qquad \therefore \int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$

(4) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

(6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

(7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$

(9) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

(12) $\int e^x dx = e^x + C$

(13) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

(14) $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$

(15) $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$

熟记

例 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x$

解 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \mathrm{d}x$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x + \int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x$

$= \tan x - \cot x + C$

第一换元积分法

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \boxed{\cos 2x} \, dx \neq \sin 2x + C$$

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x \neq \cos 2x$$

解决方法 将积分变量换成 $2x$. 因为 $dx = \frac{1}{2} d(2x)$

令 $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt,$

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos t \, dt = \frac{1}{2} \sin t + C$$

t $\frac{1}{2}dt$

$t = 2x$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

注 “凑微分”的主要思想是:将所给出的积分凑成积分表里已有的形式,合理选择 $u=\varphi(x)$ 是凑微分的关键.

$$\int f[\varphi(x)]\boxed{\varphi'(x)}\,\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\,\mathrm{d}\boxed{\varphi(x)}$$

$$\underline{\underline{u=\varphi(x)}}\left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$$

第一类换元公式（凑微分法）

证 $\left(\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right)_x' = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$

$$\left(\int f(u)\,\mathrm{d}u\right)_x' = \left(\int f(u)\,\mathrm{d}u\right)_u' \cdot u_x' = f(u)\varphi'(x)$$

$\varphi(x)$

$$= f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

例　求 $\int \sin 2x\mathrm{d}x$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

解 法一 $\int \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin \boxed{2x}\,\mathrm{d}(\boxed{2x}) \overset{u=2x}{=\!=\!=}$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

法二 $\int \sin 2x\mathrm{d}x = 2\int \sin x \boxed{\cos x}\,\mathrm{d}x$

$$= 2\int \boxed{\sin x}\,\mathrm{d}(\boxed{\sin x}) \overset{u=\sin x}{=\!=\!=} 2\int u\mathrm{d}u = u^2 + C$$

$$= (\sin x)^2 + C$$

小结

常见的凑微分类型有

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\ (a\neq 0)$$

$$\int f(ax^{m+1}+b)x^m\mathrm{d}x = \frac{1}{a(m+1)}\int f(ax^{m+1}+b)\mathrm{d}(ax^{m+1}+b)$$

$$\int f(\frac{1}{x})\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\int f(\frac{1}{x})\mathrm{d}(\frac{1}{x})$$

$$\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$$

$$\int f(e^x)e^x\mathrm{d}x = \int f(e^x)\mathrm{d}(e^x)$$

$$\int f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})$$

不定积分

小结

$$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$$

$$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x$$

$$\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x$$

$$\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}\cot x$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x$$

$$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

例 求 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\mathrm{d}x$

解 $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-4)^2+9}\mathrm{d}x$

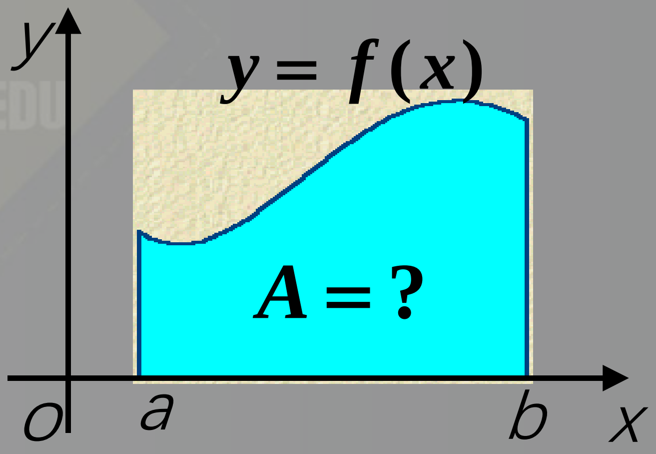
$$= \int \frac{1}{3^2+(x-4)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x-4)}{3^2+(x-4)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3}+C$$

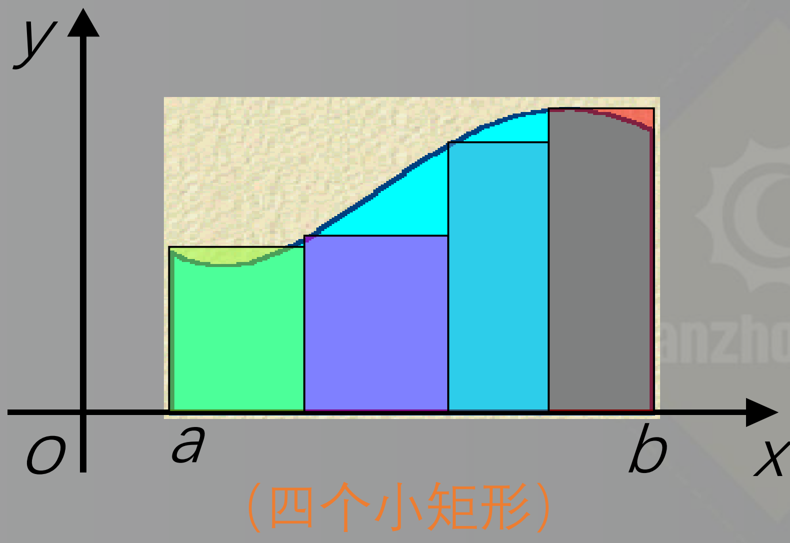
一、问题的提出

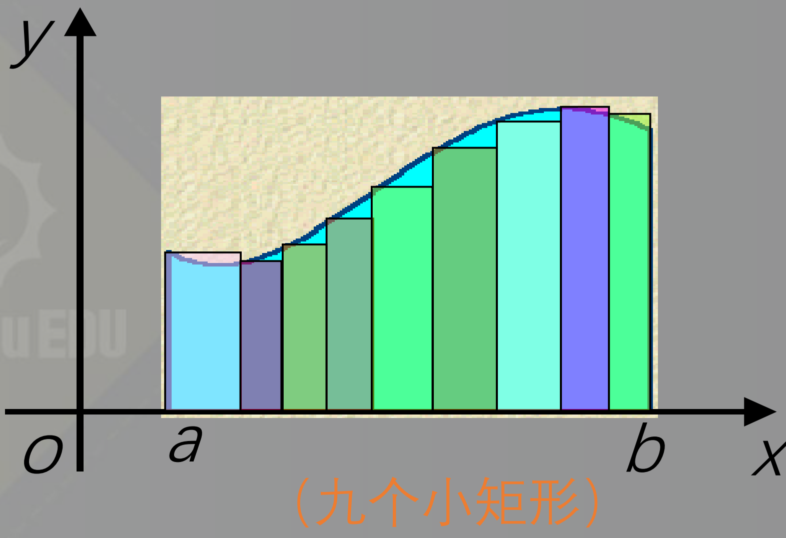
实例1 （求曲边梯形的面积）

曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)(f(x)\geq 0)$、x轴与两条直线 $x=a$、$x=b$所围成.



用矩形面积近似取代曲边梯形面积





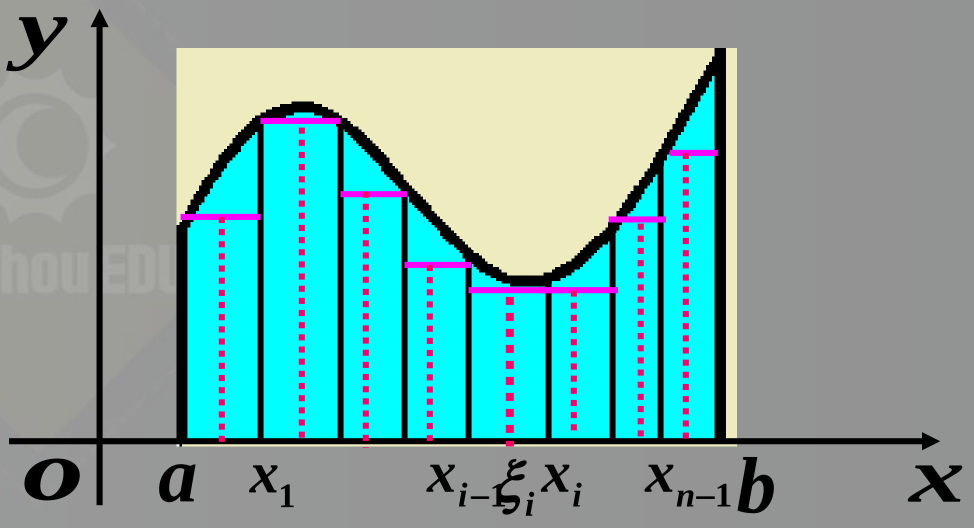
显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积．

曲边梯形如图所示，在区间$[a,b]$内插入若干个分点，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$，

把区间$[a,b]$分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$，

长度为$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$；

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i，



以$[x_{i-1}, x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高的小矩形面积为

$$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形面积的近似值为

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细,即小区间的最大长度

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots \Delta x_n\}$

趋近于零 $(\lambda \to 0)$ 时,

曲边梯形面积为 $A = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

二、定积分的定义

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，各小区间的长度依次为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$(i=1,2,\cdots)$，在各小区间上任取一点 ξ_i（$\xi_i\in\Delta x_i$），作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1,2,\cdots)$

并作和 $S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对 $[a,b]$

怎样的分法， 也不论在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上

点ξ_i怎样的取法，只要当$\lambda \to 0$时，和S总趋于

确定的极限I， 我们称这个极限I为函数$f(x)$

在区间$[a,b]$上的**定积分**， 记为

积分上限　积分和

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分下限

被积函数　被积表达式　积分变量

$[a,b]$积分区间

注意：

（1）积分值仅与被积函数及积分区间有关，

而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

（2）定义中区间的分法和ξ_i 的取法是任意的.

（3）当函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时，

称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

三、存在定理

定理1　当函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续时，

称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

定理2　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，

且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在

区间 $[a,b]$ 上可积.

小结

1．定积分的实质：特殊和式的极限．

2．定积分的思想和方法：

分割 → 化整为零

⇓ 求近似以直（不变）代曲（变）

求和 → 积零为整

⇓ 取极限

取极限 → 精确值——定积分

一、基本内容

对定积分的补充规定:

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

（2）当$a>b$时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

说明　在下面的性质中，假定定积分都存在，且不考虑积分上下限的大小.

定积分的性质

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

证 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

（此性质可以推广到有限多个函数作和的情况）

性质2 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (k\ \text{为常数}).$

证 $\int_a^b kf(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} kf(\xi_i)\Delta x_i$

$= \lim\limits_{\lambda\to 0} k\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$= k\int_a^b f(x)dx.$

性质3　　假设$a<c<b$

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

补充：不论 a,b,c的相对位置如何，上式总成立.

例　若　$a<b<c$,

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

则　$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

（定积分对于积分区间具有可加性）

性质4 $\int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$

性质5 如果在区间$[a,b]$上$f(x) \geq 0$,

则$\int_a^b f(x)dx \geq 0.\quad (a < b)$

证 $\because\ f(x) \geq 0,\ \therefore\ f(\xi_i) \geq 0,\quad (i = 1,2,\cdots,n)$

$\because\ \Delta x_i \geq 0,\quad \therefore\ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0,$

$\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$

$\therefore\ \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \geq 0.$

例 1 比较积分值 $\int_0^{-2} e^x dx$ 和 $\int_0^{-2} x dx$ 的大小.

解 令 $f(x) = e^x - x, \quad x \in [-2, 0]$

$\because \ f(x) > 0, \quad \therefore \int_{-2}^{0} (e^x - x) dx > 0,$

$\therefore \int_{-2}^{0} e^x dx > \int_{-2}^{0} x dx,$

于是 $\int_0^{-2} e^x dx < \int_0^{-2} x dx.$

性质5的推论：

（1）如果在区间$[a,b]$上$f(x)\le g(x)$，

则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.　　$(a<b)$

证　$\because\ f(x)\le g(x)$,　$\therefore\ g(x)-f(x)\ge 0$,

$\therefore\ \int_a^b [g(x)-f(x)]dx \ge 0$,

$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0$,

于是 $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

性质5的推论：

（2） $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \quad (a<b)$

证 $\because -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$

$\therefore -\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx,$

即 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

说明： $|f(x)|$在区间$[a,b]$上的可积性是显然的.

性质6　设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，

则　$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

证　$\because\ m\le f(x)\le M$,

$$\therefore\ \int_a^b m dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M dx,$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a).$$

（此性质可用于估计积分值的大致范围）

例 2　估计积分 $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx$ 的值.

解　$f(x) = \frac{1}{3+\sin^3 x}, \quad \forall\, x \in [0, \pi],$

$0 \le \sin^3 x \le 1, \quad \frac{1}{4} \le \frac{1}{3+\sin^3 x} \le \frac{1}{3},$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4} dx \le \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx \le \int_0^{\pi} \frac{1}{3} dx,$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \le \int_0^{\pi} \frac{1}{3+\sin^3 x} dx \le \frac{\pi}{3}.$$

例 3　估计积分$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$的值.

解　$f(x)=\frac{\sin x}{x}, \quad x\in[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

$f(x)$在$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$上单调下降,

故$x=\frac{\pi}{4}$为极大点，$x=\frac{\pi}{2}$为极小点,

$$M = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \qquad m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi},$$

$$\because\ b - a = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\ \frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

性质7（定积分中值定理）

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，

使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).\qquad (a \le \xi \le b)$

积分中值公式

证 $\because\ m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

$$\therefore\ m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

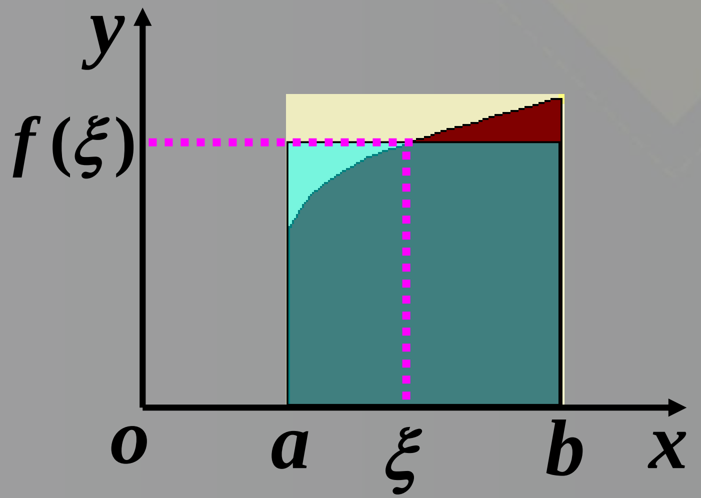
由闭区间上连续函数的介值定理知

在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，

使 $$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

即 $$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).\quad (a\le\xi\le b)$$

积分中值公式的几何解释：



在区间$[a,b]$上至少存在一个点ξ，使得以区间$[a,b]$为底边， 以曲线$y=f(x)$为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为$f(\xi)$的一个矩形的面积。

例 4 设 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$，

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt$.

解 由积分中值定理知有 $\xi\in[x, x+2]$，

使 $\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt=\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)(x+2-x)$，

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2} t\sin\frac{3}{t} f(t)dt=2\lim_{\xi\to+\infty}\xi\sin\frac{3}{\xi} f(\xi)$$

$$=2\lim_{\xi\to+\infty}3f(\xi)=6.$$

二、小结

1．定积分的性质

（注意估值性质、积分中值定理的应用）

2．典型问题

（1）估计积分值；

（2）不计算定积分比较积分大小．

一、问题的提出

变速直线运动中位置函数与速度函数的联系

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

变速直线运动中路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$

另一方面这段路程可表示为 $s(T_2)-s(T_1)$

$\therefore \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2)-s(T_1).$ 其中 $s'(t)=v(t).$

二、积分上限函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，并且设x为$[a,b]$上的一点，考察定积分

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

如果上限x 在区间$[a,b]$上任意变动，则对于每一个取定的x 值，定积分有一个对应值，所以它在$[a,b]$上定义了一个函数，

记 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$ 积分上限函数

积分上限函数的性质

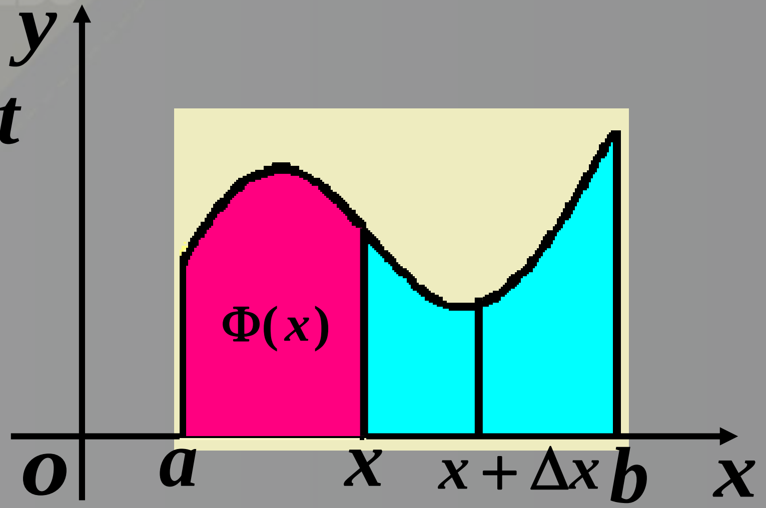
定理 1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，且它的导数是

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)\qquad(a\le x\le b)$$

证 $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

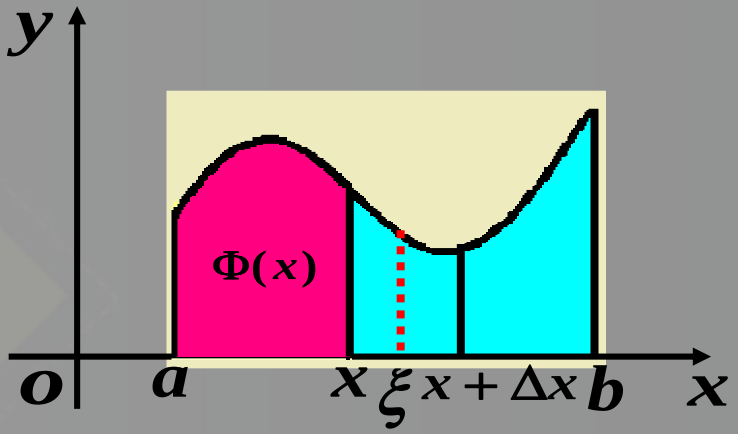
$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$



$$=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$



由积分中值定理得

$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x \quad \xi\in[x,x+\Delta x],$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi), \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$$

$$\Delta x\to 0, \xi\to x \qquad \therefore \quad \Phi'(x)=f(x).$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用洛必达法则.

解 $\dfrac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt = -\dfrac{d}{dx}\int_{1}^{\cos x} e^{-t^2}dt,$

$= -e^{-\cos^2 x}\cdot(\cos x)' = \sin x \cdot e^{-\cos^2 x},$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x} = \dfrac{1}{2e}.$

例 2 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$.

证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

证 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = xf(x)$, $\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$,

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$F'(x)=\frac{f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2},$$

$$\because\ f(x)>0,\quad (x>0)\qquad \therefore \int_0^x f(t)dt>0,$$

$$\because (x-t)f(t)>0,\qquad \therefore \int_0^x (x-t)f(t)dt>0,$$

$$\therefore F'(x)>0\quad (x>0).$$

故$F(x)$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

例3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)<1$. 证明

$$2x-\int_0^x f(t)dt=1 \text{ 在 } [0,1] \text{ 上只有一个解.}$$

证 令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$,

$\because f(x)<1$, $\quad \therefore F'(x)=2-f(x)>0$,

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为单调增加函数. $F(0)=-1<0$,

$F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1[1-f(t)]dt>0$,

所以 $F(x)=0$ 即原方程在 $[0,1]$ 上只有一个解.

定理2（原函数存在定理）

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

定理的重要意义：

（1）肯定了连续函数的原函数是存在的.

（2）初步揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.

三、牛顿—莱布尼茨公式

定理 3（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

证 $\because$ 已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

又$\because$ $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数，

$\therefore F(x) - \Phi(x) = C \qquad x \in [a,b]$

令 $x=a \Rightarrow F(a)-\Phi(a)=C,$

$\because \Phi(a)=\int_a^a f(t)dt=0 \Rightarrow F(a)=C,$

$\because F(x)-\int_a^x f(t)dt=C,$

$\therefore \int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a),$

令 $x=b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$

牛顿—莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

微积分基本公式表明：

一个连续函数在区间$[a,b]$上的定积分等于它的任意一个原函数在区间$[a,b]$上的增量.

求定积分问题转化为求原函数的问题.

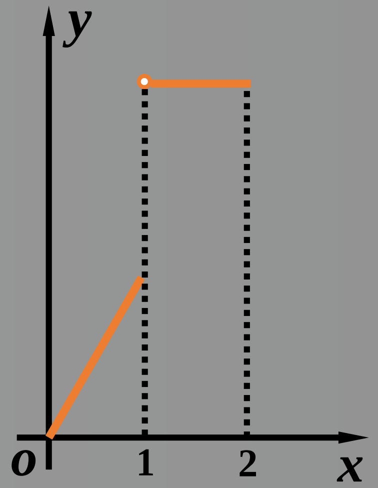
注意　当$a > b$时，$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$仍成立.

例4 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx.$

解 原式 $=[2\sin x-\cos x-x]_0^{\frac{\pi}{2}}=3-\dfrac{\pi}{2}.$

例5 设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)dx.$

解 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$



在[1,2]上规定当$x=1$时，$f(x)=5$，

原式 $=\int_0^1 2xdx+\int_1^2 5dx=6.$

四、小结

1.积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$

2.积分上限函数的导数 $\Phi'(x)=f(x)$

3.微积分基本公式 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

牛顿—莱布尼茨公式沟通了微分学与积分学之间的关系.

总结及作业

- 定积分的运算
- 微积分的基本公式及运算
- 作业

Tanzhou EDU

Thanks For Your Attention!

感谢观看!

Artificial Intelligence