

# 典型优化问题的模型与算法

(Models & Algorithms of Typical Optimization Problems)

东北大学 系统工程研究所  
2013.09





## 目的

---

- 理解优化问题的基本思维方式
- 了解各种典型的优化问题及其求解方法
- 掌握一种智能优化方法：遗传算法
- 提高分析问题、解决问题的能力
- 为今后的应用与研究奠定基础



# 课程介绍

- 主要参考教材：
  - 遗传算法与工程设计
    - 作者：玄光南、程润伟；翻译：汪定伟、唐加福、黄敏
  - 遗传算法与工程优化
    - 作者：玄光南、程润伟；翻译：于歆杰、周根贵
- 其它参考资料
  - 遗传算法的数学基础
  - 组合最优化
  - 运筹学
  - 最优化方法
- 授课方式：
  - 讲课
  - 课堂讨论
- 评估办法：
  - 开卷考试（0-60）
  - 算法实验（0-40）（出席情况）



- 内容：
  - 以某一典型优化问题为例，构造“具体”模型，采用遗传算法进行求解。
- 基本要求：
  - 列出具体模型；
  - 设计染色体编码、交叉算子、变异算子、适值函数、选择策略、种群初始化方法等；
  - 给出程序设计说明（类，函数，流程图等）；
  - 给出多种条件下的仿真结果对比分析。
  - 采用VB、VC、C#、JAVA等任一种软件开发语言实现
- 提交内容：
  - 实验报告的电子文档
  - 源代码及其全部工程文件、数据文件（ZIP形式）
  - 发送到：[liushuan@ise.neu.edu.cn](mailto:liushuan@ise.neu.edu.cn)  
(可以随时发给我，最晚考试之后10天之内)



## 导言部分的主要内容

- 课程名称：典型优化问题的模型与算法
  - 优化在工程中的重要作用
  - 优化问题
    - 什么是优化问题、简单实例
    - 优化问题的基本结构、分类
  - 模型
    - 什么是模型、数学模型、模型分类、建模的基本原则
  - 算法
    - 什么是算法、优化算法、算法分类
  - 优化问题的复杂性
    - **NP完全**、**NP难问题**
  - 智能优化方法
    - 遗传算法的基本结构、实例
  - 典型问题
    - 课程的主要内容
    - 讲解思路

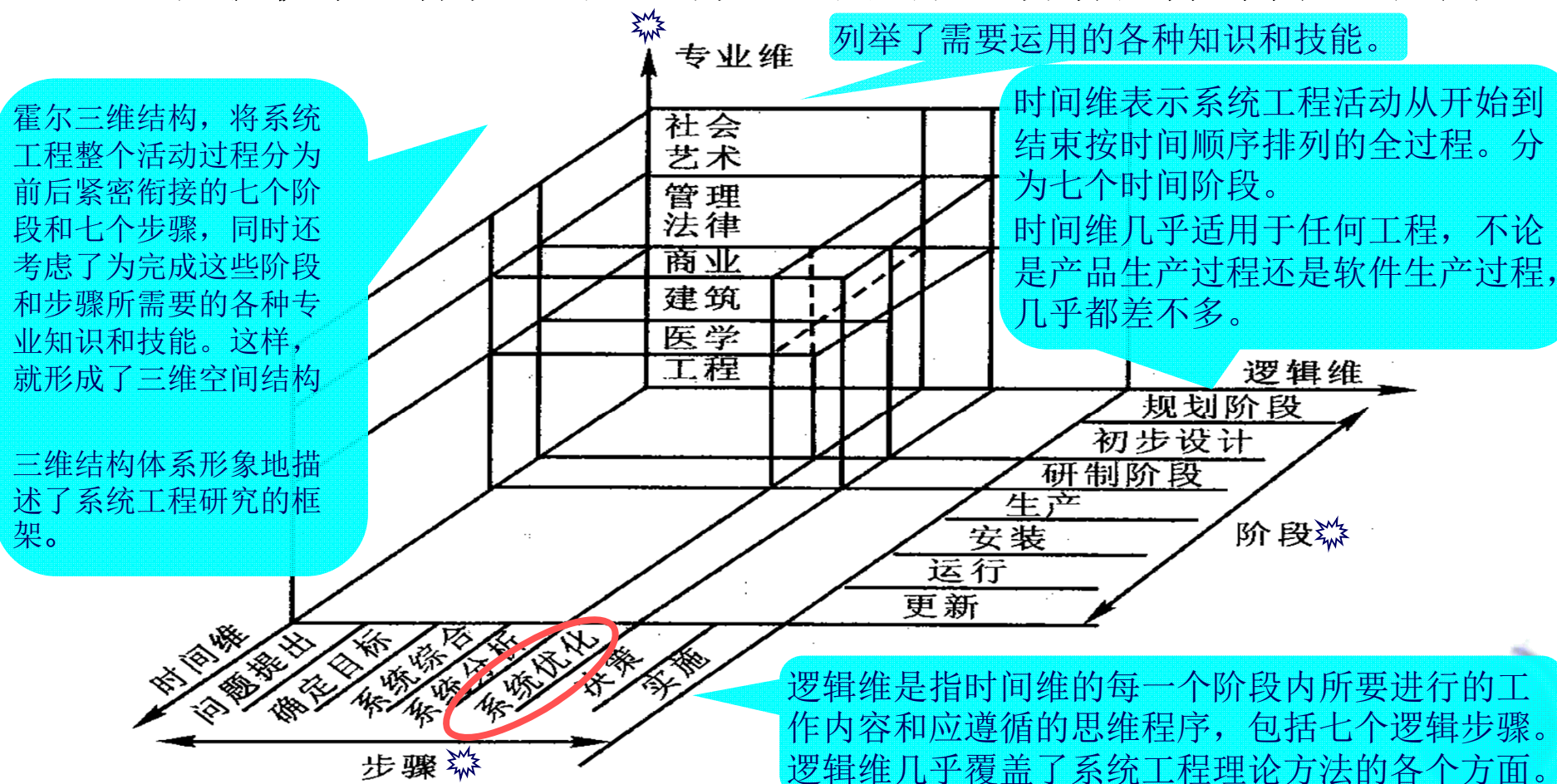


- 简单地说就是运用先进的科学方法，进行组织管理，以求“最佳效果”的技术。
- 是按照系统化开发的过程和方法，去研究和建造“最优化系统”的一门综合性的管理工程技术。



# 系统工程方法论

- 霍尔三维构结 (Hall three dimensions structure) ✨
  - 是美国系统工程专家霍尔(A·D·Hall)于1969年提出的一种系统工程方法论。它的出现,为解决大型复杂系统的规划、组织、管理问题提供了一种统一的思想方法,因而在世界各国得到了广泛应用。



# 最优化问题

- 问题→（选择不同的）方法→（得到不同的）结果。
- 采取什么样的选择或行动最好，就是一个最优化问题。

$$\min f(x)$$

$$s.t. \quad x \in D$$

- 优化问题的三要素：
  - 决策变量
  - 约束条件
  - 目标函数
- 所谓的优化问题，就是在某限制条件下（领域 **D**），从多种可行解中，确定使目标函数  $f(x)$  达到最小（或最大）时，决策变量  $x$  的取值（最优解）问题。





## 优化问题举例

- 背包问题(knapasck)
- 装箱问题(bin packing)
- 二次指派问题(QuadraticAssignment)
- 最小生成树问题(MinimumSpanningTree)
- 旅行商问题(TSP)
- 图着色问题(graph coloring)
- 聚类问题(clustering)
- 最优切割问题 (cutting stock)
- 设备布局问题(layout)
- 作业、流水车间调度问题(flowshop,jobshop)
- 机器调度问题(scheduling)
- 物流、交通、运输问题(transportation)
- 多目标优化问题 (multiobject)
- 模糊优化问题 (fuzzy)
- .....

优化问题在  
日常生活中  
无处不在!

要买身西服，要考虑预算多少、今后的购入计划等，尽可能选择中意的东西。  
要乘车出游，尽可能选择时间短、花钱少的路线，如果可能得话，还要选择沿途风景好的线路。  
结婚办婚礼...  
买房子装修...

## 最优化问题的简单实例

- 函数优化问题:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= 10 + 5\sin(x) + \log(10x + 11)\cos(3 + x/2) \\ \text{s.t. } x &\geq 3, \quad x \leq 14 \end{aligned}$$

➤ 目标函数:  $f(x)$  最小化

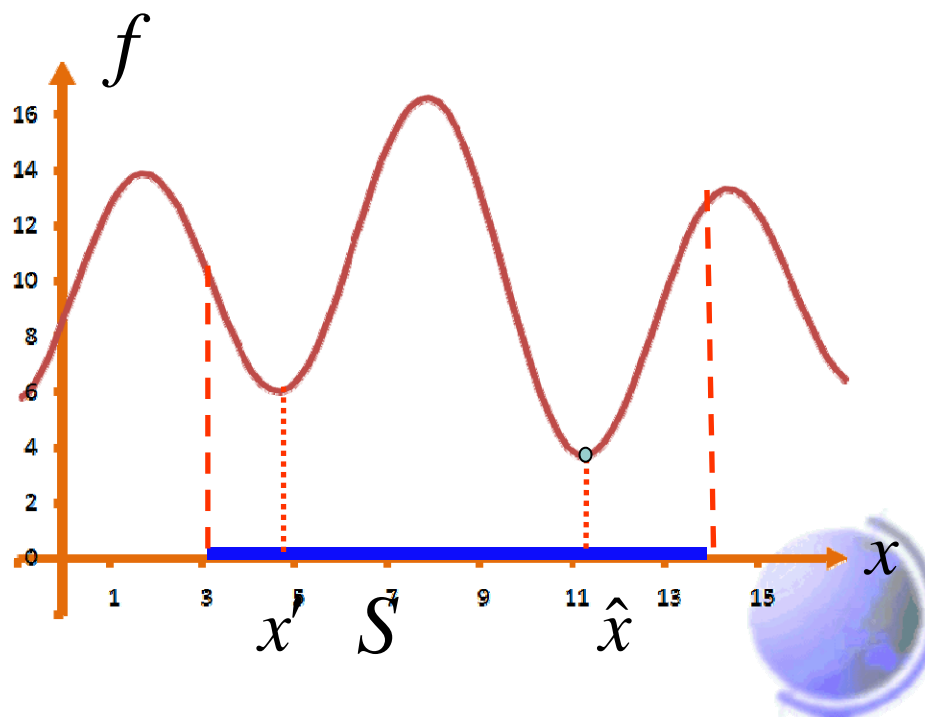
➤ 约束条件:  $x \in S$

➤ 最优值:  $f(\hat{x})$

➤ 最优解:  $\hat{x}$

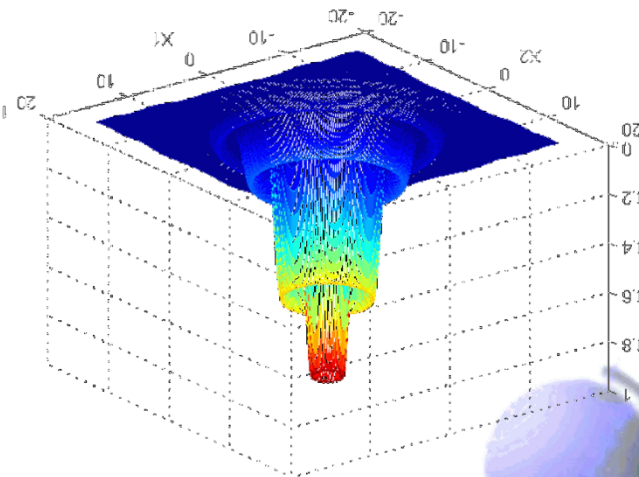
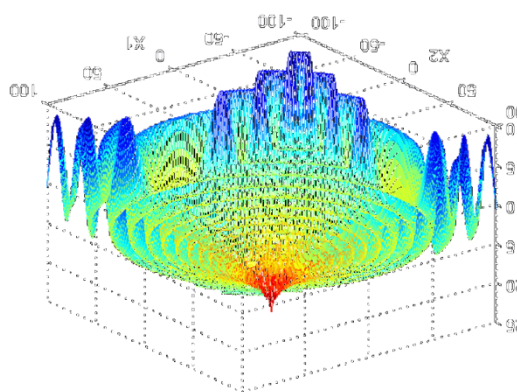
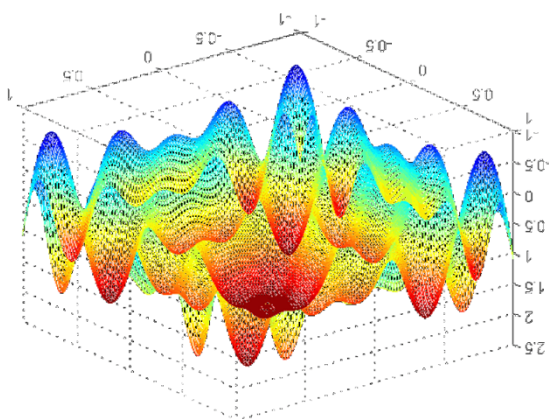
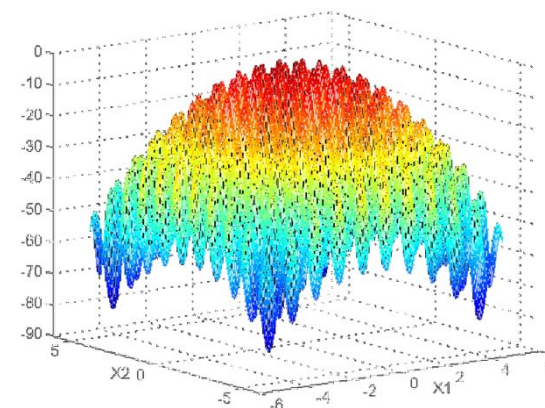
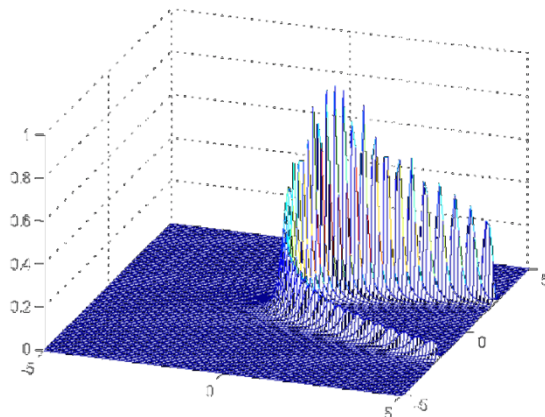
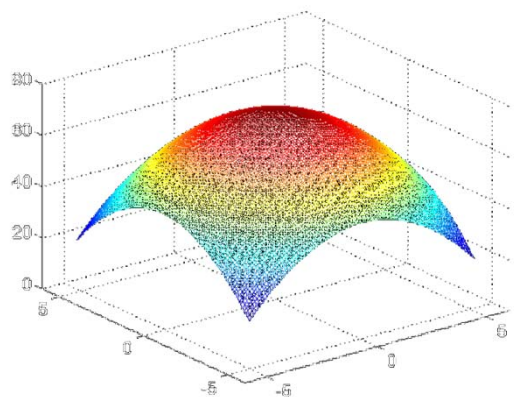
➤ 局部最优解:  $x'$

➤ 多极值点、多峰问题



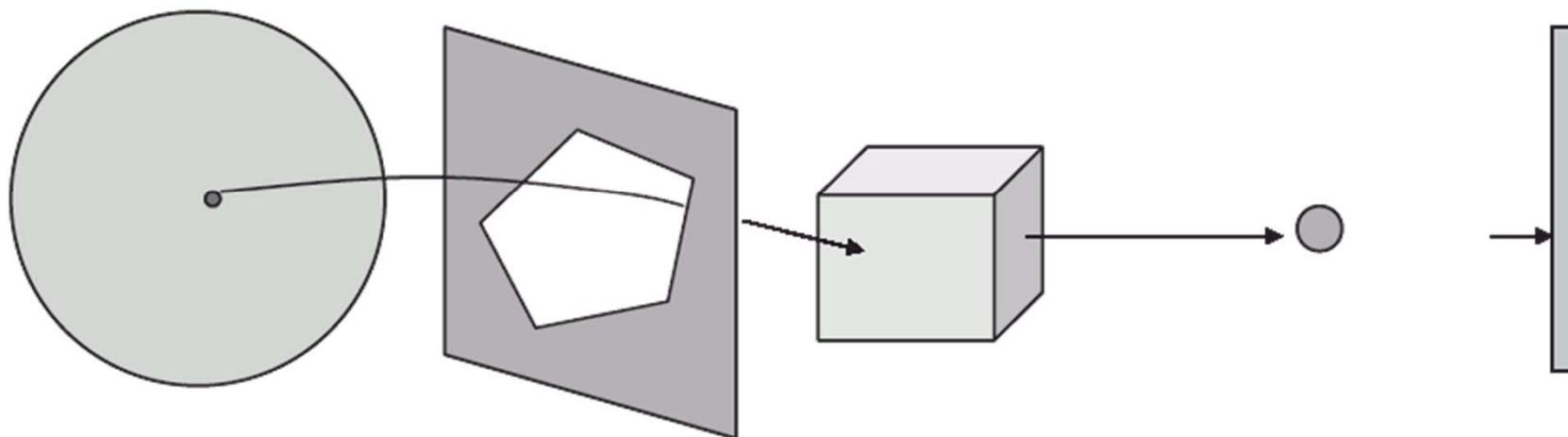
## 最优化问题的简单实例

- 函数优化问题:



## 优化问题的基本结构

- 由5个部分构成



定义域: D  
Domain

约束条件: C  
Constraints

评价机制: M  
Mechanism

评价值: E  
Value

最优性准则: G  
Criterion



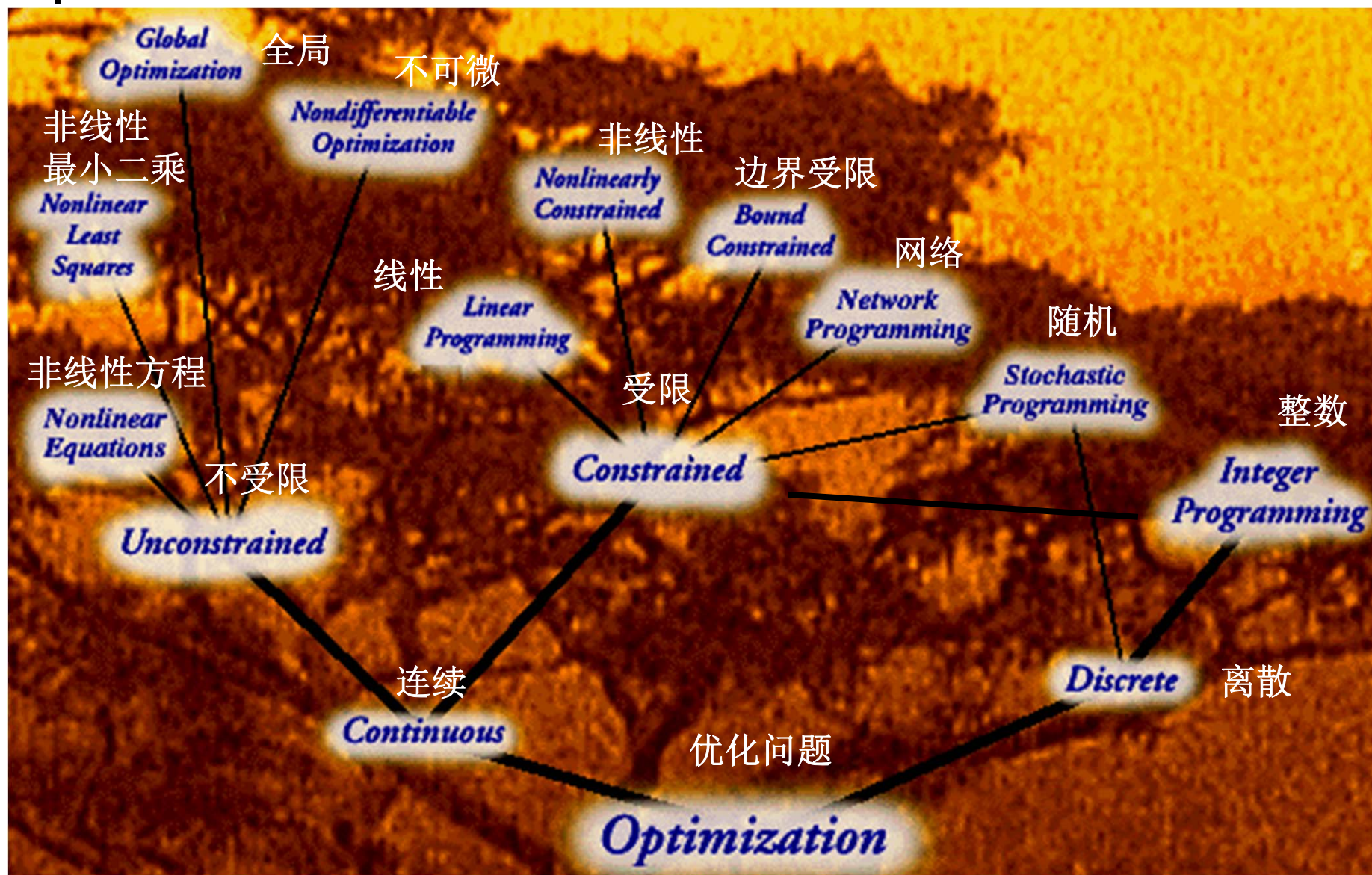
## 不同的组合，不同的优化问题

- **D:实数**, **C:线性不等式**, **M:表达式**, **E:线性（标量）**, **G:最大（小）**
  - 线性规划 (linear programming problem)
- **D:整数**, **C:线性不等式**, **M:表达式**, **E:线性（标量）**, **G:最大（小）**
  - 整数规划 (integer programming problem)
  - 离散最优化 (discrete optimization problem)
  - 混合整数规划 (mixed integer programming problem)
  - 0-1整数规划、混合0-1整数规划
- **D:实数**, **C:线性不等式**, **M:表达式**, **E:非线性（标量）**, **G:最大（小）**
  - 二次规划 (quadratic programming problem)
  - 非线性规划 (non-linear programming problem)
- **D:函数**, **C:边界条件、连续性等**, **M:表达式**, **E:泛函**, **G:最大（小）**
  - 变分问题 (variational problem)
- **D:对象的组合**, **C:各种条件**, **M:一般为表达式**, **E:一般为标量**, **G:最大（小）**
  - 组合最优化问题 (combinational optimization problem)
    - 例如:旅行商问题 (traveling salesman problem)

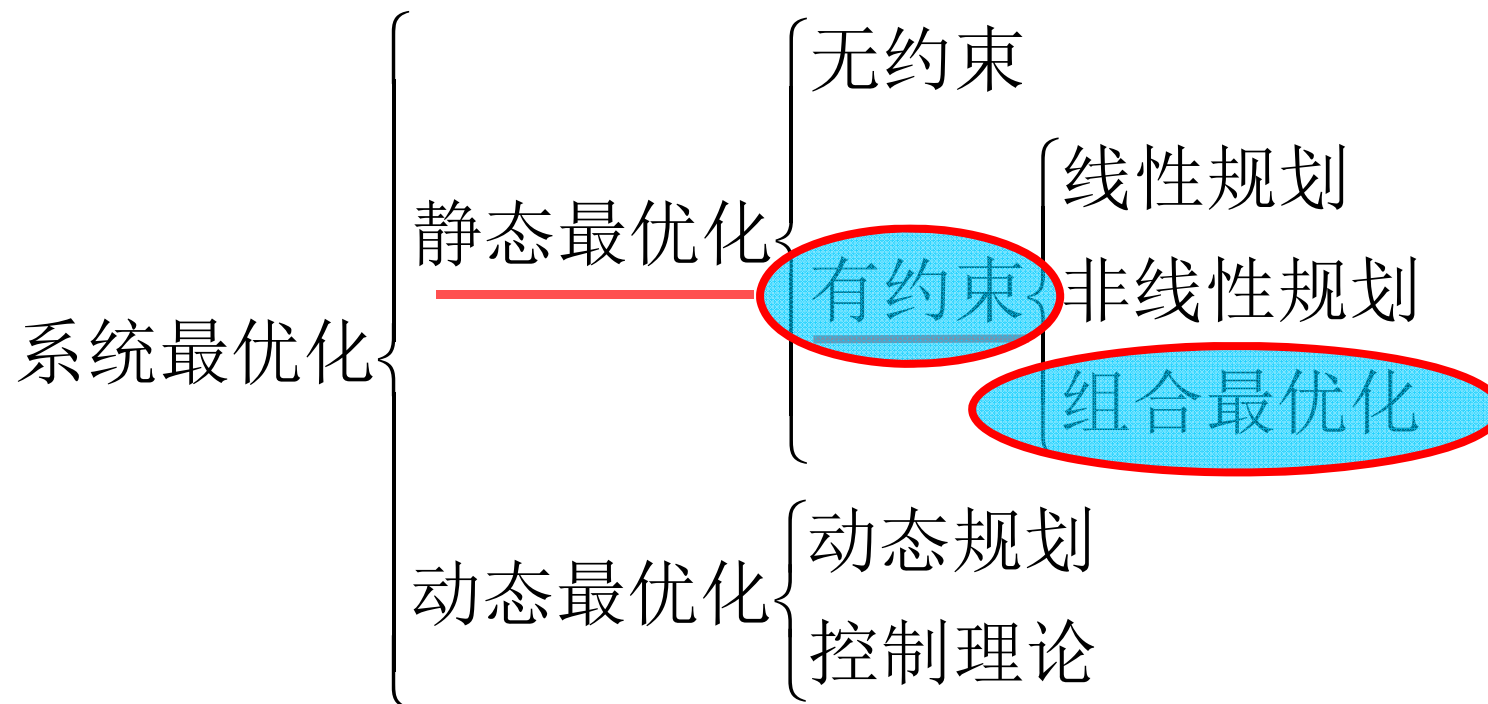




# 优化问题的分类



## 不同的分类方法



# 模型、数学模型

- 模型:

- 铸造机器零件等用的模子。
- 根据实验、图样放大或缩小而制作的样品，一般用于展览或实验。
- 对所研究的系统、过程、事物或概念的一种表达形式。
  - 模型可以是物理实体，也可以是某种图表或者是一种数学表达式。
  - 用这种方法进行处理，可以大大减少实验工作量，还有助于了解过程的实质。

- 数学模型:

- 是数学理论与实际问题相结合的一门科学。
- 它将现实问题归结为相应的数学问题，并在此基础上利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析 and 研究，从而从定性或定量的角度来刻画实际问题，并为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导。
- 从广义上理解：
  - 数学模型包括数学中的各种概念，各种公式和各种理论。因为它们都是由现实世界的原型抽象出来的，从此意义上讲，整个数学也可以说是一门关于数学模型的科学。
- 从狭义上理解：
  - 数学模型只指那些反映了特定问题或特定的具体事物系统的数学结构，从此意义上，也可理解为联系一个系统中各变量间内在关系的数学表达。
- 简单地说：
  - 数学模型就是对实际问题的一种数学表述。可以是数学公式（等式、不等式），算法、表格、图示等等。



# 数学模型的分类

- 按模型的应用领域分类
  - 生物数学模型、医学数学模型、地质数学模型、数量经济学模型...
- 按是否考虑随机因素分类
  - 确定性模型、随机性模型
- 按是否考虑模型的变化分类
  - 静态模型、动态模型
- 按应用离散方法或连续方法分类
  - 离散模型、连续模型
- 按建立模型的数学方法分类
  - 几何模型、微分方程模型、图论模型、规划论模型...
- 按人们对事物发展过程的了解程度分类
  - 白箱模型：
    - 指那些内部规律比较清楚的模型。如力学、热学、电学以及相关的工程技术问题。
  - 灰箱模型：
    - 指那些内部规律尚不十分清楚，在建立和改善模型方面都还不同程度地有许多工作要做的问题。如气象学、生态学、经济学等领域的模型。
  - 黑箱模型：
    - 指一些其内部规律还很少为人们所知的现象。如生命科学、社会科学等方面的问题。但由于因素众多、关系复杂，也可简化为灰箱模型来研究。

# 建立数学模型的基本原则

## ● 简化原则

- 现实世界的原型都是具有多因素、多变量、多层次的比较复杂的系统，对原型进行一定的简化即抓住主要矛盾。数学模型应比原型简化，数学模型自身也应是“最简单”的。

## ● 可推导原则

- 由数学模型的研究，可以推导出一些确定的结果，如果建立的数学模型在数学上是不可推导的，得不到确定的可以应用于原型的结果，这个数学模型就是无意义的。

## ● 反映性原则

- 数学模型实际上是对现实世界的一种反映形式，因此数学模型和现实世界的原型就应有一定的“相似性”，抓住与原型相似的数学表达式或数学理论就是建立数学模型的关键性技巧。

- 在现代数学中，任何一个一般性的计算方法和计算程序均可称之为算法。
  - 一切可设想的数学问题其算法均可分两大类：
    - 一是无算法；
    - 一是有算法。
  - 在有算法的问题中又分为：
    - 有效算法；
      - 是指计算时间只随问题规模的增大呈多项式曲线增长
    - 无效算法。
      - 是指计算时间随问题规模的增大呈指数曲线增长
- 这里的计算时间通常是指计算步骤。



## 算法举例

- 有效算法;

- 例如：对  $n$  个数字进行排列的选择排序算法，
- 比较次数  $(n-1)+(n-2)+\dots+1 = n(n-1)/2$ ,
- 算法复杂度:  $O(n^2)$ ,  $n$  是问题的规模
- $n$  由100增加到103, 计算比较次数增加:  
 $(103*(103-1)/2) / (100*(100-1)/2) = 1.06$ 倍

- 无效算法。

- 例如：工厂的下料问题，要在这一块很大的钢板上切割出大小形状不同的钢片，怎么排列钢片才能用料最省。
- 假设有  $n$  个钢片，采用枚举的方法有  $n!$  种可能，要进行  $n!$  次比较才能找到最佳下料组合， $n$  是问题的规模
- $n$  由100增加到103, 计算比较次数增加:  
 $103! / 100! = 1$ 百多万倍

这里的计算时间通常是指计算步骤。



- 所谓优化算法，实质就是一种搜索过程或规则。
  - 基于某种思想或机制，通过一定的途径或规则得到满足用户要求的问题的解的过程。



## 优化算法的分类——按优化机制与行为划分

- 经典算法：运筹学中的传统算法，计算复杂性一般很大，多数算法只适于求解小规模问题。
  - 线性规划
  - 动态规划
  - 整数规划
  - 分支定界法
- 构造算法：用构造的方法快速建立问题的解，通常算法的质量差，难以满足工程的要求，如调度中的
  - Johnson法(约翰逊)
  - Gupta法
- 迭代算法：从问题的任一解出发，对其邻域不断搜索并替换当前解，通过迭代来实现优化。
  - 邻域搜索法
  - 贪婪搜索（只接受优于当前解的邻域搜索方法）
  - 全局搜索(SA, GA, TS, EP)（利用一些“指导规则”在整个解空间中寻找优良解，可以接受坏的解）
- 演化算法：将优化过程转化为系统动态的演化过程，基于系统的动态演化来实现优化
  - 神经网络
  - 混沌搜索
- 混合算法：上述算法在结构或操作上相混合而产生的各种算法。



## 优化算法的分类- II

- 解决一个实际问题时，通常要问的两个问题：
  - 是必须求取全局最优解、还是局部最优解就可以满足要求？
  - 是必须获取精确解、还是近似解(准最优解)就可以满足要求？
- 精确解的求解算法(经典算法、确定算法)
  - 面向连续函数的方法
  - 面向离散函数的方法
- 近似解的求解算法
  - 随机法(random method)、(Monte Carlo Method)
  - 邻域搜索法(neighborhood search)
  - 松弛法(relaxation method)
- 理想的情况是求取全局最优的精确解，然而对于大规模问题，能获取全局精确解的实际上不是很多，对于大多数优化问题，我们不得不妥协于求解局部最优的近似解。



# 优化问题的复杂性

- 有些问题往往是：
  - 不连续、不可微、多峰、随机、模糊、不确定、甚至无法用数学公式来进行描述的。
- 很多问题找不到精确的求解方法
  - 即使可以找到精确的求解方法，但随着问题规模的扩大，也**无法在有限的时间（步骤）内得到问题的最优解**。也就是**找不到求解问题的多项式算法**，
  - 属于一类**NP难（或NP完全）**的问题。
    - **P(Polynomial )问题**：可以找到**多项式时间算法**的问题。如果一个算法，它能在以**输入规模**为参变量的某个多项式的时间内给出答案，则称它为多项式时间算法。注意：这里的多项式时间是指算法运行的**步数**。
    - **NP(Non-Deterministic Polynomial )问题**：多项式复杂程度的**非确定性问题**。是指可以在多项式时间里验证一个解的问题。**NP问题**的另一个定义是，可以在多项式的时间里猜出一个解的问题。
    - **NP完全(NP-complete)**：可以规约（在多项式时间内划归）为一类特殊的**NP问题**，这类问题目前还没找到多项式算法，但也没法证明找不到。
    - **NP难(NP-hard)**：比NP完全问题的范围更广，目前没有多项式算法（不一定是NP问题）。即使NP问题找到了多项式算法，NP难问题也未必能找到。

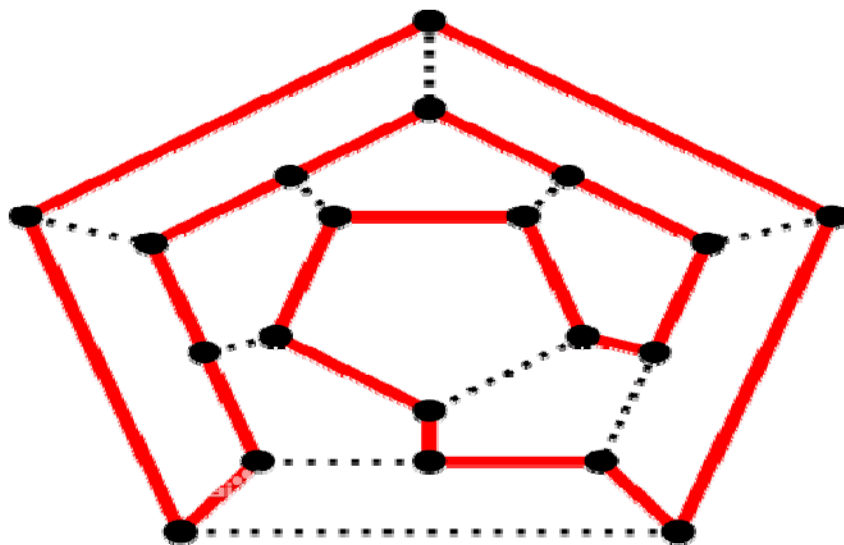




## 优化问题的复杂性

- 哈密顿（Hamilton）回路问题：

- 给定一个图，能否找到一条经过每个顶点一次且恰好一次，最后又走回来的路（满足这个条件的路径叫做**Hamilton回路**）。
- 这个问题现在还没有找到多项式级的算法。
- 但如果给一个任意的回路，很容易判断它是否是哈密顿回路（只要看是不是所有的顶点都在回路中就可以了），**可以在多项式时间内判断这个回路是否正确。**



- 遗传算法
- 模拟退火算法
- 禁忌搜索算法
- 蚁群算法
- 粒子群算法
- 人工神经网络
- 混合智能优化算法
- .....



## 遗传算法简介

- 遗传算法（Genetic Algorithm）是一类借鉴生物界的进化规律（适者生存，优胜劣汰遗传机制）演化而来的随机化搜索方法。
- 由美国的J.Holland教授1975年首先提出
- 其主要特点：
  - 遗传算法运算的是解集的编码，而不是解集本身；
  - 搜索始于解的一个种群（多点），而不是单个解，具有内在的隐并行性和更好的全局寻优能力；
  - 只使用报酬信息（适值函数），而不使用导数或其它辅助知识；
  - 采用概率的，而不是确定的状态转移规则，能自适应地调整搜索方向。
- 应用领域：
  - 组合优化
  - 机器学习
  - 信号处理
  - 自适应控制
  - 人工生命等领域。
- 是现代有关智能计算中的关键技术之一。



## 模拟退火算法

- 1982年柯克帕特里克(Kirkpatrick)等将热力学中的退火思想引入组合优化领域，提出一种解大规模组合优化问题，特别是NP完全问题的有效近似算法。
- 模拟退火(Simulated Annealing,简称SA算法)。它源于对固体退火过程的模拟，采用Metropolis接受准则，并用一组称为冷却进度表的参数控制算法进程，使算法在多项式时间里给出一个近似最优解。
- 模拟退火法能以一定的概率接受差的能量，因而有可能跳出局部极小，但它的收敛速度较慢，很难用于实时动态调度环境

## 禁忌搜索算法

- 禁忌搜索法 (tabu search) 也是一种邻域搜索方法，从一个可行解  $S$  出发， $S$  产生邻域  $S'$ ，如果  $f$  为目标函数，选取所有邻域中使  $f(S')$  为最优的状态作为下一状态，并把这一移动的方向存入一个称为禁忌移动的表中
- 列在表中的移动在以后若干步内不允许再产生（曾经走过的路不再重走），直到它被从表中更新除去，这样可避免搜索进入循环状态。
- 每搜索一次，更新一次禁忌移动表，由于禁忌移动表的限制，有可能跳出局部极小。
- 用禁忌搜索法进行优化搜索时需要一可行的初始解。

## 蚁群算法

- 蚁群算法由意大利学者M. Dorigo, V. Maniez和A. Colorini等人在90年代首先提出
- 算法受到真实蚁群觅食行为的启发。虽然单个蚂蚁没有太多的智力,也无法掌握附近的地理信息,但整个蚁群却可以找到一条从巢穴到食物源之间的最优路线。
- 蚂蚁个体之间通过一种称之为信息素(pheromone)的物质进行信息传递。
- 蚂蚁在运动过程中,能够在它所经过的路径上留下该种物质,而且蚂蚁在运动过程中能够感知这种物质,并以此指导自己的运动方向,因此,由大量蚂蚁组成的蚁群的集体行为便表现出一种信息正反馈现象:某一路径上单位时间走过的蚂蚁越多,表明该路线的可用性越好,则后来者选择该路径的概率就越大.蚂蚁个体之间就是通过这种信息的交流寻找最优的到达食物源的线路。
- 蚁群算法具有实现简单、正反馈、分布式的优点。



## 粒子群算法

- 90年代中期，Eberhart博士和Kennedy博士共同发明了一种新的群体智能计算技术——粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization, PSO)
- 源于对鸟群和鱼群群体捕食行为的研究。
- PSO同遗传算法类似，是一种基于叠代的优化工具，是一种进化计算技术(evolutionary computation)。
- 粒子群优化算法的基本思想是通过群体中个体之间的协作和信息共享来寻找最优解。
- 系统初始化为一组随机解，通过叠代搜寻最优值。但是并没有遗传算法用的交叉(crossover)以及变异(mutation)，而是粒子在解空间追随最优的粒子进行搜索。
- PSO算法概念简单、容易实现、搜索速度快、搜索范围大，和其他优化算法相比，它的优点突出。
- 粒子群优化算法本质上是一种并行的全局性的随机搜索算法。



# 人工神经网络

- 人工神经网络(Artificial Neural Networks),是模仿或者模拟生物神经系统工作过程,依照由大量简单神经元互联而构成的一种计算结构,并形成或建立起来的一种数据处理技术,从而具备了解决实际问题的能力。
- 网络上的每个结点相当于一个神经元,可以记忆(存储)、处理一定的信息,并与其它结点并行工作。
- 求解一个问题是向人工神经网络的某些结点输入信息,各结点处理后向其它结点输出,其它结点接受并处理后再输出,直到整个神经网络工作完毕,输出最后结果。
- 特点和优越性
  - 具有自学习功能。
    - 例如实现图像识别时,只在先把许多不同的图像样板和对应的应识别的结果输入人工神经网络,网络就会通过自学习功能,慢慢学会识别类似的图像。自学习功能对于预测有特别重要的意义。预期未来的人工神经网络计算机将为人类提供经济预测、市场预测、效益预测,其前途是很远大的。
  - 具有联想存储功能。
    - 人的大脑是具有联想功能的。如果有人和你提起你童年的同学张某某,你就会联想起张某某的许多事情。用人工神经网络的反馈网络就可以实现这种联想。
  - 具有高速寻找优化解的能力。
    - 寻找一个复杂问题的优化解,往往需要很大的计算量,利用一个针对某问题而设计的反馈型人工神经网络,发挥计算机的高速运算能力,可能很快找到优化解。



# 算法总结

- 遗传算法
  - 借鉴生物界的进化规律（适者生存，优胜劣汰遗传机制）
- 模拟退火算法
  - 源于对固体退火过程的模拟
- 禁忌搜索算法
  - 曾经走过的路不再重走
- 蚁群算法
  - 受到真实蚁群觅食行为的启发
- 粒子群算法
  - 源于对鸟群和鱼群群体捕食行为的研究
- 人工神经网络
  - 模仿或者模拟生物神经系统工作过程
- .....
  - .....



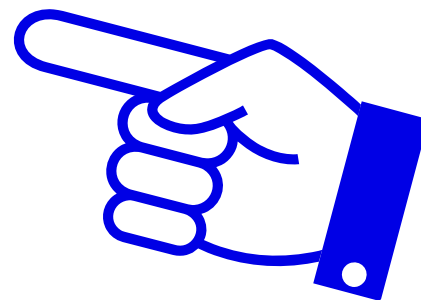
受到狗寻找物品的  
起名叫“GP”算法

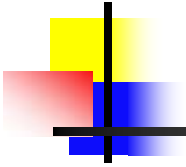
# 主要内容

- 概述
- 约束优化问题（GA的基本概念）
  - 无约束优化
  - 非线性规划;
- 组合优化问题
  - 背包问题(knapasck)
  - 二次指派问题
  - 最小生成树问题
  - 旅行商问题
  - 影片递送问题
  - 集覆盖问题
  - 装箱问题
- 运输问题
  - 线性运输问题
  - 三维运输问题
  - 多目标运输问题
  - 固定费用运输问题
  - 工厂选址问题
- 网络设计与路径
  - 最短路径问题
  - 最大流问题
  - 最小成本流问题
  - 双准则网络设计问题
  - 多阶段工序计划问题
  - 集中式网络设计问题
  - 计算机网络扩展问题
- 设备布局设计问题
  - 单行机器布局问题
  - 多行机器布局问题
- 选址-分配问题
  - 一般选址-分配问题
  - 无能力约束的选址一分配问题
  - 障碍选址一分配问题
- 模糊优化（计划）
  - 模糊线性规划
  - 模糊非线性规划
- 调度问题
  - 流水车间调度问题
  - 作业车间调度问题
  - 机器调度问题



- 对每一个典型问题，力图从以下几个方面进行论述
  - 问题是什么
  - 如何根据问题构造数学模型
  - 模型的特点
  - 应用领域
  - 经典的求解方法（简介）
  - GA求解思路





# End

