模糊优化问题

(Fuzzy Optimization Problems)

东北大学 系统工程研究所

2009.09

模糊优化问题

- 一般数学规划
  - 大多数优化问题可以描述为数学规划模型。
  - 数学规划一般用于不同级别的管理和制造等学科中的规划和决策，但这种情况下一般采用清晰的目标函数和约束
- 模糊数学规划 (fuzzy mathematical programming)
  - 实际问题不仅在表达目标函数（利润和损失）中允许存在偏差，在表达约束（投资规模、能力限制等）中也允许存在偏差。
  - 对这种情况更为理想的表示，需要妥善处理这种不明确性。
  - 目前为止，已经提出了不同形式的模糊数学规划来处理这种情况。
  - 许多文章提出了一系列利用 **Zadeh** 提出的可能性理论将原始约束转换为清晰等价式的思想。
- 遗传算法在各种数学规划问题中有许多成功的应用
  - 不幸的是，遗传算法在清晰数学规划问题中的实现不能直接应用于解决模糊规划问题。
  - 必须采取某些技巧，这些技巧能够在进化过程中处理模糊性，从而用遗传算法解决模糊数学规划问题。

主要内容

- 模糊线性规划；
- 模糊非线性规划；
- 模糊整数规划；
- 模糊混合整数规划；
- 模糊混合整数目标规划；
- 模糊多目标规划；
- 模糊多准则三维运输问题；
- 模糊调度问题；
- 模糊设备布局问题；
- 模糊……。

模糊线性规划问题

(Fuzzy Linear Programming Problems)

模糊线性规划--f-LP

- 自 **Bellman** 和 **Zadeh** 提出模糊决策概念以来，关于模糊数学规划领域的研究成为热点。
- 根据 **Bellman** 和 **Zadeh** 的定义，模糊决策就是用最大最小算子定义的模糊目标和模糊约束的汇合，基于这种定义，**Zimmermann** 开发了对于对称模糊线性规划模型的容差方法 **(tolerance approach)**。
- 这种方法是第一个可以解决带有模糊约束和目标的线性规划问题的实用方法。不仅理论完善而且应用广泛。
- 该方法在用于解决诸如制造规划、资源分配等实际问题方面有相当大的潜力。
- 自此，模糊线性规划 **(fuzzy linear programming)** 向许多方向发展，实现了许多成功的应用。

模糊线性规划模型

- 带有模糊资源和目标的线性规划问题可以描述如下：

$$\widetilde{\max} \quad z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \,\tilde{\leq}\, b_i,\ i=1,2,\ldots,m$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

其中：$\boldsymbol{x}\in R^n$ – 决策变量，
$\boldsymbol{A}\in R^{m\times n}$, $\boldsymbol{c}\in R^n$ – 清晰约束矩阵和目标向量，
$\boldsymbol{b}\in R^n$ 清晰的右端项向量，
$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ – $m\times n$ 矩阵，可以重新描写如下：

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

模糊线性规划模型

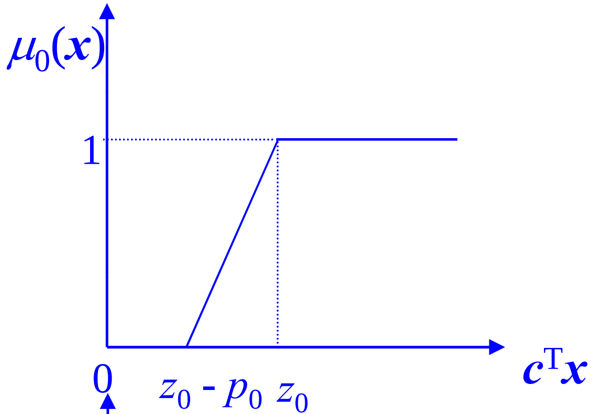
- 按照容差法，首先给出模糊目标函数的目标 z_0 及其对应的容差 p_0, 以及模糊约束 b_i 及其对应的容差 p_i。
- 然后对于模糊目标和模糊约束不加以特别区分，它们对应的区域可以用区间$[b_i , b_i + p_i]$来表示。
- 则模糊线性规划模型可描述如下：
  - 在容差允许的范围内，寻找一个 x 满足下述约束条件，
  - 这里把目标也看做是一个约束条件，与其它约束同等看待

$$
\begin{aligned}
&\text{寻找} \quad \boldsymbol{x} \\
&\text{s.t.} \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geqslant z_0 \\
&\qquad\quad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m \\
&\qquad\quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

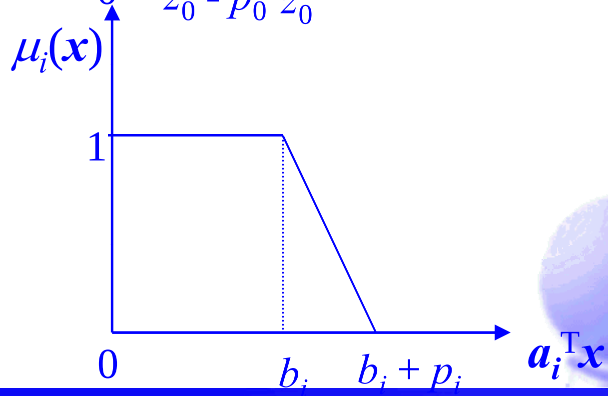
模糊数

- 模糊集理论中，模糊目标函数和模糊约束用它们对应的隶属度函数来定义。
- 模糊数是一类边界模糊不清的数，隶属度则表示了一个数属于模糊集合的程度
- 为了简单起见，假设模糊目标的隶属度函数是非降连续线性函数，模糊约束的隶属度函数是非增连续线性隶属度函数，用公式表示如下：

$$\mu_0(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > z_0 \\ 1 - \dfrac{(z_0 - \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})}{p_0}, & \text{if} \quad z_0 - p_0 \le \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le z_0 \\ 0, & \text{if} \quad \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le z_0 - p_0 \end{cases}$$



$$\mu_i(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} < b_i \\ 1 - \dfrac{(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - b_i)}{p_i}, & \text{if} \quad b_i \le \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le b_i + p_i \\ 0, & \text{if} \quad \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} > b_i + p_i \end{cases}$$



模型的转化

- **Zimmermann** 采用 **Bellman** 和 **Zadeh** 的最大最小算子来求解 **f-LP** 问题，最优解可以通过求解下式获得：

$$\max_{\boldsymbol{x}\in(R^n)^+} \mu_{\tilde{S}}(\boldsymbol{x}) = \max\{\min\{\mu_0(\boldsymbol{x}), \mu_i(\boldsymbol{x}) \mid i=1,2,\dots,m\}\}$$

- 问题可以改写为：

$$\max_{\boldsymbol{x}\in(R^n)^+} \mu_{\tilde{S}}(\boldsymbol{x}) = \max\{0, \min\{1, 1-\frac{(z_0-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})}{p_0}, 1-\frac{(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-b_i)}{p_i} \mid i=1,2,\dots,m\}\}$$

  - 其中 $\boldsymbol{\mu}_{\tilde{S}}$ 是决策空间 $\tilde{\boldsymbol{S}}$ 的隶属度函数

$$\mu_{\tilde{S}} = \min\{\mu_0, \mu_i \mid i=1, 2, \cdots, m\}$$

模型的转化

- 令$\alpha = \mu_{\tilde{S}}$则规划问题等价于：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \alpha \\
\text{s. t.} \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq z_0 - (1-\alpha)p_0 \\
& \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i + (1-\alpha)p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \alpha \in [0,1]
\end{aligned}
$$

> 一般来说，采用单纯形方法在清晰线性规划中可以获得惟一的最优解 (x^*，α^*)。
> 设 x^* 是模糊规划具有最高隶属度的解。其含义是通过最优解 x^* 达到了目标和约束之间最好的平衡。

例

- A公司希望通过生产产品 P_1 和 P_2 来最大化总利润，这两种产品的生产需要两种不同的材料 M_1 和 M_2 。可供支配的材料总数和利润数如表所示。

生产条件和利润

	P_1	P_2	可行的数量
M_1	2.5	5.0	150
M_2	5.0	2.0	120
利润 (百万美元)	1.5	2.0	

- 公司希望在给定这些材料限制的基础上，知道该生产多少单位的 P_1 产品和 P_2 产品，才能使总利润最大。
- 对应的生产计划问题可以描述如下：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 1.5x_1 + 2x_2 \\
\text{s. t.} \quad & 2.5x_1 + 5x_2 \le 150 \\
& 5x_1 + 2x_2 \le 120 \\
& x_1, x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

- 该问题的最优解是：$x_1 = 15,\ x_2 = 22.5,\ z = 45$

例

- 如果不像传统数学规划问题中那样为约束的不等号右边给出严格数字值，
- 而假设决策者具有下表所示的模糊目标和模糊约束：
- 隶属度函数和隶属度约束可以由下面的公式表示：

对于目标函数有

$$\mu_0(x)=\begin{cases}1, & -1.5x_1-x_2\leqslant -47\\ 1-\dfrac{-1.5x_1-x_2+47}{5}, & -47<-1.5x_1-x_2<-42\\ 0, & -1.5x_1-x_2\geqslant -42\end{cases}$$

对于第一和第二约束有

$$\mu_{c1}(x)=\begin{cases}1, & 2.5x_1+5x_2\leqslant 150\\ 1-\dfrac{2.5x_1+5x_2-150}{10}, & 150<2.5x_1+5x_2<160\\ 0, & 2.5x_1+5x_2\geqslant 160\end{cases}$$

$$\mu_{c2}(x)=\begin{cases}1, & 5x_1+2x_2\leqslant 120\\ 1-\dfrac{5x_1+2x_2-120}{5}, & 120<5x_1+2x_2<125\\ 0, & 5x_1+2x_2\geqslant 125\end{cases}$$

		模糊	
	非模糊	μ=0	μ=1
目标函数	45	42	47
第一约束	150	160	150
第二约束	120	125	120

例

- 用模糊线性规划问题表示的原始问题可以转换为下面对等的传统线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \alpha \\
&\text{s. t.} \quad 0.3x_1 + 0.4x_2 + \alpha \le 8.4 \\
&\qquad\quad 0.25x_1 + 0.25x_2 + \alpha \le 16 \\
&\qquad\quad x_1 + 0.4x_2 + \alpha \le 25 \\
&\qquad\quad x_1, x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

模糊和非模糊问题的解

非模糊	模糊
x_1=15.0	x_1=15.069
x_2=22.5	x_2=23.017
Z=45.0	z=45.621
约束:	约束:
1: 150	1: 152.76
2: 120	2: 121.38

- 分别对模糊线性规划和非模糊线性规划进行求解，解果如表:
- 结论:
  - 在这个例子中，决策者可以通过一些附加的材料来获得约**1.38%**的附加总利润。因此在模糊线性规划中，决策者不再需要像线性规划那样将问题描述为准确和严格的形式，这是*模糊线性规划最主要的优点*之一。

遗传算法求解

- 模糊优化问题是无约束的最大最小问题，但其目标函数不是连续可导的。因此不能用传统优化方法求解。
- 但对于遗传算法来说正好合适。
- 汪定伟和唐加福将模糊最优解的隶属度函数$\mu_{\tilde{S}}(x)$作为遗传算法的适应值函数来进行处理。
- 对于遗传算法来说，适应值越大则被选中并产生后代的概率就越大。因此带有较高隶属度的个体有较大的机会来复制后代。

遗传算法求解

- 基因表达
  - 采用实数编码，基因中包含 n 个决策变量

$$\boldsymbol{x}(j)=[x_1(j)\ x_2(j)\ \ldots\ x_n(j)]^{\mathrm{T}},\quad j=1,2,\ldots,popSize$$

- 沿加权梯度方向移动的变异
  - 汪定伟和唐加福设计了沿加权梯度方向移动的变异算子。个体将由该变异算子引导从而迅速接近模糊最优解集。
  - 给定目标函数和 i^{th} 约束的权重 w_0 and w_i (i=1, 2, ⋯, m), $\tilde{\mu}_S(x)$ 的加权梯度可以定义如下：

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})\equiv\nabla\tilde{\mu}_S(\boldsymbol{x})=\frac{w_0\boldsymbol{c}}{p_0}-\sum_{i=1}^{m}\frac{w_i\boldsymbol{a}_i}{p_i}$$

遗传算法求解

- 沿加权梯度方向移动的变异
  - 令： $\mu_{\min} = \min\{\mu_0(\boldsymbol{x}), \mu_i(\boldsymbol{x}) \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$ 则：

$$w_i = \begin{cases} 1, & \mu_i = \mu_{\min} \\ \sigma / \mu_i, & \mu_{\min} < \mu_i < 1 \\ 0, & \mu_i = 1 \end{cases}$$

    - 这里$\boldsymbol{\sigma}$是一个充分小的正数
  - 如果 $\boldsymbol{x}_{k+1}$ 是 $\boldsymbol{x}_k$ 的后代，则沿加权梯度方向的变异可以描述如下：

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \theta \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x})$$

    - 这里 $\boldsymbol{\theta}$是 **Erlang** 分布的随机步长，由随机数发生器产生。
  - 从上述公式可以看出，具有最小隶属度函数的约束将获得完全权重**1**, 变异将把个体引导到可行区域。
  - 当 $\boldsymbol{\mu_{S(x)}}$ 大于**0**时，具有最小隶属度函数的目标和约束得到完全权重。加权的梯度方向将改善当前的最小隶属度值， $\boldsymbol{\mu_{S(x)}}$将从而得到改善。
  - 因此沿着加权梯度方向的变异将引导大多数个体接近精确最优解。

人机交互算法

- 对于目标和资源问题来说，目标通常是利润或者生产量，约束通常是不同类型的制造资源。
- 实际工作中，决策者通常对目标值或某些决策变量感兴趣，或者关心资源的消耗。
- 为了从模糊最优解中寻找偏好解，汪定伟设计了一种人机接口方法。这种方法的基本思路如下：
  - 首先，该方法要求决策者给出模糊最优解可接受的隶属度水平 α,
  - 其次，通过人机接口引导决策者发现他或她的偏好结构。
- 该方法要求决策者指出哪个判据是他或她最关心的。判据可能是目标、资源或决策变量。
- 由于实际情况中决策者一般关注多于一条判据，该方法找到多于一个解。
- 当迭代终止时，这些解及其判据值将通过人机接口显示给决策者。决策者每次可以从中选出他或她偏好的解。

其它类型的模糊线性规划

- 模糊目标–资源型
- 模糊资源型– 仅约束是模糊的
- 右端项系数模糊型
- 目标函数系数模糊型
- 资源约束模糊型——约束矩阵和右端项系数都是模糊的
- 系数全模糊型

模糊非线性规划问题

(Fuzzy Nonlinear Programming Problems)

模糊非线性规划

- 关于模糊数学规划的研究大部分集中在线性规划、多目标规划等领域，对于模糊非线性规划(**fuzzy nonlinear programming**)(包括模糊二次规划)则很少涉及。
- 然而许多复杂工业系统中的实际问题，存在各种模糊非线性生产计划和调度问题，却无法将其描述成调度模型。
- 因此关于模糊环境下非线性规划(**nonlinear programming**) 建模和优化的研究不仅对于模糊优化理论很重要，而且对于生产计划和调度问题也是颇有价值的。

非线性规划

- 一般来说，带有资源约束的非线性规划问题具有下面的一般形式:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{s. t.} \quad & g_i(\boldsymbol{x}) \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1 \\
& g_i(\boldsymbol{x}) = b_i, \quad i = m_1 + 1, \mathrm{m}_1 + 2, \ldots, m \\
& \boldsymbol{x} \ge 0
\end{aligned}
$$

  - 然而在实际的生产计划问题中，一个周期中可使用资源的数量是不确定的，并带有不同程度的模糊性。
  - 同时，由于对实际最大化或最小化等方面的限制缺乏全面了解，决策者定义的目标也是不明确的，或者目标函数中存在某些模糊参数。

模糊非线性规划– f-NP

- 模糊目标和模糊资源的非线性规划问题。
  - 决策者期望的目标值并不是实际上的最大化而是一个模糊值。决策者希望达到一个水平 z_0，而且不小于下限 $z_0 - p_0$。同时，随着目标值的增长，决策者满意程度也随之增长。
  - 如果必要，决策者可以少许增加某种资源可使用的数量，比如加班、将库存材料投入使用等。假设可增加资源类型 i 的可使用数量为 b_i, (i=1，2，…,m_1)，决策者可接受的最大增加量是 p_i，可使用的模糊数量用 $\tilde{b}_i$ 来表示。同时这种模糊资源具有单调非增的隶属度函数，决策者不希望超过可承受的数量来使用这种资源。
  - 其他类型资源 i(i= m_1+1, m_1+2，…，m)可使用的数量是非精确的。假设第 i 种资源可使用的数量 $\tilde{b}_i$ (i= m_1+1, m_1+2，…，m)的均值为 b_i，误差分别为 p_i^- 和 p_i^+，具有L-R(左-右)型隶属度函数。决策者希望这种类型的资源用得越充分越好。

模糊非线性规划模型

- 模糊目标和模糊资源的非线性规划问题。
  - 进一步假设目标函数 $f(x)$ 和资源约束函数 $g_i(x)$ 在 $(R^n)^+$ 上是非线性、连续并且可导的。
  - 问题是如何确定一种合理的计划使其最优化目标，或者在前述模糊目标和资源约束环境下决策者对于其偏好的判据最“满意”。
- 这种类型的问题属于模糊最优化问题，具有下面一般的形式:

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\max} \quad f(\boldsymbol{x}) \\
&\text{s. t.} \quad g_i(\boldsymbol{x}) \le \tilde{b}_i, \quad i = 1,2,\dots,m_1 \\
&\qquad\quad g_i(\boldsymbol{x}) = \tilde{b}_i, \quad i = m_1+1,\dots,m \\
&\qquad\quad \boldsymbol{x} \ge 0
\end{aligned}
$$

其中 $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]$ n-维决策变量

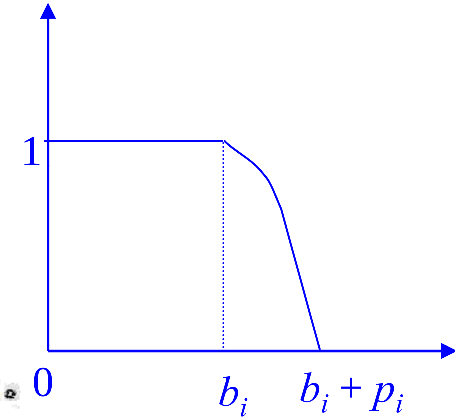
$\tilde{\boldsymbol{b}} = [\tilde{b}_1\ \tilde{b}_2\ \dots\ \tilde{b}_m]$ 模糊可使用资源.

模糊数

- 汪定伟和唐加福介绍了下面类型的隶属度函数来描述模糊数、模糊目标和模糊约束：

■模糊可使用资源 $\tilde{b}$ 的隶属度函数定义如下：$i(i=1,2,\cdots,m_1)$

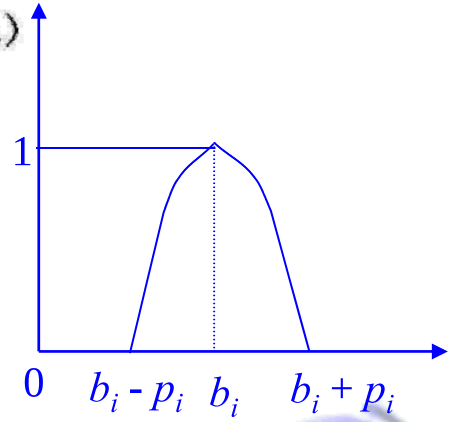
$$\mu_{\tilde{b}_i}(x)=\begin{cases}1, & g_i(x)\leqslant b_i\\ 1-\left(\dfrac{g_i(x)-b_i}{p_i}\right)^r, & b_i<g_i(x)<b_i+p_i\\ 0, & g_i(x)\geqslant b_i+p_i\end{cases}$$



其中 $r>0$。$\mu_{\tilde{b}_i}(x)$是单调非增函数模糊可用资源 $\tilde{b}$ 的使用程度。

■模糊可使用资源 $\tilde{b}$ 的隶属度函数定义如下：$i(i=m_1+1,m_1+2,\cdots,m)$

$$\mu_{\tilde{b}_i}(x)=\begin{cases}0, & g_i(x)\leqslant b_i-p_i^-\\ 1-\left(\dfrac{b_i-g_i(x)}{p_i^-}\right)^r, & b_i-p_i^-<g_i(x)\leqslant b_i\\ 1-\left(\dfrac{g_i(x)-b_i}{p_i^+}\right)^r, & b_i<g_i(x)<b_i+p_i^+\\ 0, & g_i(x)\geqslant b_i+p_i^+\end{cases}$$



$\mu_{\tilde{b}_i}(x)$是 L-R 型函数，表示对于模糊可用资源 $\tilde{b}$ 估计的准确水平。

模糊数

- 汪定伟和唐加福介绍了下面类型的隶属度函数来描述模糊数、模糊目标和模糊约束：

■第 i 个模糊约束的隶属度函数定义如下：

$$\mu_i(x) = \max_{y \geq g_i(x)} \{\mu_{\tilde{b}_i}(y)\} = \mu_{\tilde{b}_i}(g_i(x)), \quad i = 1, 2, \cdots, m_1$$

$$\mu_i(x) = \mu_{\tilde{b}_i}(g_i(x)), \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \cdots, m$$

$\mu_i(x)$反映了决策者对于第 i 个模糊约束在点 x 的满意程度。

■模糊目标$\widetilde{\max} f(x)$，定义如下：

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 0, & g(x) \leq z_0 - p_0 \\ 1 - \left(\dfrac{z_0 - f(x)}{p_0}\right)^r, & z_0 - p_0 < f(x) < z_0 \\ 1, & f(x) \geq z_0 \end{cases}$$

$\mu_0(x)$是单调非降连续函数；

表示决策者对于模糊目标函数在点 x 的满意程度。

- 用于描述模糊目标和模糊资源的隶属度函数可以由决策者指定为其他类型，比如指数、对数等

模型的转化

- 这种问题一个合理的解一般将使决策者对于模糊目标和模糊约束满意。
- 于是就有对模糊目标和模糊约束在满意程度上的平衡问题。
- 处理这种折中的一种常用方法就是在最大程度上使决策者在最关心的判据上满意，其余判据则为不同的满意程度。
- 最关心的判据需要最大化，而其余的判据则保持在一定满意程度之上。
- 于是模糊目标和资源非线性规划 **(FO/RNP)** 可以用下面**3**种类型的模型来描述。
  - 最大化最小满意程度 **(**模型**FO/RNP-1)**
  - 最大化满意程度的加权和 **(**模型**FO/RNP-2)**
  - 最大化决策目标 **(**模型**FO/RNP-3)**

模型的转化

- 最大化最小满意程度 (模型FO/RNP-1)

$$\begin{aligned}
\max \quad & \alpha \\
\text{s. t.} \quad & \mu_0(\boldsymbol{x}) \geq \alpha \\
& \mu_i(\boldsymbol{x}) \geq \alpha, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\
& \boldsymbol{x} \geq 0
\end{aligned}$$

- 最大化满意程度的加权和 (模型FO/RNP-2)

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=0}^{m} \beta_i \mu_i(\boldsymbol{x}) \\
\text{s. t.} \quad & \mu_0(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_0 \\
& \mu_i(\boldsymbol{x}) \geq \alpha_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\
& \boldsymbol{x} \geq 0
\end{aligned}$$

> 其中 α_0 是决策者事先确定的可接受满意程度，β_i (i =0,1,⋯,m) 分别是目标和资源约束的权重。它们反映了目标和资源的相对重要性。

模型的转化

- 最大化决策目标 (模型**FO/RNP-3**)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \text{target} \\
\text{s. t.} \quad & \mu_0(\boldsymbol{x}) \ge \alpha_0 \\
& \mu_i(\boldsymbol{x}) \ge \alpha_0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m \\
& \boldsymbol{x} \ge 0
\end{aligned}
$$

  - 其中目标可能是目标函数、决策变量、资源约束等，$\boldsymbol{\alpha_0}$是决策者偏好的可接受满意程度。

- 根据不同类型的判据，**FO/RNP**的解可以转换为对**FO/RNP-1, FO/RNP-2**和**FO/RNP-3**的解。

定义

定义 1 FO/RNP 的模糊最优解集是由下式定义的模糊集合 $\tilde{S}$

$$\tilde{S} = \{(x, \mu_{\tilde{S}}(x)) \mid x \in (\mathbb{R}^n)^+, \mu_{\tilde{S}}(x) = \min\{\mu_0(x), \mu_i(x) \mid i = 1, \cdots, m\}\}$$

设 $S_\alpha = \{x \in (\mathbb{R}^n)^+ \mid \mu_{\tilde{S}}(x) \geqslant \alpha\}, \alpha \in [0,1]$。

于是 S_α 就是模糊集合 $\tilde{S}$ 的 α 水平截集(α-level cut set)。

定义 2 如果对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha^*$ 有 S_α 非空，而对于 $\forall \alpha > \alpha^*$ 有 S_α 为空集，则称 α^* 为最佳平衡度。

- 一般来说，模型 **FO/RNP-1** 可以找到惟一的最优解 ***α****。相应的解 ***x**** (通常并不惟一) 就是 **FO/RNP** 中具有最高隶属度的解。
- 这意味着目标和约束之间的最佳平衡可以在 ***x**** 点达到。然而 ***x**** 点不一定是决策者在某些类型判据下最想要的解。

求解FO /RNP-1的非精确方法

- 在模糊环境下对于决策者来说精确解没有意义。
- 决策者期望的解实际上是满足决策者所偏好的不同判据下目标和资源约束的多个解。
- 基于模糊最优解概念的非精确方法，用于寻找最优解所在的邻域，从而使得所有在该邻域中的解 x 都是决策者在模糊环境下期望的“最优”解。

- **FO/RNP-1**等价于下面的优化问题 ***P***:

$$\max_{x\in(R^n)^+} \mu_S(x) = \max \min\{\mu_0(x), \mu_1(x), \cdots, \mu_m(x)\}$$

  - ***P*** 是无约束优化问题，但它的目标不是连续可导的。这个问题不能采用传统优化方法求解，但可以用遗传算法进行优化
  - 汪定伟和唐加福提出一种沿着加权梯度方向进行变异的特殊遗传算法。该算法将变异作为主要算子;仅在后期采用算术组合杂交算子。

算法的基本思想

- 首先，随机产生有 ***pop-size*** 个个体的初始种群，
- 个体被选择并产生后代，后代在模糊目标和约束上的隶属度得到增加。
- 随着遗传算法的进行，隶属度小于α_0 (可接受隶属度)的个体比其他个体产生后代的机会少。
- 随着遗传代数的增加，隶属度小于α_0的个体最终死去，其他个体得以生存。
- 经过若干代以后，所有个体的隶属度都大于α_0，大多数个体将会接近最优解。

加权梯度方向

设 $\mu_{\min}(\boldsymbol{x})=\min\{\mu_0(\boldsymbol{x}),\mu_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\mu_m(\boldsymbol{x})\}$。

加权梯度方向(weighted gradient direction)

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = w_0 \nabla\mu_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} w_i \nabla\mu_i(\boldsymbol{x})$$

其中对于 $0<\mu_0(\boldsymbol{x})\leqslant 1$，$0<\mu_i(\boldsymbol{x})\leqslant 1$

$$\begin{cases} \nabla\mu_0(\boldsymbol{x}) = r(z_0 - f(\boldsymbol{x}))^{r-1} \dfrac{\nabla f(\boldsymbol{x})}{p_0^r} \\ \nabla\mu_i(\boldsymbol{x}) = -r(g_i(\boldsymbol{x}) - b_i)^{r-1} \dfrac{\nabla g_i(\boldsymbol{x})}{p_i^r}, \quad i = 1,2,\cdots,m_1 \\ \nabla\mu_i(\boldsymbol{x}) = -r(g_i(\boldsymbol{x}) - b_i)^{r-1} \operatorname{sgn}\{g_i(\boldsymbol{x}) - b_i\} \dfrac{\nabla g_i(\boldsymbol{x})}{q_i^r}, \quad i = m_1,\cdots,m \end{cases}$$

对于 $\mu_0(\boldsymbol{x})=0$，则 $\nabla\mu_0(\boldsymbol{x})=\nabla f(\boldsymbol{x})$；对于 $\mu_i(\boldsymbol{x})=0$，则 $\nabla\mu_i(\boldsymbol{x})=\nabla g_i(\boldsymbol{x})$。

$$q_i = \begin{cases} p_i^-, & g_i(\boldsymbol{x}) < b_i \\ p_i^+, & g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant b_i \end{cases}$$

w_i 是梯度方向权重，定义如下：e 是一个充分小的正数，$1/e$ 是最大的权重

$$w_i = \begin{cases} 0, & \mu_i = 1 \\ \dfrac{1}{\mu_i - \mu_{\min} + e}, & \mu_{\min} \leqslant \mu_i < 1 \end{cases}$$

子代的产生

由 x_i^k 通过沿着加权梯度方向 $D(x)$ 产生的子代 x_j^{k+1} 可以描述如下：

$$x_j^{k+1} = x_i^k + \beta^k D(x_i^k)$$

其中 β^k 是具有下降均值的 Erlang 分布的随机步长。

Erlang 分布由采用随机数发生器产生。

隶属度 $\mu_{\tilde{S}}(x_j)$ 的计算如下：

$$\mu_{\tilde{S}}(x_j) = \begin{cases} \mu_{\min}(x_j), & \mu_{\min} \geq \alpha_0 \\ \varepsilon\mu_{\min}(x_j), & \mu_{\min} < \alpha_0 \end{cases}$$

其中 α_0 是决策者偏好的可接受的满意程度，$\varepsilon \in U(0,1)$。

结论

- 从以上产生子代的一系列公式中可以看出：

无法满足的约束具有最小的隶属度 0，会得到最大的权重 $1/e$，因此变异会把个体引导到可行的区域。

当 $\mu_{\tilde{S}}(x)>0$ 时，具有最小隶属度的目标或约束得到最大的权重，加权梯度方向就会改善最小的隶属度值，从而导致 $\mu_{\tilde{S}}(x)$ 的改善。

从式 $\mu_{\tilde{S}}(x_j)$ 可以发现 $x_j \notin S_{\alpha_0}$，给它较低的隶属度（但不是 0），于是它们具有较小的机会被选中产生后代。

因此加权梯度方向将引导所有个体接近精确最优解，这些个体构成一个包括精确最优解的邻域。

End