线性代数第二章：矩阵（课本顺序梳理+题型例题）

一、核心概念（按课本逻辑排序）

1. 矩阵的定义与表示

- **定义**：由 $m \times n$ 个数 a_{ij} （$i=1,2,...,m$；$j=1,2,...,n$）按一定次序排成的 m 行 n 列的矩形数表，称为 $m \times n$ 矩阵，记为：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

- 核心要素：行数 m、列数 n、元素 a_{ij} （第 i 行第 j 列元素）。
- 特殊情形：
  - 当 $m=n$ 时，称为 n 阶方阵（如2阶方阵、3阶方阵）；
  - 当 $m=1$ 时，称为行矩阵（行向量）：$A=(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$；
  - 当 $n=1$ 时，称为列矩阵（列向量）：$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$。

2. 特殊矩阵（高频考点）

- **零矩阵**：所有元素均为0的矩阵，记为 $O_{m \times n}$ 或 O （同型零矩阵相等）。
- **单位矩阵**：n阶方阵中，主对角线元素全为1，其余元素全为0，记为 E_n 或 E：

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

性质：对任意 $m \times n$ 矩阵 A，有 $E_m A = A E_n = A$ （乘法单位元）。

- **对角矩阵**：主对角线以外元素全为0的n阶方阵，记为 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$：

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- **三角矩阵**：
  - 上三角矩阵：主对角线以下元素全为0；
  - 下三角矩阵：主对角线以上元素全为0；

  性质：同阶上（下）三角矩阵的和、积仍为上（下）三角矩阵。
- **对称矩阵与反对称矩阵**：
  - 对称矩阵：满足 $A^T = A$（转置等于自身），即 $a_{ij} = a_{ji}$；
  - 反对称矩阵：满足 $A^T = -A$（转置等于负自身），即 $a_{ij} = -a_{ji}$，主对角线元素全为0。
- **可逆矩阵（非奇异矩阵）**：对n阶方阵 A，若存在n阶方阵 B，使得 $AB = BA = E$，则称 A 可逆，B 为 A 的逆矩阵（记为 A^{-1}），可逆矩阵的行列式 $|A| \neq 0$。
- **初等矩阵**：由单位矩阵经过一次初等变换得到的n阶方阵，分为3类：
  - $E(i,j)$：交换 E 的第 i,j 行（列）；
  - $E(i(k))$：将 E 的第 i 行（列）乘非零数 k；
  - $E(i,j(k))$：将 E 的第 j 行（列）乘 k 加到第 i 行（列）。
- **分块矩阵**：将矩阵用若干条横线和竖线分成若干个小矩阵（子块），原矩阵称为分块矩阵（如分块对角矩阵、分块三角矩阵）。

3. 矩阵的运算相关概念

- **矩阵相等**：同型矩阵（行数、列数相同）且对应元素相等，记为 $A = B$。
- **矩阵的转置**：将 $m \times n$ 矩阵 A 的行与列互换，得到 $n \times m$ 矩阵，记为 A^T（或 A'）。
- **伴随矩阵**：对n阶方阵 A，将每个元素 a_{ij} 替换为其代数余子式 A_{ij}，再转置得到的矩阵，记为 A^*：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

核心关系：$AA^* = A^*A = |A|E$（可逆矩阵求逆的基础）。

- **矩阵的秩**：矩阵中最高阶非零子式的阶数，记为 $r(A)$（子式：任取 k 行 k 列构成的k阶行列式）；规定零矩阵的秩为0。

二、核心性质与定理

1. 矩阵运算的性质

（1）加法与数乘（线性运算）

设 A, B, C 为同型矩阵，k, l 为实数：

- 加法性质：
    a. 交换律：$A+B=B+A$；
    b. 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；
    c. 零矩阵性质：$A+O=A$；
    d. 负矩阵性质：$A+(-A)=O$（$-A$ 为 A 的负矩阵，元素全为 $-a_{ij}$）。
- 数乘性质：
    a. 分配律：$k(A+B)=kA+kB$，$(k+l)A=kA+lA$；
    b. 结合律：$k(lA)=(kl)A$；
    c. 单位数乘：$1\cdot A=A$，$0\cdot A=O$。

（2）矩阵乘法

设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵（左矩阵列数=右矩阵行数），乘积 $C=AB$ 为 $m\times n$ 矩阵：

- 性质：
    a. 结合律：$(AB)C=A(BC)$；
    b. 分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$；
    c. 数乘结合律：$k(AB)=(kA)B=A(kB)$；
    d. 单位矩阵性质：$E_mA=AE_s=A$；
- 注意：
    a. 不满足交换律：$AB\neq BA$（一般情况）；
    b. 不满足消去律：$AB=O\nRightarrow A=O$ 或 $B=O$；$AB=AC\nRightarrow B=C$（需 A 可逆）。

（3）转置运算

- 性质：
    a. $(A^T)^T=A$；
    b. $(A+B)^T=A^T+B^T$；
    c. $(kA)^T=kA^T$（k 为实数）；
    d. $(AB)^T=B^TA^T$（乘积转置=转置的反向乘积，可推广到多个矩阵）。

（4）逆矩阵的性质（A,B 为n阶可逆矩阵，$k\neq 0$ 为实数）

1. 唯一性：若 A 可逆，则逆矩阵唯一；
2. $(A^{-1})^{-1}=A$；
3. $(kA)^{-1}=\dfrac{1}{k}A^{-1}$；

4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$（乘积逆=逆的反向乘积）；
5. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$；
6. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$（逆矩阵的行列式=原矩阵行列式的倒数）；
7. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$（伴随矩阵求逆公式，核心定理）。

2. 初等变换与初等矩阵的核心定理

- **初等变换的性质**：
  a. 矩阵的初等行（列）变换不改变矩阵的秩；
  b. 任意矩阵可通过初等行变换化为行阶梯形矩阵，再化为行最简形矩阵；
  c. 可逆矩阵可通过初等行（列）变换化为单位矩阵。
- **初等矩阵与初等变换的关系**：
  a. 对 $m \times n$ 矩阵 A 作一次初等行变换，等价于左乘一个 m 阶相应初等矩阵；
  b. 对 $m \times n$ 矩阵 A 作一次初等列变换，等价于右乘一个 n 阶相应初等矩阵；
  c. 初等矩阵可逆，且逆矩阵为同类型初等矩阵：
     - $E(i,j)^{-1} = E(i,j)$；
     - $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$；
     - $E(i,j(k))^{-1} = E(i,j(-k))$。

3. 矩阵秩的核心性质

1. $0 \le r(A_{m\times n}) \le min(m,n)$；
2. $r(A) = r(A^T) = r(kA)$（$k \neq 0$）；
3. 若 A 为n阶方阵，则 $r(A) = n \iff |A| \neq 0 \iff A$ 可逆（满秩矩阵）；
4. 若 A 为 $m \times s$ 矩阵，B 为 $s \times n$ 矩阵，则 $r(AB) \le min(r(A), r(B))$；
5. 若 P, Q 为可逆矩阵，则 $r(PAQ) = r(A)$（可逆矩阵乘矩阵不改变秩）；
6. 若 $A + B, A - B$ 有意义，则 $r(A + B) \le r(A) + r(B)$，$|r(A) - r(B)| \le r(A - B)$。

4. 分块矩阵的运算性质（核心为分块对角矩阵）

- 分块对角矩阵 $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, ..., A_k)$（子块 A_i 为方阵）：
  a. 行列式：$|A| = |A_1||A_2|...|A_k|$；
  b. 可逆性：A 可逆 $\iff$ 每个 A_i 可逆，且 $A^{-1} = \mathrm{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, ..., A_k^{-1})$；
  c. 秩：$r(A) = r(A_1) + r(A_2) + ... + r(A_k)$。

三、相关题型与典型例题

题型1：矩阵的基本运算（加、减、乘、转置）

例题1：设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，计算 $2A+B^T$、AB。

- 解：
  a. 计算 B^T：$B^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}$；
  b. 计算 $2A$：$2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & 6\end{pmatrix}$；
  c. $2A+B^T=\begin{pmatrix}2+2 & 4+1\\ -2+(-1) & 6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -3 & 10\end{pmatrix}$；
  d. 计算 AB（$A_{2\times2}$ 左乘 $B_{2\times2}$，结果为 2×2 矩阵）：
  $$AB=\begin{pmatrix}1\times2+2\times1 & 1\times(-1)+2\times4\\ -1\times2+3\times1 & -1\times(-1)+3\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 13\end{pmatrix}$$

例题2：设 $A=(1,2,3)$（行向量），$B=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$（列向量），计算 AB 和 BA。

- 解：
  a. $AB=(1\times1+2\times2+3\times3)=(14)$（1×1矩阵，即数值14）；
  b. $BA=\begin{pmatrix}1\times1 & 1\times2 & 1\times3\\ 2\times1 & 2\times2 & 2\times3\\ 3\times1 & 3\times2 & 3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$；
     - 结论：$AB\neq BA$，矩阵乘法不满足交换律。

题型2：逆矩阵的求解（伴随矩阵法、初等变换法）

例题3：用伴随矩阵法求 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

- 解：
  a. 计算行列式 $|A|$：$|A|=1\times4-2\times3=-2\neq0$，$A$ 可逆；
  b. 求代数余子式：
     - $A_{11}=(-1)^{1+1}\times4=4$，$A_{12}=(-1)^{1+2}\times3=-3$；
     - $A_{21}=(-1)^{2+1}\times2=-2$，$A_{22}=(-1)^{2+2}\times1=1$；
  c. 构造伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$；

d. 逆矩阵：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。

例题4：用初等变换法求 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

- 解：构造增广矩阵 $(A|E)$，通过初等行变换化为 $(E|A^{-1})$：

a. 初始矩阵：

$$(A|E)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{pmatrix}$$

b. 第2行减2×第1行，第3行减第1行：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

c. 交换第2、3行（便于化简）：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&-3&-4&-2&1&0\end{pmatrix}$$

d. 第3行加3×第2行：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&-1&-5&1&3\end{pmatrix}$$

e. 第3行乘-1：

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&1&-1&0&1\\0&0&1&5&-1&-3\end{pmatrix}$$

f. 第2行减第3行，第1行减3×第3行：

$$\begin{pmatrix}1&2&0&-14&3&9\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&1&5&-1&-3\end{pmatrix}$$

g. 第1行减2×第2行：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-2&1&1\\0&1&0&-6&1&4\\0&0&1&5&-1&-3\end{pmatrix}$$

h. 逆矩阵：$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\-6&1&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}$（验证：$AA^{-1}=E$）。

题型3：矩阵的秩的计算（初等变换法）

例题5：计算矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&-2&4&2\\3&0&6&-1\\0&3&0&-3\end{pmatrix}$ 的秩。

- 解：通过初等行变换化为行阶梯形矩阵（非零行的行数即为秩）：

  a. 第2行减2×第1行，第3行减3×第1行：
  $$\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&0&0&0\\0&3&0&-4\\0&3&0&-3\end{pmatrix}$$
  b. 交换第2、3行：
  $$\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&0&-4\\0&0&0&0\\0&3&0&-3\end{pmatrix}$$
  c. 第4行减第2行：
  $$\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&0&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$
  d. 交换第3、4行，得到行阶梯形矩阵：
  $$\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&3&0&-4\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
  e. 非零行有3行，故 $r(A)=3$。

题型4：矩阵方程的求解（$AX=B$、$XA=B$）

例题6：解矩阵方程 $AX=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$（即求 A^{-1}，验证例题3结果）。

- 解：

  a. 因 A 可逆，方程两边左乘 A^{-1}，得 $X=A^{-1}B$；

  b. 由例题3，$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$；

  c. $X=A^{-1}B=A^{-1}E=A^{-1}$，结果与例题3一致。

例题7：解矩阵方程 $XA=B$，其中 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$。

- 解：
    a. 计算 A 的逆矩阵：$|A| = 2\times0 - 1\times1 = -1$，$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，故
    $A^{-1} = -A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$；
    b. 方程两边右乘 A^{-1}，得 $X = BA^{-1}$；
    c. 计算：
    $$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times0+1\times1 & 3\times1+1\times(-2) \\ 2\times0+1\times1 & 2\times1+1\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

题型5：分块矩阵的运算（以分块对角矩阵为例）

例题8：设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，用分块矩阵求 A^{-1}。

- 解：将 A 分块为对角矩阵 $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2)$，其中：
    - $A_1 = (2)$（1阶方阵），$A_1^{-1} = (\frac{1}{2})$；
    - $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$（2阶方阵），由例题3得 $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$；
- 分块对角矩阵的逆为 $A^{-1} = \operatorname{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1})$，即：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

题型6：可逆矩阵的证明（高频证明题）

例题9：设n阶方阵 A 满足 $A^2 - 3A + 2E = O$，证明 A 可逆，并求 A^{-1}。

- 证明：
    a. 对等式变形：$A^2 - 3A = -2E \implies A(A-3E) = -2E$；
    b. 两边除以-2：$A\cdot\left(-\frac{1}{2}(A-3E)\right) = E$；
    c. 由逆矩阵定义，若存在矩阵 $B = -\frac{1}{2}(A-3E)$ 使得 $AB = E$，则 A 可逆；
    d. 且 $A^{-1} = -\frac{1}{2}(A-3E) = \frac{3E-A}{2}$，得证。

四、本章核心总结

1. 矩阵是线性代数的“核心工具”，所有后续章节（向量、线性方程组、特征值等）均依赖矩阵运算，核心是“运算规则”和“可逆性”。

2. 核心运算技巧：
    - 矩阵乘法：注意“左列=右行”的匹配条件，优先化简矩阵再运算；
    - 逆矩阵求解：低阶矩阵用“伴随矩阵法”，高阶矩阵用“初等变换法”（更高效）；
    - 秩的计算：通过初等行变换化为行阶梯形，非零行的行数即为秩（最通用方法）。
3. 高频考点：逆矩阵的求解与证明、矩阵方程的求解、矩阵秩的计算、分块对角矩阵的运算、初等变换与初等矩阵的关系。
4. 易错点：
    - 矩阵乘法不可交换，矩阵方程求解时注意“左乘”还是“右乘”逆矩阵；
    - 伴随矩阵的构造（代数余子式按列排列）；
    - 初等矩阵与初等变换的对应关系（行变换左乘、列变换右乘）；
    - 秩的定义（最高阶非零子式的阶数，而非非零元素的个数）。

需要继续整理第三章“向量组的线性相关性”的知识梳理+题型例题吗?