线性代数第五章：矩阵的特征值与特征向量（课本顺序梳理+题型例题）

一、核心概念（按课本逻辑排序）

1. 特征值与特征向量的定义

- 设 A 为 n 阶方阵，若存在数 λ 和**非零** n 维列向量 $\boldsymbol{\xi}$，满足：

$A\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$

则称 λ 为 A 的**特征值**，$\boldsymbol{\xi}$ 为 A 对应于 λ 的**特征向量**。

- 核心关联：特征值是矩阵对特征向量的“缩放倍数”，特征向量是矩阵线性变换中“方向不变（或反向）”的特殊向量。

2. 特征多项式与特征方程

- **特征矩阵**：$\lambda E - A$ （E 为 n 阶单位矩阵）；
- **特征多项式**：$f(\lambda) = |\lambda E - A|$ （n 次多项式，展开后形式为 $\lambda^n - \mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n|A|$）；
- **特征方程**：$f(\lambda) = 0$（特征值是特征方程的根，含重根）。

3. 相似矩阵

- 设 A, B 为 n 阶方阵，若存在 **可逆矩阵** P，使得：

$P^{-1}AP = B$

则称 A 与 B 相似，记为 $A \sim B$。

- 本质：相似矩阵是“同一线性变换在不同基下的矩阵表示”，核心性质是“特征值相同”。

4. 矩阵的对角化

- 若 n 阶方阵 A 能与 **对角矩阵** $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ 相似，则称 A 可对角化（简称“可对角化”）。
- 核心关联：Λ 的对角线元素是 A 的所有特征值，可逆矩阵 P 的列向量是 A 对应于这些特征值的**线性无关的特征向量**。

5. 实对称矩阵的特征值与特征向量

- 实对称矩阵：满足 $A^T = A$ 的实矩阵（元素全为实数）；

- 特殊性质：特征值全为实数，不同特征值对应的特征向量**正交**（线性无关的特殊情况）。

6. 正交矩阵

- 设 Q 为 n 阶实矩阵，若满足 $Q^TQ=E$（或 $Q^{-1}=Q^T$），则称 Q 为正交矩阵。
- 性质：列向量组是“正交单位向量组”（两两正交且长度为1），行向量组同理；实对称矩阵可通过正交矩阵对角化。

二、核心性质与定理（核心考点）

1. 特征值与特征向量的性质

- **性质1（特征值的和与积）**：设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$（重根按重数计），则：
  a. $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n=\text{tr}(A)$（$\text{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$，矩阵的迹）；
  b. $\lambda_1\lambda_2...\lambda_n=|A|$（矩阵的行列式）。
- **性质2**：A 与 A^T 有相同的特征值（但特征向量未必相同）。
- **性质3**：若 λ 是 A 的特征值，$\boldsymbol{\xi}$ 是对应特征向量，则：
  a. $k\lambda$ 是 kA 的特征值（k 为实数），对应特征向量仍为 $\boldsymbol{\xi}$；
  b. λ^m 是 A^m 的特征值（m 为正整数），对应特征向量仍为 $\boldsymbol{\xi}$；
  c. 若 A 可逆，则 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值，对应特征向量仍为 $\boldsymbol{\xi}$；
  d. $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值（$f(x)$ 为多项式），对应特征向量仍为 $\boldsymbol{\xi}$。
- **性质4**：不同特征值对应的特征向量**线性无关**；若 λ 是 k 重特征值，则其对应的线性无关特征向量个数 $\leq k$（几何重数 $\leq$ 代数重数）。

2. 相似矩阵的性质

- **性质1**：相似矩阵有相同的特征值、相同的迹、相同的行列式、相同的秩（核心：特征值是相似不变量）。
- **性质2**：相似关系具有传递性：若 $A\sim B$，$B\sim C$，则 $A\sim C$。
- **性质3**：若 $A\sim B$，则 $A^m\sim B^m$（m 为正整数），且 $f(A)\sim f(B)$（$f(x)$ 为多项式）。

3. 矩阵可对角化的判定定理

- **定理1（充要条件）**：n 阶方阵 A 可对角化 $\iff$ A 有 n 个线性无关的特征向量。
- **定理2（充要条件的等价形式）**：A 可对角化 $\iff$ 对 A 的每个 k 重特征值 λ，其几何重数 $=$ 代数重数（即 λ 对应的线性无关特征向量个数 $=k$）。
- **定理3（充分条件）**：若 A 有 n 个互不相等的特征值，则 A 必可对角化（单特征值的几何重数=代数重数=1）。

- **定理4（实对称矩阵的特殊性质）**：实对称矩阵**必可对角化**，且存在正交矩阵 Q，使得 $Q^TAQ=\Lambda$（正交对角化），其中 Λ 的对角线元素为 A 的特征值，Q 的列向量为 A 的正交单位特征向量。

4. 正交矩阵的性质

- **性质1**：$|Q|=\pm1$（正交矩阵的行列式为1或-1）。
- **性质2**：若 Q_1,Q_2 为正交矩阵，则 Q_1Q_2 也为正交矩阵。
- **性质3**：正交变换保持向量的内积、长度不变（$(Q\boldsymbol{\alpha},Q\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，$|Q\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\alpha}|$）。

三、相关题型与典型例题

题型1：特征值与特征向量的求解（核心基础题）

例题1：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量。

- 解：
  a. 求特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$：
  $$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2-1=\lambda^2-4\lambda+3$$
  b. 解特征方程 $f(\lambda)=0$：$\lambda^2-4\lambda+3=0\implies\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$（两个不同特征值）；
  c. 求对应特征向量：
    - 对 $\lambda_1=1$，解 $(E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$：
    $$E-A=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$
    同解方程组 $x_1+x_2=0$，取自由变量 $x_2=1$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,1)^T$；

    故 $\lambda_1=1$ 对应的所有特征向量为 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$（$k_1\neq0$）；
    - 对 $\lambda_2=3$，解 $(3E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$：
    $$3E-A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$
    同解方程组 $x_1-x_2=0$，取自由变量 $x_2=1$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,1)^T$；

    故 $\lambda_2=3$ 对应的所有特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$（$k_2\neq0$）。

例题2：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量（含重特征值）。

- 解：
  a. 特征多项式：

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & 2\\ -2 & \lambda & 2\\ -2 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$$

b. 特征方程 $\lambda(\lambda-1)^2=0 \implies \lambda_1=0$（单特征值），$\lambda_2=1$（2重特征值）；

c. 求特征向量：

- $\lambda_1=0$：解 $(0\cdot E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^T$，特征向量 $k_1\boldsymbol{\xi}_1$（$k_1\neq 0$）；
- $\lambda_2=1$：解 $(E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，化简得 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，同解方程组 $x_1=-x_3$，$x_2=0$，取 $x_3=1$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^T$（几何重数=1 < 代数重数=2）；

故 $\lambda_2=1$ 对应的所有特征向量为 $k_2\boldsymbol{\xi}_2$（$k_2\neq 0$）。

题型2：相似矩阵的判定与性质应用

例题3：已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y 的值。

- 解：

a. 相似矩阵有相同的迹和行列式：

- 迹相等：$\operatorname{tr}(A)=2+0+x=2+y+(-1)=\operatorname{tr}(B) \implies x+2=y+1 \implies y=x+1$；
- 行列式相等：$|A|=2\times(0\times x-1\times 1)=-2$，$|B|=2\times y\times(-1)=-2y$，故 $-2=-2y \implies y=1$；

b. 代入 $y=x+1$，得 $x=0$；

c. 验证：A 的特征值为2, 1, -1，与 B 的特征值一致，符合相似矩阵性质。

题型3：矩阵可对角化的判定

例题4：判断例题2中的矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$ 是否可对角化。

- 解：

a. A 的特征值：$\lambda_1=0$（单特征值），$\lambda_2=1$（2重特征值）；

b. 几何重数分析：$\lambda_2=1$ 的几何重数=1，代数重数=2，满足“几何重数 < 代数重数”；

c. 结论：A 不可对角化（无法找到3个线性无关的特征向量）。

例题5：判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$ 是否可对角化，若可，求可逆矩阵 P 和对角矩阵 Λ 使得 $P^{-1}AP=\Lambda$。

- 解：
  a. 求特征值：特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$，特征值 $\lambda_1=5$， $\lambda_2=-1$（2重）；
  b. 求特征向量：
    - $\lambda_1=5$：解 $(5E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^T$；
    - $\lambda_2=-1$：解 $(-E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，化简得 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，取自由变量 $x_2=1,x_3=0$ 和 $x_2=0,x_3=1$，得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0)^T$， $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,0,1)^T$（几何重数=2 = 代数重数=2）；
  c. 判定可对角化：3个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，故可对角化；
  d. 构造 P 和 Λ：

  $$P=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad \Lambda=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

  验证： $P^{-1}AP=\Lambda$。

题型4：实对称矩阵的正交对角化（高频考点）

例题6：设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ 使得 $Q^TAQ=\Lambda$

。

- 解：
  a. 求特征值：特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-4)(\lambda-1)^2$，特征值 $\lambda_1=4$， $\lambda_2=1$（2重）；
  b. 求特征向量并正交单位化：
    - 对 $\lambda_1=4$：解 $(4E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,1)^T$，单位化： $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$；
    - 对 $\lambda_2=1$：解 $(E-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0)^T$， $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,0,1)^T$；
      - 正交化（施密特正交化）：

      $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2=(-1,1,0)^T$，

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\xi}_3 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2 = (-1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(-1, 1, 0)^T = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T ;$$

- 单位化:

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T ,$$

$$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)^T ;$$

c. 构造正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ:

$$Q = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

验证: $Q^T AQ = \Lambda$ (正交矩阵满足 $Q^T = Q^{-1}$)。

题型5: 特征值与特征向量的证明题(进阶)

例题7: 证明: 若 A 是实对称矩阵, 且 $A^2 = A$ (幂等矩阵), 则 A 的特征值只能是0或1。

- 证明:
  a. 设 λ 是 A 的特征值, $\boldsymbol{\xi}$ 是对应特征向量($\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$), 则 $A\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$;
  b. 两边左乘 A: $A^2\boldsymbol{\xi} = A(\lambda\boldsymbol{\xi}) = \lambda A\boldsymbol{\xi} = \lambda^2\boldsymbol{\xi}$;
  c. 由 $A^2 = A$, 得 $A^2\boldsymbol{\xi} = A\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 故 $\lambda^2\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$;
  d. 因 $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$, 两边消去 $\boldsymbol{\xi}$ 得 $\lambda^2 = \lambda \implies \lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$, 得证。

四、本章核心总结

1. 本章核心是**特征值与特征向量的求解**和**矩阵对角化**, 本质是通过"特征向量构成的基"将复杂矩阵转化为对角阵, 简化运算(如矩阵幂、行列式计算)。
2. 核心逻辑链:
   - 特征值/特征向量: 通过特征方程 $|\lambda E - A| = 0$ 求特征值, 解齐次方程组 $(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 求特征向量;
   - 对角化判定: 关键是"重特征值的几何重数=代数重数", 实对称矩阵是"必可对角化"的特殊情形;
   - 正交对角化: 实对称矩阵的特征向量正交, 需通过施密特正交化+单位化构造正交矩阵。
3. 高频考点: 特征值与特征向量求解、相似矩阵性质应用、含重特征值的对角化判定、实对称矩阵的正交对角化(施密特正交化步骤)。
4. 易错点:
   - 特征向量必须是非零向量, 求解时需强调"$k \neq 0$";

- 相似矩阵的特征值相同，但特征向量不同（满足 $\boldsymbol{\eta} = P^{-1}\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\xi}$ 是 A 的特征向量，$\boldsymbol{\eta}$ 是 $B = P^{-1}AP$ 的特征向量）；
- 实对称矩阵对角化时，不同特征值的特征向量已正交，仅需单位化；同一重特征值的特征向量需先正交化再单位化；
- 矩阵可对角化的充要条件是“有 n 个线性无关的特征向量”，而非“有 n 个特征向量”。

（注：文档部分内容可能由 AI 生成）