线性代数第一章：行列式（课本顺序梳理+题型例题）

一、核心概念（按课本逻辑排序）

1. 二阶与三阶行列式

- **二阶行列式**：对2×2矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，行列式定义为：

（本质：对角线元素乘积之差，用于求解二元线性方程组）。

- **三阶行列式**：对3×3矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，行列式定义为：

$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

（本质：6项代数和，可通过“对角线法则”记忆，不适用于高阶行列式）。

2. 排列与逆序数（n阶行列式的基础）

- **排列**：由1,2,...,n组成的一个有序数组，称为n级排列（共有n!个不同排列）。
- **逆序**：在一个排列中，若某两个元素的顺序与自然顺序（从小到大）相反，称这两个元素构成一个逆序。
- **逆序数**：一个排列中所有逆序的总数，记为 $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$。
  - 计算方法：逐个数统计每个元素后面比它小的元素个数，求和。
  - 例子：排列321的逆序数：τ(321)=2（3与2、3与1）+1（2与1）=3。
- **奇排列与偶排列**：逆序数为奇数的排列称为奇排列，为偶数的称为偶排列。

3. n阶行列式（通用定义）

- 对n×n矩阵 $A = (a_{ij})$，n阶行列式定义为：

$$|A| = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

其中：

  - 求和符号遍历所有n级排列 $i_1 i_2 \dots i_n$；
  - $a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$ 是取自不同行、不同列的n个元素的乘积；

- $(-1)^{\tau(i_1 i_2 \dots i_n)}$ 是该乘积项的符号（奇排列取负，偶排列取正）。

4. 特殊行列式

- **对角行列式**：主对角线以外的元素全为0的行列式，值为对角线元素的乘积：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

- **上三角行列式**：主对角线以下的元素全为0的行列式，值为对角线元素的乘积（下三角行列式同理）：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

- **范德蒙德行列式**：

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

（本质：所有两两不同行不同列元素的差的乘积，若存在 $x_i = x_j$，则行列式值为0）。

5. 代数余子式与余子式

- **余子式**：对n阶行列式，划去元素 a_{ij} 所在的第i行和第j列，剩下的n-1阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。
- **代数余子式**：$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$（余子式乘以符号因子）。
- 注意：代数余子式与 a_{ij} 本身的值无关，仅与它的位置有关。

二、核心性质与定理

1. 行列式的基本性质（7条核心）

1. **性质1**：行列式与它的转置行列式相等（$|A^T| = |A|$）。推论：行列式的行和列具有同等地位，行的性质对列同样成立。
2. **性质2**：交换行列式的两行（列），行列式变号。推论：若行列式有两行（列）完全相同，则行列式值为0。
3. **性质3**：行列式的某一行（列）中所有元素都乘以同一数k，等于用k乘此行列式（$|kA| = k^n |A|$，n为行列式阶数）。推论：行列式某一行（列）的公因子可以提到行列式符号外面。
4. **性质4**：行列式中若有两行（列）元素成比例，则行列式值为0。

5. **性质5**：若行列式的某一行（列）元素都是两数之和，则行列式可拆分为两个行列式之和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. **性质6**：把行列式的某一行（列）的各元素乘以同一数k，加到另一行（列）对应的元素上去，行列式值不变。
7. **性质7**：行列式的乘法公式：若A、B为n阶方阵，则 $|AB| = |A||B|$ （乘积的行列式等于行列式的乘积）。

2. 行列式展开定理

- **按行展开定理**：n阶行列式等于它的任意一行的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和：

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

- **按列展开定理**：n阶行列式等于它的任意一列的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和：

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

- **推论（异乘变零）**：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和为0：

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

3. 克莱姆法则（线性方程组的解）

- **前提**：n元线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ （A为n阶方阵）。
- **定理**：若系数行列式 $D = |A| \neq 0$，则方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把D的第j列元素换成常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 后得到的行列式。

- **推论1**：若n元齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组只有零解。
- **推论2**：若n元齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，则其系数行列式 $D = 0$ （逆命题也成立）。

三、相关题型与典型例题

题型1：二阶/三阶行列式计算（基础题）

例题1：计算二阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

- 解：按二阶行列式定义：$D = 3 \times 4 - (-2) \times 5 = 12 + 10 = 22$。

例题2：计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

- 解：利用性质6，第2行减第1行，第3行减第1行：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

第2行与第3行成比例（比例系数2），由性质4得 $D = 0$。

题型2：n阶特殊行列式计算（高频考点）

例题3：计算n阶对角行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}$

- 解：由对角行列式性质，值为对角线元素乘积：$D = 2 \times (-1) \times \dots \times 5 = -2 \times 5 = -10$（假设n=3，若n>3，按实际对角线元素乘积计算）。

例题4：计算n阶上三角行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$

- 解：由上三角行列式性质，值为对角线元素乘积：$D = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$。

例题5：计算范德蒙德行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

- 解：对照范德蒙德行列式公式（n=3），$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$：

$$D = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = (3-2)(4-2)(4-3) = 1 \times 2 \times 1 = 2$$

题型3：利用行列式性质化简计算（核心题型）

例题6：计算4阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}$

- 解：利用性质6，逐步化为上三角行列式：
  a. 第2行加第1行，第3行减2×第1行，第4行加3×第1行：

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&-3\\0&1&3&-3\\0&-1&-5&11\\0&-3&11&-13\end{vmatrix}$$

b. 第3行加第2行，第4行加3×第2行：

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&-3\\0&1&3&-3\\0&0&-2&8\\0&0&20&-22\end{vmatrix}$$

c. 第4行加10×第3行：

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&-3\\0&1&3&-3\\0&0&-2&8\\0&0&0&58\end{vmatrix}$$

d. 上三角行列式值为对角线乘积：$D=1\times1\times(-2)\times58=-116$。

题型4：按行/列展开计算高阶行列式（降阶法）

例题7：计算4阶行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$

- 解：选择第3行（含0元素，简化计算），按第3行展开：
  a. 第3行元素：$a_{31}=2,a_{32}=0,a_{33}=1,a_{34}=-1$，对应的代数余子式：
    - $A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&3&-4\\-5&3&-3\end{vmatrix}=1\times(9+12)-(-1)\times(-3-20)+2\times(3+15)=21-23+36=34$
    - $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}3&-1&2\\-5&3&-4\\1&3&-3\end{vmatrix}=-[3\times(-9+12)-(-1)\times(15+4)+2\times(-15-3)]=-[9+19-36]=8$
    - $A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=\begin{vmatrix}3&1&2\\-5&1&-4\\1&-5&-3\end{vmatrix}=3\times(-3-20)-1\times(15+4)+2\times(25-1)=-69-19+48=-40$
    - $A_{34}=(-1)^{3+4}M_{34}=-\begin{vmatrix}3&1&-1\\-5&1&3\\1&-5&3\end{vmatrix}=-[3\times(3+15)-1\times(-15-3)+(-1)\times(25-1)]=-[54+18-24]=-48$

  b. 按第3行展开：$D=2\times34+0\times8+1\times(-40)+(-1)\times(-48)=68-40+48=76$。

题型5：克莱姆法则求解线性方程组

例题8：用克莱姆法则解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

- 解：
  a. 计算系数行列式 D：
  $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (1-6) - 1 \times (-2-3) + 1 \times (4+1) = -5 + 5 + 5 = 5 \neq 0$
  b. 计算 D_1, D_2, D_3：
    - $D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \times (1-6) - 1 \times (-1-15) + 1 \times (2+5) = -30 + 16 + 7 = -7$
      （替换第1列为常数项）
    - $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1-15) - 6 \times (-2-3) + 1 \times (10-1) = -16 + 30 + 9 = 23$
      （替换第2列为常数项）
    - $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (-5-2) - 1 \times (10-1) + 6 \times (4+1) = -7 - 9 + 30 = 14$
      （替换第3列为常数项）
  c. 唯一解：$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{7}{5}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{23}{5}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{14}{5}$。

题型6：行列式证明题（进阶题）

例题9：证明：若n阶方阵A满足 $A^2 = A$ （幂等矩阵），则 $|A| = 0$ 或 $|A| = 1$。

- 证明：
  a. 对 $A^2 = A$ 两边取行列式，由行列式乘法公式 $|AB| = |A||B|$：
  $|A^2| = |A| \implies |A||A| = |A|$
  b. 整理得：$|A|^2 - |A| = 0 \implies |A|(|A| - 1) = 0$。
  c. 因此，$|A| = 0$ 或 $|A| = 1$，得证。

四、本章核心总结

1. 行列式的本质是“n阶方阵的一个数值特征”，核心用途是判断线性方程组的解的唯一性（克莱姆法则）和矩阵的可逆性（后续章节）。
2. 计算行列式的核心方法：**降阶法**（按行/列展开）和**化三角法**（利用性质化为上/下三角行列式），优先选择含0元素多的行/列简化计算。
3. 高频考点：n阶特殊行列式（对角、三角、范德蒙德）的计算、行列式性质的应用、克莱姆法则求解线性方程组。
4. 易错点：逆序数的计算、代数余子式的符号因子、范德蒙德行列式的乘积顺序（$i > j$）、克莱姆法则的适用条件（系数行列式非零）。

需要继续整理第二章“矩阵”的知识梳理+题型例题吗？

（注：文档部分内容可能由 AI 生成）