补充：克拉默法则（系统梳理+题型例题）

克拉默法则是**行列式在n元线性方程组求解中的核心应用**，仅适用于“系数矩阵为n阶方阵”的线性方程组，是第一章行列式的重点考点，也是后续线性方程组解的判定的基础，按统一梳理模式补充如下：

一、核心概念与适用条件

1. 克拉默法则的定义

对 **n元线性非齐次方程组** $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$（系数矩阵 A 为n阶方阵），其通用形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

若系数矩阵的行列式 $D=|A|\neq 0$，则方程组有**唯一解**，解的形式为：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \dots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中：

- $D=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$（系数行列式）；
- D_j（$j=1,2,\dots,n$）是将 D 的第 j 列元素**替换为常数项** $b_1,b_2,\dots,b_n$ 后得到的行列式：

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2. 适用条件（关键限制）

1. 方程组必须是 **n元n次**（未知数个数=方程个数），即系数矩阵为n阶方阵；
2. 系数行列式 $D\neq 0$（核心前提，若 $D=0$ 或系数矩阵非方阵，克拉默法则失效，需用第四章“秩判定法”）。

二、核心性质与推论（衔接后续知识）

1. 核心推论1（齐次方程组的零解判定）

对 **n元线性齐次方程组** $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$（常数项全为0）：

- 若系数行列式 $D\neq 0$，则方程组**只有零解**（$x_1=x_2=\ldots=x_n=0$）；
- 反之，若方程组有**非零解**（不全为零的解），则必有 $D=0$（逆命题也成立，是齐次方程组有非零解的充要条件）。

2. 与矩阵可逆的关联

系数行列式 $D=|A|\neq 0 \iff A$ 可逆（非奇异矩阵），此时方程组的唯一解也可表示为 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$（与第二章逆矩阵的应用呼应）。

三、典型题型与例题

题型1：用克拉默法则解非齐次线性方程组

例题1（二元方程组）：用克拉默法则解方程组 $\begin{cases}2x_1+3x_2=8\\x_1-2x_2=-3\end{cases}$

- 解：
  a. 计算系数行列式 D：
  $$D=\begin{vmatrix}2&3\\1&-2\end{vmatrix}=2\times(-2)-3\times 1=-4-3=-7\neq 0$$
  方程组有唯一解；
  b. 计算 D_1,D_2：
    - D_1（替换第1列为常数项）：$D_1=\begin{vmatrix}8&3\\-3&-2\end{vmatrix}=8\times(-2)-3\times(-3)=-16+9=-7$；
    - D_2（替换第2列为常数项）：$D_2=\begin{vmatrix}2&8\\1&-3\end{vmatrix}=2\times(-3)-8\times 1=-6-8=-14$；
  c. 唯一解：
  $$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-7}{-7}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-14}{-7}=2$$

例题2（三元方程组）：用克拉默法则解方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\2x_1-x_2+3x_3=1\\x_1+2x_2-x_3=5\end{cases}$

- 解：
  a. 系数行列式 D：
  $$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&3\\1&2&-1\end{vmatrix}=1\times(1-6)-1\times(-2-3)+1\times(4+1)=-5+5+5=5\neq 0$$

b. 计算替换行列式：

- $D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \times (1-6) - 1 \times (-1-15) + 1 \times (2+5) = -30 + 16 + 7 = -7$ ；
- $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1-15) - 6 \times (-2-3) + 1 \times (10-1) = -16 + 30 + 9 = 23$ ；
- $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (-5-2) - 1 \times (10-1) + 6 \times (4+1) = -7 - 9 + 30 = 14$ ；

c. 唯一解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{7}{5}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{23}{5}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{14}{5}$$

题型2：利用克拉默法则判定齐次方程组的解

例题3：判定齐次方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ **是否有非零解。**

- 解：

a. 计算系数行列式 D：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (5-6) - 2 \times (10-6) + 3 \times (6-3) = -1 - 8 + 9 = 0$$

b. 由推论，$D = 0$，故方程组**有非零解**。

例题4：当参数 λ 取何值时，齐次方程组 $\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda - 1)x_2 = 0 \end{cases}$ **有非零解？**

- 解：

a. 齐次方程组有非零解的充要条件是 $D = 0$；

b. 系数行列式 $D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$；

c. 令 $D = 0$，解得 $\lambda = 3$ 或 $\lambda = -1$；

d. 故当 $\lambda = 3$ 或 $\lambda = -1$ 时，方程组有非零解。

四、核心总结与易错点

1. 核心逻辑链

克拉默法则 → 仅适用于“n元n次方程组+D≠0” → 唯一解=Dj/D → 齐次方程组：D≠0→零解，D=0→非零解。

2. 高频考点

- 用克拉默法则解二元/三元非齐次方程组（基础题）；
- 利用D=0判定齐次方程组有非零解（含参数问题，高频考点）；
- 与行列式计算、矩阵可逆性的关联（综合题）。

3. 易错点

- 适用条件混淆：非n元n次方程组（如方程个数≠未知数个数）不能用克拉默法则；
- Dj构造错误：替换的是“第j列”，而非第j行；
- 计算失误：高阶行列式（n≥4）用克拉默法则计算量大，通常改用“初等行变换法”（第四章），克拉默法则更适用于低阶（n=2,3）或含参数的方程组；
- 齐次方程组误区：D≠0时“只有零解”，而非“无解”（齐次方程组必含零解）。

4. 与后续知识的衔接

克拉默法则是线性方程组解的判定的“特殊情况”（n阶方阵+D≠0），后续第四章通过“矩阵的秩”将解的判定推广到“任意m×n方程组”（方程个数≠未知数个数、D=0的情况），核心逻辑一致：系数矩阵的“非奇异程度”（行列式≠0/秩=未知数个数）决定解的唯一性。

（注：文档部分内容可能由 AI 生成）