线性代数第六章：二次型（课本顺序梳理+题型例题）

一、核心概念（按课本逻辑排序）

1. 二次型的定义与矩阵表示

- **n元二次型**：含有n个变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的二次齐次多项式，通用形式：

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + ... + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2$$

核心特征：仅含平方项和交叉项，且交叉项系数为 $2a_{ij}$ （保证矩阵表示的唯一性）。

- **矩阵表示**：
  - 设实对称矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ （满足 $A^T = A$ ），其中 a_{ii} 为平方项 x_i^2 的系数，$a_{ij} = a_{ji}$ 为交叉项 x_ix_j 系数的一半（$i \neq j$）；
  - 未知数向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ ；
  - 二次型的矩阵形式：$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ （核心表示，一一对应关系）。
- 关键：**二次型与实对称矩阵一一对应**（一个二次型唯一确定一个实对称矩阵，反之亦然），称 A 为二次型 f 的矩阵，f 为矩阵 A 的二次型，矩阵的秩 $r(A)$ 称为二次型的秩。

2. 合同矩阵

- 设 A, B 为n阶实对称矩阵，若存在**可逆矩阵** P，使得：

$$P^T A P = B$$

则称 A 与 B 合同，记为 $A \cong B$。

- 本质：合同变换是“保对称”的线性变换，核心用途是将二次型的矩阵转化为对角矩阵（实现二次型标准化）；
- 性质：合同矩阵有相同的秩、相同的惯性指数（后续核心概念）。

3. 二次型的标准形与规范形

- **标准形**：仅含平方项的二次型，形式为：

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

对应的矩阵为对角矩阵 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ （与原矩阵 A 合同）。

- **规范形**：平方项系数仅为 $1, -1, 0$ 的标准形，形式为：

$$f = y_1^2 + y_2^2 + ... + y_p^2 - y_{p+1}^2 - ... - y_{p+q}^2$$

其中 p 为正惯性指数（正系数的个数），q 为负惯性指数（负系数的个数），满足 $p+q=r(A)$（二次型的秩），$p-q$ 为符号差。

4. 正定二次型与正定矩阵

- **正定二次型**：对任意非零n维向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}>0$，则称 f 为正定二次型；
- **正定矩阵**：正定二次型对应的实对称矩阵 A，称为正定矩阵（仅实对称矩阵讨论正定性）。
- 类似概念：半正定（$f(\boldsymbol{x})\geq 0$）、负定（$f(\boldsymbol{x})<0$）、半负定（$f(\boldsymbol{x})\leq 0$）、不定（既非正定也非负定）。

二、核心性质与定理（核心考点）

1. 二次型标准化的核心定理

- **定理1（标准化存在性）**：任意n元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$，都可通过**可逆线性变换** $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 化为标准形（即实对称矩阵必合同于对角矩阵）。
- **定理2（正交变换标准化）**：任意n元实二次型 $f=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$，都可通过**正交变换** $\boldsymbol{x}=Q\boldsymbol{y}$（$Q$ 为正交矩阵）化为标准形：

$$f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 是 A 的所有特征值，Q 的列向量是 A 对应的正交单位特征向量（与实对称矩阵正交对角化完全等价）。

2. 惯性定理（规范形唯一性）

- **定理3（惯性定理）**：任意n元实二次型的规范形是唯一的，即正惯性指数 p 和负惯性指数 q 由二次型本身唯一确定，与所用的可逆线性变换无关。
- 推论：两个实对称矩阵合同 $\iff$ 它们的正惯性指数相等且负惯性指数相等（或秩相等且正惯性指数相等）。

3. 正定二次型（正定矩阵）的判定定理

- **定理4（定义判定）**：实二次型 $f=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ 正定 $\iff$ 对任意 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}>0$（正定矩阵的定义）。
- **定理5（特征值判定）**：实对称矩阵 A 正定 $\iff$ A 的所有特征值全为正数。
- **定理6（顺序主子式判定）**：实对称矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 正定 $\iff$ A 的所有顺序主子式全为正数：
  - 一阶顺序主子式：$D_1=a_{11}>0$；
  - 二阶顺序主子式：$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$；
  - …；

  - n阶顺序主子式：$D_n = |A| > 0$。
- **定理7（合同判定）**：实对称矩阵 A 正定 $\iff$ A 合同于n阶单位矩阵 E（即存在可逆矩阵 P，使得 $P^TAP = E$）。
- **推论**：正定矩阵的主对角线元素全为正数（$a_{ii} > 0$），且行列式 $|A| > 0$（必要条件，非充分）。

三、相关题型与典型例题

题型1：二次型的矩阵表示与秩的计算

例题1：写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ 的矩阵，并求二次型的秩。

- 解：
  a. 构造实对称矩阵 A：
     - 平方项系数：$a_{11} = 2$，$a_{22} = 1$，$a_{33} = 0$（无 x_3^2 项，系数为0）；
     - 交叉项系数：x_1x_2 系数为-4，故 $a_{12} = a_{21} = -2$；x_2x_3 系数为-4，故 $a_{23} = a_{32} = -2$；x_1x_3 系数为0，故 $a_{13} = a_{31} = 0$；
     - 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$；

  b. 求二次型的秩（即 $r(A)$）：

  对 A 作初等行变换化为行阶梯形：

  $$A \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

  非零行有3行，故 $r(A) = 3$，二次型的秩为3。

题型2：正交变换化二次型为标准形（高频考点）

例题2：用正交变换 $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 为标准形，并求正交矩阵 Q。

- 解：
  a. 求二次型的矩阵 A：

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

  b. 求 A 的特征值（同第五章实对称矩阵例题）：

  特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$，特征值 $\lambda_1 = 4$，$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$；

c. 求特征向量并正交单位化：

- 对 $\lambda_1 = 4$：特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (1,1,1)^T$，单位化得 $\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$；
- 对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$：特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2 = (-1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\xi}_3 = (-1,0,1)^T$；

施密特正交化：$\boldsymbol{\beta}_2 = (-1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\beta}_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)^T$；

单位化得 $\boldsymbol{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$，$\boldsymbol{\eta}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)^T$；

d. 构造正交矩阵 Q 和标准形：

$$Q = (\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

正交变换 $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$，标准形为 $f = 4y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$。

题型3：配方法化二次型为标准形（基础方法）

例题3：用配方法化二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ 为标准形，并求可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$。

- 解：

a. 对 x_1 配平方（含 x_1 的项集中配方）：

$$f = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

补全平方：$x_1^2 + 2x_1(x_2+x_3) = (x_1+x_2+x_3)^2 - (x_2+x_3)^2$，代入得：

$$f = (x_1+x_2+x_3)^2 - (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3$$

b. 整理后对 x_2 配平方：

$$f = (x_1+x_2+x_3)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 + (x_2+2x_3)^2$$

c. 令可逆线性变换：

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

矩阵形式 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$，其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$（可逆）；

d. 标准形：$f = y_1^2 + y_2^2$（正惯性指数 $p = 2$，负惯性指数 $q = 0$，秩=2）。

题型4：正定二次型（正定矩阵）的判定（核心考点）

例题4：判断实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 是否为正定矩阵。

- 解（顺序主子式法）：
  a. 一阶顺序主子式：$D_1=3>0$；
  b. 二阶顺序主子式：$D_2=\begin{vmatrix}3&1\\1&2\end{vmatrix}=6-1=5>0$；
  c. 三阶顺序主子式：
  $D_3=|A|=\begin{vmatrix}3&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{vmatrix}=3\times(4-0)-1\times(2-0)+1\times(0-2)=12-2-2=8>0$
  ；
  d. 所有顺序主子式全正，故 A 是正定矩阵。

例题5：判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$ 是否为正定二次型。

- 解（特征值法）：
  a. 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$；
  b. 求特征值：特征多项式 $f(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-\frac{1}{2})^2$，特征值 $\lambda_1=2>0$，$\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{2}>0$
  ；
  c. 所有特征值全正，故二次型为正定二次型。

题型5：惯性定理的应用

例题6：已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经正交变换化为标准形 $f=y_1^2+2y_2^2$，求 a,b 的值及正、负惯性指数。

- 解：
  a. 二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，标准形对应的对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；
  b. 正交变换下 $A\sim\Lambda$（相似且合同），故特征值为1, 2, 0：
     - 迹相等：$1+a+1=1+2+0\implies a=1$；
     - 特征值0满足 $|0\cdot E-A|=0$：$|-A|=-|A|=0\implies|A|=0$，代入 $a=1$：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1-1) - b(b-1) + 1(b-1) = -b^2 + b + b - 1 = -b^2 + 2b - 1 = 0$$

解得 $b = 1$；

c. 正惯性指数 $p = 2$（特征值1, 2为正），负惯性指数 $q = 0$（无负特征值）。

四、本章核心总结

1. 本章核心是**二次型的标准化**与**正定性判定**，本质是实对称矩阵的合同变换（标准化）和性质应用（正定性），与第五章实对称矩阵的对角化紧密衔接（正交变换法是对角化的直接应用）。
2. 核心逻辑链：
    - 二次型 ↔ 实对称矩阵（一一对应）；
    - 标准化：通过正交变换（保长度、保正交，适合几何应用）或配方法（简单直观，适合代数计算）将二次型化为标准形，规范形由惯性定理唯一确定；
    - 正定性：从定义、特征值、顺序主子式三个角度判定，核心是“对任意非零向量，二次型值为正”。
3. 高频考点：正交变换化标准形（含施密特正交化）、配方法化标准形、正定矩阵的判定（顺序主子式/特征值）、惯性定理的应用（求参数）。
4. 易错点：
    - 二次型的矩阵必须是实对称矩阵，交叉项系数需取一半（如 $2x_1x_2$ 对应 $a_{12} = a_{21} = 1$）；
    - 正交变换化标准形时，特征向量需先正交化（同一重特征值）再单位化，不同特征值的特征向量已正交，仅需单位化；
    - 正定矩阵的判定必须基于实对称矩阵，非对称矩阵不讨论正定性；
    - 顺序主子式是“左上角的k阶子式”，而非任意k阶子式。

至此，线性代数核心章节（行列式、矩阵、向量组、线性方程组、特征值与特征向量、二次型）已全部梳理完成，涵盖课本核心概念、性质定理、典型题型与例题。如果需要针对某类题型（如综合证明题、考研真题）或特定知识点进行深化，可随时告知！