线性代数第三章：向量组的线性相关性（课本顺序梳理+题型例题）

一、核心概念（按课本逻辑排序）

1. 向量的定义与表示

- **n维向量**：由n个实数组成的有序数组，称为n维向量，分为行向量和列向量（默认列向量）：
  - 列向量：$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$，记为 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$；
  - 行向量：$\boldsymbol{\alpha}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$（列向量的转置）；
  - 元素 a_i 称为向量的第i个分量，全为0的向量称为零向量（记为 $\mathbf{0}$）。
- 向量相等：同维向量且对应分量相等；
- 向量的线性运算：加法（同维向量对应分量相加）、数乘（每个分量乘实数k），运算性质与矩阵线性运算一致。

2. 向量组的定义

- 由若干个同维向量组成的集合，称为向量组。例如：
  - 矩阵 $A_{m\times n}$ 的n个列向量构成**列向量组**：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ （$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$）；
  - 矩阵 $A_{m\times n}$ 的m个行向量构成**行向量组**：$\boldsymbol{\beta}_1^T, \boldsymbol{\beta}_2^T, \dots, \boldsymbol{\beta}_m^T$ （$\boldsymbol{\beta}_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$）。

3. 线性组合与线性表示

- **线性组合**：对n维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和实数 $k_1, k_2, \dots, k_s$，称 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 为该向量组的线性组合，$k_1, \dots, k_s$ 为组合系数。
- **线性表示**：若n维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能表示为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合（即存在 $k_1, \dots, k_s$ 使 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \dots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$），则称 $\boldsymbol{\beta}$ 能由该向量组线性表示。
- 矩阵形式：$\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_s \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$，其中 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s)$（列向量组构成的矩阵），$\boldsymbol{x} = (k_1, \dots, k_s)^T$（组合系数向量）。

4. 线性相关与线性无关

- **线性相关**：对n维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ ，若存在**不全为零**的实数 $k_1, \ldots, k_s$ ，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \ldots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$，则称该向量组线性相关。
- **线性无关**：若仅当 $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$ 时，才有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \ldots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$，则称该向量组线性无关（即不存在不全为零的系数使线性组合为零向量）。
- 矩阵形式：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 ⇨ 齐次方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ （$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s)$）有非零解；线性无关 ⇨ 齐次方程组只有零解。

5. 极大线性无关组与向量组的秩

- **极大线性无关组**：设向量组 T 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 满足：
  a. 线性无关；
  b. T 中任意一个向量都能由该部分组线性表示；

  则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 为 T 的一个极大线性无关组（简称极大无关组）。
- 性质：一个向量组的极大无关组不唯一，但所有极大无关组的向量个数相同。
- **向量组的秩**：向量组的极大无关组所含向量的个数，记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s)$；规定零向量组的秩为0。
- 矩阵的秩与向量组秩的关系：矩阵 A 的秩 = 其列向量组的秩（列秩）= 其行向量组的秩（行秩）（核心定理，桥梁作用）。

6. 向量组的等价

- 若向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 中每个向量都能由向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，且反之亦然，则称 A 与 B 等价，记为 $A \cong B$。

二、核心性质与定理

1. 线性表示的判定定理

- **定理1**：向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示 ⇨ 矩阵 $A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 的秩 = 增广矩阵 $\overline{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta})$ 的秩（$r(A) = r(\overline{A})$）。
- **定理2**：向量组 $A: \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 能由向量组 $B: \boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示 ⇨ 矩阵 $B = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t)$ 的秩 = 矩阵 $(B, A) = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_t, \boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s)$ 的秩（$r(B) = r(B, A)$）。

2. 线性相关性的判定定理（核心考点）

- **定理3（定义等价）**：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 ⇨ 齐次方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ （$A = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s)$）有非零解；线性无关 ⇨ 齐次方程组只有零解。
- **定理4（秩判定）**：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关 ⇨ $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s) < s$；线性无关 ⇨ $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_s) = s$（向量个数）。

- **推论1**：n个n维向量组线性相关 ⇨ 构成的矩阵行列式 $|A|=0$；线性无关 ⇨ $|A|\neq 0$。
- **推论2**：向量个数 > 向量维数（$s>n$）的n维向量组**必线性相关**（比如3个2维向量组一定线性相关）。
- **推论3**：含零向量的向量组**必线性相关**。
- **定理5**：若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 唯一线性表示。
- **定理6**：线性相关向量组的任意扩充组（增加向量）仍线性相关；线性无关向量组的任意部分组仍线性无关。

3. 向量组秩的性质

- **性质1**：等价向量组的秩相等（$A\cong B \implies r(A)=r(B)$）；反之不成立（秩相等不一定等价）。
- **性质2**：若向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则 $r(A)\leq r(B)$。
- **性质3**：$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t)\leq r(A)+r(B)$（$A,B$ 为两个向量组）。
- **性质4**：设 A 为 $m\times s$ 矩阵，B 为 $s\times n$ 矩阵，则 $r(AB)\leq min(r(A),r(B))$（矩阵乘积的秩不等式，衔接第二章）。

4. 极大线性无关组的性质

- 极大无关组与原向量组等价；
- 同一向量组的任意两个极大无关组等价；
- 极大无关组的向量个数 = 向量组的秩（定义核心）。

三、相关题型与典型例题

题型1：向量的线性表示（判定+求组合系数）

例题1：设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(6,6,6)^T$，判断 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，若能，求组合系数。

- 解：构造矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，增广矩阵 $\overline{A}=(A,\boldsymbol{\beta})$，求秩：
  a. $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&6\\2&1&3&6\\3&0&3&6\end{pmatrix}$；
  b. 第2行减2×第1行，第3行减3×第1行：
  $$\begin{pmatrix}1&2&3&6\\0&-3&-3&-6\\0&-6&-6&-12\end{pmatrix}$$

c. 第3行减2×第2行，第2行乘 $-\frac{1}{3}$ ：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d. 秩 $r(A)=2$ ， $r(\overline{A})=2$ ，故 $\boldsymbol{\beta}$ 能由其线性表示；

e. 求组合系数：解方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ ，由行最简形得：

$$\begin{cases} x_1=6-2x_2-3x_3 \\ x_2=2-x_3 \end{cases}$$

令 $x_3=k$ （k为任意实数），则组合系数为 $x_1=2-k$ ， $x_2=2-k$ ， $x_3=k$ （不唯一，例如k=0时， $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3$ ）。

题型2：向量组的线性相关性判定（核心题型）

例题2（定义法）：判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^T$ ， $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^T$ ， $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,6,3)^T$ 的线性相关性。

- 解：设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$ ，列方程组：

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_1+2k_2+6k_3=0 \\ k_1+3k_2+3k_3=0 \end{cases}$$

a. 第2行减第1行，第3行减第1行：

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=0 \\ k_2+5k_3=0 \\ 2k_2+2k_3=0 \end{cases}$$

b. 第3行减2×第2行： $-8k_3=0 \implies k_3=0$ ，代入得 $k_2=0$ ， $k_1=0$ ；

c. 仅当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时成立，故向量组**线性无关**。

例题3（秩判定法）：判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T$ ， $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T$ ， $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$ 的线性相关性。

- 解：构造矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ ，求秩：

a. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 14 \end{pmatrix}$ ；

b. 第2行加第1行，第3行减2×第1行，第4行减4×第1行：

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&3&3\\0&1&1\\0&2&2\end{pmatrix}$$

c. 第2行乘 $\frac{1}{3}$ ，第3行减第2行，第4行减2×第2行：

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

d. 秩 $r(A)=2<3$ （向量个数），故向量组**线性相关**。

例题4（行列式法）：判断3个3维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,3)^T$ 的线性相关性。

- 解：构造矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ ，计算行列式：

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&3\\3&3&3\end{vmatrix}=1\times(3-9)-2\times(6-9)+3\times(6-3)=-6+6+9=9\neq 0$$

故向量组**线性无关**。

题型3：极大线性无关组的求法与向量组秩的计算

例题5：求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)^T$ 的极大无关组和秩，并将其余向量用极大无关组线性表示。

- 解：构造矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ ，通过初等行变换化为行最简形：

a. 初始矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-1\\2&1&7&2\\4&2&14&0\end{pmatrix}$$

b. 初等行变换后化为行最简形（步骤同例题3）：

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

c. 分析：行最简形中首非零元所在列（第1、2、4列）对应原向量组的 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ ，故：

  - 极大无关组：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ （不唯一，也可选其他含3个线性无关向量的部分组）；
  - 向量组的秩：$r=3$；
  - 其余向量表示：由行最简形第3列得 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+1\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_4$ 。

题型4：向量组等价的判定

例题6：判断向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^T$ ，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T$ 与向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,-1)^T$ ，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,1)^T$ 是否等价。

- 解：根据等价判定定理，需验证 $r(A)=r(B)=r(A,B)$：
  a. 构造矩阵 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，$B=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，$(A,B)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$；
  b. 计算 $r(A)$： $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$，秩 $r(A)=2$；
  c. 计算 $r(B)$： $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\-1&1\end{pmatrix}$，行列式（3×2矩阵取2阶子式）$\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2\neq 0$，秩 $r(B)=2$；
  d. 计算 $r(A,B)$：
  $$(A,B)=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&2\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$
  秩 $r(A,B)=2$；
  e. 因 $r(A)=r(B)=r(A,B)=2$，故向量组 $A\cong B$ （等价）。

题型5：线性相关性的证明题（进阶）

例题7：设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ ，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ ，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关。

- 证明：设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$，代入 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的表达式：
  a. $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$；
  b. 整理得：$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$；
  c. 因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故系数全为零：
  $$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3=0\end{cases}$$
  d. 解方程组：系数行列式 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$，方程组只有零解 $k_1=k_2=k_3=0$；
  e. 故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，得证。

四、本章核心总结

1. 本章核心是**线性相关性**与**向量组的秩**，前者描述向量间的“依赖关系”，后者描述向量组的“核心信息容量”，矩阵的秩是连接两者的关键桥梁（矩阵秩=列秩=行秩）。
2. 核心判定方法（务必熟练）：
   - 线性表示：转化为“矩阵秩=增广矩阵秩”；
   - 线性相关性：低阶向量组用“行列式法”，高阶/任意向量组用“矩阵秩法”（秩<向量个数⇨相关）；
   - 极大无关组：通过矩阵行最简形的“首非零元列”确定，其余向量用该行最简形直接写出线性表示式。
3. 高频考点：线性相关性判定、极大无关组与秩的计算、向量组等价判定、线性表示的组合系数求解。
4. 易错点：
   - 线性相关≠每个向量都能由其他向量表示（仅需存在一个向量可由其余表示）；
   - 极大无关组不唯一，但秩唯一；
   - 秩相等的向量组不一定等价（需满足“互相线性表示”）；
   - 向量组线性无关，其延伸组（增加分量）仍线性无关；线性相关，其缩短组（减少分量）仍线性相关。

需要继续整理第四章“线性方程组”的知识梳理+题型例题吗?

（注：文档部分内容可能由 AI 生成）