线性代数第四章：线性方程组（课本顺序梳理+题型例题）

一、核心概念（按课本逻辑排序）

1. 线性方程组的定义与矩阵表示

- **n元线性方程组**：由m个关于n个未知数 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的一次方程组成的方程组，通用形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- **矩阵表示**：
  - 系数矩阵：$A = (a_{ij})_{m \times n}$ （由未知数系数构成）；
  - 未知数向量：$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ ；

    - 常数项向量： $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,...,b_m)^T$ ；
    - 增广矩阵： $\overline{A}=(A|\boldsymbol{b})$ （系数矩阵后拼接常数项向量）；
    - 矩阵形式： $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ （核心表示形式）。
- **分类**:
    - 非齐次线性方程组： $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ （常数项不全为零）；
    - 齐次线性方程组： $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ （常数项全为零），记为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ （必含零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ）。

2. 线性方程组的解的概念

- **解向量**：满足方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的n维向量 $\boldsymbol{\xi}=(c_1,c_2,...,c_n)^T$ ，称为方程组的一个解向量（简称解）。
- **解集合**：方程组的所有解构成的集合，记为 S。
- **通解**：解集合中所有解的统一表达式（包含所有解，通常由“基础解系+特解”构成）。
- **同解方程组**：解集合相同的两个线性方程组，称为同解方程组。

3. 齐次线性方程组的核心概念

- **零解**： $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ （所有未知数都为零，齐次方程组必有的解）；
- **非零解**：不全为零的解向量（齐次方程组不一定存在，需满足特定条件）；
- **基础解系**：设 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,...,\boldsymbol{\xi}_t$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，若满足：
    a. 线性无关；
    b. 方程组的任意一个解都能由该向量组线性表示；

  则称 $\boldsymbol{\xi}_1,...,\boldsymbol{\xi}_t$ 为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系（本质是解空间的基）。
- **解空间**：齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有解构成的n维向量空间，记为 $N(A)$，其维数 $\dim N(A)=n-r(A)$ （n为未知数个数，r(A)为系数矩阵的秩）。

4. 非齐次线性方程组的核心概念

- **特解**：方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的任意一个具体解（比如不含自由变量的解）；
- **导出组**：非齐次方程组对应的齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ （核心关联：非齐次的解与导出组的解满足特定性质）。

二、核心性质与定理（核心考点）

1. 线性方程组有解的判定定理（统一判定）

- **定理1（通用判定）**：n元线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $r(A)=r(\overline{A})$ （系数矩阵的秩=增广矩阵的秩）；

- 推论1（唯一解）：有解且 $r(A)=r(\overline{A})=n$ （秩=未知数个数）→ 唯一解；
- 推论2（无穷多解）：有解且 $r(A)=r(\overline{A})<n$ → 无穷多解；
- 推论3（无解）：$r(A)\neq r(\overline{A})$ （增广矩阵的秩比系数矩阵多1）→ 无解。

2. 齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的性质与定理

- **定理2（解的性质）**：
  a. 若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是解，则 $\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$ 也是解（解对加法封闭）；
  b. 若 $\boldsymbol{\xi}$ 是解，k为实数，则 $k\boldsymbol{\xi}$ 也是解（解对数乘封闭）；
  （本质：解集合构成向量空间，即解空间）。
- **定理3（非零解判定）**：
  a. 齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是 $r(A)<n$；
  b. 推论（n阶方阵情形）：若A为n阶方阵，则 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 ⇨ $|A|=0$ （与第一章克莱姆法则呼应）；只有零解 ⇨ $|A|\neq 0$。
- **定理4（基础解系的存在性）**：若 $r(A)=r<n$，则 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 存在基础解系，且基础解系所含向量个数为 $n-r$ （解空间维数）。
- **定理5（通解结构）**：若 $\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是基础解系，则 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为:

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\ldots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad(k_1,\ldots,k_{n-r}\in\mathbb{R})$$

3. 非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的性质与定理

- **定理6（解的性质）**：
  a. 若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是导出组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解；
  b. 若 $\boldsymbol{\eta}$ 是解，$\boldsymbol{\xi}$ 是导出组的解，则 $\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\xi}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解。
- **定理7（通解结构）**：若 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是导出组的基础解系，则 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\ldots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}\quad(k_1,\ldots,k_{n-r}\in\mathbb{R})$$

（本质：非齐次的所有解 = 一个特解 + 导出组的所有解）。

4. 重要推论（高频应用）

- 推论1：若 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，则其导出组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 必有非零解；
- 推论2：若 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则其导出组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 必有非零解（反之不成立）；
- 推论3：若 $A_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 中 $m<n$ （方程个数 < 未知数个数），则方程组要么无解，要么有无穷多解（不可能唯一解）。

三、相关题型与典型例题

题型1：齐次线性方程组的基础解系与通解求解（核心题型）

例题1：求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的基础解系与通解。

- 解：
  a. 写出系数矩阵 A，通过初等行变换化为行最简形：
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 7 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  b. 确定秩与自由变量：$r(A) = 2$，n=4（未知数个数），自由变量个数 $4 - 2 = 2$，选 x_3, x_4 为自由变量；
  c. 写出同解方程组：
  $$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$
  d. 求基础解系（自由变量取单位向量组）：
     - 取 $(x_3, x_4) = (7, 0)$（消去分母），得 $(x_1, x_2) = (2, 5)$，解向量 $\boldsymbol{\xi}_1 = (2, 5, 7, 0)^T$；
     - 取 $(x_3, x_4) = (0, 7)$，得 $(x_1, x_2) = (3, 4)$，解向量 $\boldsymbol{\xi}_2 = (3, 4, 0, 7)^T$；
  e. 通解：$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 = k_1(2, 5, 7, 0)^T + k_2(3, 4, 0, 7)^T$（$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$）。

题型2：非齐次线性方程组的特解与通解求解（核心题型）

例题2：求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解。

- 解：
  a. 写出增广矩阵 $\overline{A}$，化为行最简形：
  $$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  b. 判定有解：$r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4$，有无穷多解；
  c. 找特解 $\boldsymbol{\eta}^*$（自由变量 x_3, x_4 取0）：
     - 令 $x_3 = 0, x_4 = 0$，得 $x_1 = \dfrac{5}{4}, x_2 = -\dfrac{1}{4}$，特解 $\boldsymbol{\eta}^* = (\dfrac{5}{4}, -\dfrac{1}{4}, 0, 0)^T$；
  d. 求导出组的基础解系（同解方程组取常数项为0）：

- 同解方程组：$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 \end{cases}$；
- 取 $(x_3, x_4) = (2, 0)$，得 $\boldsymbol{\xi}_1 = (3, 3, 2, 0)^T$；
- 取 $(x_3, x_4) = (0, 4)$，得 $\boldsymbol{\xi}_2 = (-3, 7, 0, 4)^T$；

e. 通解：$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 = (\dfrac{5}{4}, -\dfrac{1}{4}, 0, 0)^T + k_1(3, 3, 2, 0)^T + k_2(-3, 7, 0, 4)^T$（$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$）。

题型3：含参数的线性方程组解的讨论（高频考点）

例题3：讨论参数 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多解，并在有无穷多解时求通解。

- 解：

a. 计算系数矩阵的行列式 $|A|$（n=3，方阵情形）：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)\lambda^2$$

b. 唯一解情形：$|A| \neq 0 \implies \lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$，此时 $r(A) = r(\overline{A}) = 3 = n$，唯一解；

c. 无解情形：$|A| = 0$，即 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = -3$：

- 当 $\lambda = 0$ 时，增广矩阵：

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 1, r(\overline{A}) = 2$，无解；

d. 无穷多解情形：$\lambda = -3$ 时，增广矩阵：

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$，有无穷多解；
- 特解 $\boldsymbol{\eta}^* = (-1, -2, 0)^T$（令 $x_3 = 0$）；
- 导出组基础解系 $\boldsymbol{\xi} = (1, 1, 1)^T$；
- 通解：$\boldsymbol{x} = (-1, -2, 0)^T + k(1, 1, 1)^T$（$k \in \mathbb{R}$）。

题型4：线性方程组解的性质应用（进阶题）

例题4：设 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,3,4)^T$ ，$\boldsymbol{\eta}_2=(2,3,4,5)^T$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的两个解，$r(A)=3$，n=4，求方程组的通解。

- 解：
  a. 由解的性质，$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,1,1)^T$ 是导出组 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的非零解；
  b. 导出组的解空间维数 $\dim N(A)=n-r(A)=4-3=1$，故 $\boldsymbol{\xi}$ 是基础解系；
  c. 通解：$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+k\boldsymbol{\xi}=(1,2,3,4)^T+k(1,1,1,1)^T$ （$k\in\mathbb{R}$）。

题型5：线性方程组的同解与公共解问题（拔高题）

例题5：设方程组 $I:\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$，方程组 $II:\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$，求两个方程组的公共解。

- 解（联立方程组法）：
  a. 公共解满足两个方程组，联立得：

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\\x_1-x_2+x_3=0\\x_2-x_3+x_4=0\end{cases}$$

  b. 化为行最简形：

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

  c. 同解方程组：$x_1=x_4,x_2=-x_4,x_3=0$ （x_4 为自由变量）；
  d. 公共解：$\boldsymbol{x}=k(1,-1,0,1)^T$ （$k\in\mathbb{R}$）。

四、本章核心总结

1. 本章核心是**线性方程组的解的判定与通解构造**，本质是矩阵秩的应用——所有解的问题（存在性、唯一性、无穷多解）都可通过“系数矩阵秩”与“增广矩阵秩”的关系判定。
2. 核心逻辑链：
   - 齐次方程组：$r(A)<n$ 有非零解 → 基础解系（个数 $n-r(A)$）→ 通解=基础解系的线性组合；
   - 非齐次方程组：$r(A)=r(\overline{A})$ 有解 → 通解=特解 + 导出组的通解（“特解定位置，基础解系定方向”）。
3. 高频考点：含参数方程组解的讨论（行列式法+秩判定法）、基础解系求解、通解构造、解的性质应用。

4. 易错点：
    - 含参数方程组讨论时，需注意“行列式为零”仅为无穷多解或无解的必要条件，需进一步通过增广矩阵秩验证；
    - 基础解系的向量必须线性无关，自由变量的选取不唯一，但基础解系的个数固定（$n - r(A)$）；
    - 非齐次方程组的通解必须包含“特解”和“导出组的通解”，缺一不可；
    - 公共解是两个方程组解集合的交集，需通过联立方程组或解的表达式联立求解。