第一部分 随机变量及其分布

一、离散型随机变量及其分布律

1. (0-1)分布

$$P\{X=k\}=\begin{cases}0, & k=0\\1, & k=1\end{cases}$$

2. 二项分布 $X\sim B(n,p)$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\qquad k=0,1,2,\cdots,n$$

3. 泊松分布 $X\sim \pi(\lambda)$

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\qquad k=0,1,2,\cdots,\quad (\lambda)$$

二、随机变量的分布函数

1. 概念

设X是一个随机变量，x是任意实数，函数
$F(x)=P\{X\le x\}\qquad -\infty<x<+\infty$

2. 基本性质

- 单调性：
  $F(x)$ 是 x 的不减函数。
  对任意实数 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$，有：

$$F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<X\leqslant x_2\}\geqslant 0$$

- 有界性：
  $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且满足：

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$$

几何解释:
当 $x\to-\infty$ 时，事件"随机点 X 落在点 x 左边"趋于不可能事件，其概率趋于0
当 $x\to\infty$ 时，事件"随机点 X 落在点 x 左边"趋于必然事件，其概率趋于1

- 右连续性:
$F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的（证明略）

三、连续随机变量及其概率密度

1. 定义

如果对于随机变量X的分布函数$F(x)$，存在非负可积函数$f(x)$，使对于任意实数x有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

称X为连续型随机变量，$f(x)$称为X的概率密度函数，简称概率密度

2. 性质

- $f(x)\geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)=1$
- 对于任意实数$x_1,x_2(x_1\leq x_2)$

$$P\{x_1<X\leq x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$$

- 若$f(x)$在点x处连续，则有$F'(x)=f(x)$

3. 三种重要的连续型随机变量

(1) 均匀分布$X\sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 指数分布$X \sim exp(\theta)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(3) 正态分布(或高斯分布) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<+\infty$$

- 标准正态分布$X \sim N(0,1)$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

对于任意的$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，都可以转成$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim(0,1)$

第二部分 多维随机变量及其分布

一、二维随机变量

1. 定义

一般，设E是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$，设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个向量(X,Y),叫做二维随机向量或二维随机变量

2. 联合分布函数

(1) 定义

设(X,Y)是二维随机变量，对于任意实数x,y，二元函数：

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量(X,Y)的分布函数，或称为随机变量X和Y的联合分布函数

(2) 性质

- 单调性：
  $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数：
  - 对任意固定的 y，当 $x_2>x_1$ 时 $F(x_2,y)\geqslant F(x_1,y)$
  - 对任意固定的 x，当 $y_2>y_1$ 时 $F(x,y_2)\geqslant F(x,y_1)$
- 有界性：
  $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且满足极限条件：
  - $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=0$（固定 y）
  - $\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=0$（固定 x）
  - $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0$
  - $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1$

  > 几何解释：当 $x\to-\infty$ 时，事件概率趋于不可能事件；当 $x,y\to+\infty$ 时，事件概率趋于必然事件

- 右连续性：
  $F(x,y)$ 关于 x 和 y 右连续：

$$F(x+0,y)=F(x,y),\quad F(x,y+0)=F(x,y)$$

- 矩形不等式：
  对任意 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 且 $x_1<x_2$，$y_1<y_2$，有：

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\geqslant 0$$

3. 联合概率密度

(1) 定义

存在非负可积函数 $f(x,y)$，使得对于任意实数 x 和 y，分布函数满足：

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)dudv$$

满足上述条件的 (X,Y) 称为二维连续型随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为：(X,Y) 的概率密度或X 和 Y 的联合概率密度

(2) 性质

- 非负性：
  概率密度函数 $f(x,y)$ 恒非负：

$$f(x,y) \geqslant 0$$

- 全域归一化：
  $f(x,y)$ 在整个平面上的二重积分值为1：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = F(+\infty,+\infty) = 1$$

- 区域概率计算：
  若 G 是 xOy 平面上的任意区域，则点 (X,Y) 落在 G 内的概率为：

$$P\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)dxdy$$

- 微分关系：
  若 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则分布函数与概率密度满足微分关系：

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

二、边缘分布

1. 边缘分布函数

- 边缘分布函数定义：
  设 (X,Y) 是二维随机变量，其联合分布函数为 $F(x,y)$。
  X 和 Y 各自的分布函数分别记作：
  - $F_X(x)$：关于 X 的边缘分布函数
  - $F_Y(y)$：关于 Y 的边缘分布函数
- 边缘分布计算公式：

$$\begin{cases} F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = F(x, \infty) \\ F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = F(\infty, y) \end{cases}$$

- 计算原理：
  - $F_X(x) = F(x, \infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$
    （固定 x，令 y 趋向正无穷）
  - $F_Y(y) = F(\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$
    （固定 y，令 x 趋向正无穷）
- 离散型随机变量：
  若 (X, Y) 是离散型，可通过概率求和公式直接计算：

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leqslant x} \sum_{y_j} p_{ij}, \quad F_Y(y) = \sum_{y_j \leqslant y} \sum_{x_i} p_{ij}$$

  其中 $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$

2. 边缘概率密度

- 边缘分布函数：
  对于联合分布函数 $F(x, y)$，X 的边缘分布函数定义为：

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

- 边缘概率密度推导：
  X 的边缘概率密度由联合概率密度 $f(x, y)$ 经积分运算得到：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

- **Y** 的边缘概率密度：
  同理，Y 的边缘概率密度为：

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

四、相互独立的随机变量

二维随机变量独立性

- 定义
  设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ 分别是 (X,Y) 的分布函数及边缘分布函数。若对所有 x,y 满足：
  $$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$
  等价于：
  $$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$
  则称 X 和 Y 相互独立
- 连续型随机变量的独立条件：
  当 (X,Y) 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 时，独立条件等价于：
  $$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$
  该等式在平面上几乎处处成立
- 离散型随机变量的独立条件：
  当 (X,Y) 是离散型随机变量时，对所有可能取值 (x_i,y_j) 满足：
  $$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$$

五、两个随机变量函数的分布

1. $Z = X + Y$的分布

设 (X,Y) 是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x,y)$。则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z-y,y)dy$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)dx$$

- 证明:

$$\because F_z(z) = P(X+Y \le z) = \iint_D f(x,y)dxdy, 其中D = \{(x,y)|x+y \le z\}$$
$$\therefore F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy$$
$$\therefore f_z(z) = \frac{d}{dz}[F_z(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z}[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x, z-x) \cdot (z-x)']dx$$

又若 X 和 Y 相互独立，设 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，则上两式分别化为:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

这两个公式称为 f_X 和 f_Y 的卷积公式，记为 $f_X * f_Y$，即

$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

2. $Z = \dfrac{Y}{X}$的分布、$Z = XY$的分布

- $Z = Y/X$ 的概率密度（商分布）：
  设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$，则 $Z = Y/X$ 的概率密度为:

  $$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx$$

  独立情形：若 X 与 Y 独立，且边缘概率密度分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，则公式简化为:

  $$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz) dx$$

- $W = XY$ 的概率密度（积分布）：
  设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$，则 $W = XY$ 的概率密度为:

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right) dx$$

独立情形：若 X 与 Y 独立，且边缘概率密度分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，则公式简化为：

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dx$$

3. $M = \max\{X, Y\}$及$N = \min\{X, Y\}$的分布

最大值与最小值函数的分布（相互独立随机变量）

- 最大值函数 $M = \max\{X, Y\}$ 的分布函数：
  由于 X 和 Y 相互独立：

$$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= P\{M \leqslant z\} \\ &= P\{X \leqslant z, Y \leqslant z\} \\ &= P\{X \leqslant z\} \cdot P\{Y \leqslant z\} \\ &= F_X(z) \cdot F_Y(z) \end{aligned}$$

- 最小值函数 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数：
  由于 X 和 Y 相互独立：

$$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= P\{N \leqslant z\} \\ &= 1 - P\{N > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)] \end{aligned}$$

推广至 n 个独立随机变量

- n 维最大值函数 $M = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ 的分布函数：
  设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$：

$$F_{\max}(z) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

- n 维最小值函数 $N = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ 的分布函数：
  设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$：

$$F_{\min}(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(z)]$$

第三部分 随机变量的数字特征

一、数学期望

1. 定义

数学期望定义（离散型）

- 分布律条件：
  设离散型随机变量 X 的分布律为：

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

- 数学期望公式：
  若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则定义 X 的数学期望为：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

  关键要求：级数必须绝对收敛（$\sum |x_k| p_k < \infty$）

数学期望定义（连续型）

- 概率密度条件：
  设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$
- 数学期望公式：
  若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛，则定义 X 的数学期望为：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

  关键要求：积分必须绝对收敛（$\int |x| f(x) dx < \infty$）

2. 随机变量函数的期望定理

- 定理核心表述：
  设 $Y=g(X)$ 是随机变量 X 的函数（g 为连续函数）

- 离散型情形：
  若 X 是离散型随机变量，分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k \ (k = 1, 2, \cdots)$，且级数满足绝对收敛条件：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| p_k < \infty$$

  则 Y 的数学期望为：

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

- 连续型情形：
  若 X 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$，且积分满足绝对收敛条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty$$

  则 Y 的数学期望为：

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

3. 性质

(1) 常数的期望

- 性质：
  若 C 为常数，则

$$E(C) = C$$

(2) 常数倍性质

- 性质：
  设 X 为随机变量，C 为常数，则

$$E(CX) = C \cdot E(X)$$

(3) 可加性（核心性质）

- 性质：
  设 X, Y 为随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

可推广至 n 个随机变量：

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)=\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

(4) 独立变量的乘积期望

- 性质：
  若 X, Y 相互独立，则

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$$

二、方差

1. 方差定义与性质

- 定义式：

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$$

  - $E(X)$：随机变量 X 的数学期望（均值）
  - $[X-E(X)]^2$：偏差的平方
  - 方差 $D(X)$ 是偏差平方的期望值
- 标准差：

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

  - 物理意义：度量波动大小的直接指标（与原始量纲一致）

2. 方差计算体系

随机变量类型	计算公式	关键要素说明
离散型	$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k$$	$p_k=P\{X=x_k\}$（分布律）

随机变量类型	计算公式	关键要素说明
连续型	$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$	$f(x)$（概率密度函数）

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

2. 性质

- 常数方差:
  设 C 是常数，则:
  $$D(C)=0$$
- 常数倍与平移性质:
  设 X 是随机变量，C 是常数:
  $$D(CX)=C^2D(X)$$
  $$D(X+C)=D(X)$$
- 随机变量和的方差:
  设 X,Y 是两个随机变量:
  $$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
  独立情形：若 X,Y 相互独立，则简化为:
  $$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$
  推广：此性质可推广到任意有限多个相互独立的随机变量之和
- 方差为零的充要条件:
  $$D(X)=0 \quad \Leftrightarrow \quad P\{X=E(X)\}=1$$
  即 X 以概率 1 取常数 $E(X)$

3. 切比雪夫不等式

设随机变量 X 满足:

- 数学期望 $E(X)=\mu$
- 方差 $D(X)=\sigma^2$

则对 任意正数 ε ，有:

$$P\{|X-\mu| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明核心步骤

$$\begin{aligned}
P\{|X-\mu| \geqslant \varepsilon\} &= \int_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon} f(x)dx \quad (\text{连续型情形}) \\
&\leqslant \int_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon} \left(\frac{x-\mu}{\varepsilon}\right)^2 f(x)dx \quad \left(\text{因} \left(\frac{|x-\mu|}{\varepsilon}\right)^2 \geqslant 1\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \\
&= \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

三、协方差及相关系数

1. 定义

- 协方差定义:
  设 (X, Y) 是二维随机变量，定义 X 与 Y 的协方差为:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

- 相关系数定义:
  X 与 Y 的相关系数为:

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

- 协方差基本性质:

$$\begin{cases} \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X) \\ \mathrm{Cov}(X, X) = D(X) \end{cases}$$

- 方差与协方差关系:
  对任意两个随机变量 X 和 Y，有:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$$

- 协方差计算式：
  协方差可展开为：

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

2. 性质

协方差的核心性质

标量乘法不变性

设 a, b 为常数，则：

$$\operatorname{Cov}(aX,\ bY)=ab\cdot\operatorname{Cov}(X,\ Y)$$

加法分配律

对任意随机变量 X_1, X_2, Y：

$$\operatorname{Cov}(X_1+X_2,\ Y)=\operatorname{Cov}(X_1,\ Y)+\operatorname{Cov}(X_2,\ Y)$$

3. 定理

$$|\rho_{XY}|\le 1\quad \text{当且仅当}\ \exists a,b\in\mathbb{R},P\{Y=a+bX\}=1\text{时，等号成立}$$

四、矩、协方差矩阵

1. 矩的定义体系

设 (X,Y) 是二维随机变量：

- k阶原点矩（X 的矩）：
  若存在，定义为：

$$E(X^k),\quad k=1,2,\cdots$$

- k阶中心矩（X 的偏差矩）：
  若存在，定义为：

$$E\left\{[X-E(X)]^k\right\}, \quad k=2,3,\cdots$$

- $k+l$阶混合矩（X 和 Y 的联合矩）：
  若存在，定义为：

$$E(X^kY^l), \quad k,l=1,2,\cdots$$

- $k+l$阶混合中心矩（联合偏差矩）：
  若存在，定义为：

$$E\left\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right\}, \quad k,l=1,2,\cdots$$

矩的特例关系

- $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩
- $D(X)$ 是 X 的二阶中心矩
- $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 是 X 和 Y 的二阶混合中心矩

第四部分 大数定理及中心极限定理

一、大数定理

1. 弱大数定律（辛钦大数定律）

- 表述一:
  设$X_1,X_2,\cdots$是相互独立，服从同一分布的随即变脸序列，且具有数学期望 $E(X_k)=\mu\ (k=1,2,\cdots)$.作前n个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$,则对于任意 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

- 表述二:
  设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，服从同一分布且具有数学期望

$E(X_k)=\mu\ (k=1,2,\cdots)$，则序列$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}$依概率收敛于$\mu$，即$\overline{X}\xrightarrow{P}\mu$

其中：$X\xrightarrow{P}\mu$表示X按概率收敛于μ

2. 伯努利大数定律

设f_A是n次独立重复试验中事件A发生的次数，p是事件A在每次试验中发生的概率，

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{f_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 \quad \text{或} \quad \lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{f_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

二、中心极限定理

独立同分布的中心极限定理

设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差：$E(X_k)=\mu,D(X_k)=\sigma^2>0\ (k=1,2,\cdots)$，则随机变量之和$\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$的标准化变量

$$Y_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-E(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k)}{\sqrt{D(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k)}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意x满足

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-E(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k)}{\sqrt{D(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k)}}\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\varPhi(x)$$

李雅普诺夫($\mathcal{L}yapunov$) 定理

设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，它们具有数学期望和方差

$$E(X_k)=\mu_k\ ,\ D(X_k)=\sigma_k^2>0\ ,\ k=1,2,\cdots$$

$$记 \quad B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,$$

若存在正数δ，使得当$n\to\infty$时，

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E\left\{|X_k-\mu_k|^{2+\delta}\right\}\to 0,$$

则随机变量之和$\sum_{k=1}^{n}X_k$的标注化变量

$$Z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n}X_k)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意x，满足

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

棣莫弗 - 拉普拉斯($\mathcal{De\ Moivre-Laplace}$) 定理

设随机变量$\eta_n\ (n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p\ (0<p<1)$的二项分布，则对于任意x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\eta_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

第五部分 抽样分布

一、基础定义

- 样本均值（期望） $E(X)=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
- 样本方差 $D(X)=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}\right)$
- 样本标准差 $S=\sqrt{S^2}$
- 样本k阶（原点）矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$ ，$k=1,2,\cdots$
- 样本k阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^k$ ，$k=2,3,\cdots$
- 经验分布函数
  设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自分布函数为$F(x)$的总体X的样本观察值.X的经验分布函数，记为$F_n(x)$，定义为样本观察值$x_1,x_2,\cdots,x_n$中小于或等于指定值x所占的比率，即

$$F_n(x)=\frac{\#(x_i\leq x)}{n}\qquad -\infty<x<+\infty$$

  其中$\#(x_i\leq x)$表示$x_1,x_2,\cdots,x_n$中小于等于x的个数。
  - 具有分布函数的条件
    1. $F_n(x)$是x的不减函数
    2. $0\leq F_n(x)\leq 1$，且$F(\infty)=0,F(+\infty)=1$
    3. $F(x)$是一个右连续函数
  - 格里汶科定理
    设$X_1,X_2,\cdots,X_n$的函数是来自以$F_(x)$为分布函数的总体X的样本，$F(x)$是经验分布函数，则有

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\quad\sup_{-\infty\to+\infty}\quad|F_n(x)-F(x)|=0\right\}=1$$

二、抽样分布

1. χ^2分布

- 定义
  设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$N(0,1)$的样本，则称统计量

$$\chi = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

  服从自由度为n的χ^2分布，记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$
- χ^2分布的概率密度

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, 2)$$

> 其中$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx \quad t > 0$

- χ^2分布的可加性
  设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立，则有

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

- χ^2分布的期望和方差
  若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则有

$$E(\chi^2) = n \qquad D(\chi^2) = 2n$$

- χ^2分布的上分位数
  对于给定的正数α，$0 < \alpha < 1$，满足条件

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(y)dy = \alpha$$

- 近似计算

$$\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}(z_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$$

2. t分布（学生氏$(Student)$分布）

- 定义
  设$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且$X,Y$相互独立，则称变量

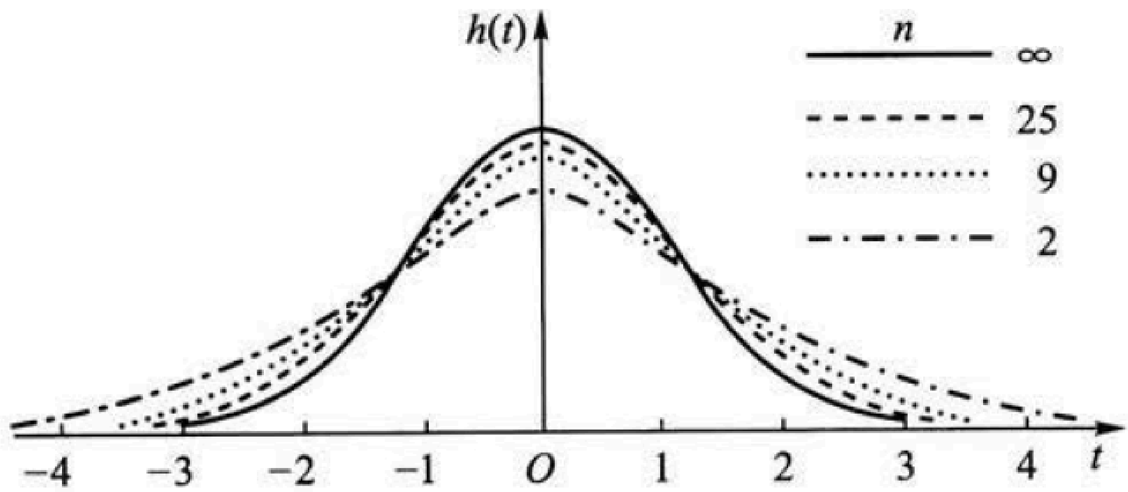
$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{N}}}$$

  服从自由度为n的t分布，记为$t \sim t(n)$

- 概率密度函数

$$h(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \qquad -\infty < t < +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$



- t分布的上分位数
  对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$，满足条件

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} h(t)dt = \alpha$$

- 对称性

$$t_{1-n} = -t_\alpha(n)$$

- 近似计算

$$t_\alpha(n) \approx z_n \qquad n > 45$$

3. F分布

- 定义

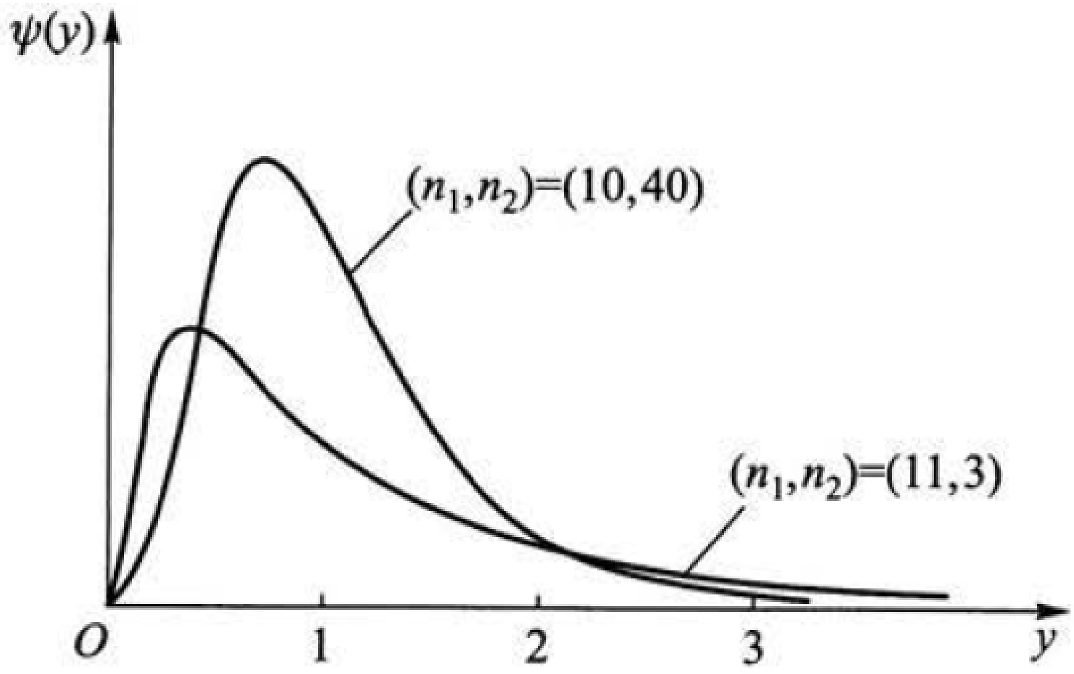
  设$U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$，且$U, V$相互独立，则称随机变量

$$F = \frac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}}$$

  服从自由度为(n_1, n_2)的F分布，记为$F \sim F(n_1, n_2)$.

- 分布概率

$$\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}} y^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})(1+\frac{n_1 y}{n_2})^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



- 特性

$$\text{若} F \sim F(n_1, n_2), \text{则} \frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$$

- 上分位数

  对于给定的$\alpha, 0 < \alpha < 1$，满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} \psi(y)dy = \alpha$$

- 对称性

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

4. 正态总体的样本均值于样本方差的分布

(1) 单总体样本均值和方差性质

设总体 X 均值为 μ，方差为 σ^2（分布不限），样本 $X_1,\cdots,X_n$，$\overline{X}$ 和 S^2 为样本均值和方差：

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= \mu \\ D(\overline{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \\ E(S^2) &= \sigma^2 \quad \text{(无偏性)} \end{aligned}$$

$E(S^2) = \sigma^2$ 的证明：

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right] \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

---

(2) 正态总体分布定理

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则：

- 定理2 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- 定理3 $\begin{cases} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \\ \overline{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 相互独立} \end{cases}$

- 定理4 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

定理4证明思路：

- 由定理2： $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- 由定理3： $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- 由t分布定义：

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

---

(3) 双正态总体分布定理

设两独立样本：

- $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ （容量 n_1）
- $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ （容量 n_2）

则：

$$1^\circ \ \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$2^\circ \text{ 当 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \text{ 时：}$$
$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

其中合并方差：

$$S_W^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad S_W = \sqrt{S_W^2}$$

(4) 应用场景速查表

检验类型	使用统计量	分布	条件
单样本均值检验	$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$t(n-1)$	正态总体
两样本方差齐性检验	$\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$	$F(n_1-1, n_2-1)$	独立正态样本
两样本均值差检验	$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$	$t(\nu)$	方差相等 ($\sigma_1^2=\sigma_2^2$)

> 注:
> $\nu = n_1+n_2-2$
> $\delta = \mu_1-\mu_2$

第六部分 参数估计

一、点估计

1. 矩估计法

(1) 基本概念
设总体 X 为连续型随机变量（概率密度 $f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$）或离散型随机变量（分布律 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$），其中 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 为待估参数。
$X_1,\cdots,X_n$ 为样本。

(2) 矩的定义

- 连续型总体：

$$\mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)dx$$

- 离散型总体：

$$\mu_l = \sum_{x\in R_X} x^l p(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

（R_X 为 X 可能取值范围）

(3) 估计原理

- 样本矩：

$$A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$$

- 建立方程组：

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(\theta_1,\cdots,\theta_k) \\ \vdots \\ \mu_k = \mu_k(\theta_1,\cdots,\theta_k) \end{cases}$$

- 解方程组得矩估计量：

$$\hat{\theta}_i = \theta_i(A_1,\cdots,A_k) \quad (i=1,\cdots,k)$$

2. 最大似然估计法

(1) 似然函数定义

- 离散型总体：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$$

- 连续型总体：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

($x_1,\cdots,x_n$ 为样本观测值)

(2) 估计原理
寻找 $\hat{\theta}$ 使似然函数最大化:

$$L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta}L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

(3) 求解方法

- 似然方程:

$$\frac{d}{d\theta}L(\theta)=0$$

- 对数似然方程（优先使用）:

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$$

- 估计量: $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，估计值: $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$

二、估计量的评选标准

1. 无偏性

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体X的样本，$\theta\in\Theta$为待估参数。

- 定义: 若估计量 $\hat{\theta}$ 满足$E(\hat{\theta})=\theta$ ($\forall\theta\in\Theta$)，则称 $\hat{\theta}$ 是无偏估计量
- 意义: 多次使用后平均偏差为零（无系统误差）
- 核心性质:
  - 样本均值$\overline{X}$是总体均值μ的无偏估计
  - 样本方差$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是$\sigma^2$的无偏估计
  - $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$不是$\sigma^2$的无偏估计

- 例证：
  - 样本k阶矩$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$是总体$k$阶矩$\mu_k$的无偏估计量
    - 证：$E(X_i^k) = \mu_k \Rightarrow E(A_k) = \frac{1}{n}\sum \mu_k = \mu_k$
  - 指数分布中$\overline{X}$和$nZ = n(\min X_i)$都是θ的无偏估计

2. 有效性

- 比较原理：在无偏估计量中，方差小者更优（观察值更密集于真值θ）
- 定义：设$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$均为$\theta$的无偏估计，若$D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$且存在$\theta$使不等式严格成立，则$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效
- 例证（续指数分布）：
  - 当$n > 1$时，$\overline{X}$较nZ有效
    - 证：$D(\overline{X}) = \frac{\theta^2}{n} < \theta^2 = D(nZ)$

3. 相合性

- 核心要求：当$n \to \infty$时估计量收敛于真值
- 定义：若$\forall\theta \in \Theta, \varepsilon > 0$有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$，则称$\hat{\theta}$是相合估计量
- 重要性质：
  - 样本k阶矩A_k是μ_k的相合估计
  - 若$\theta = g(\mu_1, \cdots, \mu_k)$（$g$连续），则矩估计$\hat{\theta} = g(A_1, \cdots, A_k)$是相合估计
  - 最大似然估计在一定条件下具有相合性
- 基本性：不具备相合性的估计量不可用

三、区间估计

1. 置信区间的定义与性质

- 核心概念：
  - 设总体X的分布含未知参数$\theta \in \Theta$，给定α（$0<\alpha<1$），由样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$确定统计量$\underline{\theta}$和$\overline{\theta}$（$\underline{\theta}<\overline{\theta}$）
  - 若对任意$\theta \in \Theta$满足$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$，则称$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$为$\theta$的置信水平$1-\alpha$的双侧置信区间
    - $\underline{\theta}$：置信下限
    - $\overline{\theta}$：置信上限
    - $1-\alpha$：置信水平
- 应用条件：
  - 连续型随机变量：严格满足$P\{\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}\}=1-\alpha$
  - 离散型随机变量：可能无精确区间，但需满足≥$1-\alpha$
- 实际意义：反映区间包含真值的可信程度（例：$\alpha=0.01$时，1000次抽样仅约10个区间不包含真值）

---

2. 正态分布均值的置信区间（σ^2已知）

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2已知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为样本：

- 枢轴量构造：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

  （分布不依赖未知参数）
- 置信区间推导：

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

  $\Rightarrow$ 置信区间：

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)\quad \text{或简写为}\quad \left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

- 例（$\alpha=0.05,\ \sigma=1,\ n=16$）：
  - $z_{0.025}=1.96$，置信区间为$(\overline{X}\pm 0.49)$
  - 若$\overline{x}=5.20$，则具体区间为$(4.71, 5.69)$

3. 置信区间的性质与选择

- 非唯一性:
  - 同一置信水平存在多组区间（例：$\alpha=0.05$时可构造 $(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}))$
  - 区间长度影响精度：选择最短长度区间（正态下对称区间 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$最优)
- 含义:
  - 固定样本下：称"区间包含θ"的可信程度为$1-\alpha$
  - 重复抽样下：约$100(1-\alpha)\%$的区间包含真值

4. 置信区间的通用构建步骤

1. 寻找枢轴量:
   构造样本与 θ 的函数$W=W(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$，使其分布不依赖$\theta$或其他未知参数
   - 一般从 θ 的点估计着手（如用样本均值$\overline{X}$构造)
2. 确定常数:
   对给定$1-\alpha$，找a,b使$P\{a<W<b\}=1-\alpha$
3. 解等价不等式:
   将$a<W<b$转化为$\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta}$，其中$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$和$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为统计量

四、正态总体均值和方差的区间统计

1. 单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的置信区间

给定置信水平$1-\alpha$，样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，样本均值$\overline{X}$，样本方差S^2

- 均值μ的置信区间:
  - σ^2已知：枢轴量$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1)$

    置信区间：$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
  - σ^2未知：枢轴量$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}\sim t(n-1)$

    置信区间：$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$
- 方差σ^2的置信区间（μ未知）：

  枢轴量$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

  置信区间：$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
- 标准差σ的置信区间：由方差区间直接取平方根得

  $\left(\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$
- 示例（$\alpha=0.05$, $n=16$, $\overline{x}=503.75$, $s=6.2022$）：

  均值μ置信区间：$(500.4,507.1)$

  标准差σ置信区间：$(4.58,9.60)$

---

2. 两个正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$与$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的置信区间

给定置信水平$1-\alpha$，两样本独立：$X_1,\cdots,X_{n_1}$（均值$\overline{X}$，方差S_1^2），$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$（均值$\overline{Y}$，方差S_2^2）

- 均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间:

- σ_1^2,σ_2^2均已知：枢轴量$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

  置信区间：$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
- $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知：枢轴量$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

  其中$S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_W=\sqrt{S_W^2}$

  置信区间：$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$

- 核心性质：
  - 方差未知时，S_W^2是合并方差估计，自由度为n_1+n_2-2
  - 分布不对称时（如χ^2），仍取对称分位数构造区间

五、(0,1)分布参数的区间估计

1. 问题基本设定

- 总体分布：$X\sim$ (0-1)分布

  分布律：$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1$
- 样本要求：容量$n>50$（大样本条件）
- 参数特征：
  - 总体均值：$\mu=p$
  - 总体方差：$\sigma^2=p(1-p)$

2. 枢轴量构造与概率近似

- 枢轴量基础：样本均值$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$
- 中心极限定理应用（n充分大）：

$$\frac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\dot\sim N(0,1)$$

- 概率近似式：

$$P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{n\overline{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} \approx 1 - \alpha$$

3. 置信区间推导

- 等价变换：将概率不等式转化为二次不等式：

$$\left(n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2\right)p^2 - \left(2n\overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}^2\right)p + n\overline{X}^2 < 0$$

- 系数定义：

$$\begin{cases} a = n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \\ b = -\left(2n\overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}^2\right) \\ c = n\overline{X}^2 \end{cases}$$

- 置信区间端点：

$$p_1 = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \quad p_2 = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

- 最终置信区间：(p_1, p_2)

4. 核心性质

- 置信水平：近似满足$P\{p_1 < p < p_2\} \approx 1 - \alpha$
- 应用限制：仅适用于大样本（$n > 50$）情形
- 区间特性：
  - 区间长度随n增大而缩小
  - 当p接近0.5时精度最高

六、单侧置信区间

1. 基本概念与应用背景

- 核心定义：
  - 单侧置信下限 $\hat{\theta}$：若 $\forall\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta > \hat{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$$

则 $(\hat{\theta}, \infty)$ 是 θ 的置信水平 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

- 单侧置信上限 $\bar{\theta}$：若 $\forall\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta < \bar{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$$

则 $(-\infty, \bar{\theta})$ 是单侧置信区间

- 应用场景：
  - 设备/元件寿命：关注平均寿命 θ 的下限（寿命越长越好）
  - 化学药品杂质含量：关注参数 μ 的上限（杂质越少越好）

2. 正态总体均值 μ 的单侧置信区间（σ^2 未知）

设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，样本均值 $\overline{X}$，样本方差 S^2

- 枢轴量：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

- 推导过程：

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

等价变换为：

$$P\left\{\mu > \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

- 单侧置信区间：

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1),\ \infty\right)$$

- 单侧置信下限：

$$\underline{\mu} = \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$$

- 图形示意：概率密度函数曲线（t 分布）中 $t_\alpha(n-1)$ 对应右侧尾概率 α（图7-5）

3. 正态总体方差 σ^2 的单侧置信区间

- 枢轴量：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 推导过程：

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

  等价变换为：

$$P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

- 单侧置信区间：

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$$

- 单侧置信上限：

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$$

- 图形示意：χ^2 分布曲线中 $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ 对应左侧尾概率 α（图7-6）

4. 核心性质总结

- 单调性本质：区间边界只向单侧延伸（$+\infty$ 或 $-\infty$）
- 概率意义：
  重复抽样时，约 $100(1-\alpha)\%$ 的区间包含真值 θ
- 与双侧对比：
  单侧区间长度更短，适用于方向性明确的参数估计问题

正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限（置信水平为$1-\alpha$）

分类	待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间	单侧置信限
单个正态总体	μ	σ^2已知	$Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\bar{\mu}=\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$ $\underline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$
	μ	σ^2未知	$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\bar{\mu}=\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$ $\underline{\mu}=\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$
	σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\overline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$ $\underline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2已知	$Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知	$t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ $\sim t(n_1+n_2-2)$ $S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}$ $+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ $\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}$ $-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2未知	$F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$	$\overline{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$ $\underline{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$

注记说明：

- $\bar{X},\bar{Y}$分别为样本均值，S^2,S_1^2,S_2^2为样本方差
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$：标准正态分布上$\dfrac{\alpha}{2}$分位数
- $t_\alpha(n)$：t分布上α分位数（自由度n）
- $\chi^2_\alpha(n)$：χ^2分布上α分位数（自由度n）
- $F_\alpha(m,n)$：F分布上α分位数（自由度m,n）