

第一部分 随机变量及其分布

一、离散型随机变量及其分布律

1. (0-1)分布

$$P\{X = k\} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 1, & k = 1 \end{cases}$$

2. 二项分布 $X \sim B(n, p)$

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

3. 泊松分布 $X \sim \pi(\lambda)$

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (\lambda)$$

二、随机变量的分布函数

1. 概念

设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数 $F(x) = P\{X \leq x\} \quad -\infty < x < +\infty$

2. 基本性质

- 单调性:

$F(x)$ 是 x 的不减函数。

对任意实数 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 有:

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \leq x_2\} \geq 0$$

- 有界性:

$0 \leq F(x) \leq 1$, 且满足:

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

几何解释:

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 事件"随机点 X 落在点 x 左边"趋于不可能事件, 其概率趋于0

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 事件"随机点 X 落在点 x 左边"趋于必然事件, 其概率趋于1

- 右连续性:

$F(x+0) = F(x)$, 即 $F(x)$ 是右连续的 (证明略)

三、连续随机变量及其概率密度

1. 定义

如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负可积函数 $f(x)$, 使对于任意实数 x 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

称 X 为连续型随机变量, $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度

2. 性质

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1$
- 对于任意实数 $x_1, x_2 (x_1 \leq x_2)$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

- 若 $f(x)$ 在点 x 处连续, 则有 $F'(x) = f(x)$

结论: 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 概率密度 $Y = \varphi(X)$, 则 Y 的概率密度为 $f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))[\varphi^{-1}(y)]'$

3. 三种重要的连续型随机变量

(1) 均匀分布 $X \sim U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 指数分布 $X \sim \exp(\theta)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 正态分布(或高斯分布) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

- 标准正态分布 $X \sim N(0, 1)$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

对于任意的 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 都可以转成 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim (0, 1)$

第二部分 多维随机变量及其分布

一、二维随机变量

1. 定义

一般, 设 E 是一个随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$, 设 $X = X(e)$ 和 $Y = Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量, 由它们构成的一个向量 (X, Y) , 叫做 **二维随机向量** 或 **二维随机变量**

2. 联合分布函数

(1) 定义

设 (X, Y) 是二维随机变量, 对于任意实数 x, y , 二元函数:

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数

(2) 性质

- 单调性:

$F(x, y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数:

- 对任意固定的 y , 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$
- 对任意固定的 x , 当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$

- 有界性:

$0 \leq F(x, y) \leq 1$, 且满足极限条件:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$ (固定 y)
- $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$ (固定 x)
- $\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1$

几何解释: 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 事件概率趋于不可能事件; 当 $x, y \rightarrow +\infty$ 时, 事件概率趋于必然事件

- 右连续性:

$F(x, y)$ 关于 x 和 y 右连续:

$$F(x+0, y) = F(x, y), \quad F(x, y+0) = F(x, y)$$

- 矩形不等式:

对任意 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 且 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 有:

$$F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

3. 联合概率密度

(1) 定义

存在非负可积函数 $f(x, y)$, 使得对于任意实数 x 和 y , 分布函数满足:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$$

满足上述条件的 (X, Y) 称为二维连续型随机变量, 函数 $f(x, y)$ 称为: (X, Y) 的概率密度或 X 和 Y 的联合概率密度

(2) 性质

- 非负性：
概率密度函数 $f(x, y)$ 恒非负：

$$f(x, y) \geq 0$$

- 全域归一化：
 $f(x, y)$ 在整个平面上的二重积分值为1：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = F(+\infty, +\infty) = 1$$

- 区域概率计算：
若 G 是 xOy 平面上的任意区域，则点 (X, Y) 落在 G 内的概率为：

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy$$

- 微分关系：
若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续，则分布函数与概率密度满足微分关系：

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

二、边缘分布

1. 边缘分布函数

- 边缘分布函数定义：
设 (X, Y) 是二维随机变量，其联合分布函数为 $F(x, y)$ 。
 X 和 Y 各自的分布函数分别记作：
 - $F_X(x)$ ：关于 X 的边缘分布函数
 - $F_Y(y)$ ：关于 Y 的边缘分布函数
- 边缘分布计算公式：

$$\begin{cases} F_X(x) = P\{X \leq x\} = F(x, \infty) \\ F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = F(\infty, y) \end{cases}$$

- 计算原理：

- $$F_X(x) = F(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

(固定 x , 令 y 趋向正无穷)

- $$F_Y(y) = F(\infty, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

(固定 y , 令 x 趋向正无穷)

- 离散型随机变量:

若 (X, Y) 是离散型, 可通过概率求和公式直接计算:

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j} p_{ij}, \quad F_Y(y) = \sum_{y_j \leq y} \sum_{x_i} p_{ij}$$

其中 $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$

2. 边缘概率密度

- 边缘分布函数:

对于联合分布函数 $F(x, y)$, X 的边缘分布函数定义为:

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y)$$

- 边缘概率密度推导:

X 的边缘概率密度由联合概率密度 $f(x, y)$ 经积分运算得到:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

- Y 的边缘概率密度:

同理, Y 的边缘概率密度为:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

四、相互独立的随机变量

二维随机变量独立性

- 定义

设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是 (X, Y) 的分布函数及边缘分布函数。

若对所有 x, y 满足:

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\}$$

等价于：

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X 和 Y 相互独立

- 连续型随机变量的独立条件：

当 (X, Y) 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x, y)$ ，边缘概率密度为 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 时，独立条件等价于：

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

该等式在平面上几乎处处成立

- 离散型随机变量的独立条件：

当 (X, Y) 是离散型随机变量时，对所有可能取值 (x_i, y_j) 满足：

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\}$$

五、两个随机变量函数的分布

1. $Z = X + Y$ 的分布

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x, y)$ 。则 $Z = X + Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z - y, y) dy$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z - x) dx$$

- 证明：

$$\because F_Z(z) = P(X + Y \leq z) = \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ 其中 } D = \{(x, y) | x + y \leq z\}$$

$$\therefore F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy$$

$$\therefore f_Z(z) = \frac{d}{dz}[F_Z(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y) dy \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x, z - x) \cdot (z - x)'] dx$$

又若 X 和 Y 相互独立, 设 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$, 则上两式分别化为:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

这两个公式称为 f_X 和 f_Y 的卷积公式, 记为 $f_X * f_Y$, 即

$$f_X * f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

2. $Z = \frac{Y}{X}$ 的分布、 $Z = XY$ 的分布

- $Z = Y/X$ 的概率密度 (商分布) :

设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 $Z = Y/X$ 的概率密度为:

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x, xz)dx$$

独立情形: 若 X 与 Y 独立, 且边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$, 则公式简化为:

$$f_{Y/X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f_X(x)f_Y(xz)dx$$

- $W = XY$ 的概率密度 (积分布) :

设 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$, 则 $W = XY$ 的概率密度为:

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right)dx$$

独立情形: 若 X 与 Y 独立, 且边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$, 则公式简化为:

$$f_{XY}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx$$

3. $M = \max\{X, Y\}$ 及 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布

最大值与最小值函数的分布 (相互独立随机变量)

- 最大值函数 $M = \max\{X, Y\}$ 的分布函数:

由于 X 和 Y 相互独立:

$$\begin{aligned} F_{\max}(z) &= P\{M \leq z\} \\ &= P\{X \leq z, Y \leq z\} \\ &= P\{X \leq z\} \cdot P\{Y \leq z\} \\ &= F_X(z) \cdot F_Y(z) \end{aligned}$$

- 最小值函数 $N = \min\{X, Y\}$ 的分布函数:

由于 X 和 Y 相互独立:

$$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= P\{N \leq z\} \\ &= 1 - P\{N > z\} \\ &= 1 - P\{X > z, Y > z\} \\ &= 1 - [1 - F_X(z)] \cdot [1 - F_Y(z)] \end{aligned}$$

推广至 n 个独立随机变量

- n 维最大值函数 $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ 的分布函数:

设 X_1, \dots, X_n 相互独立, 分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$:

$$F_{\max}(z) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$$

- n 维最小值函数 $N = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ 的分布函数:

设 X_1, \dots, X_n 相互独立, 分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$:

$$F_{\min}(z) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(z)]$$

第三部分 随机变量的数字特征

一、数学期望

1. 定义

数学期望定义（离散型）

- 分布律条件：

设离散型随机变量 X 的分布律为：

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

- 数学期望公式：

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则定义 X 的数学期望为：

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

关键要求：级数必须绝对收敛 ($\sum |x_k| p_k < \infty$)

数学期望定义（连续型）

- 概率密度条件：

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$

- 数学期望公式：

若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛，则定义 X 的数学期望为：

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

关键要求：积分必须绝对收敛 ($\int |x| f(x) dx < \infty$)

2. 随机变量函数的期望定理

- 定理核心表述：

设 $Y = g(X)$ 是随机变量 X 的函数 (g 为连续函数)

- 离散型情形：

若 X 是离散型随机变量，分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k$ ($k = 1, 2, \dots$)，且级数满足绝对收敛条件：

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| p_k < \infty$$

则 Y 的数学期望为：

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

- 连续型情形：

若 X 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$ ，且积分满足绝对收敛条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$$

则 Y 的数学期望为：

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

3. 性质

(1) 常数的期望

- 性质：

若 C 为常数，则

$$E(C) = C$$

(2) 常数倍性质

- 性质：

设 X 为随机变量， C 为常数，则

$$E(CX) = C \cdot E(X)$$

(3) 可加性（核心性质）

- 性质：

设 X, Y 为随机变量，则

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

可推广至 n 个随机变量：

$$E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_k)$$

(4) 独立变量的乘积期望

- 性质：
若 X, Y 相互独立，则

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

二、方差

1. 方差定义与性质

- 定义式：

$$D(X) = \text{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

- $E(X)$ ：随机变量 X 的数学期望（均值）
- $[X - E(X)]^2$ ：偏差的平方
- 方差 $D(X)$ 是偏差平方的期望值

- 标准差：

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

- 物理意义：度量波动大小的直接指标（与原始量纲一致）

2. 方差计算体系

随机变量类型	计算公式	关键要素说明
离散型	$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k$	$p_k = P\{X = x_k\}$ （分布律）
连续型	$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$	$f(x)$ （概率密度函数）

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

2. 性质

- 常数方差:

设 C 是常数, 则:

$$D(C) = 0$$

- 常数倍与平移性质:

设 X 是随机变量, C 是常数:

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

$$D(X + C) = D(X)$$

- 随机变量和的方差:

设 X, Y 是两个随机变量:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

独立情形: 若 X, Y 相互独立, 则简化为:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

推广: 此性质可推广到任意有限多个相互独立的随机变量之和

- 方差为零的充要条件:

$$D(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P\{X = E(X)\} = 1$$

即 X 以概率 1 取常数 $E(X)$

3. 切比雪夫不等式

设随机变量 X 满足:

- 数学期望 $E(X) = \mu$
- 方差 $D(X) = \sigma^2$

则对任意正数 ε , 有:

$$P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

证明核心步骤

$$\begin{aligned} P\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} &= \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} f(x)dx \quad (\text{连续型情形}) \\ &\leq \int_{|x-\mu| \geq \varepsilon} \left(\frac{x - \mu}{\varepsilon}\right)^2 f(x)dx \quad (\text{因 } \left(\frac{|x - \mu|}{\varepsilon}\right)^2 \geq 1) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx \\ &= \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

三、协方差及相关系数

1. 定义

- 协方差定义：

设 (X, Y) 是二维随机变量，定义 X 与 Y 的协方差为：

$$\text{Cov}(X, Y) = E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\} = E(XY) - E(X)E(Y)$$

- 相关系数定义：

X 与 Y 的相关系数为：

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

- 协方差基本性质：

$$\begin{cases} \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X) \\ \text{Cov}(X, X) = D(X) \end{cases}$$

- 方差与协方差关系：

对任意两个随机变量 X 和 Y ，有：

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

- 协方差计算式：

协方差可展开为：

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

2. 性质

协方差的核心性质

标量乘法不变性

设 a, b 为常数, 则:

$$\text{Cov}(aX, bY) = ab \cdot \text{Cov}(X, Y)$$

加法分配律

对任意随机变量 X_1, X_2, Y :

$$\text{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \text{Cov}(X_1, Y) + \text{Cov}(X_2, Y)$$

3. 定理

$|\rho_{XY}| \leq 1$ 当且仅当 $\exists a, b \in \mathbb{R}, P\{Y = a + bX\} = 1$ 时, 等号成立

四、矩、协方差矩阵

1. 矩的定义体系

设 (X, Y) 是二维随机变量:

- k 阶原点矩 (X 的矩):
若存在, 定义为:

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots$$

- k 阶中心矩 (X 的偏差矩):
若存在, 定义为:

$$E\{[X - E(X)]^k\}, \quad k = 2, 3, \dots$$

- $k + l$ 阶混合矩 (X 和 Y 的联合矩):
若存在, 定义为:

$$E(X^k Y^l), \quad k, l = 1, 2, \dots$$

- $k + l$ 阶混合中心矩（联合偏差矩）：
若存在，定义为：

$$E \{ [X - E(X)]^k [Y - E(Y)]^l \}, \quad k, l = 1, 2, \dots$$

矩的特例关系

- $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩
- $D(X)$ 是 X 的二阶中心矩
- $\text{Cov}(X, Y)$ 是 X 和 Y 的二阶混合中心矩

第四部分 大数定理及中心极限定理

一、大数定理

1. 弱大数定律（辛钦大数定律）

- 表述一：
设 X_1, X_2, \dots 是相互独立，服从同一分布的随即变脸序列，且具有数学期望 $E(X_k) = \mu \ (k = 1, 2, \dots)$. 作前 n 个变量的算术平均 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

- 表述二：
设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立，服从同一分布且具有数学期望 $E(X_k) = \mu \ (k = 1, 2, \dots)$, 则序列 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n$ 依概率收敛于 μ , 即 $\bar{X} \xrightarrow{P} \mu$
其中: $X \xrightarrow{P} \mu$ 表示 X 按概率收敛于 μ

2. 伯努利大数定律

设 f_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数， p 是事件 A 在每次试验中发生的概率，则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{f_A}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{f_A}{n} - p \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

二、中心极限定理

独立同分布的中心极限定理

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 服从同一分布, 且具有数学期望和方差:

$E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2 > 0 (k = 1, 2, \dots)$, 则随机变量之和 $\sum_{k=1}^n X_k$ 的标准化变量

$$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

李雅普诺夫(Lyapunov) 定理

设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 它们具有数学期望和方差

$$E(X_k) = \mu_k, D(X_k) = \sigma_k^2 > 0, k = 1, 2, \dots$$

$$\text{记 } B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2,$$

若存在正数 δ , 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E \left\{ |X_k - \mu_k|^{2+\delta} \right\} \rightarrow 0,$$

则随机变量之和 $\sum_{k=1}^n X_k$ 的标注化变量

$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n}$$

的分布函数 $F_n(x)$ 对于任意 x , 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mu_k}{B_n} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

棣莫弗 - 拉普拉斯(De Moivre - Laplace) 定理

设随机变量 η_n ($n = 1, 2, \dots$)服从参数为 n, p ($0 < p < 1$)的二项分布, 则对于任意 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

第五部分 抽样分布

一、基础定义

- 样本均值 (期望) $E(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- 样本方差 $D(X) = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$
- 样本标准差 $S = \sqrt{S^2}$
- 样本 k 阶 (原点) 矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k = 1, 2, \dots$
- 样本 k 阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k, k = 2, 3, \dots$
- 经验分布函数

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自分布函数为 $F(x)$ 的总体 X 的样本观察值. X 的经验分布函

数, 记为 $F_n(x)$, 定义为样本观察值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于或等于指定值 x 所占的比率, 即

$$F_n(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n} \quad -\infty < x < +\infty$$

其中 $\#(x_i \leq x)$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于等于 x 的个数。

- 具有分布函数的条件

- 1. $F_n(x)$ 是 x 的不减函数

- 2. $0 \leq F_n(x) \leq 1$, 且 $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

- 3. $F(x)$ 是一个右连续函数

- 格里汶科定理

设 X_1, X_2, \dots, X_n 的函数是来自以 $F(x)$ 为分布函数的总体 X 的样本, $F(x)$ 是经验分布函数, 则有

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\infty \rightarrow +\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0 \right\} = 1$$

二、抽样分布

1. χ^2 分布

- 定义

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(0, 1)$ 的样本, 则称统计量

$$\chi = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$$

服从自由度为 n 的 χ^2 分布, 记为 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

- χ^2 分布的概率密度

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, 2)$$

其中 $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx \quad t > 0$

- χ^2 分布的可加性

设 $\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$, 并且 χ_1^2, χ_2^2 相互独立, 则有

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

- χ^2 分布的期望和方差

若 $\chi^2 \sim \chi^2(n)$, 则有

$$E(\chi^2) = n \quad D(\chi^2) = 2n$$

- χ^2 分布的上分位数

对于给定的正数 α , $0 < \alpha < 1$, 满足条件

$$P\{\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(n)\} = \int_{\chi_{\alpha}^2(n)}^{+\infty} f(y) dy = \alpha$$

- 近似计算

$$\chi_{\alpha}^2(n) \approx \frac{1}{2}(z_{\alpha} + \sqrt{2n-1})^2$$

2. t 分布 (学生氏(*Student*)分布)

- 定义

设 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$, 且 X, Y 相互独立, 则称变量

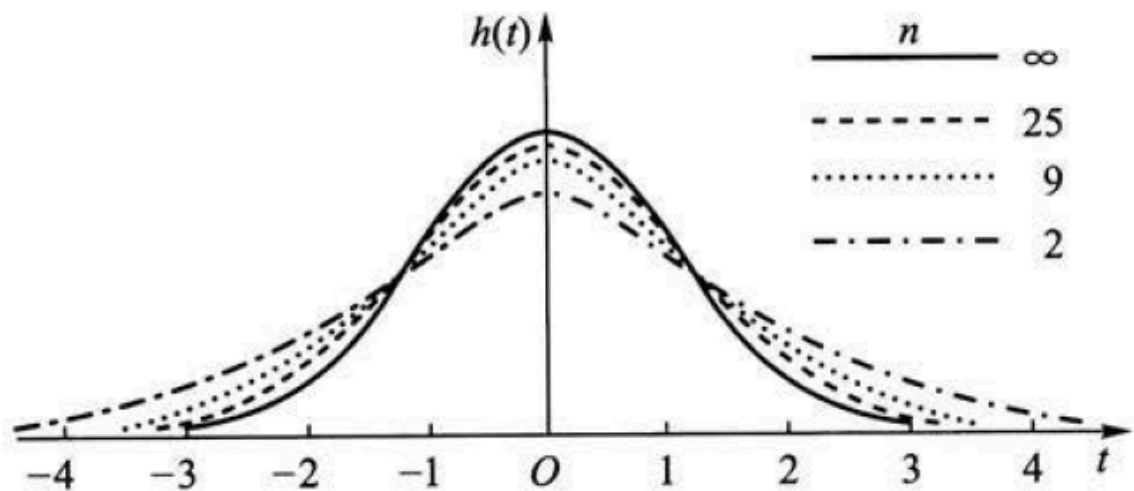
$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

服从自由度为 n 的 t 分布, 记为 $t \sim t(n)$

- 概率密度函数

$$h(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad -\infty < t < +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$



- t 分布的上分位数

对于给定的 $\alpha, 0 < \alpha < 1$, 满足条件

$$P\{t > t_{\alpha}(n)\} = \int_{t_{\alpha}(n)}^{+\infty} h(t)dt = \alpha$$

- 对称性

$$t_{1-\alpha} = -t_{\alpha}(n)$$

- 近似计算

$$t_{\alpha}(n) \approx z_{\alpha} \quad n > 45$$

3. F 分布

- 定义

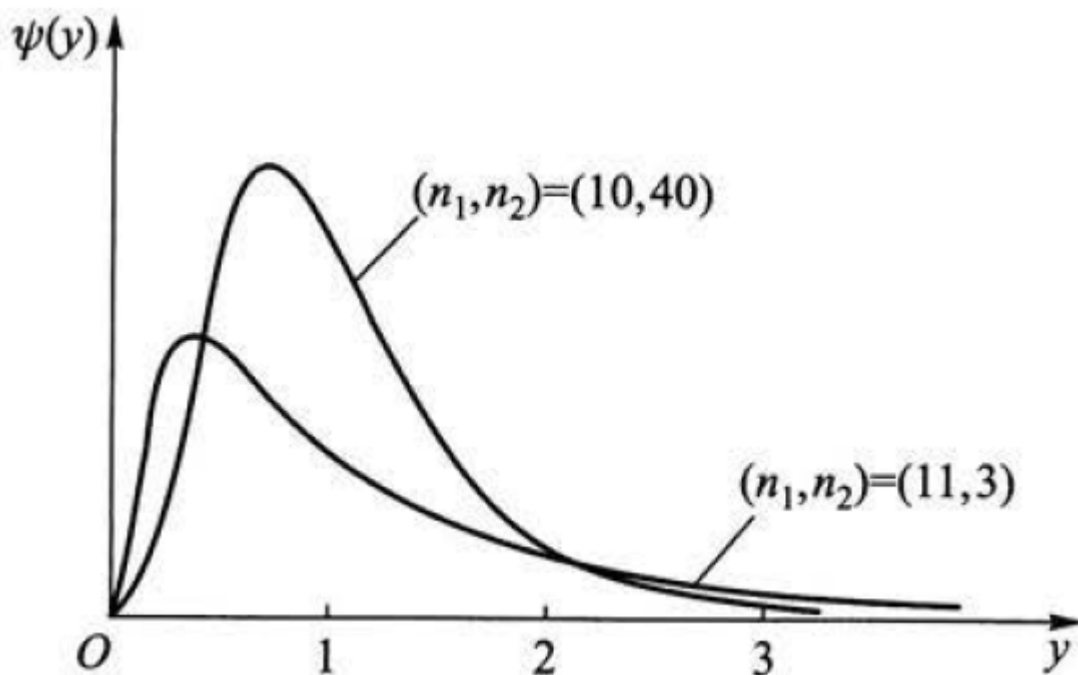
设 $U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$, 且 U, V 相互独立, 则称随机变量

$$F = \frac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}}$$

服从自由度为 (n_1, n_2) 的 F 分布, 记为 $F \sim F(n_1, n_2)$.

- 分布概率

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2}) (\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}} y^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \Gamma(\frac{n_2}{2}) (1 + \frac{n_1 y}{n_2})^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$



- 特性

若 $F \sim F(n_1, n_2)$, 则 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$

- 上分位数

对于给定的 $\alpha, 0 < \alpha < 1$, 满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1, n_2)}^{+\infty} \psi(y) dy = \alpha$$

- 对称性

$$F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$$

4. 正态总体的样本均值于样本方差的分布

(1) 单总体样本均值和方差性质

设总体 X 均值为 μ , 方差为 σ^2 (分布不限), 样本 X_1, \dots, X_n , \bar{X} 和 S^2 为样本均值和方差:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ D(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \\ E(S^2) &= \sigma^2 \quad (\text{无偏性}) \end{aligned}$$

$E(S^2) = \sigma^2$ 的证明:

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E \left[\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2) \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n (\sigma^2 + \mu^2) - n \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right] \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

(2) 正态总体分布定理

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则:

- 定理2 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- 定理3 $\begin{cases} \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \\ \bar{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 相互独立} \end{cases}$
- 定理4 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

定理4证明思路:

- 由定理2: $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
- 由定理3: $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- 由t分布定义:

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

(3) 双正态总体分布定理

设两独立样本：

- $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ (容量 n_1)
- $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ (容量 n_2)

则：

$$1^\circ \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

$$2^\circ \text{ 当 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \text{ 时:}$$
$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

其中合并方差：

$$S_W^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_W = \sqrt{S_W^2}$$

(4) 应用场景速查表

检验类型	使用统计量	分布	条件
单样本均值检验	$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$t(n - 1)$	正态总体
两样本方差齐性检验	$\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$	$F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	独立正态样本
两样本均值差检验	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \delta}{S_W \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}}$	$t(\nu)$	方差相等 ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

注:

$$\nu = n_1 + n_2 - 2$$

$$\delta = \mu_1 - \mu_2$$

第六部分 参数估计

一、点估计

1. 矩估计法

(1) 基本概念

设总体 X 为连续型随机变量 (概率密度 $f(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$) 或离散型随机变量 (分布律 $P\{X = x\} = p(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$) , 其中 $\theta_1, \dots, \theta_k$ 为待估参数。 X_1, \dots, X_n 为样本。

(2) 矩的定义

- 连续型总体:

$$\mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x; \theta_1, \dots, \theta_k) dx$$

- 离散型总体:

$$\mu_l = \sum_{x \in R_X} x^l p(x; \theta_1, \dots, \theta_k)$$

(R_X 为 X 可能取值范围)

总结: $\mu_l = E(X^l)$

(3) 估计原理

- 样本矩:

$$A_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l$$

- 建立方程组：

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(\theta_1, \dots, \theta_k) \\ \vdots \\ \mu_k = \mu_k(\theta_1, \dots, \theta_k) \end{cases}$$

- 解方程组得矩估计量：

$$\hat{\theta}_i = \theta_i(A_1, \dots, A_k) \quad (i = 1, \dots, k)$$

其实就是令 $\mu_l = A_l$

2. 最大似然估计法

(1) 似然函数定义

- 离散型总体：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$$

- 连续型总体：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

(x_1, \dots, x_n 为样本观测值)

(2) 估计原理

寻找 $\hat{\theta}$ 使似然函数最大化：

$$L(x_1, \dots, x_n; \hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(x_1, \dots, x_n; \theta)$$

(3) 求解方法

- 似然方程：

$$\frac{d}{d\theta} L(\theta) = 0$$

- 对数似然方程（优先使用）：

$$\frac{d}{d\theta} \ln L(\theta) = 0$$

- 估计量: $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$, 估计值: $\hat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$

二、估计量的评选标准

1. 无偏性

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 X 的样本, $\theta \in \Theta$ 为待估参数。

- 定义: 若估计量 $\hat{\theta}$ 满足 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ($\forall \theta \in \Theta$), 则称 $\hat{\theta}$ 是无偏估计量
- 意义: 多次使用后平均偏差为零 (无系统误差)
- 核心性质:
 - 样本均值 \bar{X} 是总体均值 μ 的无偏估计
 - 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计
 - $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不是 σ^2 的无偏估计
- 例证:
 - 样本 k 阶矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 是总体 k 阶矩 μ_k 的无偏估计量
 - 证: $E(X_i^k) = \mu_k \Rightarrow E(A_k) = \frac{1}{n} \sum \mu_k = \mu_k$
 - 指数分布中 \bar{X} 和 $nZ = n(\min X_i)$ 都是 θ 的无偏估计

2. 有效性

- 比较原理: 在无偏估计量中, 方差小者更优 (观察值更密集于真值 θ)
- 定义: 设 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计, 若 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$ 且存在 θ 使不等式严格成立, 则 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效
- 例证 (续指数分布):
 - 当 $n > 1$ 时, \bar{X} 较 nZ 有效
 - 证: $D(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n} < \theta^2 = D(nZ)$

3. 相合性

- 核心要求：当 $n \rightarrow \infty$ 时估计量收敛于真值
- 定义：若 $\forall \theta \in \Theta, \varepsilon > 0$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$ ，则称 $\hat{\theta}$ 是相合估计量
- 重要性质：
 - 样本 k 阶矩 A_k 是 μ_k 的相合估计
 - 若 $\theta = g(\mu_1, \dots, \mu_k)$ (g 连续)，则矩估计 $\hat{\theta} = g(A_1, \dots, A_k)$ 是相合估计
 - 最大似然估计在一定条件下具有相合性
- 基本性：不具备相合性的估计量不可用

三、区间估计

1. 置信区间的定义与性质

- 核心概念：
 - 设总体 X 的分布含未知参数 $\theta \in \Theta$ ，给定 α ($0 < \alpha < 1$)，由样本 X_1, X_2, \dots, X_n 确定统计量 $\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ ($\underline{\theta} < \bar{\theta}$)
 - 若对任意 $\theta \in \Theta$ 满足 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} \geq 1 - \alpha$ ，则称 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 为 θ 的置信水平 $1 - \alpha$ 的双侧置信区间
 - $\underline{\theta}$ ：置信下限
 - $\bar{\theta}$ ：置信上限
 - $1 - \alpha$ ：置信水平（置信度）
- 应用条件：
 - 连续型随机变量：严格满足 $P\{\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}\} = 1 - \alpha$
 - 离散型随机变量：可能无精确区间，但需满足 $\geq 1 - \alpha$
- 实际意义：反映区间包含真值的可信程度（例： $\alpha = 0.01$ 时，1000次抽样仅约10个区间不包含真值）

2. 正态分布均值的置信区间 (σ^2 已知)

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， σ^2 已知， X_1, X_2, \dots, X_n 为样本：

- 枢轴量构造：

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

(分布不依赖未知参数)

- 置信区间推导：

$$P \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| < z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} = 1 - \alpha$$

⇒ 置信区间：

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right) \quad \text{或简写为} \quad \left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

- 例 ($\alpha = 0.05, \sigma = 1, n = 16$) :
 - $z_{0.025} = 1.96$, 置信区间为 $(\bar{X} \pm 0.49)$
 - 若 $\bar{x} = 5.20$, 则具体区间为 $(4.71, 5.69)$

3. 置信区间的性质与选择

- 非唯一性：
 - 同一置信水平存在多组区间 (例: $\alpha = 0.05$ 时可构造 $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04})$)
 - 区间长度影响精度：选择最短长度区间 (正态下对称区间 $(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}})$ 最优)
- 含义：
 - 固定样本下：称“区间包含 θ ”的可信程度为 $1 - \alpha$
 - 重复抽样下：约 $100(1 - \alpha)\%$ 的区间包含真值

4. 置信区间的通用构建步骤

1. 寻找枢轴量：

构造样本与 θ 的函数 $W = W(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$, 使其分布不依赖 θ 或其他未知参数

- 一般从 θ 的点估计着手 (如用样本均值 \bar{X} 构造)

2. 确定常数：

对给定 $1 - \alpha$, 找 a, b 使 $P\{a < W < b\} = 1 - \alpha$

3. 解等价不等式：

将 $a < W < b$ 转化为 $\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 和 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ 为统计量

四、正态总体均值和方差的区间统计

1. 单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的置信区间

给定置信水平 $1 - \alpha$, 样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 样本均值 \bar{X} , 样本方差 S^2

• 均值 μ 的置信区间：

- σ^2 已知：枢轴量 $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$

置信区间： $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$

- σ^2 未知：枢轴量 $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n - 1)$

置信区间： $\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n - 1) \right)$

• 方差 σ^2 的置信区间 (μ 未知)：

枢轴量 $\frac{(n - 1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - 1)$

置信区间： $\left(\frac{(n - 1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)}, \frac{(n - 1)S^2}{\chi_{1 - \frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)} \right)$

• 标准差 σ 的置信区间：由方差区间直接取平方根得

$\left(\sqrt{\frac{(n - 1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)}}, \sqrt{\frac{(n - 1)S^2}{\chi_{1 - \frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)}} \right)$

- 示例 ($\alpha = 0.05, n = 16, \bar{x} = 503.75, s = 6.2022$) :

均值 μ 置信区间: (500.4, 507.1)

标准差 σ 置信区间: (4.58, 9.60)

2. 两个正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的置信区间

给定置信水平 $1 - \alpha$, 两样本独立: X_1, \dots, X_{n_1} (均值 \bar{X} , 方差 S_1^2) , Y_1, \dots, Y_{n_2} (均值 \bar{Y} , 方差 S_2^2)

- 均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间:

- σ_1^2, σ_2^2 均已知: 枢轴量 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$

置信区间: $\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$

- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知: 枢轴量 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

其中 $S_W^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, $S_W = \sqrt{S_W^2}$

置信区间: $\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right)$

- 核心性质:

- 方差未知时, S_W^2 是合并方差估计, 自由度为 $n_1 + n_2 - 2$
 - 分布不对称时 (如 χ^2), 仍取对称分位数构造区间

五、(0,1)分布参数的区间估计

1. 问题基本设定

- 总体分布: $X \sim (0,1)$ 分布
分布律: $f(x; p) = p^x(1 - p)^{1-x}$, $x = 0, 1$
- 样本要求: 容量 $n > 50$ (大样本条件)
- 参数特征:

- 总体均值： $\mu = p$
- 总体方差： $\sigma^2 = p(1 - p)$

2. 枢轴量构造与概率近似

- 枢轴量基础：样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
- 中心极限定理应用（ n 充分大）：

$$\frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \dot{\sim} N(0, 1)$$

- 概率近似式：

$$P \left\{ -z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{n\bar{X} - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \approx 1 - \alpha$$

3. 置信区间推导

- 等价变换：将概率不等式转化为二次不等式：

$$\left(n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2\right)p^2 - \left(2n\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}^2\right)p + n\bar{X}^2 < 0$$

- 系数定义：

$$\begin{cases} a = n + z_{\frac{\alpha}{2}}^2 \\ b = -\left(2n\bar{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}^2\right) \\ c = n\bar{X}^2 \end{cases}$$

- 置信区间端点：

$$p_1 = \frac{1}{2a} \left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right), \quad p_2 = \frac{1}{2a} \left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

- 最终置信区间： (p_1, p_2)

4. 核心性质

- 置信水平：近似满足 $P\{p_1 < p < p_2\} \approx 1 - \alpha$
- 应用限制：仅适用于大样本（ $n > 50$ ）情形
- 区间特性：
 - 区间长度随 n 增大而缩小
 - 当 p 接近0.5时精度最高

六、单侧置信区间

1. 基本概念与应用背景

- 核心定义：

- 单侧置信下限 $\hat{\theta}$ ：若 $\forall \theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta > \hat{\theta}\} \geq 1 - \alpha$$

则 $(\hat{\theta}, \infty)$ 是 θ 的置信水平 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间

- 单侧置信上限 $\bar{\theta}$ ：若 $\forall \theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta < \bar{\theta}\} \geq 1 - \alpha$$

则 $(-\infty, \bar{\theta})$ 是单侧置信区间

- 应用场景：

- 设备/元件寿命：关注平均寿命 θ 的下限（寿命越长越好）
- 化学药品杂质含量：关注参数 μ 的上限（杂质越少越好）

2. 正态总体均值 μ 的单侧置信区间 (σ^2 未知)

设样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 样本均值 \bar{X} , 样本方差 S^2

- 枢轴量：

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

- 推导过程：

$$P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

等价变换为：

$$P\left\{\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

- 单侧置信区间：

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), \infty \right)$$

- 单侧置信下限：

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)$$

- 图形示意：概率密度函数曲线（ t 分布）中 $t_{\alpha}(n-1)$ 对应右侧尾概率 α

3. 正态总体方差 σ^2 的单侧置信区间

- 枢轴量：

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 推导过程：

$$P \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1) \right\} = 1 - \alpha$$

等价变换为：

$$P \left\{ \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)} \right\} = 1 - \alpha$$

- 单侧置信区间：

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)} \right)$$

- 单侧置信上限：

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}$$

- 图形示意： χ^2 分布曲线中 $\chi_{1-\alpha}^2(n-1)$ 对应左侧尾概率 α

4. 核心性质总结

- 单调性本质：区间边界只向单侧延伸（ $+\infty$ 或 $-\infty$ ）
- 概率意义：
重复抽样时，约 $100(1-\alpha)\%$ 的区间包含真值 θ
- 与双侧对比：
单侧区间长度更短，适用于方向性明确的参数估计问题

正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限（置信水平为 $1 - \alpha$ ）

分类	待估参数	其他参数	枢轴量的分布	置信区间	单侧置信限
单个正态总体	μ	σ^2 已知	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$	$\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$
	μ	σ^2 未知	$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n - 1)$	$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n - 1)\right)$	$\bar{\mu} = \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n - 1)$ $\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n - 1)$
	σ^2	μ 未知	$\chi^2 = \frac{(n - 1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - 1)$	$\left(\frac{(n - 1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)}, \frac{(n - 1)S^2}{\chi_{1 - \frac{\alpha}{2}}^2(n - 1)}\right)$	$\overline{\sigma^2} = \frac{(n - 1)S^2}{\chi_{1 - \alpha}^2(n - 1)}$ $\underline{\sigma^2} = \frac{(n - 1)S^2}{\chi_{\alpha}^2(n - 1)}$
两个正态总体	$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ $\underline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
	$\mu_1 - \mu_2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知	$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ $S_W^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$	$\overline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$ $\underline{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1, μ_2 未知	$F = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1 - \alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right)$	$\overline{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1 - \alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}$ $\underline{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}$

注记说明：

- \bar{X}, \bar{Y} 分别为样本均值， S^2, S_1^2, S_2^2 为样本方差
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ：标准正态分布上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数
- $t_{\alpha}(n)$ ： t 分布上 α 分位数（自由度 n ）
- $\chi_{\alpha}^2(n)$ ： χ^2 分布上 α 分位数（自由度 n ）
- $F_{\alpha}(m, n)$ ： F 分布上 α 分位数（自由度 m, n ）