

- 第一部分 函数与极限
 - 一、函数
 - 二、极限
- 第二部分 导数与微分
 - 一、导数
 - 二、函数求导法则
 - 1. 和差积商求导法则
 - 2. 反函数求导法则
 - 3. 复合函数求导法则
 - 三、微分
- 第三部分 微分中值定理和导数应用
 - 一、微分中值定理
 - 二、洛必达法则
 - 三、泰勒公式
 - 1. 拉格朗日余项
 - 2. 佩亚诺余项
 - 四、函数性质分析
 - 五、曲率分析
- 第四部分 不定积分
 - 一、基本概念
 - 基本积分表
 - 二、积分方法
 - 1. 换元积分法
 - 2. 分部积分法
- 第五部分 定积分
 - 一、基本概念
 - 二、积分性质
 - 三、积分方法
 - 四、反常积分
 - 1. 无穷限积分
 - 2. 瑕积分
- 第六部分 定积分的应用
 - 一、曲线弧长
- 第七部分 微分方程
 - 一、基本概念

- 二、一阶微分方程
- 三、高阶微分方程
 - 1. 二阶常系数齐次微分方程
 - 2. 二阶常系数非齐次微分方程
 - (1) 求解对应的齐次方程
 - (2) 求特解 $y_p(x)$
 - (3) 写出通解
 - (4) 解题示例
 - (5) 总结

第一部分 函数与极限

一、函数

□ 函数

函数是一种映射关系，将定义域中的每个元素映射到值域中的唯一元素。

① 常见函数类型

- 多项式函数： $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$
- 指数函数： $f(x) = a^x$ (其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$)
- 对数函数： $f(x) = \log_a x$ (其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$)
- 三角函数： $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\tan x$

二、极限

□ 极限

当自变量 x 趋近于某个值 x_0 时，函数值 $f(x)$ 趋近于某个常数 A ，记作：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

🔔 极限的性质

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则极限具有以下性质:

- 唯一性: 若极限存在, 则极限值唯一
- 局部有界性: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| \leq M$
- 保号性: 若 $A > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$

🔔 重要极限

以下是两个重要的极限公式:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

第二部分 导数与微分

一、导数

📖 导数

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数定义为:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

函数 $f(x)$	导数 $f'(x)$	备注
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\tan x$	$\sec^2 x$	
$\cot x$	$-\csc^2 x$	
$\sec x$	$\sec x \tan x$	
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

极坐标导数

对于极坐标方程 $r = r(\theta)$ ，其导数公式为：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta}$$

二、函数求导法则

1. 和差积商求导法则

和差积商求导法则

设 $u(x)$ 、 $v(x)$ 均可导，则：

- 和差法则： $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$

- 积法则: $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- 商法则: $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ (其中 $v(x) \neq 0$)

2. 反函数求导法则

🔗 反函数求导法则

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内单调可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在对应区间内也可导, 且:

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$$

3. 复合函数求导法则

🔗 复合函数求导法则 (链式法则)

设 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 且 $f(u)$ 和 $g(x)$ 均可导, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 也可导, 且:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

三、微分

📌 微分

函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分为:

$$dy = f'(x)dx$$

第三部分 微分中值定理和导数应用

一、微分中值定理

💡 罗尔定理

若函数 $f(x)$ 满足：

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续
2. 在开区间 (a, b) 内可导
3. $f(a) = f(b)$

则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$

💡 拉格朗日中值定理

若函数 $f(x)$ 满足：

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续
 2. 在开区间 (a, b) 内可导
- 则存在 $c \in (a, b)$ 使得：

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

💡 柯西中值定理

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上连续
 2. 在开区间 (a, b) 内可导
 3. $g'(x) \neq 0$ 在 (a, b) 内
- 则存在 $c \in (a, b)$ 使得：

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

二、洛必达法则

🔔 洛必达法则 (0/0型)

设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足：

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = 0$
2. 在点 a 的某去心邻域内可导且 $F'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为 ∞

则有：

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

🔔 洛必达法则 (∞/∞ 型)

设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足：

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty$
2. 在点 a 的某去心邻域内可导且 $F'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在或为 ∞

则有：

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

三、泰勒公式

🔔 泰勒公式

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域的任一 x , 有:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

1. 拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 介于 } x \text{ 和 } x_0 \text{ 之间})$$

2. 佩亚诺余项

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

四、函数性质分析

□ 单调性

- $f'(x) > 0$: 函数单调递增
- $f'(x) < 0$: 函数单调递减

□ 极值

- $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) > 0$: 极小值点
- $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$: 极大值点

□ 凹凸性

- $f''(x) > 0$: 函数凹
- $f''(x) < 0$: 函数凸

五、曲率分析

曲率

描述曲线在某点处弯曲程度的量，计算公式如下：

曲线表示形式	曲率公式
参数方程 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$	$\kappa = \frac{ x'y'' - y'x'' }{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$
显函数 $y = f(x)$	$\kappa = \frac{ f''(x) }{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$
极坐标 $r = r(\theta)$	$\kappa = \frac{ r^2 + 2r'^2 - rr'' }{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$

曲率性质

- $\kappa = 0$ ：直线段
- κ 越大：弯曲程度越大
- 曲率半径 $\rho = 1/\kappa$ ：最佳拟合圆半径

第四部分 不定积分

一、基本概念

不定积分

设函数 $F(x)$ 在区间 I 上可导，且 $F'(x) = f(x)$ ，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数。 $f(x)$ 的所有原函数的一般表达式称为 $f(x)$ 的不定积分，记作：

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中 C 为任意常数。

基本积分表

被积函数 $f(x)$	不定积分 $\int f(x)dx$	约束条件
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$x \neq 0$
e^x	$e^x + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\tan x$	$-\ln \cos x + C$	
$\cot x$	$\ln \sin x + C$	
$\sec x$	$\ln \sec x + \tan x + C$	
$\csc x$	$\ln \csc x - \cot x + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln x + \sqrt{x^2+a^2} + C$	$a > 0$

二、积分方法

1. 换元积分法

🔗 第一类换元法

设 $f(u)$ 有原函数 $F(u)$, $u = \varphi(x)$ 可导, 则:

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C$$

🔗 第二类换元法

设 $x = \psi(t)$ 单调可导且 $\psi'(t) \neq 0$, 则:

$$\int f(x)dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

2. 分部积分法

🔗 分部积分公式

$$\int u dv = uv - \int v du$$

第五部分 定积分

一、基本概念

📌 定积分

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 将区间任意分割为 n 个子区间, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 当 $\lambda = \max\{\Delta x_i\} \rightarrow 0$ 时, 若极限

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在且与分割和 ξ_i 的取法无关, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 此极限值称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分。

二、积分性质

🔔 积分中值定理

若 $f(x) \in C[a, b]$, 则存在 $c \in [a, b]$ 使得:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

🔔 柯西-施瓦茨不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$$

三、积分方法

🔔 换元积分法

设 $f(x) \in C[a, b]$, $x = \varphi(t)$ 满足:

1. $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$

2. $\varphi(t) \in C^1[\alpha, \beta]$

则:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

四、反常积分

1. 无穷限积分

□ 无穷限积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

收敛条件：极限存在

□ 牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$$

其中 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

2. 瑕积分

□ 瑕积分

设 a 为瑕点：

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

收敛条件：极限存在

瑕点在内部

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

收敛条件：两部分均收敛

第六部分 定积分的应用

一、曲线弧长

□ 直角坐标系弧长

设曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可导，则弧长为：

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

☑ 推导

$$\text{弧微分 } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

□ 参数方程弧长

设曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 在 $[t_1, t_2]$ 上连续可导，则弧长为：

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

☑ 推导

$$\text{弧微分 } ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

☐ 极坐标弧长

设曲线 $r = r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导, 则弧长为:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

☑ 推导

由极坐标转换:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

可得:

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

第七部分 微分方程

一、基本概念

□ 微分方程

含有未知函数及其导数的方程称为微分方程。方程中出现的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。

二、一阶微分方程

💡 一阶线性微分方程

形如 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 的方程，其通解为：

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right)$$

💡 可分离变量方程

形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ 的方程，解法为：

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + C$$

三、高阶微分方程

1. 二阶常系数齐次微分方程

💡 二阶常系数齐次微分方程通解

形如 $y'' + py' + qy = 0$ 的方程，通过求解特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ ：

- 两个不同实根 r_1, r_2 ：

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

- 一个重根 r ：

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

- 共轭复根 $a \pm bi$ ：

$$y = e^{ax} (C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx))$$

2. 二阶常系数非齐次微分方程

🔗 二阶常系数非齐次微分方程通解

形如 $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ 的方程，通解为 $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$
其中 $y_h(x)$ 为对应齐次方程的通解， $y_p(x)$ 为非齐次方程的一个特解。

(1) 求解对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

- 特征方程法（常系数）：

$$r^2 + pr + q = 0$$

- 两个不同实根：

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

- 重根：

$$y_h = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

- 共轭复根：

$$y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

(2) 求特解 $y_p(x)$

① 求特解的方法

- 待定系数法：
 - 根据 $g(x)$ 形式假设特解：
 - 多项式： $y_p = Ax^n + \dots$
 - 指数函数： $y_p = Ae^{kx}$
 - 三角函数： $y_p = A \sin \omega x + B \cos \omega x$
 - 与齐次解重复时乘以 x^k
- 常数变易法：

$$y_p = u_1(x)y_{h1}(x) + u_2(x)y_{h2}(x)$$

解方程组：

$$\begin{cases} u_1' y_{h1} + u_2' y_{h2} = 0 \\ u_1' y_{h1}' + u_2' y_{h2}' = g(x) \end{cases}$$

💡 求解特解技巧

- 待定系数法技巧：
 - $g(x)$ 为多项式：假设同次多项式
 - $g(x) = e^{kx}$ ：若 e^{kx} 为齐次解则乘以 x
 - $g(x) = \sin \omega x$ ：假设 $A \sin \omega x + B \cos \omega x$
 - 组合形式叠加假设
- 常数变易法简化：
 - 优先选择简单的 y_{h1}, y_{h2}
 - 使用积分技巧简化计算

(3) 写出通解

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

(4) 解题示例

≡ 例题1

方程: $y'' - 3y' + 2y = e^x$

- 齐次解: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1, 2$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

- 特解: 设 $y_p = A x e^x$ (因为 e^x 是齐次解的一部分)
代入得:

$$y'_p = A e^x + A x e^x, \quad y''_p = 2A e^x + A x e^x$$

$$(2A e^x + A x e^x) - 3(A e^x + A x e^x) + 2A x e^x = e^x$$

$$\Rightarrow -A e^x = e^x \Rightarrow A = -1$$

- 通解:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x$$

(5) 总结

📄 解题步骤

- 先求齐次解 y_h
- 根据 $g(x)$ 形式求特解 y_p
- 通解 $y = y_h + y_p$
- 当 $g(x)$ 含齐次解项时乘以 x^k