第一部分 函数与极限

一、函数

函数

函数是一种映射关系，将定义域中的每个元素映射到值域中的唯一元素。

常见函数类型

- 多项式函数：$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$
- 指数函数：$f(x) = a^x$（其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$）
- 对数函数：$f(x) = \log_a x$（其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$）
- 三角函数：$\sin x$、$\cos x$、$\tan x$

二、极限

极限

当自变量x趋近于某个值x_0时，函数值$f(x)$趋近于某个常数A，记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

💡 极限的性质

设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x \to x_0} g(x) = B$，则极限具有以下性质：

- 唯一性：若极限存在，则极限值唯一
- 局部有界性：若 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x)| \leq M$
- 保号性：若 $A > 0$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > 0$

💡 重要极限

以下是两个重要的极限公式：

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

第二部分 导数与微分

一、导数

📖 导数

函数$f(x)$在点x_0处的导数定义为：

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

函数$f(x)$	导数$f'(x)$	备注
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\tan x$	$\sec^2 x$	
$\cot x$	$-\csc^2 x$	
$\sec x$	$\sec x \tan x$	
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 < x < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

极坐标导数

对于极坐标方程 $r = r(\theta)$，其导数公式为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta}$$

二、函数求导法则

1. 和差积商求导法则

和差积商求导法则

设 $u(x)$、$v(x)$ 均可导，则：

- 和差法则：$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$

- 积法则：$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- 商法则：$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ （其中 $v(x) \neq 0$）

2. 反函数求导法则

反函数求导法则

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内单调可导，且 $f'(x) \neq 0$，则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在对应区间内也可导，且：

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$$

3. 复合函数求导法则

复合函数求导法则（链式法则）

设 $y = f(u)$，$u = g(x)$，且 $f(u)$ 和 $g(x)$ 均可导，则复合函数 $y = f(g(x))$ 也可导，且：

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

三、微分

微分

函数$y = f(x)$在点x处的微分为：

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

第三部分 微分中值定理和导数应用

一、微分中值定理

罗尔定理

若函数$f(x)$满足:

1. 在闭区间$[a,b]$上连续
2. 在开区间(a,b)内可导
3. $f(a)=f(b)$
   则存在$c\in(a,b)$使得$f'(c)=0$

拉格朗日中值定理

若函数$f(x)$满足:

1. 在闭区间$[a,b]$上连续
2. 在开区间(a,b)内可导
   则存在$c\in(a,b)$使得:

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

柯西中值定理

若函数$f(x)$和$g(x)$满足:

1. 在闭区间$[a,b]$上连续
2. 在开区间(a,b)内可导
3. $g'(x)\neq 0$在(a,b)内
   则存在$c\in(a,b)$使得:

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

二、洛必达法则

洛必达法则（0/0型）

设函数$f(x)$和$F(x)$满足：

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} F(x) = 0$
2. 在点a的某去心邻域内可导且$F'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$存在或为$\infty$

   则有：

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}}$$

洛必达法则（∞/∞型）

设函数$f(x)$和$F(x)$满足：

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} F(x) = \infty$
2. 在点a的某去心邻域内可导且$F'(x) \neq 0$
3. $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$存在或为$\infty$

   则有：

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}}$$

三、泰勒公式

泰勒公式

若函数$f(x)$在x_0处具有n阶导数，则存在x_0的一个邻域，对于该邻域的任一x，有：

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)}$$

1. 拉格朗日余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{介于}x\text{和}x_0\text{之间})$$

2. 佩亚诺余项

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

四、函数性质分析

单调性

- $f'(x)>0$：函数单调递增
- $f'(x)<0$：函数单调递减

极值

- $f'(x_0)=0$且$f''(x_0)>0$：极小值点
- $f'(x_0)=0$且$f''(x_0)<0$：极大值点

凹凸性

- $f''(x)>0$：函数凹
- $f''(x)<0$：函数凸

五、曲率分析

曲率

描述曲线在某点处弯曲程度的量，计算公式如下：

曲线表示形式	曲率公式
参数方程$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$	$\kappa = \frac{\lvert x'y'' - y'x'' \rvert}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$
显函数$y = f(x)$	$\kappa = \frac{\lvert f''(x) \rvert}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$
极坐标$r = r(\theta)$	$\kappa = \frac{\lvert r^2 + 2r'^2 - rr'' \rvert}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$

曲率性质

- $\kappa = 0$：直线段
- κ越大：弯曲程度越大
- 曲率半径$\rho = 1/\kappa$：最佳拟合圆半径

第四部分 不定积分

一、基本概念

不定积分

设函数$F(x)$在区间I上可导，且$F'(x) = f(x)$，则称$F(x)$为$f(x)$在I上的一个原函数。$f(x)$的所有原函数的一般表达式称为$f(x)$的不定积分，记作：

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C}$$

其中C为任意常数。

基本积分表

被积函数$f(x)$	不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x$	约束条件
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
e^x	$e^x + C$	
$\sin x$	$-\cos x + C$	
$\cos x$	$\sin x + C$	
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	
$\sec x$	$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$	
$\csc x$	$\ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$-1 < x < 1$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\rvert + C$	$a > 0$

二、积分方法

1. 换元积分法

第一类换元法

设$f(u)$有原函数$F(u)$，$u = \varphi(x)$可导，则：

$$\boxed{\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)] + C}$$

第二类换元法

设$x=\psi(t)$单调可导且$\psi'(t)\neq 0$，则：

$$\boxed{\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}}$$

2. 分部积分法

分部积分公式

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u}$$

第五部分 定积分

一、基本概念

定积分

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界，将区间任意分割为n个子区间，任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，当$\lambda=\max\{\Delta x_i\}\to 0$时，若极限

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

存在且与分割和ξ_i的取法无关，则称$f(x)$在$[a,b]$上可积，此极限值称为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分。

二、积分性质

积分中值定理

若$f(x)\in C[a,b]$，则存在$c\in[a,b]$使得:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)}$$

柯西-施瓦茨不等式

$$\boxed{\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)}$$

三、积分方法

换元积分法

设$f(x)\in C[a,b]$，$x=\varphi(t)$满足:

1. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$
2. $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$
   则:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t}$$

四、反常积分

1. 无穷限积分

无穷限积分

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x}$$

收敛条件：极限存在

牛顿-莱布尼茨公式

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) - F(a)$$

其中$F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2. 瑕积分

瑕积分

设a为瑕点：

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x}$$

收敛条件：极限存在

瑕点在内部

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

收敛条件：两部分均收敛

第六部分 定积分的应用

一、曲线弧长

直角坐标系弧长

设曲线$y = f(x)$在$[a, b]$上连续可导，则弧长为：

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\mathrm{d}x}$$

推导

弧微分$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x$

参数方程弧长

设曲线$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$在$[t_1, t_2]$上连续可导，则弧长为：

$$\boxed{L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t}$$

☑ **推导**

弧微分$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\mathrm{d}t$

极坐标弧长

设曲线$r=r(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续可导，则弧长为：

$$\boxed{L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta}$$

☑ **推导**

由极坐标转换：

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$$

可得：

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\mathrm{d}\theta$$

第七部分 微分方程

一、基本概念

微分方程

含有未知函数及其导数的方程称为微分方程。方程中出现的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶。

二、一阶微分方程

一阶线性微分方程

形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$的方程，其通解为：

$$\boxed{y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)}$$

可分离变量方程

形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$的方程，解法为：

$$\boxed{\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x+C}$$

三、高阶微分方程

1. 二阶常系数齐次微分方程

二阶常系数齐次微分方程通解

形如$y''+py'+qy=0$的方程，通过求解特征方程$r^2+pr+q=0$：

- 两个不同实根r_1, r_2：

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

- 一个重根r：

$$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$$

- 共轭复根$a\pm bi$：

$$y=e^{ax}(C_1\cos(bx)+C_2\sin(bx))$$

2. 二阶常系数非齐次微分方程

二阶常系数非齐次微分方程通解

形如$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$的方程，通解为$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$
其中$y_h(x)$为对应齐次方程的通解，$y_p(x)$为非齐次方程的一个特解。

(1) 求解对应的齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

- 特征方程法（常系数）：

$$r^2+pr+q=0$$

  - 两个不同实根：

$$y_h=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

  - 重根：

$$y_h=(C_1+C_2x)e^{rx}$$

  - 共轭复根：

$$y_h=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

(2) 求特解$y_p(x)$

ⓘ 求特解的方法

- 待定系数法：
  - 根据$g(x)$形式假设特解：
    - 多项式：$y_p = Ax^n + \cdots$
    - 指数函数：$y_p = Ae^{kx}$
    - 三角函数：$y_p = A\sin\omega x + B\cos\omega x$
    - 与齐次解重复时乘以x^k
- 常数变易法：

$$y_p = u_1(x)y_{h1}(x) + u_2(x)y_{h2}(x)$$

解方程组：

$$\begin{cases} u_1' y_{h1} + u_2' y_{h2} = 0 \\ u_1' y_{h1}' + u_2' y_{h2}' = g(x) \end{cases}$$

求解特解技巧

- 待定系数法技巧：
  - $g(x)$为多项式：假设同次多项式
  - $g(x) = e^{kx}$：若e^{kx}为齐次解则乘以x
  - $g(x) = \sin\omega x$：假设$A\sin\omega x + B\cos\omega x$
  - 组合形式叠加假设
- 常数变易法简化：
  - 优先选择简单的y_{h1}, y_{h2}
  - 使用积分技巧简化计算

(3) 写出通解

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

(4) 解题示例

例题1

方程：$y'' - 3y' + 2y = e^x$

- 齐次解：$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1, 2$

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

- 特解：设$y_p = Axe^x$（因为e^x是齐次解的一部分）
  代入得：

$$y_p' = Ae^x + Axe^x, \quad y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$$

$$(2Ae^x + Axe^x) - 3(Ae^x + Axe^x) + 2Axe^x = e^x$$

$$\Rightarrow -Ae^x = e^x \Rightarrow A = -1$$

- 通解：

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x$$

(5) 总结

解题步骤

- 先求齐次解y_h
- 根据$g(x)$形式求特解y_p
- 通解$y = y_h + y_p$
- 当$g(x)$含齐次解项时乘以x^k