# 第一部分 随机变量及其分布

## 一、离散型随机变量及其分布律

### 1. (0-1)分布

$$P\{X=k\}=\begin{cases}0, & k=0\\ 1, & k=1\end{cases}$$

### 2. 二项分布 $X\sim B(n,p)$

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,2,\cdots,n$$

### 3. 泊松分布 $X\sim\pi(\lambda)$

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k=0,1,2,\cdots, \quad (\lambda)$$

---

## 二、随机变量的分布函数

### 1. 概念

设X是一个随机变量，x是任意实数，函数$F(x)=P\{X\leq x\} \qquad -\infty<x<+\infty$

### 2. 基本性质

- 单调性：
  $F(x)$ 是 $x$ 的不减函数。
  对任意实数 $x_1,x_2$ 且 $x_1<x_2$，有：

$$F(x_2)-F(x_1)=P\{x_1<X\leqslant x_2\}\geqslant 0$$

- 有界性：
  $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且满足：

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0, \quad F(\infty)=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$$

  几何解释：
  当 $x\to-\infty$ 时，事件"随机点 $X$ 落在点 $x$ 左边"趋于不可能事件，其概率趋于0

当 $x \to \infty$ 时，事件"随机点 $X$ 落在点 $x$ 左边"趋于必然事件，其概率趋于1

- 右连续性：
  $F(x+0)=F(x)$，即 $F(x)$ 是右连续的（证明略）

---

# 三、连续随机变量及其概率密度

## 1. 定义

如果对于随机变量$X$的分布函数$F(x)$，存在非负可积函数$f(x)$，使对于任意实数$x$有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

称$X$为连续型随机变量，$f(x)$称为$X$的概率密度函数，简称概率密度

## 2. 性质

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)=1$
- 对于任意实数$x_1, x_2 (x_1 \leq x_2)$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

- 若$f(x)$在点$x$处连续，则有$F'(x)=f(x)$

> 结论：设随机变量$X$的概率概率密度为$f_X(x)$，概率密度$Y=\varphi(X)$，则$Y$的概率密度为$f_Y(y)=f_x(\varphi^{-1}(y))[\varphi^{-1}(y)]'$

## 3. 三种重要的连续型随机变量

### (1) 均匀分布$X \sim U(a,b)$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

### (2) 指数分布$X \sim exp(\theta)$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

### (3) 正态分布(或高斯分布) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<+\infty$$

- 标准正态分布$X \sim N(0,1)$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

对于任意的$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，都可以转成$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim (0,1)$

---

---

# 第二部分 多维随机变量及其分布

## 一、二维随机变量

### 1. 定义

一般，设$E$是一个随机试验，它的样本空间是$S=\{e\}$，设$X=X(e)$和$Y=Y(e)$是定义在S上的随机变量，由它们构成的一个向量$(X,Y)$,叫做二维随机向量或二维随机变量

### 2. 联合分布函数

### (1) 定义

设$(X,Y)$是二维随机变量，对于任意实数$x,y$，二元函数：

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量$(X,Y)$的分布函数，或称为随机变量$X$和$Y$的联合分布函数

### (2) 性质

- 单调性:
  $F(x,y)$ 是变量 $x$ 和 $y$ 的不减函数:
  - 对任意固定的 $y$，当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \geqslant F(x_1,y)$
  - 对任意固定的 $x$，当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x,y_2) \geqslant F(x,y_1)$
- 有界性:
  $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$，且满足极限条件:
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$（固定 $y$）
  - $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$（固定 $x$）
  - $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0$
  - $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1$

  > 几何解释：当 $x \to -\infty$ 时，事件概率趋于不可能事件；当 $x,y \to +\infty$ 时，事件概率趋于必然事件

- 右连续性:
  $F(x,y)$ 关于 $x$ 和 $y$ 右连续:

$$F(x+0,y) = F(x,y), \quad F(x,y+0) = F(x,y)$$

- 矩形不等式:
  对任意 $(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$ 且 $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，有:

$$F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \geqslant 0$$

## 3. 联合概率密度

### (1) 定义

存在非负可积函数 $f(x,y)$，使得对于任意实数 $x$ 和 $y$，分布函数满足:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

满足上述条件的 $(X,Y)$ 称为二维连续型随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为：$(X,Y)$ 的概率密度或$X$ 和 $Y$ 的联合概率密度

### (2) 性质

- 非负性:
  概率密度函数 $f(x, y)$ 恒非负:

$$f(x, y) \geqslant 0$$

- 全域归一化:
  $f(x, y)$ 在整个平面上的二重积分值为1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = F(+\infty, +\infty) = 1$$

- 区域概率计算:
  若 $G$ 是 $xOy$ 平面上的任意区域，则点 $(X, Y)$ 落在 $G$ 内的概率为:

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_{G} f(x, y) dx dy$$

- 微分关系:
  若 $f(x, y)$ 在点 $(x, y)$ 处连续，则分布函数与概率密度满足微分关系:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

---

# 二、边缘分布

## 1. 边缘分布函数

- 边缘分布函数定义:
  设 $(X, Y)$ 是二维随机变量，其联合分布函数为 $F(x, y)$。
  $X$ 和 $Y$ 各自的分布函数分别记作:
  - $F_X(x)$：关于 $X$ 的边缘分布函数
  - $F_Y(y)$：关于 $Y$ 的边缘分布函数
- 边缘分布计算公式:

$$\begin{cases} F_X(x) = P\{X \leqslant x\} = F(x, \infty) \\ F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = F(\infty, y) \end{cases}$$

- 计算原理:

- $F_X(x) = F(x, \infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$
  (固定 $x$，令 $y$ 趋向正无穷)
- $F_Y(y) = F(\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$
  (固定 $y$，令 $x$ 趋向正无穷)

- 离散型随机变量：
  若 $(X, Y)$ 是离散型，可通过概率求和公式直接计算：

$$F_X(x) = \sum_{x_i \leqslant x} \sum_{y_j} p_{ij}, \quad F_Y(y) = \sum_{y_j \leqslant y} \sum_{x_i} p_{ij}$$

  其中 $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$

## 2. 边缘概率密度

- 边缘分布函数：
  对于联合分布函数 $F(x, y)$，$X$ 的边缘分布函数定义为：

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

- 边缘概率密度推导：
  $X$ 的边缘概率密度由联合概率密度 $f(x, y)$ 经积分运算得到：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

- **Y** 的边缘概率密度：
  同理，$Y$ 的边缘概率密度为：

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

---

# 四、相互独立的随机变量

## 二维随机变量独立性

- 定义
  设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ 分别是 $(X, Y)$ 的分布函数及边缘分布函数。
  若对所有 $x, y$ 满足：

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\}$$

等价于：

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称 $X$ 和 $Y$ 相互独立

- 连续型随机变量的独立条件：
  当 $(X,Y)$ 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x,y)$，边缘概率密度为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 时，独立条件等价于：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

  该等式在平面上几乎处处成立
- 离散型随机变量的独立条件：
  当 $(X,Y)$ 是离散型随机变量时，对所有可能取值 $(x_i,y_j)$ 满足：

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

---

# 五、两个随机变量函数的分布

## 1. $Z=X+Y$的分布

设 $(X,Y)$ 是二维连续型随机变量，它具有概率密度 $f(x,y)$。则 $Z=X+Y$ 仍为连续型随机变量，其概率密度为：

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy$$

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$$

- 证明：

$$\because F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\iint_D f(x,y)dxdy,\text{其中}D=\{(x,y)|x+y\le z\}$$
$$\therefore F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy$$
$$\therefore f_Z(z)=\frac{d}{dz}[F_Z(z)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial z}[\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x,z-x)\cdot(z-x)']dx$$

又若 $X$ 和 $Y$ 相互独立，设 $(X,Y)$ 关于 $X,Y$ 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，则上两式分别化为：

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

$$f_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

这两个公式称为 $f_X$ 和 $f_Y$ 的卷积公式，记为 $f_X * f_Y$，即

$$f_X * f_Y=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

## 2. $Z=\dfrac{Y}{X}$的分布、$Z=XY$的分布

- $Z=Y/X$ 的概率密度（商分布）：
  设 $(X,Y)$ 的联合概率密度为 $f(x,y)$，则 $Z=Y/X$ 的概率密度为：

  $$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x,xz)dx$$

  独立情形：若 $X$ 与 $Y$ 独立，且边缘概率密度分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，则公式简化为：

  $$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_X(x)f_Y(xz)dx$$

- $W=XY$ 的概率密度（积分布）：
  设 $(X,Y)$ 的联合概率密度为 $f(x,y)$，则 $W=XY$ 的概率密度为：

  $$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx$$

  独立情形：若 $X$ 与 $Y$ 独立，且边缘概率密度分别为 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，则公式简化为：

  $$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx$$

### 3. $M=\max\{X,Y\}$及$N=\min\{X,Y\}$的分布

#### 最大值与最小值函数的分布（相互独立随机变量）

- 最大值函数 $M=\max\{X,Y\}$ 的分布函数：
  由于 $X$ 和 $Y$ 相互独立：

$$\begin{aligned}F_{\max}(z)&=P\{M\leqslant z\}\\&=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}\\&=P\{X\leqslant z\}\cdot P\{Y\leqslant z\}\\&=F_X(z)\cdot F_Y(z)\end{aligned}$$

- 最小值函数 $N=\min\{X,Y\}$ 的分布函数：
  由于 $X$ 和 $Y$ 相互独立：

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=P\{N\leqslant z\}\\&=1-P\{N>z\}\\&=1-P\{X>z,Y>z\}\\&=1-[1-F_X(z)]\cdot[1-F_Y(z)]\end{aligned}$$

#### 推广至 $n$ 个独立随机变量

- $n$ 维最大值函数 $M=\max\{X_1,\ldots,X_n\}$ 的分布函数：
  设 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立，分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$：

$$F_{\max}(z)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(z)=F_{X_1}(z)\cdot F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

- $n$ 维最小值函数 $N=\min\{X_1,\ldots,X_n\}$ 的分布函数：
  设 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立，分布函数为 $F_{X_i}(x_i)$：

$$F_{\min}(z)=1-\prod_{i=1}^{n}[1-F_{X_i}(z)]$$

---

---

## 第三部分 随机变量的数字特征

# 一、数学期望

## 1. 定义

### 数学期望定义（离散型）

- 分布律条件：
  设离散型随机变量 $X$ 的分布律为：

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

- 数学期望公式：
  若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛，则定义 $X$ 的数学期望为：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k$$

  关键要求：级数必须绝对收敛（$\sum|x_k|p_k<\infty$）

### 数学期望定义（连续型）

- 概率密度条件：
  设连续型随机变量 $X$ 的概率密度为 $f(x)$
- 数学期望公式：
  若积分 $\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$ 绝对收敛，则定义 $X$ 的数学期望为：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$$

  关键要求：积分必须绝对收敛（$\int|x|f(x)dx<\infty$）

## 2. 随机变量函数的期望定理

- 定理核心表述：
  设 $Y=g(X)$ 是随机变量 $X$ 的函数（$g$ 为连续函数）
- 离散型情形：
  若 $X$ 是离散型随机变量，分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k\ (k=1,2,\cdots)$，且级数满足绝对收敛条件：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|g(x_k)|p_k<\infty$$

  则 $Y$ 的数学期望为：

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$$

- 连续型情形：
  若 $X$ 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$，且积分满足绝对收敛条件：

  $$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$$

  则 $Y$ 的数学期望为：

  $$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

## 3. 性质

### (1) 常数的期望

- 性质：
  若 $C$ 为常数，则

  $$E(C) = C$$

### (2) 常数倍性质

- 性质：
  设 $X$ 为随机变量，$C$ 为常数，则

  $$E(CX) = C \cdot E(X)$$

### (3) 可加性（核心性质）

- 性质：
  设 $X, Y$ 为随机变量，则

  $$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

  可推广至 $n$ 个随机变量：

  $$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

### (4) 独立变量的乘积期望

- 性质:
  若 $X, Y$ 相互独立，则

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

---

# 二、方差

## 1. 方差定义与性质

- 定义式:

$$D(X) = \mathrm{Var}(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\}$$

  - $E(X)$：随机变量 $X$ 的数学期望（均值）
  - $[X - E(X)]^2$：偏差的平方
  - 方差 $D(X)$ 是偏差平方的期望值
- 标准差:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

  - 物理意义：度量波动大小的直接指标（与原始量纲一致）

## 2. 方差计算体系

| 随机变量类型 | 计算公式 | 关键要素说明 |
|---|---|---|
| 离散型 | $D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k$ | $p_k = P\{X = x_k\}$（分布律） |
| 连续型 | $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$ | $f(x)$（概率密度函数） |

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

## 2. 性质

- 常数方差:
  设 $C$ 是常数，则:

$$D(C) = 0$$

- 常数倍与平移性质:
  设 $X$ 是随机变量，$C$ 是常数:

$$\begin{aligned} D(CX) &= C^2 D(X) \\ D(X+C) &= D(X) \end{aligned}$$

- 随机变量和的方差:
  设 $X, Y$ 是两个随机变量:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$$

  独立情形：若 $X, Y$ 相互独立，则简化为:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

  推广：此性质可推广到任意有限多个相互独立的随机变量之和
- 方差为零的充要条件:

$$D(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P\{X = E(X)\} = 1$$

  即 $X$ 以概率 1 取常数 $E(X)$

## 3. 切比雪夫不等式

设随机变量 $X$ 满足:

- 数学期望 $E(X) = \mu$
- 方差 $D(X) = \sigma^2$

则对 任意正数 $\varepsilon$ ，有:

$$P\{|X - \mu| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

### 证明核心步骤

$$
\begin{aligned}
P\{|X-\mu| \geqslant \varepsilon\} &= \int_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon} f(x)dx \quad (\text{连续型情形}) \\
&\leqslant \int_{|x-\mu|\geqslant\varepsilon} \left(\frac{x-\mu}{\varepsilon}\right)^2 f(x)dx \quad \left(\text{因} \left(\frac{|x-\mu|}{\varepsilon}\right)^2 \geqslant 1\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx \\
&= \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

---

# 三、协方差及相关系数

## 1. 定义

- 协方差定义：
  设 $(X, Y)$ 是二维随机变量，定义 $X$ 与 $Y$ 的协方差为：

$$
\operatorname{Cov}(X,Y) = E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}
$$

- 相关系数定义：
  $X$ 与 $Y$ 的相关系数为：

$$
\rho_{XY} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}
$$

- 协方差基本性质：

$$
\begin{cases}
\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,X) \\
\operatorname{Cov}(X,X) = D(X)
\end{cases}
$$

- 方差与协方差关系：
  对任意两个随机变量 $X$ 和 $Y$，有：

$$
D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)
$$

- 协方差计算式：
  协方差可展开为：

$$
\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)
$$

## 2. 性质

### 协方差的核心性质

#### 标量乘法不变性

设 $a$, $b$ 为常数，则:

$$\mathrm{Cov}(aX,\ bY) = ab \cdot \mathrm{Cov}(X,\ Y)$$

#### 加法分配律

对任意随机变量 $X_1$, $X_2$, $Y$:

$$\mathrm{Cov}(X_1 + X_2,\ Y) = \mathrm{Cov}(X_1,\ Y) + \mathrm{Cov}(X_2,\ Y)$$

## 3. 定理

$$|\rho_{XY}| \leq 1 \quad \text{当且仅当 } \exists a, b \in \mathbb{R}, P\{Y = a + bX\} = 1\text{时，等号成立}$$

---

# 四、矩、协方差矩阵

## 1. 矩的定义体系

设 $(X, Y)$ 是二维随机变量:

- $k$阶原点矩（$X$ 的矩）：
  若存在，定义为:

$$E(X^k), \quad k = 1, 2, \cdots$$

- $k$阶中心矩（$X$ 的偏差矩）：
  若存在，定义为:

$$E\left\{[X - E(X)]^k\right\}, \quad k = 2, 3, \cdots$$

- $k + l$阶混合矩（$X$ 和 $Y$ 的联合矩）：
  若存在，定义为:

$$E(X^k Y^l), \quad k, l = 1, 2, \cdots$$

- $k + l$阶混合中心矩（联合偏差矩）：
  若存在，定义为:

$$E\left\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right\},\quad k,l=1,2,\cdots$$

#### 矩的特例关系

- $E(X)$ 是 $X$ 的一阶原点矩
- $D(X)$ 是 $X$ 的二阶中心矩
- $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 是 $X$ 和 $Y$ 的二阶混合中心矩

# 第四部分 大数定理及中心极限定理

## 一、大数定理

### 1. 弱大数定律（辛钦大数定律）

- 表述一：
  设$X_1,X_2,\cdots$是相互独立，服从同一分布的随即变脸序列，且具有数学期望$E(X_k)=\mu\ (k=1,2,\cdots)$.作前n个变量的算术平均$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k$,则对于任意$\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1$$

- 表述二：
  设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$相互独立，服从同一分布且具有数学期望$E(X_k)=\mu\ (k=1,2,\cdots)$，则序列$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}$依概率收敛于$\mu$，即$\overline{X}\xrightarrow{P}\mu$
  其中：$X\xrightarrow{P}\mu$表示$X$按概率收敛于$\mu$

### 2. 伯努利大数定律

设$f_A$是$n$次独立重复试验中事件$A$发生的次数，$p$是事件$A$在每次试验中发生的概率，则对

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{f_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1\quad 或\quad \lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{f_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}=0$$

## 二、中心极限定理

### 独立同分布的中心极限定理

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，服从同一分布，且具有数学期望和方差：$E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2>0\ (k=1,2,\cdots)$，则随机变量之和$\sum_{k=1}^{n} X_k$的标准化变量

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意$x$满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}}\right\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

### 李雅普诺夫($\mathcal{L}yapunov$) 定理

设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$相互独立，它们具有数学期望和方差

$$E(X_k)=\mu_k\ ,\ D(X_k)=\sigma_k^2>0\ ,\ k=1,2,\cdots$$

$$\text{记}\quad B_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,$$

若存在正数$\delta$，使得当$n\to\infty$时，

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n} E\left\{\left|X_k-\mu_k\right|^{2+\delta}\right\}\to 0,$$

则随机变量之和$\sum_{k=1}^{n} X_k$的标注化变量

$$Z_n=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}}=\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{B_n}$$

的分布函数$F_n(x)$对于任意$x$，满足

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k}{B_n} \le x \right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

### 棣莫弗 - 拉普拉斯($\mathcal{De\ Moivre - Laplace}$) 定理

设随机变量$\eta_n\ (n=1,2,\cdots)$服从参数为$n,p\ (0<p<1)$的二项分布，则对于任意$x$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \frac{\eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x \right\} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$$

---

---

# 第五部分 抽样分布

## 一、基础定义

- 样本均值（期望） $E(X) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- 样本方差 $D(X) = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}\right)$
- 样本标准差 $S = \sqrt{S^2}$
- 样本$k$阶（原点）矩 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ , $k=1,2,\cdots$
- 样本$k$阶中心矩 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k$ , $k=2,3,\cdots$
- 经验分布函数
  设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自分布函数为$F(x)$的总体$X$的样本观察值.$X$的经验分布函数，记为$F_n(x)$，定义为样本观察值$x_1,x_2,\cdots,x_n$中小于或等于指定值$x$所占的比率，即

$$F_n(x) = \frac{\#(x_i \le x)}{n} \qquad -\infty < x < +\infty$$

  其中$\#(x_i \le x)$表示$x_1,x_2,\cdots,x_n$中小于等于$x$的个数。
  - 具有分布函数的条件

1. $F_n(x)$是$x$的不减函数
2. $0 \le F_n(x) \le 1$，且$F(\infty)=0, F(+\infty)=1$
3. $F(x)$是一个右连续函数

- 格里汶科定理
  设$X_1, X_2, \cdots, X_n$的函数是来自以$F_(x)$为分布函数的总体$X$的样本，$F(x)$是经验分布函数，则有

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty\to+\infty} |F_n(x)-F(x)|=0\right\}=1$$

---

# 二、抽样分布

## 1. $\chi^2$分布

- 定义
  设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$N(0,1)$的样本，则称统计量

$$\chi = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

  服从自由度为$n$的$\chi^2$分布，记为$\chi^2 \sim \chi^2(n)$
- $\chi^2$分布的概率密度

$$f(y)=\begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2}, 2)$$

> 其中$\Gamma(t)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{t-1}dx \;\; t>0$

- $\chi^2$分布的可加性
  设$\chi_1^2 \sim \chi^2(n_1), \chi_2^2 \sim \chi^2(n_2)$，并且$\chi_1^2, \chi_2^2$相互独立，则有

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(n_1+n_2)$$

- $\chi^2$分布的期望和方差
  若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则有

$$E(\chi^2)=n \qquad D(\chi^2)=2n$$

- $\chi^2$分布的上分位数

  对于给定的正数$\alpha$，$0<\alpha<1$，满足条件

$$P\left\{\chi^2>\chi^2_\alpha(n)\right\}=\int_{\chi^2_\alpha(n)}^{+\infty} f(y)dy=\alpha$$

- 近似计算

$$\chi^2_\alpha(n)\approx\frac{1}{2}(z_\alpha+\sqrt{2n-1})^2$$

## 2. $t$分布（学生氏$(Student)$分布）

- 定义

  设$X\sim N(0,1),Y\sim\chi^2(n)$，且$X,Y$相互独立，则称变量

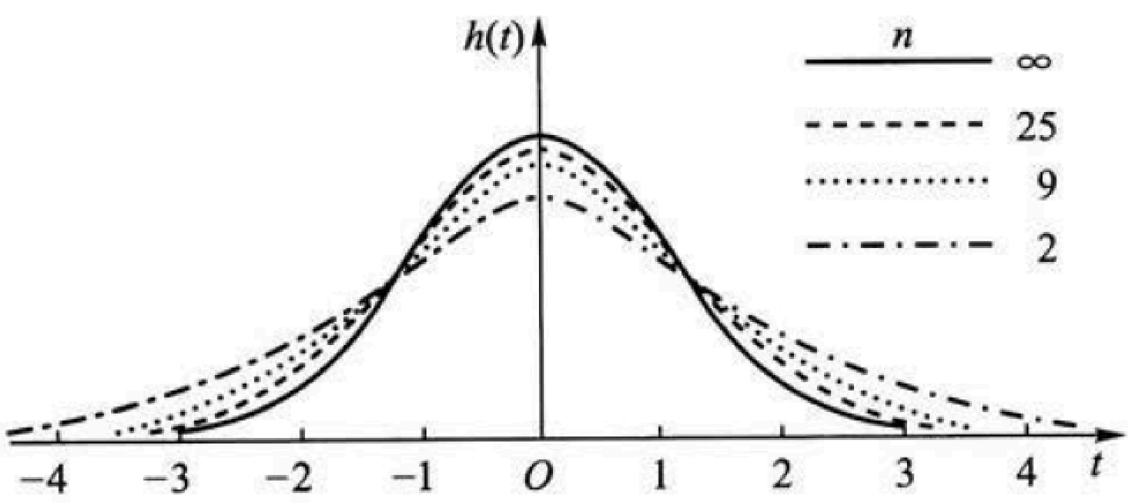
$$t=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{N}}}$$

  服从自由度为$n$的$t$分布，记为$t\sim t(n)$

- 概率密度函数

$$h(t)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \qquad -\infty<t<+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$




- $t$分布的上分位数

  对于给定的$\alpha,0<\alpha<1$，满足条件

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \int_{t_\alpha(n)}^{+\infty} h(t)dt = \alpha$$

- 对称性

$$t_{1-n} = -t_\alpha(n)$$

- 近似计算

$$t_\alpha(n) \approx z_n \qquad n > 45$$

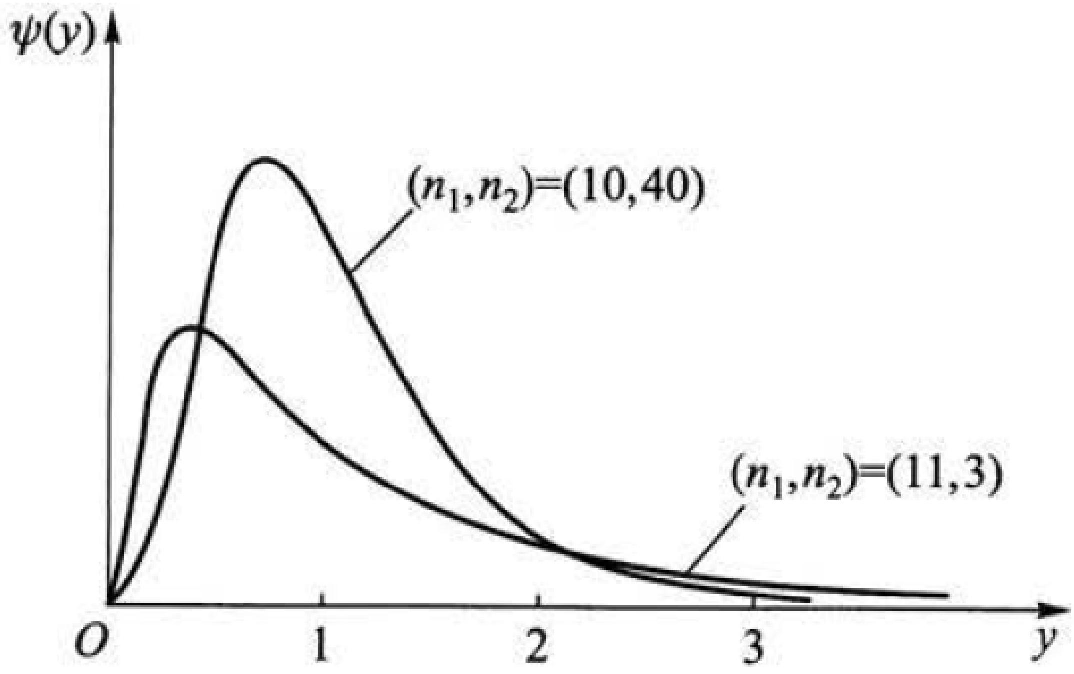
## 3. $F$分布

- 定义
  设$U \sim \chi^2(n_1), V \sim \chi^2(n_2)$，且$U, V$相互独立，则称随机变量

$$F = \frac{\frac{U}{n_1}}{\frac{V}{n_2}}$$

  服从自由度为$(n_1, n_2)$的$F$分布，记为$F \sim F(n_1, n_2)$.
- 分布概率

$$\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})(\frac{n_1}{n_2})^{\frac{n_1}{2}} y^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})(1+\frac{n_1 y}{n_2})^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, & y > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$




- 特性

$$若F \sim F(n_1,n_2),则\frac{1}{F} \sim F(n_2,n_1)$$

- 上分位数
  对于给定的$\alpha, 0<\alpha<1$，满足条件

$$P\{F > F_\alpha(n_1,n_2)\} = \int_{F_\alpha(n_1,n_2)}^{+\infty} \psi(y)dy = \alpha$$

- 对称性

$$F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$$

## 4. 正态总体的样本均值于样本方差的分布

### (1) 单总体样本均值和方差性质

设总体 $X$ 均值为 $\mu$，方差为 $\sigma^2$（分布不限），样本 $X_1,\cdots,X_n$，$\overline{X}$ 和 $S^2$ 为样本均值和方差：

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= \mu \\ D(\overline{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \\ E(S^2) &= \sigma^2 \quad \text{(无偏性)} \end{aligned}$$

**$E(S^2)=\sigma^2$ 的证明：**

$$\begin{aligned} E(S^2) &= E\left[\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) - nE(\overline{X}^2)\right] \\ &= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(\sigma^2+\mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right] \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

---

### (2) 正态总体分布定理

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则：

- 定理2 $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

- 定理3 $\begin{cases} \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \\ \overline{X} \text{ 与 } S^2 \text{ 相互独立} \end{cases}$
- 定理4 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

**定理4证明思路:**

- 由定理2: $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
- 由定理3: $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- 由t分布定义:

$$\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

---

## (3) 双正态总体分布定理

设两独立样本:

- $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ (容量 $n_1$)
- $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ (容量 $n_2$)

则:

$$1^\circ \ \frac{\dfrac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{S_2^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$2^\circ \text{ 当 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \text{ 时:}$$
$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

其中合并方差:

$$S_W^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad S_W = \sqrt{S_W^2}$$

### (4) 应用场景速查表

| 检验类型 | 使用统计量 | 分布 | 条件 |
|---|---|---|---|
| 单样本均值检验 | $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ | $t(n-1)$ | 正态总体 |
| 两样本方差齐性检验 | $\frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}}$ | $F(n_1-1, n_2-1)$ | 独立正态样本 |
| 两样本均值差检验 | $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-\delta}{S_W\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$ | $t(\nu)$ | 方差相等 $(\sigma_1^2=\sigma_2^2)$ |

> 注:
> $\nu = n_1+n_2-2$
> $\delta = \mu_1-\mu_2$

# 第六部分 参数估计

# 一、点估计

## 1. 矩估计法

(1) 基本概念
设总体 $X$ 为连续型随机变量（概率密度 $f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$）或离散型随机变量（分布律 $P\{X=x\}=p(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$），其中 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 为待估参数。$X_1,\cdots,X_n$ 为样本。

(2) 矩的定义

- 连续型总体：

$$\mu_l=\int_{-\infty}^{\infty}x^l f(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)dx$$

- 离散型总体：

$$\mu_l=\sum_{x\in R_X}x^l p(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$$

（$R_X$ 为 $X$ 可能取值范围）

> 总结：$\mu_l=E(X^l)$

(3) 估计原理

- 样本矩：

$$A_l=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^l$$

- 建立方程组：

$$\begin{cases}\mu_1=\mu_1(\theta_1,\cdots,\theta_k)\\ \vdots\\ \mu_k=\mu_k(\theta_1,\cdots,\theta_k)\end{cases}$$

- 解方程组得矩估计量：

$$\hat{\theta}_i=\theta_i(A_1,\cdots,A_k)\quad(i=1,\cdots,k)$$

> 其实就是令$\mu_l=A_l$

## 2. 最大似然估计法

(1) 似然函数定义

- 离散型总体：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

- 连续型总体：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

($x_1,\cdots,x_n$ 为样本观测值)

(2) 估计原理
寻找 $\hat{\theta}$ 使似然函数最大化：

$$L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})=\max_{\theta\in\Theta} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

(3) 求解方法

- 似然方程：

$$\frac{d}{d\theta}L(\theta)=0$$

- 对数似然方程（优先使用）：

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$$

- 估计量：$\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$，估计值：$\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$

---

# 二、估计量的评选标准

## 1. 无偏性

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X$的样本，$\theta\in\Theta$为待估参数。

- 定义：若估计量 $\hat{\theta}$ 满足$E(\hat{\theta})=\theta$（$\forall\theta\in\Theta$），则称 $\hat{\theta}$ 是无偏估计量
- 意义：多次使用后平均偏差为零（无系统误差）
- 核心性质：
  - 样本均值$\overline{X}$是总体均值$\mu$的无偏估计
  - 样本方差$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$是$\sigma^2$的无偏估计
  - $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$不是$\sigma^2$的无偏估计
- 例证：

    - 样本$k$阶矩$A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$是总体$k$阶矩$\mu_k$的无偏估计量
        - 证：$E(X_i^k) = \mu_k \Rightarrow E(A_k) = \frac{1}{n}\sum \mu_k = \mu_k$
    - 指数分布中$\overline{X}$和$nZ = n(\min X_i)$都是$\theta$的无偏估计

---

### 2. 有效性

- 比较原理：在无偏估计量中，方差小者更优（观察值更密集于真值$\theta$）
- 定义：设$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$均为$\theta$的无偏估计，若$D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$且存在$\theta$使不等式严格成立，则$\hat{\theta}_1$较$\hat{\theta}_2$有效
- 例证（续指数分布）：
    - 当$n > 1$时，$\overline{X}$较$nZ$有效
        - 证：$D(\overline{X}) = \frac{\theta^2}{n} < \theta^2 = D(nZ)$

---

### 3. 相合性

- 核心要求：当$n \to \infty$时估计量收敛于真值
- 定义：若$\forall \theta \in \Theta, \varepsilon > 0$有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$，则称$\hat{\theta}$是相合估计量
- 重要性质：
    - 样本$k$阶矩$A_k$是$\mu_k$的相合估计
    - 若$\theta = g(\mu_1, \cdots, \mu_k)$（$g$连续），则矩估计$\hat{\theta} = g(A_1, \cdots, A_k)$是相合估计
    - 最大似然估计在一定条件下具有相合性
- 基本性：不具备相合性的估计量不可用

---

## 三、区间估计

### 1. 置信区间的定义与性质

- 核心概念：

- 设总体$X$的分布含未知参数$\theta \in \Theta$，给定$\alpha$（$0 < \alpha < 1$），由样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$确定统计量$\underline{\theta}$和$\overline{\theta}$（$\underline{\theta} < \overline{\theta}$）
- 若对任意$\theta \in \Theta$满足$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} \geqslant 1-\alpha$，则称$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$为$\theta$的置信水平$1-\alpha$的双侧置信区间
  - $\underline{\theta}$：置信下限
  - $\overline{\theta}$：置信上限
  - $1-\alpha$：置信水平（置信度）

- 应用条件：
  - 连续型随机变量：严格满足$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1-\alpha$
  - 离散型随机变量：可能无精确区间，但需满足≥$1-\alpha$
- 实际意义：反映区间包含真值的可信程度（例：$\alpha = 0.01$时，1000次抽样仅约10个区间不包含真值）

---

## 2. 正态分布均值的置信区间（$\sigma^2$已知）

设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2$已知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为样本：

- 枢轴量构造：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

（分布不依赖未知参数）

- 置信区间推导：

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

$\Rightarrow$ 置信区间：

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{或简写为} \quad \left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

- 例（$\alpha = 0.05$，$\sigma = 1$，$n = 16$）：
  - $z_{0.025} = 1.96$，置信区间为$(\overline{X} \pm 0.49)$
  - 若$\overline{x} = 5.20$，则具体区间为$(4.71, 5.69)$

## 3. 置信区间的性质与选择

- 非唯一性：
  - 同一置信水平存在多组区间（例：$\alpha = 0.05$时可构造 $(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01},\ \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}))$
  - 区间长度影响精度：选择最短长度区间（正态下对称区间$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$最优）
- 含义：
  - 固定样本下：称"区间包含$\theta$"的可信程度为$1-\alpha$
  - 重复抽样下：约$100(1-\alpha)\%$的区间包含真值

## 4. 置信区间的通用构建步骤

1. 寻找枢轴量：
   构造样本与 $\theta$ 的函数$W = W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$，使其分布不依赖$\theta$或其他未知参数
   - 一般从 $\theta$ 的点估计着手（如用样本均值$\overline{X}$构造）
2. 确定常数：
   对给定$1-\alpha$，找$a, b$使$P\{a < W < b\} = 1-\alpha$
3. 解等价不等式：
   将$a < W < b$转化为$\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$，其中$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$和$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$为统计量

# 四、正态总体均值和方差的区间统计

## 1. 单个正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的置信区间

给定置信水平$1-\alpha$，样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$，样本均值$\overline{X}$，样本方差$S^2$

- 均值$\mu$的置信区间：

- $\sigma^2$已知：枢轴量$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

  置信区间：$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$
- $\sigma^2$未知：枢轴量$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$

  置信区间：$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$

- 方差$\sigma^2$的置信区间（$\mu$未知）：

  枢轴量$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

  置信区间：$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$
- 标准差$\sigma$的置信区间：由方差区间直接取平方根得

  $\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$
- 示例（$\alpha = 0.05$, $n = 16$, $\overline{x} = 503.75$, $s = 6.2022$）：

  均值$\mu$置信区间：$(500.4, 507.1)$

  标准差$\sigma$置信区间：$(4.58, 9.60)$

---

## 2. 两个正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$与$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的置信区间

给定置信水平$1-\alpha$，两样本独立：$X_1, \cdots, X_{n_1}$（均值$\overline{X}$，方差$S_1^2$），$Y_1, \cdots, Y_{n_2}$（均值$\overline{Y}$，方差$S_2^2$）

- 均值差$\mu_1 - \mu_2$的置信区间：
  - $\sigma_1^2, \sigma_2^2$均已知：枢轴量$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

    置信区间：$\left(\overline{X}-\overline{Y} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

- $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知：枢轴量$\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

  其中$S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, $S_W=\sqrt{S_W^2}$

  置信区间：$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$

- 核心性质：
  - 方差未知时，$S_W^2$是合并方差估计，自由度为$n_1+n_2-2$
  - 分布不对称时（如$\chi^2$），仍取对称分位数构造区间

---

# 五、(0,1)分布参数的区间估计

## 1. 问题基本设定

- 总体分布：$X\sim$ (0,1)分布

  分布律：$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}$，$x=0,1$
- 样本要求：容量$n>50$（大样本条件）
- 参数特征：
  - 总体均值：$\mu=p$
  - 总体方差：$\sigma^2=p(1-p)$

## 2. 枢轴量构造与概率近似

- 枢轴量基础：样本均值$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$
- 中心极限定理应用（$n$充分大）：

$$\frac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\overset{\cdot}{\sim}N(0,1)$$

- 概率近似式：

$$P\left\{-z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{n\overline{X}-np}{\sqrt{np(1-p)}}<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}\approx 1-\alpha$$

## 3. 置信区间推导

- 等价变换：将概率不等式转化为二次不等式：

$$\left(n+z_{\frac{\alpha}{2}}^{2}\right)p^{2}-\left(2n\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}^{2}\right)p+n\overline{X}^{2}<0$$

- 系数定义：

$$\begin{cases}a=n+z_{\frac{\alpha}{2}}^{2}\\ b=-\left(2n\overline{X}+z_{\frac{\alpha}{2}}^{2}\right)\\ c=n\overline{X}^{2}\end{cases}$$

- 置信区间端点：

$$p_1=\frac{1}{2a}\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right),\quad p_2=\frac{1}{2a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)$$

- 最终置信区间：$(p_1,\ p_2)$

## 4. 核心性质

- 置信水平：近似满足$P\{p_1<p<p_2\}\approx 1-\alpha$
- 应用限制：仅适用于大样本（$n>50$）情形
- 区间特性：
  - 区间长度随$n$增大而缩小
  - 当$p$接近0.5时精度最高

---

# 六、单侧置信区间

## 1. 基本概念与应用背景

- 核心定义：
  - 单侧置信下限 $\hat{\theta}$：若 $\forall\theta\in\Theta$ 满足

    $$P\{\theta>\hat{\theta}\}\geqslant 1-\alpha$$

    则 $(\hat{\theta},\infty)$ 是 $\theta$ 的置信水平 $1-\alpha$ 的单侧置信区间
  - 单侧置信上限 $\bar{\theta}$：若 $\forall\theta\in\Theta$ 满足

    $$P\{\theta<\bar{\theta}\}\geqslant 1-\alpha$$

    则 $(-\infty,\bar{\theta})$ 是单侧置信区间
- 应用场景：
  - 设备/元件寿命：关注平均寿命 $\theta$ 的下限（寿命越长越好）

- 化学药品杂质含量：关注参数 $\mu$ 的上限（杂质越少越好）

## 2. 正态总体均值 $\mu$ 的单侧置信区间（$\sigma^2$ 未知）

设样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，样本均值 $\overline{X}$，样本方差 $S^2$

- 枢轴量:

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

- 推导过程:

$$P\left\{\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

  等价变换为:

$$P\left\{\mu > \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

- 单侧置信区间:

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1),\ \infty\right)$$

- 单侧置信下限:

$$\underline{\mu} = \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$$

- 图形示意：概率密度函数曲线（$t$ 分布）中 $t_\alpha(n-1)$ 对应右侧尾概率 $\alpha$

## 3. 正态总体方差 $\sigma^2$ 的单侧置信区间

- 枢轴量:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

- 推导过程:

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

等价变换为：

$$P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$$

- 单侧置信区间：

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$$

- 单侧置信上限：

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$$

- 图形示意：$\chi^2$ 分布曲线中 $\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ 对应左侧尾概率 $\alpha$

## 4. 核心性质总结

- 单调性本质：区间边界只向单侧延伸（$+\infty$ 或 $-\infty$）
- 概率意义：
  重复抽样时，约 $100(1-\alpha)\%$ 的区间包含真值 $\theta$
- 与双侧对比：
  单侧区间长度更短，适用于方向性明确的参数估计问题

# 正态总体均值、方差的置信区间与单侧置信限（置信水平为$1-\alpha$）

| 分类 | 待估参数 | 其他参数 | 枢轴量的分布 | 置信区间 | 单侧置信限 |
|---|---|---|---|---|---|
| 单个正态总体 | $\mu$ | $\sigma^2$已知 | $Z=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ | $\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$ | $\bar{\mu}=\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$<br>$\underline{\mu}=\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha$ |
| | $\mu$ | $\sigma^2$未知 | $t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$ | $\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$ | $\bar{\mu}=\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$<br>$\underline{\mu}=\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$ |
| | $\sigma^2$ | $\mu$未知 | $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ | $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$ | $\overline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$<br>$\underline{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}$ |
| 两个正态总体 | $\mu_1-\mu_2$ | $\sigma_1^2,\sigma_2^2$已知 | $Z=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$ | $\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$ | $\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$<br>$\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ |
| | $\mu_1-\mu_2$ | $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$未知 | $t=\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$<br>$\sim t(n_1+n_2-2)$<br>$S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ | $\left(\bar{X}-\bar{Y}\pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$ | $\overline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}$<br>$+t_\alpha(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$<br>$\underline{\mu_1-\mu_2}=\bar{X}-\bar{Y}$<br>$-t_\alpha(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$ |
| | $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ | $\mu_1,\mu_2$未知 | $F=\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ | $\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right)$ | $\overline{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)}$<br>$\underline{\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\dfrac{1}{F_\alpha(n_1-1,n_2-1)}$ |

注记说明：

- $\bar{X},\bar{Y}$分别为样本均值，$S^2,S_1^2,S_2^2$为样本方差
- $z_{\frac{\alpha}{2}}$：标准正态分布上$\dfrac{\alpha}{2}$分位数
- $t_\alpha(n)$：$t$分布上$\alpha$分位数（自由度$n$）
- $\chi^2_\alpha(n)$：$\chi^2$分布上$\alpha$分位数（自由度$n$）
- $F_\alpha(m,n)$：$F$分布上$\alpha$分位数（自由度$m,n$）