第八章、向量代数与空间解析几何

一、向量及线性运算

1. 向量的基本概念

(1) 向量

- 向量：既有大小，又有方向的变量叫做向量（或矢量）
- 表示：用粗体字母或者字母上面加箭头，如$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{v}$或$\vec{a}$、$\vec{v}$
- 比较：若两个向量$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$大小方向均相等，即有$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$

(2) 向量的模、单位向量、零向量

- 模：向量$\boldsymbol{a}$的模记为$|\boldsymbol{a}|$
- 单位向量：模等于1的向量，记为$\boldsymbol{e}$或$\vec{e}$
- 零向量：模等于0的向量，记为$\mathbf{0}$或$\vec{0}$

(3) 夹角

- 向量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$之间的夹角记为$\left(\widehat{a, b}\right)$

2. 向量的线性运算

(1) 向量的加减法 （平行四边形法则）

- 交换律 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
- 结合律 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$

(2) 向量的数乘运算

- $|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda|\ |\boldsymbol{a}|$
- 结合律 $\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$
- 分配律 $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$ 或 $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$

  定理一 设向量$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$，则向量$\boldsymbol{b}$平行于$\boldsymbol{a}$的充要条件是：存在唯一的实数$\lambda$，使$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$

3. 向量的方向角、投影

(1) 方向角

- 非零向量$\boldsymbol{r}$与三条坐标轴x, y, z与三条坐标轴的夹角α, β, γ，成为向量$\boldsymbol{r}$的方向角。

(2) 投影

$$
\begin{aligned}
&\text{性质一}\ \operatorname{Prj}_u a = |\boldsymbol{a}| \cos \varphi\ (\text{即}(\boldsymbol{a})_u = |a| \cos \varphi)\text{，其中，}\varphi\text{为向量}\boldsymbol{a}\text{与}u\text{轴的夹角}\\
&\text{性质二}\ \operatorname{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \operatorname{Prj}_u \boldsymbol{a} + \operatorname{Prj}_u \boldsymbol{b}\ (\text{即}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u = (\boldsymbol{a})_u + (\boldsymbol{b})_u)\\
&\text{性质三}\ \operatorname{Prj}_u(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \operatorname{Prj}_u \boldsymbol{a}\ (\text{即}(\lambda \boldsymbol{a})_u = \lambda(\boldsymbol{a})_u)
\end{aligned}
$$

二、数量积、向量积、混合积

1. 数量积

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos \left(\widehat{a, b}\right)$$

2. 向量积

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \left(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}\right) \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{e}\text{的方向遵循右手规则}$$

$$\text{记}\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$$

$$\text{则}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

3. 混合积

$$\text{记}\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z), \boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

$$\text{则}[\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}\,] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_z & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

三、平面及其方程

1. 点法式方程

- 法向量：如果某一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做平面的法线向量。

$$
\begin{gathered}
\text{设} M_0(x_0, y_0, z_0) \text{是平面} \mathit{\Pi} \text{上一点，} \boldsymbol{n} = (A, B, C) \text{为平面} \mathit{\Pi} \text{上一点。} \\
\text{则 } \mathit{\Pi}: \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0
\end{gathered}
$$

2. 一般式方程

$$
Ax + By + Cz + D = 0
$$

3. 截距式方程

$$
\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1
$$

4. 两平面的夹角

$$
\begin{gathered}
\text{设平面} \mathit{\Pi}_1 \text{和} \mathit{\Pi}_2 \text{的法线向量依次为} \boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \\
\cos\theta = \left|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2})\right| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathit{\Pi}_1 \text{与} \mathit{\Pi}_2 \text{互相垂直时，} A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \\
\mathit{\Pi}_1 \text{与} \mathit{\Pi}_2 \text{互相平行时，} \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.
\end{gathered}
$$

5. 点面距

$$
\begin{gathered}
\text{设} P_0(x_0, y_0, z_0) \text{是平面} Ax + By + Cz = 0 \text{外一点，则} \\
d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}
\end{gathered}
$$

四、空间直线及其方程

1. 一般方程

$$
\begin{cases}
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0
\end{cases}
$$

2. 对称式方程

- 方向向量：如果一个向量平行于一条已知直线，那么这个向量就叫做这条直线的方向向量

$$\text{已知}L\text{上一点}M_0(x_0,y_0,z_0)\text{，以及一个方向向量}\boldsymbol{s}=(m,n,p)$$
$$\text{则直线}L\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

3. 参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

4. 两直线的夹角

$$\text{设直线}L_1\text{和}L_2\text{的方向向量依次为}\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)\text{和}\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$$
$$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

5. 直线与平面的夹角

$$\text{设直线}L\text{方向向量为}\boldsymbol{s}=(m,n,p)\text{，平面}\mathit{\Pi}\text{的法向量为}\boldsymbol{n}=(A,B,C)$$
$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

五、曲面及方程

1. 旋转曲面

$$\text{圆锥面：}z^2=a^2(x^2+y^2)$$

2. 柱面

$$\varphi(x,y)=C$$

3. 二次曲面

(1) 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

(2) 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(3) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(4) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(5) 椭圆抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

(6) 双曲抛物面（马鞍面）

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

六、空间曲线及其方程

1. 一般方程

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

2. 参数方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

第九章

一、多元函数的基本概念

1. 函数极限

- 二重极限

$$\text{如果存在常数}A\text{，都有}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A\text{也记作}\lim_{P\to P_0} f(x,y)=A$$
$$\text{或}f(P)\to A(P\to P_0)$$

- 二重极限存在条件

$$P(x,y)\text{以}\textcolor{blue}{\text{任何方向}}\text{趋于}P_0(x_0,y_0)\text{时，}f(x,y)\text{都无限接近于一个相同的值}$$

- 函数的连续性

$$\text{设二次函数}f(P)=f(x,y)\text{的定义域为}D\text{，}P_0(x_0,y_0)\text{为}D\text{的聚点，且}P_0\in D$$
$$\text{若}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)\text{，则称函数}f(x,y)\text{在}P_0(x_0,y_0)\text{上连续.}$$
$$f(x,y)\text{在}D\text{的每一点都连续，就称}f(x,y)\text{是}D\text{上的连续函数.}$$

2. 偏导数

(1) 定义

$$\begin{aligned}
&\quad\text{设函数}z=f(x,y)\text{在点}(x_0,y_0)\text{的某一邻域内有定义，当}y\text{固定在}y_0\\
&\text{而}x\text{在}x_0\text{处有增量}\Delta x\text{时，相应的函数有增量}.\ f(x+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)\\
&\text{如果}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\text{存在，则称此极限为函数}z=f(x,y)\\
&\text{在点}(x_0,y_0)\text{处对}x\text{的偏导数.}\\
&\quad\text{函数}z=f(x,y)\text{在区域}D\text{内每一点}(x,y)\text{处对}x\text{的偏导数都存在，}\\
&\text{那么这个偏导数就是}x\text{、}y\text{的函数，它就称为函数}z=f(x,y)\text{对自变量}x\\
&\text{的偏导数，记作：}\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x\text{或}f_x(x,y).
\end{aligned}$$

(2) 高阶偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内具有偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$，那么在 D 内 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 都是 x,y 的函数。如果两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶导数。按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

其中第二和第三个偏导数称为混合偏导数。同样可得三阶、四阶...以及 n 阶偏导数，二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数。

定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必然相等。换句话说，二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关（证明从略）。

> 对于二元以上的函数，也可以类似地定义高阶偏导数，而且高阶混合偏导数在偏导数连续的条件下也与求导的次序无关。

(3) 复合函数求导法则

定理1 如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 可导，且有：

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

定理2 如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 都在点 (x,y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 的两个偏导数都存在，且有：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

3. 全微分

(1) 全微分的定义

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，如果函数在点 (x,y) 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为：$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关，

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记作 dz，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$。

如果函数在区域 D 内各点处都可微分，那么称这函数在 D 内可微分。

(2) 定理1（必要条件）

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$。

(3) 定理2（充分条件）

如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则函数在该点可微分。通常把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理。叠加原理也适用于二元以上的函数的情形，例如，如果三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可微分，那么它的全微分就等于它的三个偏微分之和，即

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

4. 隐函数的求导公式

(1) 隐函数存在定理

- **定理1**
  设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内，恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$ 并有：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

- **定理2**
  设函数 $F(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

公式推导
对于定理2的公式（标记为①），基于恒等式 $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$，将等式两端分别对 x 和 y 求导，应用复合函数求导法则得：

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad F_y+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

由于 F_z 连续且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，存在点 (x_0,y_0,z_0) 的一个邻域满足 $F_z\neq 0$，因此可得：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

(2) 方程组的情形

隐函数存在定理**3**
设函数 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，且满足：

$$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,\quad G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$$

其雅可比行列式在点 P 处不为零：

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$$

则在点 P 的某一邻域内，方程组 $F(x,y,u,v)=0$，$G(x,y,u,v)=0$ 恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y)$$

满足初始条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有下列求导公式：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$$

> 式中雅可比记号 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(\alpha,\beta)}$ 表示由函数 F,G 对变量 α,β 构成的二阶行列式。

二、应用

1.几何学应用

(1) 空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \quad t\in[\alpha,\beta] \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

这里假定该方程的三个函数都在 $[\alpha,\beta]$ 上可导，且三个导数不同时为零。

向量 $\vec{T}=\vec{r}'(t_0)=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$ 就是曲线 Γ 在点 M 处的一个切向量。从而曲线 Γ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的：

1. 切线方程：

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

2. 法平面方程：
   通过点 M 且与切线垂直的平面称为曲线 Γ 在点 M 处的法平面。这是以 $\vec{T}=\vec{r}'(t_0)$ 为法向量并通过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的平面，其方程为：

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$$

(2) 曲面的切平面与法线

设曲面 Σ 由隐式方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，$M(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上一点，且函数 F 的偏导数在 M 点连续且不全为零。过 M 点在曲面上任意引一条曲线 Γ，其参数方程为：

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\omega(t)\quad(\alpha\le t\le\beta)$$

其中 $t=t_0$ 对应点 M，且 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$ 不全为零。则曲线 Γ 在 M 点的切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

> 曲面上通过 M 点的一切曲线的切线共面，该平面称为曲面在 M 点的切平面。

- 切平面方程:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

- 法线方程:

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

- 法向量:

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

- 显式曲面情形:
  当曲面方程为显式形式 $z=f(x,y)$ 时，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，则:
  - $F_x=f_x(x,y)$
  - $F_y=f_y(x,y)$
  - $F_z=-1$

当 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续时:

- 法向量:

$$\vec{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$$

- 切平面方程:

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

> 注：示意图显示三维空间中曲面、切平面及法线的关系，其中法向量垂直于切平面，法线沿法向量方向延伸。

2.方向导数与梯度

(1) 方向导数

- 定理
  如果函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 可微分，那么函数在该点沿任一方向 l 的方向导数存在，且有表达式:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

> 其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 是方向 l 的方向余弦，满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$。

(2) 梯度

- 定义
  函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的梯度，记作 $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)$ 或 $\nabla f(x_0,y_0)$，定义为：
  ``

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\,\mathbf{i}+f_y(x_0,y_0)\,\mathbf{j}$$

其中 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$ 称为二维向量微分算子或`Nabla`算子，故 $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$

- 性质
  若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分，$\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与方向 l 同向的单位向量，则有：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{e}_l=|\nabla f(x_0,y_0)|\cos\theta$$

其中 $\theta=\langle\nabla f(x_0,y_0),\vec{e}_l\rangle$ 为梯度向量与方向向量的夹角。

(3) 方向导数与梯度的关系

1. 方向导数的梯度表达式：
   - 方向导数可表示为梯度向量与方向单位向量的点积：

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\nabla f\cdot\vec{e}_l$$

2. 方向导数的极值性质：
   - 当 $\cos\theta=1$（$\theta=0^\circ$）时，方向导数取得最大值：

$$\max\frac{\partial f}{\partial l}=|\nabla f|$$

   ```
   此时方向$~l~$与梯度方向一致。
   ```

   - 当 $\cos\theta=-1$（$\theta=180^\circ$）时，方向导数取得最小值：

$$\min \frac{\partial f}{\partial l} = -|\nabla f|$$

> 此时方向$~l~$与梯度方向相反。

3. 梯度方向的最速上升性：
   - 在任一点处，梯度方向∇f是函数值增加最快的方向
   - 与梯度相反的方向$-\nabla f$是函数值下降最快的方向
   - 与梯度正交的方向上方向导数为零：

$$\nabla f \cdot \vec{e_l} = 0 \quad 当 \quad \theta = 90^\circ$$

3. 多元函数的极值及其求法

(1) 多元函数的极值及最值

- **定理1**（必要条件）
  设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0, y_0) 处有极值，则必有：

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad , \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

- **定理2**（充分条件）
  设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，且 $f_x(x_0, y_0) = 0$，$f_y(x_0, y_0) = 0$。令：

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

  则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下：

  1. 当 $AC - B^2 > 0$ 时具有极值，且：
  - $A < 0$ 时为极大值
  - $A > 0$ 时为极小值
  2. 当 $AC - B^2 < 0$ 时无极值
  3. 当 $AC - B^2 = 0$ 时可能有极值也可能无极值，需进一步讨论

(2) 条件极值：拉格朗日乘数法

求函数 $z = f(x, y)$ 在附加条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的可能极值点：

1. 构造拉格朗日函数：

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

其中 λ 为参数

2. 求解方程组:

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

3. 解出 x,y,λ, 得到的 (x,y) 即为可能极值点

推广到多变量多约束情形
对于函数 $u=f(x,y,z,t)$ 在附加条件:

$$\varphi(x,y,z,t)=0 \quad , \quad \psi(x,y,z,t)=0$$

下的极值问题:

1. 构造拉格朗日函数:

$$L(x,y,z,t,\lambda,\mu)=f(x,y,z,t)+\lambda\varphi(x,y,z,t)+\mu\psi(x,y,z,t)$$

其中 λ,μ 均为参数

2. 求一阶偏导数并设为零:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial t}=0 \\ \varphi(x,y,z,t)=0 \\ \psi(x,y,z,t)=0 \end{cases}$$

3. 解得的 (x,y,z,t) 即为可能极值点

第十章、重积分

一、二重积分的概念及性质

1. 二重积分的概念

对于概念理解时可以考虑物理意义：

- 曲顶柱体的体积
- 平面薄片的质量

2. 二重积分的性质

比较定积分与二重积分的定义可以想到，二重积分与定积分有类似的性质：

- 性质1（积分的线性性质）

$$\iint\limits_{D}[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma=\alpha\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma+\beta\iint\limits_{D}g(x,y)d\sigma$$

  其中 α,β 为常数
- 性质2（积分的可加性）
  若区域 D 可分割为两个闭区域 D_1 与 D_2，则：

$$\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)d\sigma$$

- 性质3（区域面积）
  若在 D 上，$f(x,y)\equiv 1$，σ 为 D 的面积，则：

$$\sigma=\iint\limits_{D}1\cdot d\sigma=\iint\limits_{D}d\sigma$$

  \color{blue}{几何意义：高为1的平顶柱体体积在数值上等于底面积}
- 性质4（保号性）
  若在 D 上，$f(x,y)\leqslant\varphi(x,y)$，则有：

$$\iint\limits_{D}f(x,y)d\sigma\leqslant\iint\limits_{D}\varphi(x,y)d\sigma$$

  特殊情形下，由 $-|f(x,y)|\leqslant f(x,y)\leqslant|f(x,y)|$ 可得：

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|d\sigma$$

- 性质5（估值定理）
  设 M, m 分别是 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 是 D 的面积，则：

  $$m\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)d\sigma \leqslant M\sigma$$

  推导：由 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$ 及性质4可得

  $$\iint_D m d\sigma \leqslant \iint_D f(x,y)d\sigma \leqslant \iint_D M d\sigma$$

  应用性质1和性质3即得证
- 性质6（中值定理）
  设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得：

  $$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

证明：

1. 当 $\sigma \neq 0$ 时，由性质5得 $m \leqslant \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)d\sigma \leqslant M$
2. 根据闭区域上连续函数的介值定理，存在 $(\xi,\eta) \in D$ 使得：

   $$\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)$$

3. 两边乘以 σ 即得证

二、二重积分的计算方法

1. 利用直角坐标系计算二重积分

设积分区域 D 可以用不等式表示：

$$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b$$

其中函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续（如图9-1, 图9-2所示）。

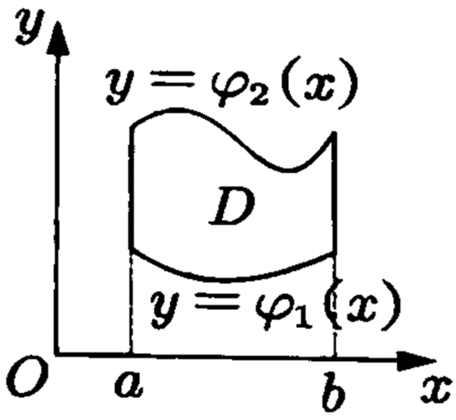

图9－1

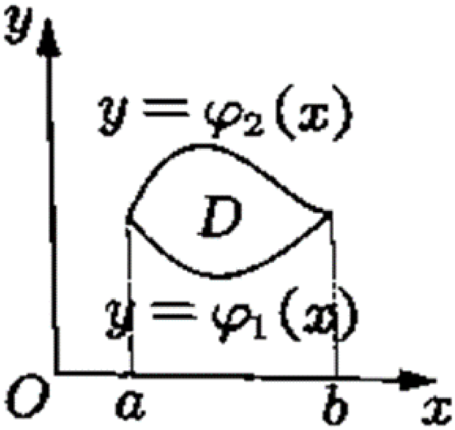

图9－2

则有计算公式:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

类似地，若积分区域 D 可以用不等式表示:

$$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), \quad c \le y \le d$$

其中函数 $\psi_1(y)$、$\psi_2(y)$ 在区间 $[c,d]$ 上连续，则有计算公式:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

(1) X型区域

- 区域定义：积分区域 D 满足不等式 $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, $a \le x \le b$
- 边界特点：区域 D 被夹在两条曲线 $y = \varphi_1(x)$ 与 $y = \varphi_2(x)$ 之间
- **x**范围：x 的取值范围是闭区间 $[a,b]$
- 积分公式:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

(2) Y型区域

- 区域定义：积分区域 D 满足不等式 $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$, $c \le y \le d$

- 边界特点：区域 D 被夹在两条曲线 $x=\psi_1(y)$ 与 $x=\psi_2(y)$ 之间
- **y**范围：y 的取值范围是闭区间 $[c,d]$
- 积分公式：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)dx\right]dy$$

-

2. 用极坐标计算二重积分

设积分区域 D 可用不等式表示：

$$\rho_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\rho_2(\theta),\quad a\leqslant\theta\leqslant\beta$$

其中函数 $\rho_1(\theta)$、$\rho_2(\theta)$ 在区间 $[a,\beta]$ 上连续。

二重积分从直角坐标到极坐标的转换公式为：

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

而闭区域 D 的面积 σ 可表示为：

$$\sigma=\iint_D d\sigma$$

在极坐标系中，面积元素 $d\sigma=\rho\,d\rho\,d\theta$，则：

$$\sigma=\iint_D\rho\,d\rho\,d\theta=\int_a^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int_a^\beta\left[\rho_2^2(\theta)-\rho_1^2(\theta)\right]d\theta$$

3. 对称性化简重积分计算

类似于定积分，重积分也可根据被积函数和积分区域的特征形成化简公式。对于二重积分 $I=\iint_D f(x,y)dxdy$（$f(x,y)$ 在 D 上连续），有以下三种对称性化简方法：

(1) y 轴对称（左右对称）

若积分区域 D 关于 y 轴对称，则：

$$I=\begin{cases}0 & ,\ f(x,y)=-f(-x,y)\\ 2\iint_{D_1}f(x,y)dxdy & ,\ f(x,y)=f(-x,y)\end{cases}$$

其中 $D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,\ x\geqslant 0\}$

(2) x 轴对称（上下对称）

若积分区域 D 关于 x 轴对称，则:

$$I=\begin{cases}0 & ,\ f(x,y)=-f(x,-y)\\ 2\iint_{D_1}f(x,y)dxdy & ,\ f(x,y)=f(x,-y)\end{cases}$$

其中 $D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,\ y\geqslant 0\}$

(3) y=x 对称（轮换对称）

若积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称（区域边界方程不因 x,y 互换而改变），则:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(y,x)dxdy$$

特别推论:

- 对于单变量函数:

$$\iint_D f(x)dxdy=\iint_D f(y)dxdy=\frac{1}{2}\iint_D[f(x)+f(y)]dxdy$$

- 若 $f(x,y)=f(y,x)$:

$$I=2\iint_E f(x,y)dxdy,\quad E=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,\ y\leqslant x\}$$

*4. 积分的换元法

- 定理
  设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续，变换 $T:x=x(u,v),y=y(u,v)$
  将 uOv 平面上的闭区域 D' 变为 xOy 平面上的 D，且满足:
  1. $x(u,v),y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数
  2. 在 D' 上雅可比式 $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$
  3. 变换 $T:D'\to D$ 是一对一的

  则有换元公式:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f\left[x(u,v),y(u,v)\right]|J(u,v)|dudv$$

三、三重积分

1. 利用直角坐标计算三重积分

三重积分的计算比二重积分的计算更为复杂和繁琐，但是计算方法相似，也是先根据被积函数的特点和积分区域的形状选择适当的坐标系，然后确定积分次序（先单后重、先重后单），同时，也要充分利用区域的对称性、被积函数奇偶性和轮换对称性化简三重积分，最后做出正确计算。

设 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域 Ω 上连续，则有下列公式：

- 直角坐标系下三重积分化为累次积分（体积微元 $dv = dxdydz$）：
  a. 穿针法（先单后重法）：
  - xy 型区域：$\begin{cases} z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases}$
  - 计算公式：

    $$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

    其中 D_{xy} 是 Ω 在 xOy 面上的投影
  - xz 型区域：$\begin{cases} y_1(x,z) \le y \le y_2(x,z) \\ (x,z) \in D_{xz} \end{cases}$
  - yz 型区域：$\begin{cases} x_1(y,z) \le x \le x_2(y,z) \\ (y,z) \in D_{yz} \end{cases}$

    有类似公式

  b. 切片法（先重后单法）：
  - Ω 结构：$\begin{cases} (x,y) \in D_z \\ a \le z \le b \end{cases}$
  - 计算公式：

    $$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

    其中 D_z 是 Ω 的竖坐标为 z 的截面在 xOy 面上的投影
  - 其他形式区域：$\begin{cases} (x,z) \in D_y \\ y_1 \le y \le y_2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} (y,z) \in D_x \\ x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$ 有类似公式
- 柱面坐标系下三重积分化为累次积分（体积微元 $dv = rdrd\theta dz$）：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\ drd\theta dz$$

变换关系：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

- 球面坐标系下三重积分化为累次积分（体积微元 $dv = \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$）：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega''} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$

变换关系：$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

三重积分关于区域的对称性、函数的奇偶性以及轮换对称性得公式与二重积分类似

2. 利用重心计算重积分

- 方法：当被积函数为一次函数且积分区域的形状规则时，可以考虑利用形心坐标计算重积分。设 $(\overline{x}, \overline{y})$ 是平面区域 D 的形心，则有：

$$\iint\limits_{D} xd\sigma = \overline{x}\iint\limits_{D} d\sigma, \quad \iint\limits_{D} yd\sigma = \overline{y}\iint\limits_{D} d\sigma$$

- 三重积分扩展：对于三重积分也有类似的公式：

$$\iiint\limits_{\Omega} xdv = \overline{x}V, \quad \iiint\limits_{\Omega} ydv = \overline{y}V, \quad \iiint\limits_{\Omega} zdv = \overline{z}V$$

其中 $V = \iiint\limits_{\Omega} dv$ 为区域 Ω 的体积

3. 曲面的面积

设曲面 S 由方程 $z = f(x,y)$ 给出，D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$。曲面面积的计算公式为：

$$A = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

> 注：该公式也是第一型曲面积分的基本形式

4. 转动惯量

设平面区域 D 的密度为 $\mu(x,y)$，则它对 x 轴和 y 轴的转动惯量 J_x 和 J_y 分别为：

$$J_x = \iint\limits_D y^2 \mu(x,y) d\sigma, \quad J_y = \iint\limits_D x^2 \mu(x,y) d\sigma$$

类似地，密度为 $\mu(x,y,z)$ 的立体 V 对各坐标轴的转动惯量为：

$$J_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dv, \quad J_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\mu(x,y,z)dv, \quad J_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\mu(x$$

对于原点的转动惯量：

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dv$$

5. 引力

设立体 V 的密度为 $\mu(x,y,z)$，立体 V 外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处有质量为 m 的质点，则 V 对质点 P_0 的引力为：

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

其中引力分量为：

a. x 方向分量：

$$F_x = km \iiint\limits_V \frac{x-x_0}{r^3}\mu(x,y,z)dv$$

b. y 方向分量：

$$F_y = km \iiint\limits_V \frac{y-y_0}{r^3}\mu(x,y,z)dv$$

c. z 方向分量：

$$F_z = km \iiint\limits_V \frac{z-z_0}{r^3}\mu(x,y,z)dv$$

距离函数：

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

> k 为引力常数

第十一章、曲线积分与曲面积分

一、弧长积分

1. 对弧长的曲线积分的概念与性质

对弧长的曲线积分的物理背景是：计算曲线形构件的质量。

- 性质1：设 α、β 为常数，则

$$\int_L [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]ds=\alpha\int_L f(x,y)ds+\beta\int_L g(x,y)ds$$

- 性质2：若积分弧段 L 可分为两段光滑的曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1} f(x,y)ds+\int_{L_2} f(x,y)ds$$

- 性质3：设在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)ds\le\int_L g(x,y)ds$$

  a. 特别的有：

$$\left|\int_L f(x,y)ds\right|\le\int_L |f(x,y)|ds$$

2. 第一型曲线积分的计算方法

首先选择合适的参数，将积分曲线用参数方程表示，根据不同的曲线方程变换相应的弧长微分 ds，将第一型曲线积分化为关于参数的定积分。

- 平面曲线：
  a. 曲线 L 为平面曲线，参数方程为：

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}\quad(\alpha\le t\le\beta)$$

  其中 $x(t),y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $x'^2(t)+y'^2(t)\ne 0$，则：

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

b. 曲线 L 的方程为 $y=y(x)$ $(a \le x \le b)$:

$$ds = \sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$$

c. 曲线 L 的方程为 $x=x(y)$ $(c \le y \le d)$:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_c^d f(x(y),y)\sqrt{1+x'^2(y)}dy$$

d. 曲线 L 的方程为 $r=r(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$:

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

- 空间曲线:
  a. 参数方程为:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

  则:

$$ds = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

> 需要特别注意：无论采用什么参数，也不管 L 是平面曲线还是空间曲线，总有 $ds>0$，因此上述定积分中上限始终大于下限。

二、对坐标的曲线积分

1. 对坐标的曲线积分的概念

变力沿曲线所作的功：设一个质点在 xOy 面内受 $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 作用，从 A 沿光滑曲线 L 移至 B，其中函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 L 上连续，要计算移动过程中变力 $\vec{F}(x,y)$ 所作的功。

2.对坐标曲线积分的性质

- **性质1**：设 α、β 为常数，则

$$\int_L [\alpha F_1(x,y) + \beta F_2(x,y)] \cdot d\vec{r} = \alpha \int_L F_1(x,y) \cdot d\vec{r} + \beta \int_L F_2(x,y) \cdot d\vec{r}$$

- **性质2**：若有向曲线弧 L 可分为两段光滑有向曲线弧 L_1 和 L_2，则

$$\int_L F(x,y) \cdot d\vec{r} = \int_{L_1} F(x,y) \cdot d\vec{r} + \int_{L_2} F(x,y) \cdot d\vec{r}$$

- **性质3**：设 L 是有向光滑曲线弧，L^- 是 L 的反向曲线，则

$$\int_{L^-} F(x,y) \cdot d\vec{r} = -\int_L F(x,y) \cdot d\vec{r}$$

3. 将第二型曲线积分化为定积分的要点

选择合适的参数，将积分曲线 L 用参数方程表示，如：

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \le t \le \beta)$$

再按公式计算：

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_a^\beta \{P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\}dt$$

其中 a 和 β 分别对应曲线 L 的起点与终点。

> 注：无论采用什么参数，也不管 L 是平面曲线还是空间曲线，化为定积分时，上限始终对应积分曲线的终点，下限对应积分曲线的起点。

4. 两类曲线积分之间的联系

- 平面曲线：

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$$

  其中 $\alpha(x,y)$、$\beta(x,y)$ 为有向曲线弧 L 在点 (x,y) 处切向量的方向角。
- 空间曲线：

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

其中 $\alpha(x,y,z)$、$\beta(x,y,z)$、$\gamma(x,y,z)$ 为有向曲线弧 Γ 在点 (x,y,z) 处切向量的方向角。

- 向量形式：
  a. $\int_\Gamma A\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma A\cdot\tau ds$
  b. $\int_\Gamma A\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma A_\tau\cdot ds$
  其中 $A=(P,Q,R)$，$\tau=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为单位切向量，
  $d\vec{r}=\tau ds=(dx,dy,dz)$ 为有向曲线元，A_τ 为向量 A 在 τ 上的投影。

5. 格林公式及其应用

- 格林公式
  设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有：

$$\color{blue}{\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_L Pdx+Qdy}$$

  其中 L 是 D 的取正向的边界曲线（逆时针方向）。该公式称为格林公式。
- 第二型平面曲线积分计算方法选择
  考虑积分 $I=\int_L Pdx+Qdy$，根据积分曲线和被积函数特点，按以下策略选择计算方法：
  - 直接参数化法：
  若曲线 L 的参数方程容易得到，且代入参数后被积函数容易积分，则直接化为定积分计算。

```
- **求 $P_y$ 和 $Q_x$ 后分情形处理**：
  a. **$P_y = Q_x$ 的情形**：
     - $L$ 封闭，且在 $L$ 所围区域 $D$ 内 $P_y$、$Q_x$ 连续且处处 $P_y = Q_x$ → $\color{blue}{I = 0}$
     - $L$ 封闭，但在 $L$ 所围区域内除点 $M_0$ 外 $P_y$、$Q_x$ 连续且 $P_y = Q_x$ →
```

$$\color{blue}{I=\int_{L_1}Pdx+Qdy}$$

选择包围 M_0 的简单封闭曲线 L_1（与 L 同向）
- L 不封闭：
1. 寻找 $u(x,y)$ 使 $\color{blue}{du=Pdx+Qdy}$，则

$$I = u(B) - u(A)$$

（A, B 为起点和终点）

2. 改变积分路径到简单路径 L_1（与 L 同起点终点），则

$$I = \int_{L_1} Pdx + Qdy$$

要求 L 与 L_1 所围区域满足 P_y、Q_x 连续

b. $P_y \neq Q_x$ 的情形：

- L 封闭且 P_y、Q_x 在 L 所围区域 D 连续 →

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

（格林公式，L 为 D 边界正向）

- L 不封闭 → 添加有向曲线段 L_1 使 $L + L_1$ 封闭，且 P_y、Q_x 在 $L + L_1$ 所围区域 D 连续，则

$$I = \oint_{L+L_1} Pdx + Qdy - \int_{L_1} Pdx + Qdy$$

通常取 L_1 为平行坐标轴的直线或折线

> 关键说明：
>
> 1. 格林公式成立需满足区域 D 是单连通区域或挖去有限个"洞"的多连通区域
> 2. 添加辅助曲线时，尽量选择使积分易计算的路径（如坐标轴平行线）
> 3. 当 $P_y = Q_x$ 在区域上成立时，积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 与路径无关

三、对面积的曲面积分

第一型曲面积分的计算方法

首先选择合适的参数表示法，将积分曲面用参数方程表示，根据不同的曲面表示形式变换相应的面积微分 dS，将第一型曲面积分化为关于参数的二重积分。

- 曲面方程形式：
  a. 曲面 Σ 投影在 xOy 平面，显式方程为 $z=z(x,y)$ $((x,y)\in D_{xy})$：

$$
dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy
$$

$$
\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy
$$

```
b. 曲面 $\Sigma$ 的参数方程表示为：
```

$$
\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases} \quad ((u,v)\in D)
$$

```
 其中 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 在区域 $D$ 上具有一阶连续偏导数，且法向量
$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$，则：
 $$
 dS = \left\| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times
\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| dudv
 $$
```

$$
\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right\|dudv
$$

```
c. 曲面 $\Sigma$ 采用球坐标表示 $r = r(\theta,\phi)$：
    参数方程为：
```

$$
\begin{cases} x=r(\theta,\phi)\sin\theta\cos\phi \\ y=r(\theta,\phi)\sin\theta\sin\phi \\ z=r(\theta,\phi)\cos\theta \end{cases} \quad (\alpha\le\theta\le\beta,\ \gamma\le\phi\le\delta)
$$

```
    则面积元素为：
```

$$
dS=\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial r}{\partial\phi}\right)^2}\cdot r\sin\theta d\theta d\phi
$$

积分公式为：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \int_{\gamma}^{\delta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y,z)\sqrt{r^2+r_\theta^2+r^2\sin^2\theta r_\phi^2}\, r\sin\theta d\theta d\phi$$

```
特殊地，当 $r = R$ (球面) 时：
$$
dS = R^2 \sin\theta  d\theta d\phi
$$
```

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = R^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)\sin\theta d\theta d\phi$$

> 需要特别注意：第一型曲面积分与曲面的定向无关，面积元素 $dS > 0$ 恒成立。参数区域 D 的选择需完全覆盖曲面，且参数变换需满足正则条件（法向量处处非零）。当使用投影方法时，要求曲面与投影方向满足单射条件。

四、对坐标的曲面积分

1. 两类曲面积分的关系

$$\begin{aligned}&\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy\\ =&\iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS\end{aligned}$$

其中 $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 是有向曲面 S 在点 (x,y,z) 处的单位法向量，P,Q,R 在曲面 S 上连续。

2. 如何将组合式的第二型曲面积分化为单一式的第二型曲面积分

组合式指 P,Q,R 至少有两项不为零。若曲面 S 为分片光滑的有向曲面，P,Q,R 在 S 上连续，则：

- 当 $S: z = z(x,y)$ 时：
  a. 单位法向量：

$$n = \pm \left\{ \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \right\}$$

```
（上侧取正，下侧取负）
b. 投影关系：
```

$$dydz = \cos\alpha dS, \quad dzdx = \cos\beta dS, \quad dxdy = \cos\gamma dS$$

```
c. 转换关系：
```

$$dydz = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} dxdy = -z_x dxdy, \quad dzdx = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} dxdy = -z_y dxdy$$

```
d. 积分公式：
```

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (-z_x P - z_y Q + R) dxdy$$

- 当曲面 S 的方程为 $y = y(x,z)$ 及 $x = x(y,z)$ 时，转化方法类似

3. 如何选择第二型曲面积分的计算方法

根据积分区域和被积函数特点，按以下策略选择：

- 曲面封闭+偏导数连续：
  曲面 S 封闭指向外侧，P, Q, R 在 S 所围区域 V 上有连续偏导数 →

  $$I = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iiint_V (P_x + Q_y + R_z) dv$$

  （指向内侧时取负号）
- 曲面封闭+有奇点：
  曲面 S 封闭指向外侧，但 P, Q, R 在 V 内除点 M_0 外连续，且 $P_x + Q_y + R_z = 0$ →

  $$I = \iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

  其中 Σ 为包围 M_0 且与 S 同侧的封闭曲面
- 曲面不封闭+添加辅助面：
  添加简单有向曲面 S_1 使 $S + S_1$ 封闭指向外侧，P, Q, R 在其所围区域 V 上连续

→

$$I=\iint_{S+S_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy-\iint_{S_1} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

通常取 S_1 为平行坐标的平面

- 曲面不封闭+一对一投影：
  曲面 S 向某坐标面投影一对一 →

$$I=\pm\iint_D [P(-z_x)+Q(-z_y)+R]dxdy$$

例如 $S: z=z(x,y),(x,y)\in D$

- 曲面由隐式方程给出：
  曲面 $S: F(x,y,z)=0$ →

$$I=\iint_S \langle P,Q,R\rangle\cdot n dS$$

其中 $n=\dfrac{\langle F_x,F_y,F_z\rangle}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$
（上侧取正，下侧取负）

4. 斯托克斯公式

- 定理1：设Γ为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面，Γ的正向与Σ的侧符合右手规则，函数$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在曲面Σ（连同边界Γ）上具有一阶连续偏导数，则有：

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+R$$

> 该公式叫做斯托克斯公式。
> 记忆方法：
> $$
> \displaystyle\iint_\sum
> \begin{vmatrix}

dydz & dzdx & dxdy \
\dfrac{\partial }{\partial x} & \dfrac{\partial }{\partial y} & \dfrac{\partial }
{\partial z} \
P & Q & R \
\end{vmatrix}

=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz
$$

> 右手规则说明：
> a. 当右手四指沿闭曲线 Γ 的正向弯曲时
> b. 拇指所指方向即为曲面 Σ 的指定侧

第十二章、无穷级数

一、常数项级数的概念和性质

1. 常数项级数的概念

- 定义：给定数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，由该数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为（常数项）无穷级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项

- 部分和：定义级数的前 n 项和：

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

- 收敛性：
当 n 取 $1, 2, 3, \cdots$ 时，部分和数列 $\{s_n\}$ 的极限存在：

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \quad \text{(有限值)}$$

则称级数收敛，否则称发散

2. 收敛级数的基本性质

设 $\sum u_n$、$\sum v_n$ 为收敛级数，则：

- 性质1（数乘不变性）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} k u_n \text{ 收敛}, \quad \text{其和为 } ks \quad (k \text{ 为常数})$$

- 性质2（线性组合性）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) \text{ 收敛}, \quad \text{其和为 } s \pm \sigma$$

- 性质3（有限项变动性）：
  在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性
- 性质4（加括号不变性）：
  对收敛级数任意加括号后所成的级数仍收敛且和不变
- 性质5（收敛必要条件）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

*3. 柯西审敛原理

- 定理（柯西审敛原理）：
  级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件：$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N > 0$，使得当 $n > N$ 时，$\forall\, p \in \mathbb{Z}^+$，都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

二、常数项级数的审敛法

1. 正项级数及其审敛法

- 定理1：
  正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是：它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界
- 定理2（比较审敛法）：
  设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant v_n\ (n = 1, 2, \ldots)$：
  - 若 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum u_n$ 收敛
  - 若 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum v_n$ 发散

- 推论:
  设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都是正项级数，如果 $\sum v_n$ 收敛，且存在正整数 N，使当 $n \geqslant N$ 时有 $u_n \leqslant kv_n\ (k>0)$，则 $\sum u_n$ 收敛

- **定理3**（比较审敛法的极限形式）：
  设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都是正项级数:
  - 若 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l\ (0 \leqslant l < +\infty)$ 且 $\sum v_n$ 收敛，则 $\sum u_n$ 收敛
  - 若 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l > 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$，且 $\sum v_n$ 发散，则 $\sum u_n$ 发散
- **定理4**（比值审敛法，达朗贝尔判别法）：
  设 $\sum u_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$:
  - $\rho < 1$ 时级数收敛
  - $\rho > 1$ 或 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ 时发散
  - $\rho = 1$ 时不确定
- **定理5**（根值审敛法，柯西判别法）：
  设 $\sum u_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$:
  - $\rho < 1$ 时收敛
  - $\rho > 1$ 或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \infty$ 时发散
  - $\rho =$ 极1 时不确定
- **定理6**（极限审敛法）：
  设 $\sum u_n$ 为正项级数:
  - 若 $\lim_{n\to\infty} nu_n = l > 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$，则发散
  - 若 $p > 1$ 且 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l\ (0 \leqslant l < +\infty)$，则收敛

2. 交错级数判敛

- 定义:
  若 $u_n > 0$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$ 为交错级数
- **定理7**（莱布尼茨定理）：
  如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足:
  - $u_n \geqslant u_{n+1}\ (n = 1, 2, 3\cdots)$
  - $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
    则级数收敛，且:
  - 和 $s \leqslant u_1$
  - 余项 r_n 满足 $|r_n| \leqslant u_{n+1}$

3. 任意项级数的审敛方法

- 定义：
  - 绝对收敛：若 $\sum |u_n|$ 收敛，则 $\sum u_n$ 绝对收敛
  - 条件收敛：若 $\sum |u极n|$ 发散但 $\sum u_n$ 收敛，则条件收敛
- **定理8**：
  若级数 $\sum u_n$ 绝对收敛，则必定收敛
- **定理9**：
  绝对收敛级数改变项的位置后仍收敛，且与原级数有相同的和（可交换性）
- **定理10**（绝对收敛级数的乘法）：
  设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都绝对收敛，其和分别为 s 和 σ，则它们的 柯西乘积：

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \cdots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_nv_1) + \cdots$$

  绝对收敛，且其和为 $s\sigma$

三、幂级数

1. 函数项级数的概念

定义在区间 I 上的函数列：
$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x), \ldots$

其构成的函数项级数为：
$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$

- 收敛点与发散点：
  对于 $x_0 \in I$，若常数项级数
  $u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$ 收敛，则 x_0 为收敛点，否则为发散点
- 收敛域与发散域：
  收敛点 的全体称为收敛域
  发散点 的全体称为发散域
- 和函数：
  在收敛域上，函数项级数的和是函数 $s(x)$，满足：

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

  其中 $s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$

2. 幂级数及其收敛性

阿贝尔定理

设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$:

- 若在 $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$ 收敛 $\Rightarrow$ $|x| < |x_0|$ 时绝对收敛
- 若在 $x = x_0$ 发散 $\Rightarrow$ $|x| > |x_0|$ 时发散

收敛半径与收敛域

- 收敛半径 R:
  若幂级数 $\sum a_n x^n$ 不全域收敛，则存在 $R > 0$ 使:
  - $|x| < R$ 时绝对收敛
  - $|x| > R$ 时发散
- 收敛域:
  由 $x = \pm R$ 处的收敛性决定:
  $[-R, R]$, $[-R, R)$, $(-R, R]$ 或 $(-R, R)$

收敛半径求法

设 $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，则收敛半径:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

收敛半径补充求法

当比值法失效时，用根值法:
设$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$，则收敛半径:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

幂级数运算性质

- 线性运算后收敛域为各收敛域的交集
- 收敛半径在逐项求导/积分后不变

3. 幂级数的和函数

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，则：

连续性

$s(x)$ 在收敛域 I 上连续

可积性

$s(x)$ 在收敛域 I 上可积，且：

$$\int_0^x s(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\quad (x\in I)$$

可导性

$s(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内可导，且：

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\quad (|x|<R)$$

四、函数展开成幂级数

函数展开成幂级数

定理

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充分必要条件是：
在该邻域内 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0,\quad x\in U(x_0)$$

常用展开式（麦克劳林级数）

- 指数函数：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

- 三角函数：

- 正弦函数:

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

- 余弦函数:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\text{极}1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

- 对数函数:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots,\quad x\in(-1,1]$$

- 幂函数:

$$(1+x)^a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1,1)$$

  - 特别情形（$a=-1$）：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots,\quad x\in(-1,1)$$

展开方法

函数展开为幂级数常用方法:

- 直接法:
  计算任意阶导数，验证余项 $R_n(x)\to 0$（较困难）
- 间接法（推荐）：
  - 变量代换（如 $t=kx$）
  - 级数加减运算
  - 利用幂级数的 逐项求导 和 逐项积分 性质
  - 基于已知展开式进行组合变换

五、傅里叶级数

1. 三角级数与三角函数系的正交性

设三角级数为:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- 三角函数系:
  $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$
- 正交性（在 $[-\pi, \pi]$ 上）：
  - $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
  - $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
  - $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \cdots; k \neq n)$$
  - 其他组合也有类似正交性，即 任意不同两个函数的乘积积分为零

2. 函数展开成傅里叶级数

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，其傅里叶级数为:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

- 傅里叶系数:
  - $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$
  - $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ （注：$n = 0$ 时对应 a_0)}
  - $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

> 关键说明:
>
> - 当上述积分存在时，a_0, a_n, b_n 称为 傅里叶系数
> - 代入系数后得到的三角级数称为 傅里叶级数

3. 收敛定理（狄利克雷充分条件）

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，若满足：

- 在一个周期内连续，或只有有限个第一类间断点
- 在一个周期内至多只有有限个极值点

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且：

- 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$
- 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]$$

其中 $f(x^-)$ 和 $f(x^+)$ 分别是 $f(x)$ 在 x 处的左、右极限

4. 正弦级数与余弦级数

- 正弦级数
  - $$\left.\begin{aligned} a_n &= 0 & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx & (n=1,2,3,\cdots) \end{aligned}\right\}$$
  - 奇函数的傅里叶级数是只含有正弦项的正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

- 余弦级数
  - $$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n &= 0 & (n=1,2,3,\cdots) \end{aligned}\right\}$$
  - 偶函数的傅里叶级数是只含有常数项和余弦项的余弦级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

5. 一般周期的傅里叶级数

- 周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数
  设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足收敛定理的条件，则它的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\quad(x\in\mathbb{C})$$

其中

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots)\\
b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\quad(n=1,2,3,\cdots)\\
\mathbb{C}&=\left\{x\mid f(x)=\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]\right\}
\end{aligned}$$

- 奇函数情形:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\quad(x\in\mathbb{C})\\
b_n&=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\quad(n=1,2,3,\cdots)
\end{aligned}$$

- 偶函数情形:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\quad(x\in\mathbb{C})\\
a_n&=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots)
\end{aligned}$$