第一部分 恒定磁场

一、 恒定电流

1. 电流与电流密度

定义

- 电流($\boldsymbol{I}$)：通过截面的电荷随时间的变化率，规定正电荷移动的方向为正方向

$$\boldsymbol{I}=\frac{dq}{dt}$$

- 电流密度($\boldsymbol{j}$)：导体中任意一点电流密度$\boldsymbol{j}$的方向为该点正电荷运动的方向，大小等于单位时间内从高该店附近垂直于正电荷运动方向的单位面积的电荷

$$\boldsymbol{j}=\frac{\Delta Q}{\Delta t\Delta S\cos\alpha}=\frac{\Delta I}{\Delta S\cos\alpha}$$

推论

1. 电流与电流密度的关系

$$\boldsymbol{I}=\int_S \boldsymbol{j}\boldsymbol{S}$$

2. 电流的微观形式

$$\Delta I = env_d \Delta S$$
$$\boldsymbol{j} = env_d$$

2. 电流的连续性方程

$$\frac{dQ}{dt} = I = \oint_S \boldsymbol{j} d\boldsymbol{S}$$

推论

1. 恒定电流条件

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \text{即} \oint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \text{或} \oint_S d\boldsymbol{I} = 0$$

2. 基尔霍夫第一定律
在电路的任意一个节点上，所有流入该节点的电流之和等于所有流出该节点的电流之和。

$$\sum I_{\text{流入}} = \sum I_{\text{流出}} \leftrightharpoons \sum I = 0$$

3. 欧姆定律的微分形式

定义

通过导体中任一点的电流密度j与电场强度E成正比，电场强度大的地方，电流密度也大；两者方向相同，大小成正比关系。可见，电流密度和导体材料的性质有关，而与导体的形状和大小无关。

在导体中取一长为dl，截面积为dS的柱体元，dS上的电流密度j与dS相垂直。设柱体元两端面之间的电压为dU，由欧姆定律可知，通过柱体元端面dS的电流为:

$$dI = \frac{dU}{R}$$

式中R为柱体元的电阻。导体的电阻率为ρ，则有$R=\rho dl/dS$。于是上式可写为：

$$dI=\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}dS$$

有：

$$\frac{dI}{dS}=\frac{1}{\rho}\frac{dU}{dl}$$

因为$j=dI/dS$，$dU=Edl$，所以由上式可得：

$$j=\frac{1}{\rho}E=\gamma E$$

式中γ叫做电导率，E是导体内的电场强度。

欧姆定律的微分形式

$$j=\frac{1}{\rho}E=\gamma E$$

适用条件

一般来说，在导体内的电场强度$E<10^5\ \mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$的情况下，金属导体的电阻率$\rho$（或电导率$\gamma$）可以视为常量，此时$j$与$E$之间的关系为线性关系。当金属导体内的$E>10^3\sim10^4\ \mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$时，电导率$\gamma$也要受$E$的影响，即$\gamma=\gamma(E)$，这时$j$与$E$之间就是非线性关系了。

推论

在恒定电流的情况下，在导体内部任取一闭合曲面S，有：

$$\oint_S \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_S \gamma\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=0$$

如果导体的电导率γ是均匀的，则对导体内任一闭合曲面S，有：

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

根据高斯定理，结合上式可知，在恒定电流的情况下，电导率均匀的导体内部没有净电荷，电荷只能分布在导体的表面处（或分界面上）。

二、电源、电动势

电源

电源是提供非静电力的装置，用于维持导体两端的恒定电势差，从而形成恒定电流。

- 工作原理：在电源内部，非静电力 F' 克服静电力 F，将正电荷从负极（B）移回正极（A）
- 能量转换：非静电力的做功过程，将其他形式的能量（如化学能、机械能）转化为电能

电动势($\mathcal{E}$)

单位正电荷闭合回路一周时，非静电力所做的功为电源的电动势。

Proof

如以$\boldsymbol{E}_k$表示非静电场强度（指作用在单位正电荷上的非静电力，在电源内部，$\boldsymbol{E}_k$的方向与静电场强度$\boldsymbol{E}$的方向相反），W为非静电力所做的功，$\mathcal{E}$表示电源电动势，那么由上述电动势的定义，有：

$$\mathcal{E} = -\frac{W}{q} = \oint_L \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l}$$

考虑到在闭合回路中，外电路的导线中没有非静电场，非静电场强度$\boldsymbol{E}_k$只存在于电源内部，故在外电路上有：

$$\oint_{外} \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

这样，电动势可改写为：

$$\mathcal{E} = \oint_L \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{内} \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l}$$

电动势的性质

- 方向：电动势虽然不是矢量，但为了便于判断在电流通过时非静静电力是做正功还是做负功，通常把电源内部电势升高的方向，即从负极经电源内部到正极的方向，规定为电动势的方向。
- 单位：电动势的单位和电势的单位相同。
- 大小：电源电动势的大小只取决于电源本身的性质。一定的电源具有一定的电动势，与外电路无关。

三、磁场 磁感强度

定义

磁场是存在于运动电荷（包括电流）周围空间的一种特殊物质。磁场对位于其中的运动电荷（或电流）有力的作用。因此，运动电荷与运动电荷之间、电流与电流之间、电流（或运动电荷）与磁铁之间的相互作用，都可以看成是它们中任意一个所激发的磁场对另一个施加作用力的结果。

磁感强度B的定义

$$B = \frac{F}{qv}$$

磁场方向与磁力线

磁感强度B是矢量，它的方向规定为：小磁针静止时北极所指的方向。磁力线是用来形象地描述磁场的，磁力线的方向就是磁场方向。

由上述讨论可以知道，磁场力F既与运动电荷的速度v垂直，又与磁感强度B垂直，且相互构成右手螺旋关系，故它们间的矢量关系式可写成：

\boldsymbl$F = q\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}$

式中v与B之间夹角为α，那么F的大小为$F = qvB\sin\alpha$。

磁感强度的单位

在国际单位制中，B的单位是$\mathrm{N \cdot s \cdot C^{-1} \cdot m^{-1}}$或$\mathrm{N \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}}$，其名称为特斯拉，符号为T。

$1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{N \cdot A^{-1} \cdot m^{-1}}$

四、毕奥-萨伐尔定律

1. 毕奥-萨伐尔定律

定义

载流导线中有一电流元Idl，在真空中某点P处的磁感强度dB的大小，与电流元的大小Idl成正比，与电流元Idl和电流元到点P的矢量r间的夹角θ的正弦成正比，并与电流元到点P的距离r的二次方成反比，即：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

式中μ_0叫做真空磁导率，在国际单位制中，其值为$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot A^{-2}}$，而$dB$的方向垂直于$dl$和$r$所组成的平面，并沿$dl \times r$的方向，即由$Idl$经小于$180^\circ$的角转向$r$时的右螺旋前进方向。

若用矢量式表示，则有：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\boldsymbol{dl} \times \boldsymbol{r}}{r^3}$$

式中e_r为沿矢量r的单位矢量，毕奥-萨伐尔定律也可写成：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl \times e_r}{r^2}$$

这样，任意载流导线在点P处的磁感强度B可以由下式求得：

$$B = \oint_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl \times e_r}{r^2}$$

毕奥-萨伐尔定律的实验基础

毕奥-萨伐尔定律值是毕奥和萨伐尔的实验为基础，又由拉普拉斯经过科学抽象得到的，但它不能由实验直接证明。然而由这个定律出发得出的结果都很好地和实验相符合。

2. 磁矩

定义

一平面圆电流的面积为S，电流为I，e_n为圆电流平面的正法线单位矢量，它与电流I的流向遵守右手螺旋定则，即右手四指顺着电流流动方向回转时，大拇指的指向为圆电流正法线单位矢量e_n的方向。我们定义圆电流的磁矩为：

$$m = ISe_n$$

m的方向与圆电流的正法线单位矢量e_n的方向相同，m的量值为IS。应当指出，上式对任意形状的平面载流线圈都是适用的。

圆电流的磁感强度

依此，圆电流的磁感强度可写成如下矢量形式：

$$B = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3}e_n$$

3. 运动电荷的磁场

定义

电流所激起的磁场，其实是由运动电荷所激发的。运动电荷能激发磁场已由许多实验所直接证实。

设一电流元Idl的截面积为S，此电流元中作定向运动的电荷数密度为n，为简便计，这里以正电荷为研究对象，每个电荷均q，定向运动速度均v。此电流元中的电流密度$j = nqv$。因此，有：

$Idl = jSdl = nqvSdl$

于是，毕奥-萨伐尔定律的表达式可写成：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nqvSdl \times r}{r^3}$$

式中$Sdl = dV$为电流元的体积，$ndV = dN$为电流元中作定向运动的电荷数。那么，一个以速度v运动的电荷，在距它r处所激发的磁感强度为：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \times r}{r^3}$$

由于e_r是矢量r的单位矢量，故上式亦可写成：

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv \times e_r}{r^2}$$

磁场方向与适用范围

B的方向垂直于v和r组成的平面。当q为正电荷时，B的方向为矢量$v \times r$的方向；当q为负电荷时，B的方向与矢量$v \times r$的方向相反。

应指出，运动电荷的磁场表达式有一定适用范围，它只适用于运动电荷的速率v远小于光速c（即$v/c \ll 1$）的情况。对于v接近于c的情形，该式就不适用了，这时，运动电荷的磁场应考虑到相对论效应。