第一章、函数与极限

一、函数

- 定义：函数是一种映射关系，将定义域中的每个元素映射到值域中的唯一元素。
- 常见函数：
  - 多项式函数：$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$
  - 指数函数：$f(x) = a^x$
  - 对数函数：$f(x) = \log_a x$
  - 三角函数：$\sin(x)$,$\cos(x)$,$\tan(x)$

二、极限

- 定义：当自变量趋近于某个值时，函数值趋近于某个常数。
- 极限的性质：
  - 唯一性
  - 局部有界性
  - 保号性
- 常见极限：

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

第二章、导数与微分

一、导数

- 定义：函数在某点的变化率。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

- 极坐标形式下的导数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r'(\theta)sin\theta + r(\theta)cos\theta}{r'(\theta)cos\theta - r(\theta)sin\theta}$$

二、函数求导法则

1. 和差积商的求导法则

$$
\begin{aligned}
&[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x) \\
&[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right] = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x) \leq 0)
\end{aligned}
$$

2. 反函数的求导法则

$$
[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}
$$

3. 复合函数的求导法则

$$
[\ f[g(x)]\ ]' = f'[g(x)] \cdot g'(x)
$$

三、微分

- 定义：函数在某点的线性近似。

$$
dy = f'(x)dx
$$

第三章、微分中值定理和导数应用

一、微分中值定理

- 罗尔定理：若$f(a) = f(b)$，则存在$c \in (a, b)$使得$f'(c) = 0$。
- 拉格朗日中值定理：存在$c \in (a, b)$使得$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$。

- 柯西中值定理：若$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$g'(x)\neq 0$，则存在$c\in(a,b)$使得：

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

二、洛必达法则

- **定理1**
  设
  (1) 当$x\to a$时，函数$f(x)$及$F(x)$都趋于零；
  (2) 在点a的某去心邻域内，$f'(x)$及$F'(x)$都存在且$F'(x)\neq 0$；

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

- **定理2**
  设
  (1) 当$x\to\infty$时，函数$f(x)$及$F(x)$都趋于零；
  (2) 在$|x|>N$时$f'(x)$及$F'(x)$都存在且$F'(x)\neq 0$
  (3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在（或为$\infty$）

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$$

三、泰勒公式

如果函数$f(x)$在x_0处具有n阶导数，那么存在x_0的一个邻域，对于该邻域的任一x，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{n!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + .$$

1. 拉格朗日余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

（其中ξ介于x和x_0之间）

2. 佩亚诺余项

$$R_n(x) = o(x^n)$$

四、单调性、极值、凹凸性

- 单调性：$f'(x) > 0$则函数单调递增，$f'(x) < 0$则函数单调递减。
- 极值：$f'(x) = 0$且$f''(x) > 0$则为极小值，$f''(x) < 0$则为极大值。
- 凹凸性：$f''(x) > 0$则函数凹，$f''(x) < 0$则函数凸。

五、曲率

曲率是描述曲线在某一点处弯曲程度的量。对于平面曲线，曲率的计算公式如下：

1. 参数方程形式

如果曲线由参数方程$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$给出，曲率$\kappa$的计算公式为：

$$\kappa = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

其中：
-$x'(t)$和$y'(t)$分别是$x(t)$和$y(t)$对参数t的一阶导数；

-$x''(t)$和$y''(t)$分别是$x(t)$和$y(t)$对参数t的二阶导数。

2. 显函数形式

如果曲线由显函数$y = f(x)$给出，曲率κ的计算公式为：

$$\kappa = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

其中：
-$f'(x)$是$f(x)$的一阶导数；
-$f''(x)$是$f(x)$的二阶导数。

3. 极坐标形式

如果曲线由极坐标方程$r = r(\theta)$给出，曲率κ的计算公式为：

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

其中：

- $r' = \dfrac{dr}{d\theta}$；
- $r'' = \dfrac{d^2r}{d\theta^2}$。

4. 曲率的几何意义

- 曲率κ越大，曲线在该点处的弯曲程度越大；
- 曲率$\kappa = 0$表示曲线在该点处是直线（无弯曲）；
- 曲率的倒数$\rho = \dfrac{1}{\kappa}$称为曲率半径，表示曲线在该点处的最佳拟合圆的半径。

第四章、不定积分

一、定义

- 不定积分：求导的逆运算。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中$F'(x) = f(x)$，C为常数。

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\cot x$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\sec x$	$\ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
$\csc x$	$\ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\rvert$

二、换元法（凑微分）

- 第一类换元法
  设$f(u)$具有原函数$F(u)$，即

$$F'(u)=f(u),\int f(u)du=F(u)+C$$

如果u是中间变量：$u=\varphi(x)$，且设$\varphi(x)$可微，那么，根据复合函数微分法，有

$$dF[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$$

而根据不定积分的定义，得

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C=\left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

- 第二类换元法
  设$x=\psi(t)$是单调的可导函数，并且$\psi'(t)\neq 0$.又设$f[\psi(t)\psi'(t)]$具有原函数，则有

$$\int f(x)dx=\int f[\psi(t)]\psi'(t)dt$$

三、分部积分法

$$\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx$$

第五章、定积分

一、定义

- 定积分：函数在区间上的累积量。

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

二、定积分的性质

- 线性性
- 区间可加性
- 积分中值定理：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则存在$c\in[a,b]$使得：

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

- 柯西-施瓦茨不等式

$$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \le (\int_a^b f(x)^2dx)(\int_a^b g(x)^2dx)$$

三、换元法

假设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，函数$x=\varphi(t)$满足条件：

1. $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$
2. $\varphi(t)$在$[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域$R_\varphi=[a,b]$，有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

四、反常积分

1. 无穷限的反常积分

(1) 无穷限的反常积分定义

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，任取 $t>a$，作定积分 $\int_a^t f(x)\,dx$，再求极限：

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

这个对变上限定积分的算式称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上的反常积分，记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx)$$

收敛与发散的定义：

- 如果极限存在，称反常积分收敛，极限值为积分值
- 如果极限不存在，称反常积分发散

类似地，设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，任取 $t<b$

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx \quad (4-2)$$

称为函数在 $(-\infty,b]$ 上的反常积分，记为 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$$

收敛条件：

- 极限存在则收敛，极限值为积分值
- 极限不存在则发散

(2) 扩展到整个实数轴的反常积分

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，反常积分定义为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

收敛条件：

- 当且仅当 $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ 和 $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ 均收敛时收敛
- 收敛时积分值为两部分之和
- 任意一部分发散则整体发散

上述积分统称为无穷限的反常积分。

(3) 牛顿-莱布尼茨公式的应用

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数：

- 在 $[a, +\infty)$ 上：

  $$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

  若 $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ 不存在，则积分发散
- 在 $(-\infty, b]$ 上：

  $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

  若 $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ 不存在，则积分发散
- 在 $(-\infty, +\infty)$ 上：

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

  若任一极限不存在，则积分发散

记法：

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x),\quad [F(x)]_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$

2. 无界函数的反常积分

(1) 瑕点为端点的反常积分定义与敛散性

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点：

- 若极限 $\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$（记为极限 (4-4)）存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛，并称此极限为该反常积分的值
- 若极限 (4-4) 不存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，点 b 为$f(x)$的瑕点：

- 反常积分定义为：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx\quad\text{(4-5')}$$

- 若极限 $\lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$（记为极限 (4-5)）存在，则反常积分收敛，极限值为积分值
- 若极限 (4-5) 不存在，则反常积分发散

(2) 瑕点在区间内部的反常积分定义与敛散性

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c)$ 及 $(c,b]$ 上连续，点 c 为 $f(x)$ 的瑕点：

- 反常积分定义为：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\quad\text{(4-6)}$$

- 敛散性判定：

- 当且仅当 $\int_a^c f(x)\,dx$ 和 $\int_c^b f(x)\,dx$ 均收敛时，$\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛
- 收敛时积分值为两部分之和：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx\right) + \left(\lim_{s\to c^+}\int_s^b f(x)\,dx\right)$$

- 若 $\int_a^c f(x)\,dx$ 或 $\int_c^b f(x)\,dx$ 至少一个发散，则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散

第六章、定积分的运用

一、弧长公式

在微积分中，计算曲线长度的公式根据坐标系的不同形式有所区别。以下是直角坐标系、参数坐标系和极坐标系下的曲线长度公式：

1. 直角坐标系形式

如果曲线由函数$y = f(x)$表示，且x在区间$[a, b]$上变化，则曲线长度L的公式为：

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

推导过程：

- 曲线的微小弧长ds可以表示为：

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

- 对ds从a到b积分，得到总长度：

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

2. 参数坐标形式

如果曲线由参数方程$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$表示，且参数$t$在区间$[t_1, t_2]$上变化，则曲线长度$L$的公式为：

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

推导过程：

- 曲线的微小弧长ds可以表示为：

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

- 对ds从t_1到t_2积分，得到总长度：

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt$$

3. 极坐标形式

如果曲线由极坐标方程$r = r(\theta)$表示，且角度θ在区间$[\alpha, \beta]$上变化，则曲线长度L的公式为：

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \, d\theta$$

推导过程：

- 极坐标与直角坐标的关系为：

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

- 对x和y分别求导：

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta$$

- 弧长微分ds可以表示为：

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

代入后化简得到：

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

- 对ds从α到β积分，得到总长度：

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

总结

- 直角坐标系形式：

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

- 参数坐标形式：

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

- 极坐标形式：

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

第七章 微分方程

一、定义

- 微分方程：含有未知函数及其导数的方程

二、常见微分方程及解法

1. 一阶线性微分方程：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

- 积分因子法：

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

2. 可分离变量微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

- 分离变量后积分：

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$$

3. 二阶常系数齐次微分方程：

$$y''+py'+qy=0$$

- 求解特征方程 $r^2+pr+q=0$：
    - 两个不同实根 r_1,r_2：

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$

    - 一个重根 r：

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$$

  - 共轭复根 $a \pm bi$：

$$y = e^{ax}(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx))$$

4. 二阶常系数非齐次微分方程：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

(1) 求解对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

- 特征方程法（常系数）：

$$r^2 + pr + q = 0$$

- 两个实根：

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

- 重根：

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$$

- 共轭复根：

$$y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

(2) 求特解 $y_p(x)$

- 待定系数法：
  - 根据 $g(x)$ 形式假设特解：
    - 多项式：$y_p = Ax^n + \ldots$
    - 指数函数：$y_p = Ae^{kx}$
      - 三角函数：$y_p = A \sin \omega x + B \cos \omega x$
      - 与齐次解重复时乘以 x^k
- 常数变易法：

$$y_p = u_1(x)y_{h1}(x) + u_2(x)y_{h2}(x)$$

解方程组:

$$\begin{cases} u_1' y_{h1} + u_2' y_{h2} = 0 \\ u_1' y_{h1}' + u_2' y_{h2}' = g(x) \end{cases}$$

求解特解技巧

- 待定系数法技巧:
  - $g(x)$ 为多项式：假设同次多项式
  - $g(x) = e^{kx}$：若e^{kx}为齐次解则乘以x
  - $g(x) = \sin \omega x$：假设$A \sin \omega x + B \cos \omega x$
  - 组合形式叠加假设
  - 常数变易法简化:
  - 优先选择简单的y_{h1}, y_{h2}
  - 使用积分技巧简化计算

(3) 写出通解

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

(4) 解题示例

方程：$y'' - 3y' + 2y = e^x$

- 齐次解：$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1, 2$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

- 特解：设$y_p = Axe^x$
  代入得:

$$y_p' = Ae^x + Axe^x, \quad y_p'' = 2Ae^x + Axe^x$$

$$(2Ae^x + Axe^x) - 3(Ae^x + Axe^x) + 2Axe^x = e^x$$

$$\Rightarrow -Ae^x = e^x \Rightarrow A = -1$$

- 通解:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x$$

(5) 总结

- 先求齐次解 y_h
- 根据 $g(x)$ 形式求特解 y_p
- 通解 $y = y_h + y_p$
- 当 $g(x)$ 含齐次解项时乘以 x^k