第一部分 矩阵运算

一、矩阵乘法性质

1. 矩阵乘法性质

矩阵乘法

设 A 为 $m \times s$ 矩阵，B 为 $s \times n$ 矩阵，则矩阵乘积 $C = AB$ 为 $m \times n$ 矩阵，其元素

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$$

(1) 重要性质

结合律

$$(AB)C = A(BC)$$

证明

设 $A = (a_{ik})_{m \times s}$，$B = (b_{kj})_{s \times n}$，$C = (c_{ij})_{n \times p}$

左边 $(AB)C$ 的第 i 行第 j 列元素为:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}\right)c_{jl}=\sum_{k=1}^{s} a_{ik}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}c_{jl}\right)=\text{右边}A(BC)\text{元素}$$

(2) 非交换性

⚠ 矩阵乘法不满足交换律

反例:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}4&6\\4&6\end{pmatrix}\neq BA=\begin{pmatrix}3&3\\7&7\end{pmatrix}$$

二、转置矩阵性质

🕮 转置矩阵

对于矩阵 A，其转置矩阵 A^T 定义为将 A 的行列互换得到的新矩阵

(1) 基本性质

1. $(A^T)^T=A$
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$
3. $(kA)^T=kA^T$
4. 重要性质:

$$\boxed{(AB)^T=B^TA^T}$$

第二部分 行列式

一、行列式定义

📖 **n阶行列式**

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，其行列式定义为：

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

其中 S_n 为 n 元排列全体，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ 表示排列 σ 的逆序数

二、行列式性质

(1) 基本性质

1. 转置不变性：$|A^T| = |A|$
2. 行交换变号：交换两行（列），行列式变号
3. 倍数可提取：某行（列）乘 k，行列式变为 $k|A|$
4. 行加性：某行（列）加上另一行（列）的 k 倍，行列式不变

(2) 重要公式

💡 **行列式乘法性质**

$$|AB| = |A||B|$$

$$|kA| = k^n|A|$$

$$|A^T| = |A|$$

(3) 计算公式

展开式：

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (\text{按第}i\text{行展开})$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式

三、伴随矩阵

伴随矩阵

方阵 A 的伴随矩阵 A^* 定义为：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

性质：

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

第三部分 线性方程组

一、齐次方程组解构

齐次线性方程组

形如 $A_{m\times n}X = 0$ 的方程组称为齐次线性方程组

齐次方程组解的存在性

$$AX=0\text{有非零解}\Leftrightarrow r(A)<n\Leftrightarrow\text{列向量线性相关}$$

基础解系

解空间维数

若 $r(A)=r$，则齐次方程组的基础解系含 $n-r$ 个线性无关解向量

解空间

$$S=\{X\mid AX=0\},\quad \dim S=n-r(A)$$

二、非齐次方程组求解

非齐次方程组解的存在性

$$AX=b\,(b\neq 0)\text{有解}\Leftrightarrow r(A)=r(\bar{A})\Leftrightarrow b\text{可由列向量线性表示}$$

非齐次方程组通解结构

设 $AX=b$ 的一个特解为 η，对应的齐次方程组基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}$，则通解为：

$$X=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

三、克拉默法则

克拉默法则

对于 n 元线性方程组 $AX=b$，若 $|A|\neq 0$，则方程组有唯一解：

$$x_j=\frac{|A_j|}{|A|}\quad (j=1,2,\ldots,n)$$

其中 A_j 是将 A 的第 j 列替换为后项的矩阵

第四部分 向量空间与正交性

一、向量正交

向量正交

若 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$，称 α 与 β 正交。零向量与任何向量正交，两两正交的非零向量组称为正交向量组

正交向量组线性无关性

n 维正交向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 必线性无关

二、正交矩阵

正交矩阵

实矩阵 A 满足 $A^TA = I_n$ 时称为正交矩阵

性质:

1. $A^{-1} = A^T$
2. $|A| = \pm 1$
3. 行列式值为 ± 1

三、Schmidt正交化

Schmidt正交化过程

对线性无关向量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$:

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}, \quad \gamma_k = \frac{\alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_k \cdot \gamma_i}{\gamma_i \cdot \gamma_i}\gamma_i}{\left|\alpha_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_k \cdot \gamma_i}{\gamma_i \cdot \gamma_i}\gamma_i\right|}$$

第五部分 特征值与特征向量

一、特征值重数

重数定义

设 λ_i 是 A 的特征值:

- 代数重数 n_0: 特征方程的重根数
- 几何重数 k_0: 线性无关特征向量个数

满足 $k_0 \le n_0$，$k_0 = \dim\{X \mid (\lambda_0 I_n - A)X = 0\}$

迹定理

$$\mathrm{tr}(A) = \sum \lambda_i$$

$$|A| = \prod \lambda_i$$

二、特征向量线性无关性

不同特征值对应特征向量线性无关

设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是 n 阶方阵 A 的 m 个互异特征值，$p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是对应的特征向量，则 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 线性无关

第六部分 相似矩阵与对角化

一、相似矩阵

相似矩阵

设 A 和 B 是 n 阶方阵，若存在可逆阵 P 使 $P^{-1}AP = B$，则称 A 与 B 相似，记作 $A \sim B$

相似性质

若 $A \sim B$，则：

1. $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$
2. $|A| = |B|$
3. $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$

二、矩阵对角化

对角化充要条件

n 阶方阵 A 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对每个 n_j 重特征值 λ_j，有 $r(\lambda_j I - A) = n - n_j$

推论

若 A 有 n 个互异特征值，则 A 必可对角化

三、实对称矩阵

实对称矩阵特性

1. 不同特征值对应特征向量正交
2. k 重特征值恰有 k 个线性无关特征向量
3. 必可对角化，且存在正交矩阵 Q 使 $Q^{-1}AQ = \Lambda$

第七部分 特殊矩阵类型

一、对称矩阵

对称矩阵

若 $A^T = A$，则称 A 为对称矩阵；若 $A^T = -A$，则称 A 为反对称矩阵

二、可逆矩阵

可逆矩阵判定定理

方阵可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$，且逆矩阵唯一，记作 A^{-1}

逆矩阵性质

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

第八部分 典型例题

一、矩阵秩的计算

矩阵秩计算

问题：求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$ 的秩

解：

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore r(A)=1$

二、线性方程组求解

基础解系构造

已知 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$，$\beta=\sum\alpha_i$

解：$\beta=3\alpha_2+\alpha_4$，特解 $\eta^*=(0,3,0,1)^T$，基础解系 $\xi=(2,-1,-1,0)^T$，通解 $X=\eta^*+k\xi$

三、三阶行列式计算

行列式计算

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=0$$

四、可逆矩阵求逆

逆矩阵计算

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，验证 A 可逆并求逆：

$$|A|=-2\neq 0\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

五、相似矩阵参数求解

相似矩阵求参数

已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ 相似，求 x,y

解：由相似性质得：

- $\operatorname{tr}(A)=2+x=\operatorname{tr}(B)=2+y-1$
- $|A|=-2=|B|=-2y$

解得 $x=0,y=1$

六、实对称矩阵特征向量求解

实对称矩阵特征向量求解

设 3 阶实对称矩阵 A 各行元素之和均为 3，$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$，$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是 $AX=0$ 的解

解：

- 由各行和为 3，得 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
- α_1,α_2 是 $\lambda=0$ 的特征向量
- 特征值：$\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$
- 特征向量：$p_1=(1,1,1)^T,p_2=\alpha_1,p_3=\alpha_2$

七、范德蒙德行列式

范德蒙德行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

八、分块矩阵运算

分块矩阵计算示例

$$P=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

通过分块矩阵快速计算 A^{2023}：

$$A=PDP^{-1}\Rightarrow A^{2023}=PD^{2023}P^{-1}$$

第九部分 几何应用

一、向量叉积

$$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

二、平行六面体体积

体积公式

$$V = |\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma})| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

第十部分 核心公式总结

矩阵运算公式

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$|AB| = |A||B|$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

行列式公式

$$|AB| = |A||B|$$

$$|kA| = k^n|A|$$

$$|A^T| = |A|$$

$$|-I| = (-1)^n$$

ⓘ 线性方程组解的判定

$$AX = b\text{有解} \Leftrightarrow r(A) = r(A|b)$$

ⓘ 柯西不等式

$$\left(\sum x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$$

ⓘ 相似矩阵性质

$$A \sim B \Rightarrow \begin{cases} f_A(\lambda) = f_B(\lambda) \\ |A| = |B| \\ \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) \end{cases}$$

第十一部分 注意事项

⚠ 常见误区

1. 矩阵乘法不满足交换律，但满足结合律和分配律
2. 齐次方程组必有零解，非零解存在当且仅当 $r(A) < n$
3. 非齐次方程组特解的选取不影响通解结构
4. 行列式与矩阵的区别：行列式是标量值，矩阵是数表

5. 特征向量无关性：不同特征值对应特征向量线性无关
6. 对角化条件：几何重数 = 代数重数

⚠ 重要提醒

1. 可逆矩阵必须为方阵，且行列式非零
2. 分块矩阵运算时需保证分块方式合理
3. 转置运算 $(AB)^T = B^T A^T$，注意顺序变化
4. 行列式为零的矩阵不可逆
5. 伴随矩阵仅对方阵有定义
6. $|kA| \neq k|A|$，正确公式为 $|kA| = k^n|A|$
7. 实对称矩阵特征值均为实数，不同特征值特征向量正交
8. 实对称矩阵必可正交对角化