



华南理工大学
South China University of Technology

机器学习 项目方案书

学 院 经济与金融学院

专业班级 金融学汇丰班

项目名称 期权定价及风险价值计算

学生姓名 胡文斌、黄思源、郑鸿涛

日期：2021 年 6 月 30 日

目录

- 期权定价及风险价值计算..... 3
 - 项目介绍..... 3
 - 目的..... 3
 - 使用的方法..... 3
 - 相关金融知识..... 4
 - 期权介绍及选择..... 5
 - 期权介绍..... 5
 - 期权的选择..... 6
 - 数据来源..... 8
 - 组合权重分配..... 8
 - 基本数据及解释..... 10
 - 蒙特卡洛模拟和 B-S 公式对期权进行定价..... 10
 - B-S 公式: 10
 - 蒙特卡洛模拟的公式: 11
 - 结果对比: 11
 - 使用蒙特卡洛模拟股价路径..... 12
 - 基于 B-S 公式计算 VAR..... 15
 - 基于 DELTA-GAMMA-THETA APPROXIMATION 计算 VAR..... 16
 - 2 种方法的结果的对比..... 17
 - 回测..... 19
 - 思考和后续研究..... 20
 - 个人工作量说明..... 20

期权定价及风险价值计算

项目介绍

目的

学习期权定价方法，通过了解 BSM 模型和蒙特卡洛的优劣，从而帮助投资者利用模型去判断期权合理的价值，通过对 VaR 的分析，评估在投资中可能会遭受到的收益损失甚至本金损失。为投资者应对投资风险提供一定的参考建议。

使用的方法

蒙特·卡罗方法 (Monte Carlo method)，也称统计模拟方法，是二十世纪四十年代中期由于科学技术的发展和电子计算机的发明，而被提出的一种以概率统计理论为指导的一类非常重要的数值计算方法。是指使用随机数（或更常见的伪随机数）来解决很多计算问题的方法。与它对应的是确定性算法。蒙特·卡罗方法在金融工程学，宏观经济学，计算物理学（如粒子输运计算、量子热力学计算、空气动力学计算）等领域应用广泛。

蒙特卡罗方法解题过程的三个主要步骤：

- (1) 构造或描述概率过程
- (2) 实现从已知概率分布抽样
- (3) 建立各种估计量

布莱克-舒尔斯模型 (Black-Scholes Model)，简称 BS 模型，是一种为期权定价的数学模型，由美国经济学家迈伦·舒尔斯与费雪·布莱克首先提出。此模型适用于不派发股利的欧式期权。罗伯特·C·墨顿其后修改了数学模型，使其于有派发股利时亦可使用，新模型被称为布莱克-舒尔斯-墨顿模型 (Black - Scholes - Merton model)。

BS 模型假设金融市场存在最少一种风险资产（如股票）及一种无风险资产（现金或债券）。假设金融资产是：

无风险资产的投资回报是不变的，此回报率称作无风险利率；

股票价格遵从几何布朗运动（随机游走）；

股票在选择权有效期内不分派红利；

股票价格服从对数正态分配，即金融资产的对数收益率服从正态分配；

假设金融市场是：

1. 不存在套利机会
2. 能以无风险利率借出或借入任意数量的金钱
3. 能买入及卖出（沽空）任意数量的股票
4. 市场无摩擦，即不存在交易税收和交易成本
5. 假设期权是欧式期权，即只可在特定日期行权。

相关金融知识

风险价值（Value at Risk，缩写 VaR），资产组合在持有期间内在给定的置信区间内由于市场价格变动所导致的最大预期损失的数值。由此衍生出来的“风险价值”方法是风险管理中应用广泛、研究活跃的风险定量分析方法之一。

相对优点：相比于以标准差为代表的传统风险测度，VaR 着重于考虑更重要的资产下行风险，特别是极端情况下的损失规模。

局限或批评：VaR 未有考虑超出该门限值的损失情况；不满足次可加性（因此不是一致风险测度）等。

期权（option）是一种选择交易与否的权利。当合约买方付出权利金

（Premium）后，如果享有在特定时间内（或在某特定时间）向合约卖方依特定条件或履约价格（Exercise Price, Strike Price，或称行使价、执行价格，买入或卖出一定数量标的物的权力，这种权利就称为选择权或是期权。如果此权力为买进标的物，称为买入期权（Call Option，或称为看涨期权、认购期权），简称买权。如果此权力为卖出标的物，称为卖出期权（Put Option，或称看空期权、认沽期权），简称卖权。

和远期合约或期货合约一样，期权合约也有到期日，如果买方只能在到期日当天选择行使权利与否，则称为该期权为欧式期权（European Option）；如果买

方在到期日当天或之前任何一天都可以行使权利则称为该期权为美式期权（American Option）。期权是一种金融衍生工具。

期权使买方取得能在规定时间内按价格买卖某项资产的权力，因此届时可以选择履约以赚取利益，也可以放弃产生有限损失；但是期权卖方一旦收取买方的权利金后，在买方的要求下就有履约的义务。因为期权交易中的买卖双方权利义务不对等，因此他与现货、远期合约、期货合约、交换合约等强调买卖双方权利义务相等的传统金融工具不同。

夏普比率（英语：Sharpe ratio），又叫夏普指数（Sharpe index），中文又称作夏普值，衡量的是一项投资（例如证券或投资组合）在对其调整风险后，相对于无风险资产的表现。它的定义是投资收益与无风险收益之差的期望值，再除以投资标准差（即其波动性）。它代表投资者额外承受的每一单位风险所获得的额外收益。

夏普比率描述了资产收益对投资者所承担风险的补偿程度。当以一个相同基准来比较两种资产之时，夏普比率较高的资产在相同风险下收益更好；或者说，如果收益相同的话，夏普比率较高的资产风险较低。但是，像其他任何数学模型一样，它依赖于数据的正确性。庞兹骗局经过长期的操作，根据公开的收益是能得出很高的夏普比率，但计算公式填入的输入是有问题的。在用平滑收益率来评估资产（如“共享利润”基金）的投资表现时，夏普比率应根据相关资产的表现而非基金的收益率来计算。

期权介绍及选择

期权介绍

什么是期权(Option)?

期权是给予持有者权利但不是义务的在合同到期时或之前以预先确定的价格买入或卖出一定数量的某种基础资产的合同。期权可以像大多数其他资产类别一样用经纪投资账户购买。

国内外期权种类

目前国内上市的期权品种已经越来越多了，目前国内期权品种分为两大类，金融期权和商品期权。金融期权在三大交易所均有上市，分别为上海证券交易所（50etf 期权为代表）、深圳证券交易所（沪深 300etf 期权为代表）、中国金融期货交易所（沪深 300 指数期权为代表）。除此之外还有商品期权，分布在四家商品期货交易所，比如上海期货交易所（铜、橡胶期权等）、大连商品交易所（铁矿石、豆粕期权等）、郑州商品交易所（棉花、白糖期权等）、上海国际能源交易中心（天然气期权），商品期权门槛普遍比金融期权低。美股市场一直是全球金融市场的领头者，其市场中的期权种类不胜枚举。不仅有个股方面的期权，同时也存在着针对指数、外汇、债券等等的期权，

期权的选择

指数的主要成分股会更具代表性，且不同行业之间的相关性一般来说会比较小，这也就成为了我们选择股票的依据，由此选出 3 个股票分别是：

600276：恒瑞医药 （医疗保健）

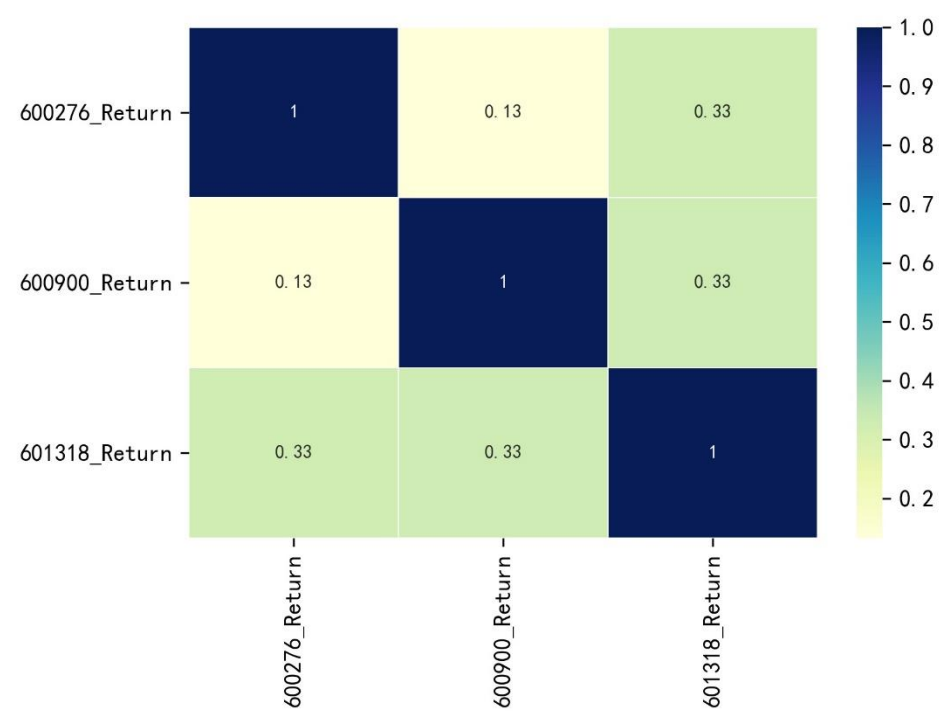
600900：长江电力 （公共事业）

601318：中国平安 （金融行业）

沪深300指数成分股数据

沪深300							
上证50		中证500					
序号	股票代码	股票简称	最新价(元)	相关资料	主营行业	地区	权重(%)
1	600519	贵州茅台	0.00	股吧 行情 档案 资讯	食品饮料	遵义市	6.04
2	601318	中国平安	0.00	股吧 行情 档案 资讯	金融	深圳市	3.26
3	600036	招商银行	0.00	股吧 行情 档案 资讯	金融	深圳市	3.14
4	000858	五粮液	0.00	股吧 行情 档案 资讯	食品饮料	宜宾市	2.70
5	601012	隆基股份	0.00	股吧 行情 档案 资讯	电气设备	西安市	1.80
6	000333	美的集团	0.00	股吧 行情 档案 资讯	家电	佛山市	1.65
7	600276	恒瑞医药	0.00	股吧 行情 档案 资讯	医药生物	连云港市	1.42
8	002415	海康威视	0.00	股吧 行情 档案 资讯	信息技术	杭州市	1.41
9	601166	兴业银行	0.00	股吧 行情 档案 资讯	金融	福州市	1.40
10	601888	中国中免	0.00	股吧 行情 档案 资讯	商贸零售	北京市	1.37
11	603259	药明康德	0.00	股吧 行情 档案 资讯	医药生物	无锡市	1.31
12	300059	东方财富	0.00	股吧 行情 档案 资讯	互联网	上海市	1.27
13	000651	格力电器	0.00	股吧 行情 档案 资讯	家电	珠海市	1.17
14	600900	长江电力	0.00	股吧 行情 档案 资讯	公用事业	北京市	1.10
15	002594	比亚迪	0.00	股吧 行情 档案 资讯	交运设备	深圳市	1.06

相关性:



从图形来看：我们选取的股票之间的相关性并不高，即当其中一个出现较大的风险时，不会因为相关性较大，使得组合的风险变得格外大，能够比较好的分散非系统性风险。选择好标的股票后我们就可以根据其构建虚拟期权，并进行模拟。

数据来源

英为财经网站：下载 3 个股票 2017 年 1 月 3 日到 2021 年的 6 月 28 号的数据，整合取出其收盘价并通过日期整合股票数据，因为都是国内股票，交易日都一样因此数据预处理部分不需进行过多的处理。我们将数据分成 2 部分，以 2019 年 1 月 2 日为界，其前面的数据作为历史数据，进行相关性、协方差、波动率等指标的计算。其后面的数据，使用 B-S 公式和股票的真实数据模拟期权的真实报价，以此为基础计算出来的组合 VaR 来充当真实的 VaR，然后进行回测的对比。

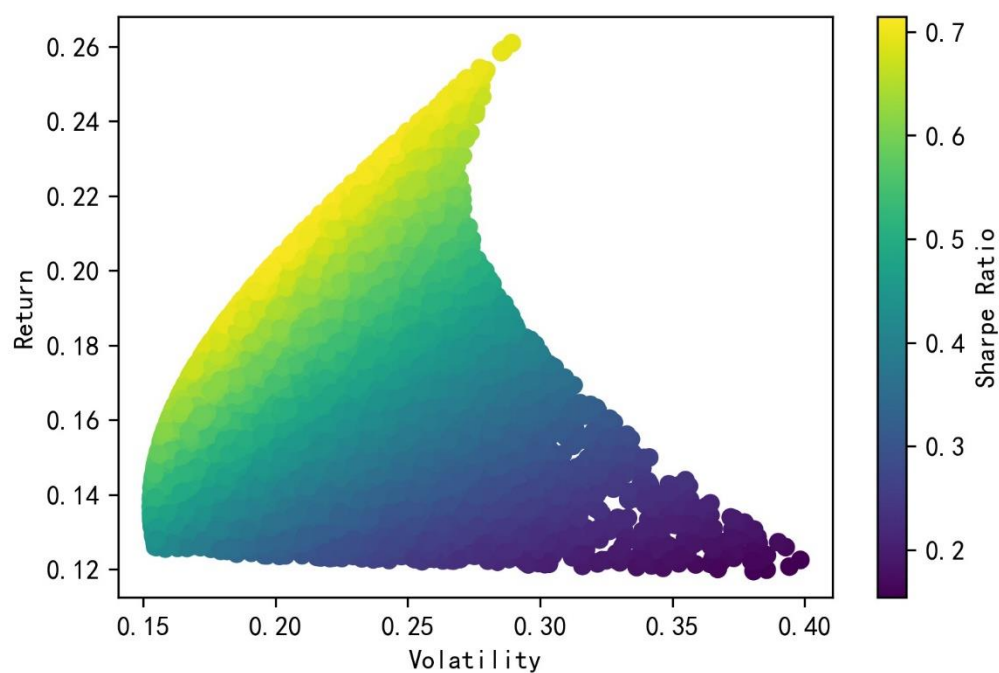
组合权重分配

夏普比率衡量了投资者在承担一单位风险下所可能获得的收益，比率越大对投资者就越有利。我们也以此为依据进行组合权重的选择。

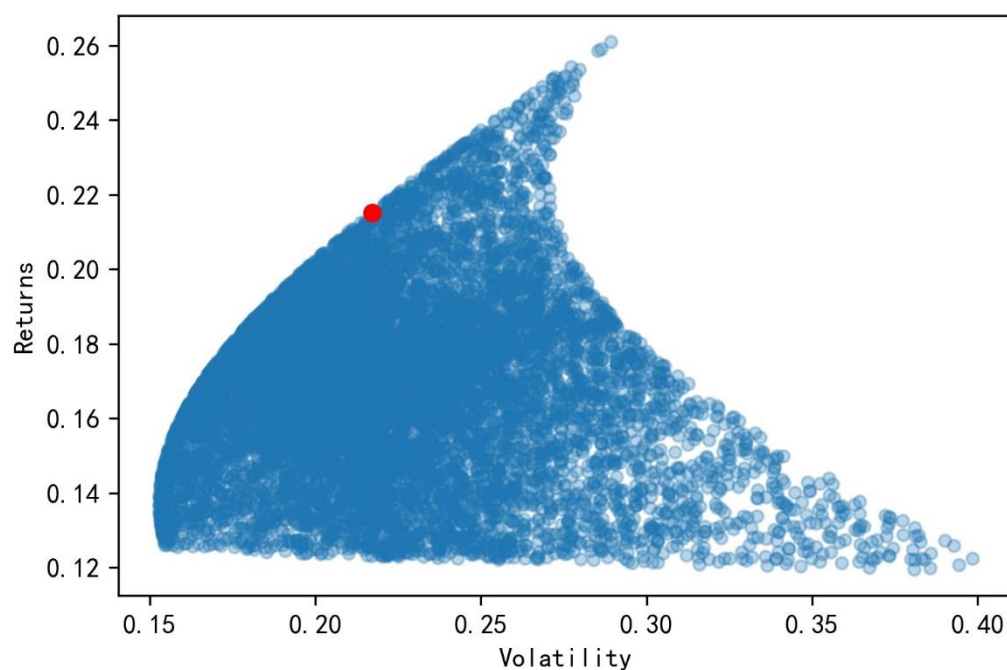
我们使用蒙特卡洛模拟来进行分析，即通过多次随机模拟组合权重并获得对应情况下组合的夏普比率，选出最优组合权重。

过程为：随机生成一组权重，计算该组合下的收益和标准差，重复这一过程许多次（比如 1 万次），将每一种组合的收益和标准差绘制成散点图。相当于构造出有效边界，找出夏普比率最大的那个点对应的权重，作为我们的投资资金分配的依据。

模拟得到的效果图：



可以发现沿上边缘的组合拥有较高的夏普比率，因为在相同波动率下其收益率越高。我们进一步寻找夏普比率最高的点并获得权重。



ticker symbol	股票代码	600276	600900	601318
Weight	权重	0.0016126	0.34364079	0.65474661
sigma	波动率	0.40878035	0.1596823	0.29391385

权重的解释：第一个的权重小，是因为其相对应于其他 2 个的波动率大，即风险大，我们基于夏普比率这个指标得到最优权重，是对收益和风险进行了权衡。

基本数据及取值

S0：标的证券的当前价格，取 2019 年 1 月 2 日的数据。

K：期权的行权价，取 2019 年 1 月 2 日的数据加 1 后向上取整。

T：期权有效期限，取 2 年。

R：无风险利率，取 0.06，即 6%

Sigma：股票收益率的波动率，用 2017 年 1 月 3 日到 2018 年 12 月 28 日的数据计算得出。

P：投资金额，我们取 100 万人民币

MSR_weights：采用蒙特卡洛 Markowitz 模型得到的最大的夏普比率对应的权重。

蒙特卡洛模拟和 B-S 公式对期权进行定价

下面我们采用 2 种不同的方法对期权进行定价：

B-S 公式：

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Xe^{-r_f T} N(d_2)$$

$$P_0 = -S_0 N(-d_1) + Xe^{-r_f T} N(-d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

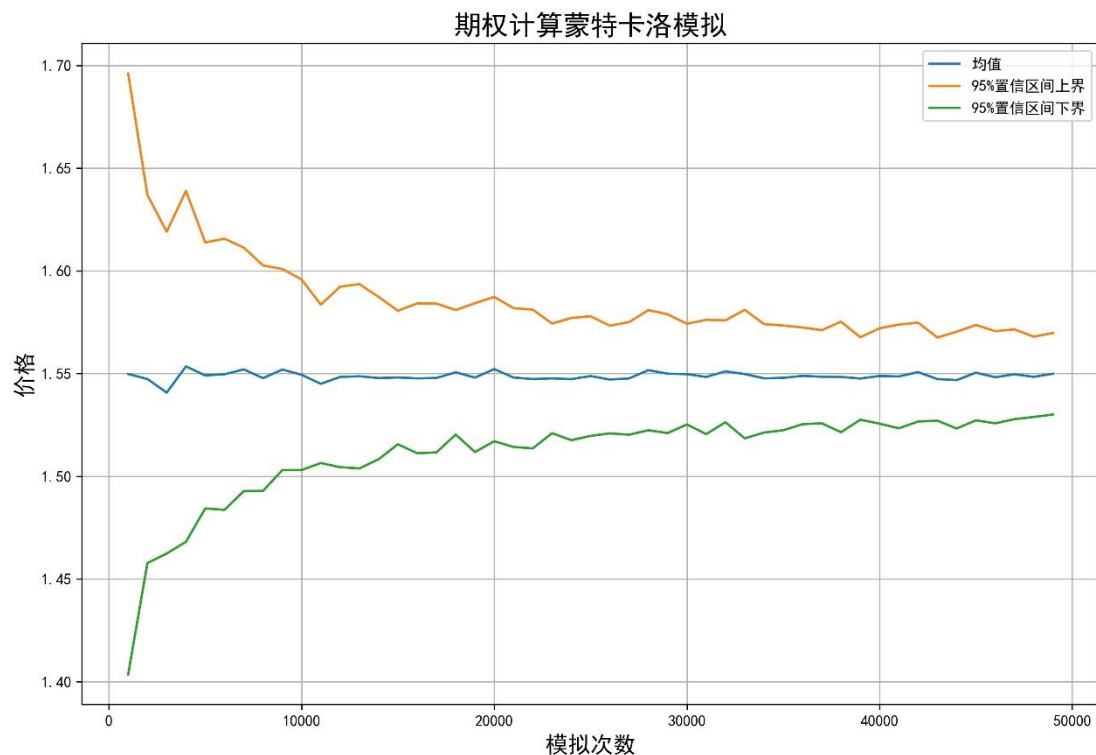
蒙特卡洛模拟的公式：

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta T + \sigma \sqrt{\Delta T} \text{TN}(0,1) \right]$$

利用上面的公式，获得 n 次模拟下期权标的资产到期日的价格。

$$\text{price} = \exp(-r * t) * E(S_t)$$

对 n 次模拟下期权价值取均值，获得期望收益即上面公式的 $E(S_t)$ ，根据无风险利率贴现则为蒙特卡洛下期权的理论价格。蒙特卡洛方法会有收敛速度的考量。如下图我们可以看到随着模拟次数的上升，仿真结果的置信区间也在逐渐收敛。



我们进行了 10000000 次蒙特卡洛模拟，获得较为可靠的期权价格。

结果对比：

600276

-----Calculate the option price-----

The Black-Scholes-Merton option price is: **9.6432**

The Monte-Carlo simulation option price is: **9.6404**

600900

-----Calculate the option price-----

The Black-Scholes-Merton option price is: **1.5488**

The Monte-Carlo simulation option price is: **1.5486**

601318

-----Calculate the option price-----

The Black-Scholes-Merton option price is: **11.2061**

The Monte-Carlo simulation option price is: **11.2138**

结论：使用蒙特卡洛得出的期权报价跟用 B-S 公式得到的报价差不多，所以，我们使用蒙特卡洛对股价进行模拟得出 VaR 也是可信的。

使用蒙特卡洛模拟股价路径

定义了一个函数来模拟给定参数的多维 GBM。

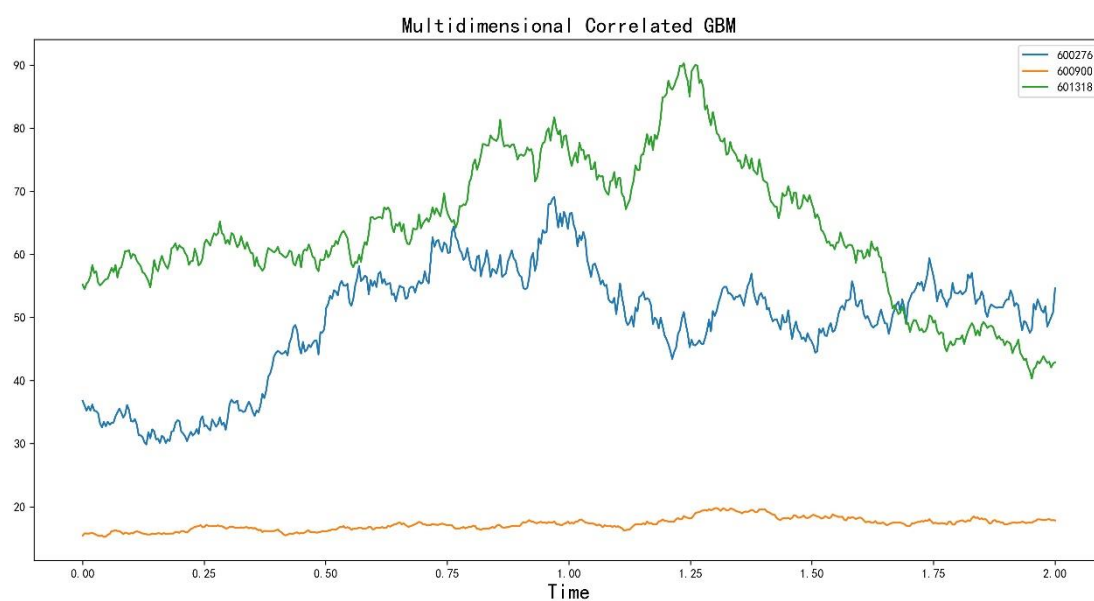
基于相关性得到随机数 $\sum_{j=1}^d A_{ij} Z_{k+1}^j$

资产组合的 St 模拟: $S_{t_{n+1}}^i = S_{t_n}^i \exp \left(\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) (t_{n+1} - t_n) + \sqrt{t_{n+1} - t_n} \sum_{j=1}^d A_{ij} Z_{k+1}^j \right)$

解释：

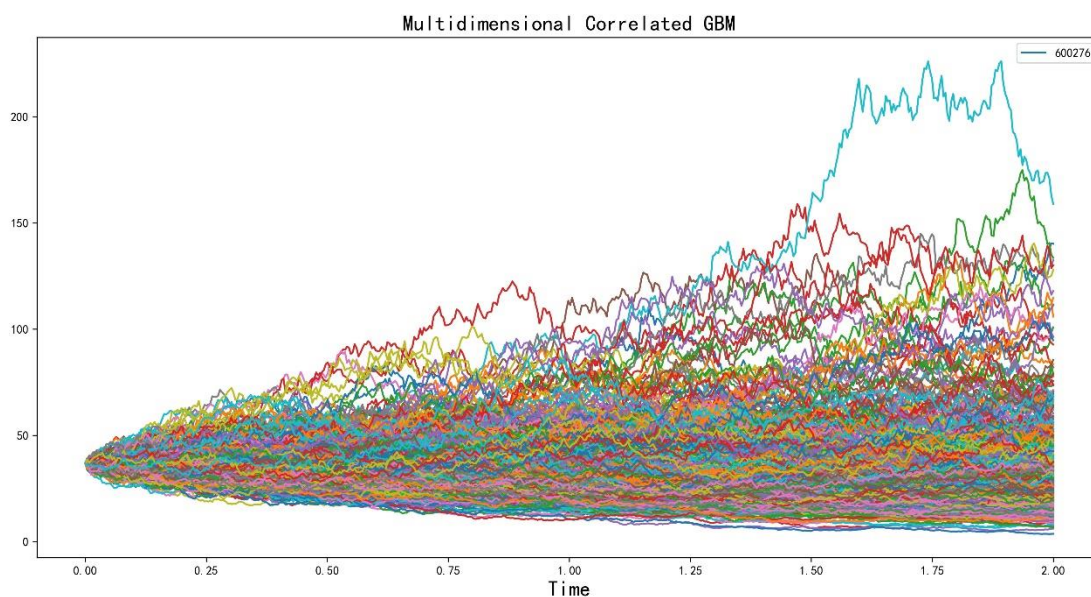
由于组合中包含多个期权且期权的标的物分别为不同的股票，各个股票之间并不是完全独立，因此不能单独模拟各个股票的几何布朗运动，需要将原来的独立标准正太分布随机数，转化成相关性结构的正态分布随机数。这需要用到 **Cholesky** 对股票协方差矩阵进行分解，通过分解得到的下三角矩阵与原有独立标准正太分布随机数进行矩阵乘法则可以得到想要的具有相关性的随机数。（使用 `np.linalg.cholesky` 可以实现

3 个资产模拟 1 次的路径图

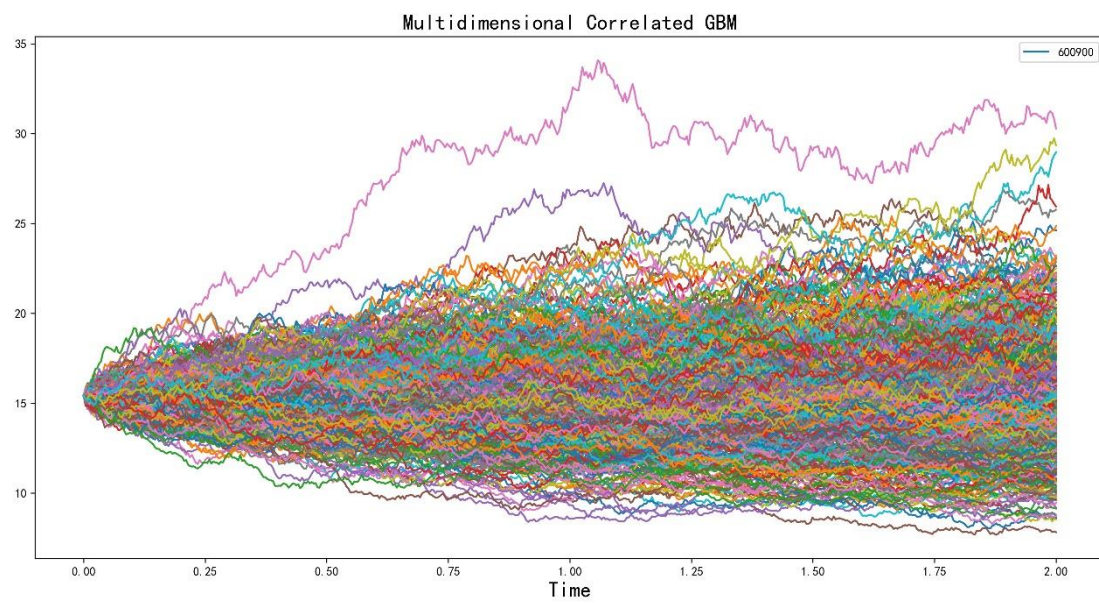


每个股票模拟 100 次的路径图

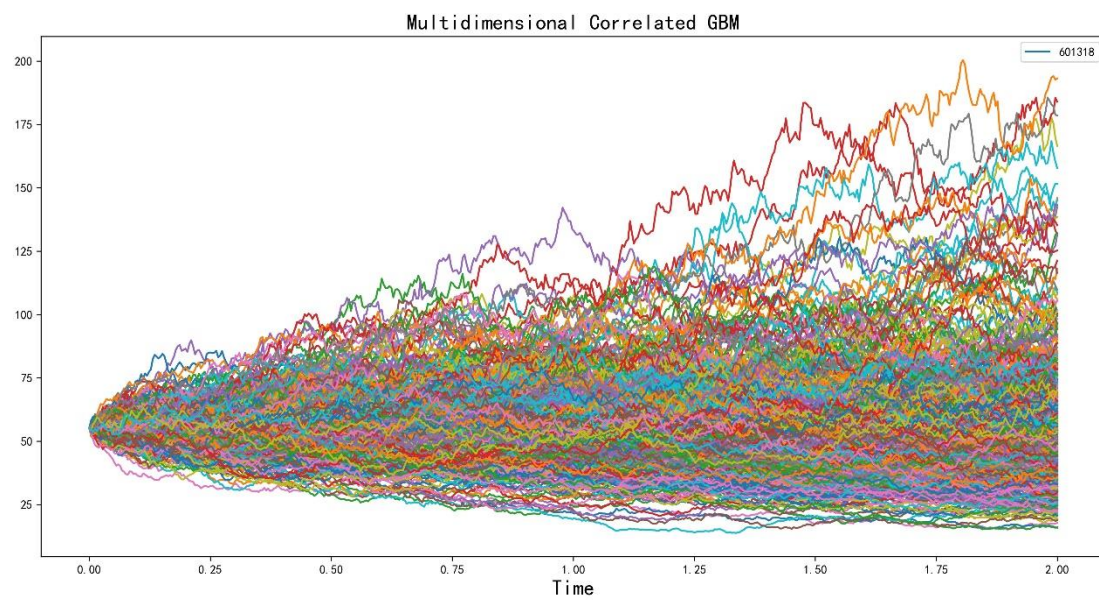
600276



600900



601318



full-revaluation simulation approach: 基于 B-S 公式计算 VaR

步骤:

1. 首先通过蒙特卡洛获得各个股票未来 2 年的价格 St , 【即上面模拟得到的 500 条路径】
2. 计算每条路径得到的 VaR: (循环 500 次)
 - a) 通过 B-S 公式获得对应日期的期权价格, 得到组合每个资产的日收益, 【B-S 公式代入计算得到定价, 收益 = 今天的期权报价-昨天的期权报价】
 - b) 组合 P&L
 - P 是投资金额
 - 按 weight 得到每个资产分配到的金额
 - 每个资产购买的份数 = 该资产分配到的金额 / 其期权价格
 - 计算每个资产的 P&L: 每个资产购买的份数 * return
 - 将得到的 P&L 相加得到组合 P&L
 - c) 得到该路径下 500 天的 VaR 【收到损益的分位数】
3. 得到 500 个路径下得到的 VaR 后, 在 500 个路径中取平均得到的 VaR, 即我们想要的 VaR.

结果: VaR = 133091.13749312356

基于 Delta-Gamma-Theta Approximation 计算 VaR

步骤:

1. 通过蒙特卡洛得到各个股票未来 2 年的价格 S_t ,
2. 计算每条路径得到的 VaR (循环 500 次):
 - a) 计算该路径的股票价格变化 Δx , 和期权的 delta, gamma, theta
 - b) 计算期权价格变化 Δv , 因为我们将波动率 σ 和无风险利率 r 固定, 我们只考虑 delta, gamma, theta, 使用公式近似计算: $\Delta(V) = \text{Delta} * \Delta(X) + 0.5 * \text{Gamma} * \Delta(X)^2 + \text{Theta} * \Delta(T)$
 - c) 计算每个资产的 P&L: 每个资产购买的份数 * 对应的 Δv ; 然后进行加总得到组合 P&L
 - d) 得到该路径下组合的 VaR 【收到损益的分位数】
3. 得到 500 个路径下的 VaR, 取平均得到的 VaR, 即我们想要的 VaR。

结果 VaR = 133233.24231982025

2 种方法的结果的对比

VaR 大小:

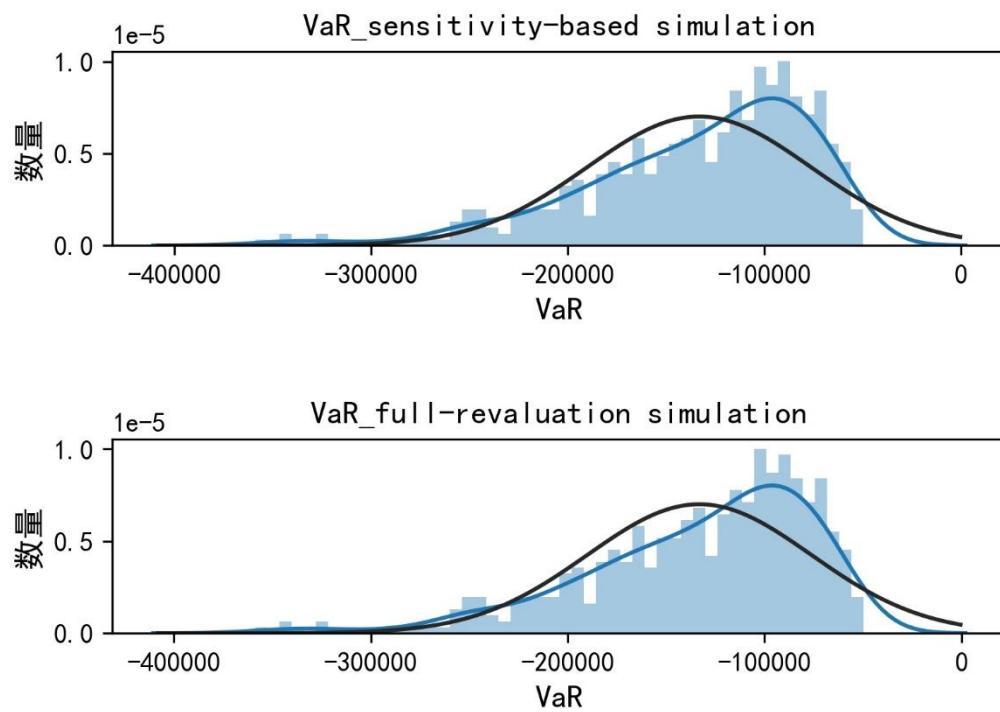
-----不同方法得到的 VaR 的比较-----

VaR based on **sensitivity-based simulation** approach : **-133233.2423**

VaR based on the **full-revaluation simulation** approach : **-133091.1375**

全定价方法下得到的 var 和基于敏感性模拟得到的 var 差距没有很大。

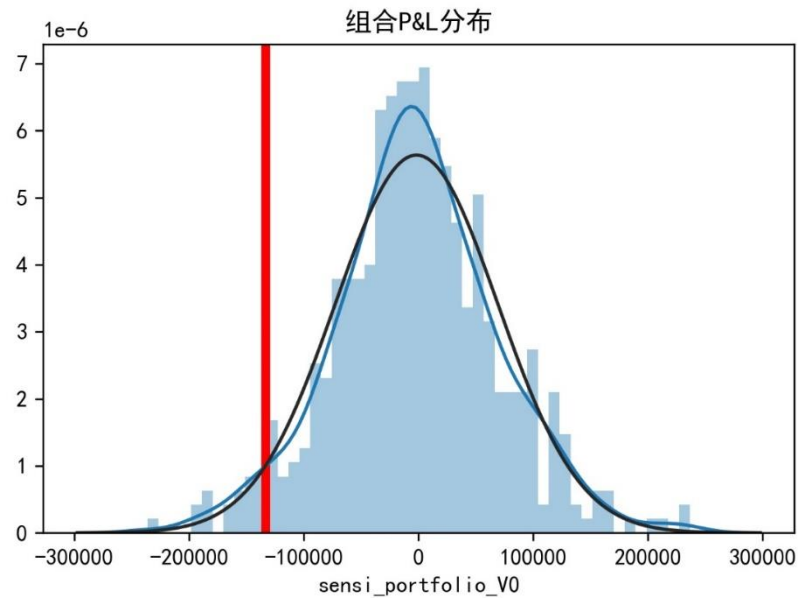
VaR 分布



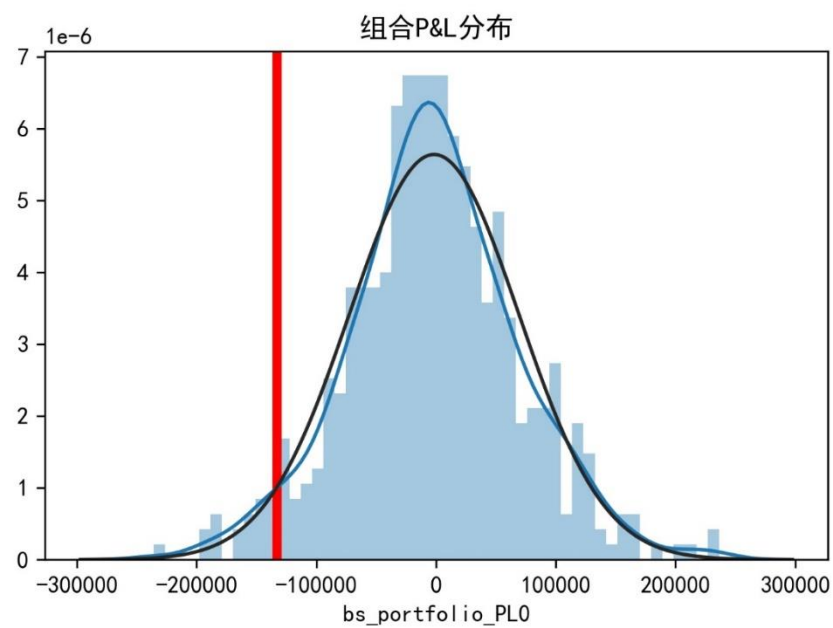
一个路径的 P&L 分布图

一、【基于 sensitivity-based simulation approach】

红线是指置信度对应的位置（下面一样，不再说明）



二、【基于 full-revaluation simulation approach】



结论：2 种方法得到的 VaR 基本差不多

回测

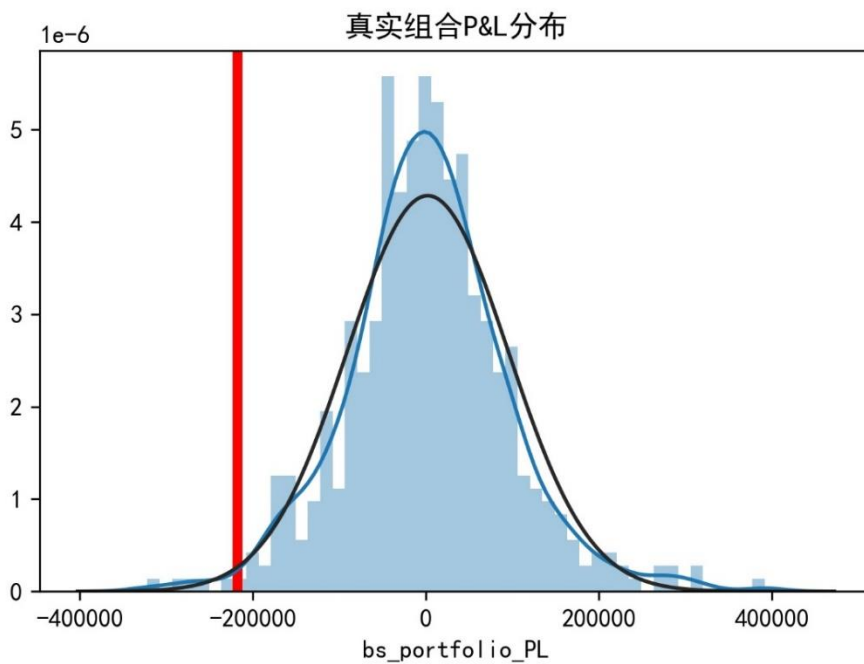
计算真实股票历史数据得到的 VaR

1 使用前面分段后的数据（2019 年 1 月 2 日后的 504 个数据）用 B-S 公式计算得到各个期权 2 年来的收盘价，计算得到收益【今天的报价-昨天的报价】

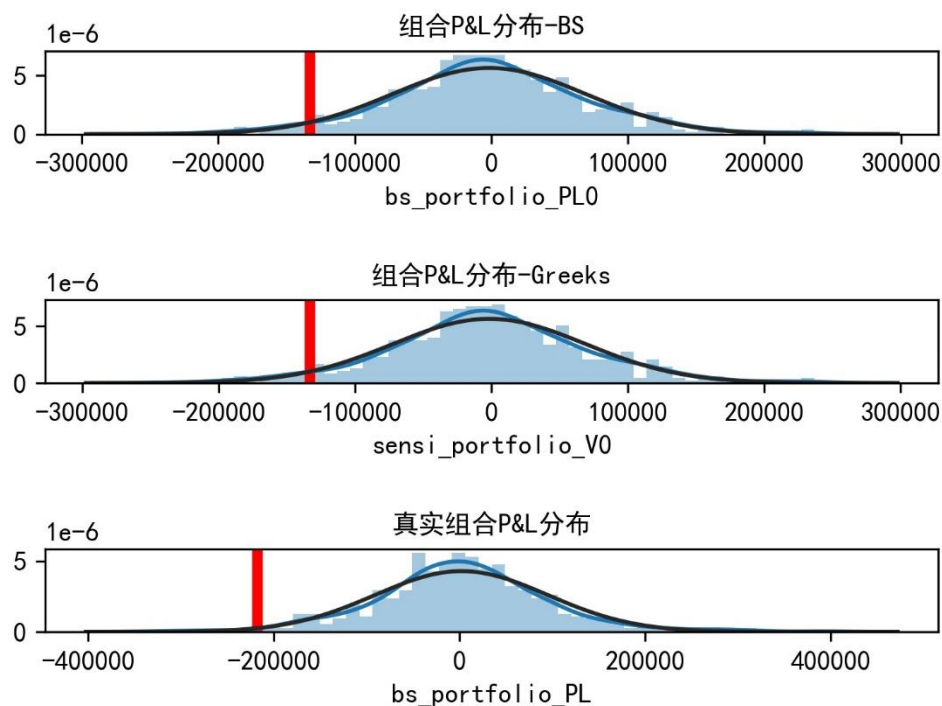
2 得到组合的收益【每个资产购买的份数 * 对应的收益，然后相加】

3 得到置信度为 99%下的 VaR

结果：VaR = 218498.83477608097



取第一次模拟股价后采用 2 种方法计算得到的损益分布 和 真实股价模拟报价得出的损益分布进行比较：



思考和后续研究

思考：由于我们这里采用的波动率是固定的，当要改变波动率时，如何在采用蒙特卡洛的基础上如何结合 EWMA、GARCH(1,1)等模型来模拟股价等等

个人工作量说明

胡文斌	相关资料的搜索，对整个题目的思路进行整理，大部分代码编写，对计算过程中存在的问题进行改善，项目文档编写
黄思源	整理计算思路并完善计算过程中存在的问题，期权的选择，代码编写、检查并完善存在问题，项目文档完善和检查
郑鸿涛	数据搜索和下载，前期数据整理的代码，回测部分的代码，项目文档完善，PPT 制作