



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica
Disciplina de Tópicos Especiais em Engenharia de Energias
Renováveis I

Atividade 3: O Método dos Volumes Finitos para Problemas de Difusão

Thiago Ney Evaristo Rodrigues - 11502852
Professor: Dr. Gilberto Augusto Amado Moreira

João Pessoa, PB
Julho de 2020

Lista de Figuras

2.1	Esboço do estudo de caso 1.	4
2.2	Comparação de soluções exata e numérica para o exemplo 4.1.	7
3.1	Esboço do estudo de caso 2.	9
3.2	Comparação de soluções exata e numérica para o exemplo 4.2.	11
4.1	Esboço do estudo de caso 3.	13
4.2	Comparação de soluções exata e numérica para o exemplo 4.3.	15

Conteúdo

1	Introdução	3
2	Estudo de Caso 1	4
2.1	Problema	4
2.2	Código Computacional	5
2.3	Resultado	6
3	Estudo de Caso 2	8
3.1	Problema	8
3.2	Código Computacional	9
3.3	Resultado	11
4	Estudo de Caso 3	12
4.1	Problema	12
4.2	Código Computacional	13
4.3	Resultado	15
5	Conclusões	16

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho busca apresentar estudos de casos de problemas de **Difusão** utilizando-se o **Método dos Volumes Finitos**. Os casos foram retirados dos exemplos resolvidos 4.1, 4.2 e 4.3 do livro **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**, de Versteeg, H.K. e Malalasekera, W.

O objetivo central é a compreensão da discretização das **Equações de Transporte**, sendo essas equações matemáticas que regem a física de problemas de Fenômenos de Transporte, a fim de se ter uma visão mais abrangente sobre o funcionamento de softwares simuladores de dinâmica dos fluidos computacional.

Para a resolução dos problemas, foram-se elaborados script no software de computação científica **MATLAB®**.

Capítulo 2

Estudo de Caso 1

2.1 Problema

O estudo de caso 1 busca demonstrar o exemplo resolvido 4.1 do livro referência.

O problema consiste em uma condução de calor unidimensional, sem fonte, em uma haste isolada, cujas extremidades são mantidas a temperaturas constantes. O problema é governado por a equação:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.1)$$

Onde as condições de contorno são:

- Temperatura A: $100^{\circ}C$
- Temperatura B: $500^{\circ}C$
- Comprimento da haste: 0.5 m
- Área da seção transversal: $10 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
- Condutividade térmica: 1000 W/m.K

A Fig. 2.1 apresenta um esboço ilustrativo do problema.

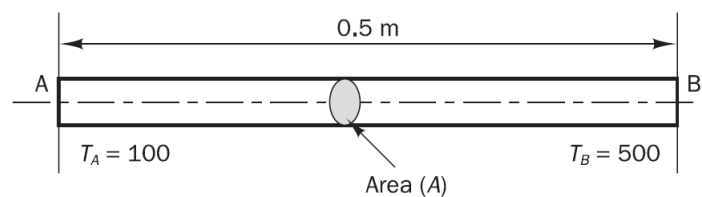


Figura 2.1: Esboço do estudo de caso 1.

2.2 Código Computacional

Abaixo é possível observar o script (código computacional) desenvolvido para a solução do problema.

```
1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% Inputs
6
7 TA = 100;      % Temperature A [C]
8 TB = 500;      % Temperature B [C]
9 k = 1000;      % Thermal conductivity constant [W/m.K]
10 A = 10*10^-3; % Cross-sectional area [m^2]
11 L = 0.5;      % Length [m]
12 n = 5;        % Number of nodes (grid generation)
13
14 %% Numerical Solution
15
16 dx = L/n;
17
18 % Preallocation
19
20 aW = zeros(n,1);
21 aE = zeros(n,1);
22 SP = zeros(n,1);
23 Su = zeros(n,1);
24
25 % Node 1
26
27 aE(1) = k*A/dx;
28 SP(1) = -2*k*A/dx;
29 Su(1) = (2*k*A/dx)*TA;
30
31 % Central Nodes
32
33 i = 2:(n-1);
34
35 aW(i) = k*A/dx;
36 aE(i) = k*A/dx;
37
38 % Node n
39
40 aW(n) = k*A/dx;
41 SP(n) = -2*k*A/dx;
```

```

42 Su(n) = (2*k*A/dx)*TB;
43
44 % Matrix Equation
45
46 aP = aW + aE - SP;
47 a = diag(aP);
48
49 for i = 2:n
50
51     j = i-1;
52     a(i,j) = -aW(i);
53     a(j,i) = -aE(j);
54
55 end
56
57 T = a\Su;
58
59 %% Outputs
60
61 x_num = linspace(0,L-dx,n) + dx/2;
62 x_num = [0; x_num'; L];
63 f_num = [TA; T; TB];
64
65 x_ex = linspace(0,L,100);
66 f_ex = 800*x_ex + 100;
67
68 figure
69 plot(x_num,f_num, 'sk', 'MarkerFaceColor', 'k')
70 hold on
71 plot(x_ex,f_ex, 'k')
72 legend({'Numerical Solution', 'Exact Solution'}, 'Location', 'southeast')
73 xlabel('Distance x [m]')
74 ylabel('Temperature [C]')
75 grid

```

2.3 Resultado

A Fig. 2.2 apresenta um comparativo entre as soluções analítica e numérica do problema.

A solução exata foi obtida através da equação:

$$T = 800x + 100 \quad (2.2)$$

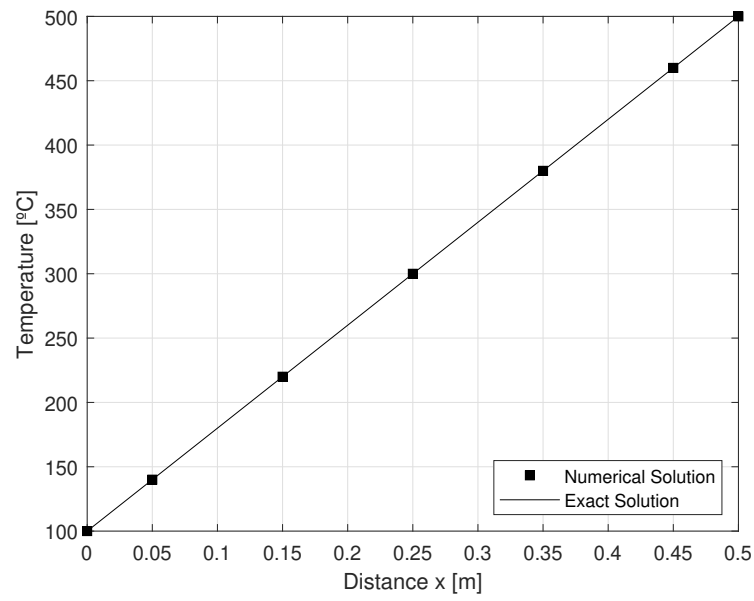


Figura 2.2: Comparação de soluções exata e numérica para o exemplo 4.1.

Comparando-se os resultados obtidos através do gráfico, não é possível observar visualmente nenhuma distinção entre os métodos utilizados.

Capítulo 3

Estudo de Caso 2

3.1 Problema

O estudo de caso 2 busca demonstrar o exemplo resolvido 4.2 do livro referência.

O problema consiste em uma condução de calor unidimensional, com fonte (ao contrário do estudo de caso 1), em uma haste isolada, cujas extremidades são mantidas a temperaturas constantes. O problema é governado por a equação:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + q = 0 \quad (3.1)$$

Onde as condições de contorno são:

- Temperatura A: $100^{\circ}C$
- Temperatura B: $200^{\circ}C$
- Comprimento da haste: 2 cm
- Área da seção transversal: $10 \times 1\text{ m}^2$
- Condutividade térmica: 0.5 W/m.K
- Fonte de calor: 1000 kW/m^3

A Fig. 3.1 apresenta um esboço ilustrativo do problema.

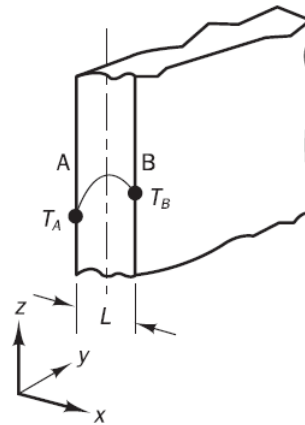


Figura 3.1: Esboço do estudo de caso 2.

3.2 Código Computacional

Abaixo é possível observar o script (código computacional) desenvolvido para a solução do problema.

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% Inputs
6
7 TA = 100;      % Temperature A [C]
8 TB = 200;      % Temperature B [C]
9 q = 1000*10^3; % Heat generation [W/m^3]
10 k = 0.5;       % Thermal conductivity constant [W/m.K]
11 A = 1;         % Cross-sectional area [m^2]
12 L = 0.02;      % Length [m]
13 n = 5;         % Number of nodes (grid generation)
14
15 %% Numerical Solution
16
17 dx = L/n;
18
19 % Preallocation
20
21 aW = zeros(n,1);
22 aE = zeros(n,1);
23 SP = zeros(n,1);
24 Su = zeros(n,1);

```

```

25
26 % Node 1
27
28 aE(1) = k*A/dx;
29 SP(1) = -2*k*A/dx;
30 Su(1) = (2*k*A/dx)*TA + q*A*dx;
31
32 % Central Nodes
33
34 i = 2:(n-1);
35
36 aW(i) = k*A/dx;
37 aE(i) = k*A/dx;
38 Su(i) = q*A*dx;
39
40 % Node n
41
42 aW(n) = k*A/dx;
43 SP(n) = -2*k*A/dx;
44 Su(n) = (2*k*A/dx)*TB + q*A*dx;
45
46 % Matrix Equation
47
48 aP = aW + aE - SP;
49 a = diag(aP);
50
51 for i = 2:n
52
53     j = i-1;
54     a(i,j) = -aW(i);
55     a(j,i) = -aE(j);
56
57 end
58
59 T = a\Su;
60
61 %% Outputs
62
63 x_num = linspace(0,L-dx,n) + dx/2;
64 x_num = [0; x_num'; L];
65 T_num = [TA; T; TB];
66
67 x_ex = linspace(0,L,100);
68 T_ex = ((TB - TA)/L + q*(L - x_ex)/(2*k)).*x_ex + TA;
69
70 figure
71 plot(x_num,T_num, 'sk', 'MarkerFaceColor', 'k')

```

```

72 hold on
73 plot(x_ex,T_ex, 'k')
74 legend({'Numerical Solution', 'Exact Solution'}, 'Location', 'southeast')
75 xlabel('Distance x [m]')
76 ylabel('Temperature [C]')
77 grid

```

3.3 Resultado

A Fig. 3.2 apresenta um comparativo entre as soluções analítica e numérica do problema.

A solução exata foi obtida através da equação:

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A \quad (3.2)$$

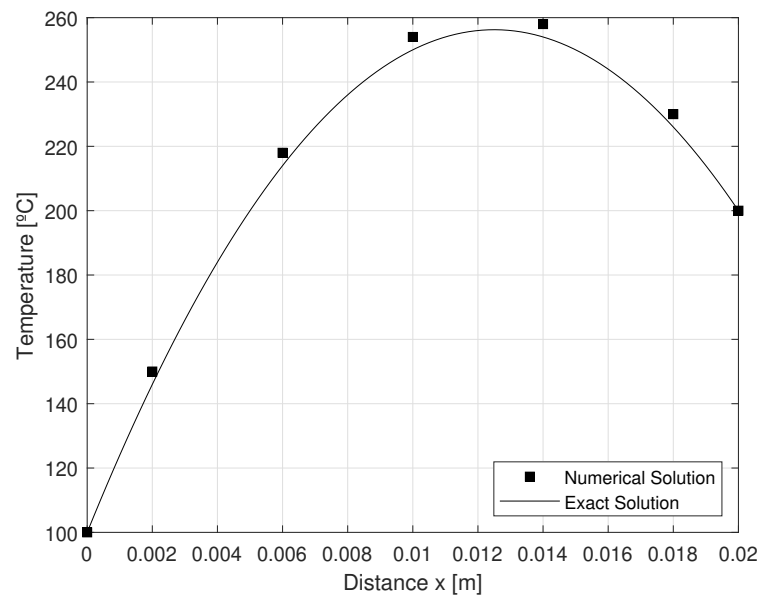


Figura 3.2: Comparação de soluções exata e numérica para o exemplo 4.2.

Comparando-se os resultados obtidos através do gráfico, é possível observar visualmente apenas uma pequena distinção entre os métodos utilizados.

Capítulo 4

Estudo de Caso 3

4.1 Problema

O estudo de caso 3 busca demonstrar o exemplo resolvido 4.3 do livro referência.

O problema consiste em uma condução de calor unidimensional, em uma aleta submetida a resfriamento por convecção. O problema é governado por a equação:

$$\frac{d}{dx} \left(kA \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_{\infty}) = 0 \quad (4.1)$$

Onde as condições de contorno são:

- Temperatura na base da haste: $100^{\circ}C$
- Comprimento da haste: 1 m
- Temperatura ambiente: $20^{\circ}C$
- Parâmetro de descrição da convecção: $n^2 = hP/(kA) = 25\text{ m}^{-2}$

A Fig. 4.1 apresenta um esboço ilustrativo do problema.

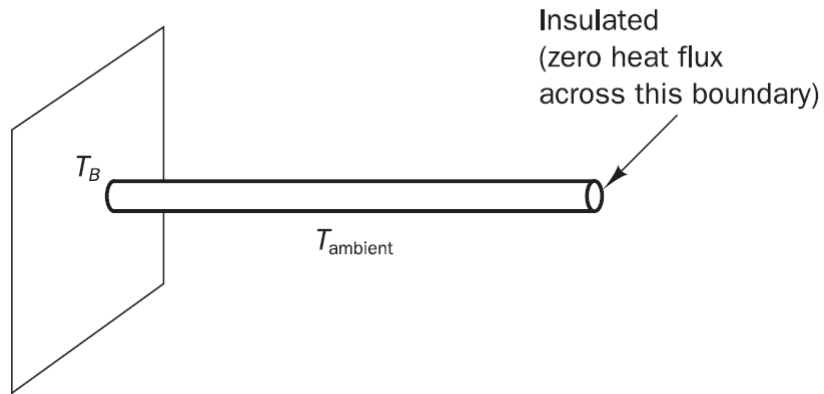


Figura 4.1: Esboço do estudo de caso 3.

4.2 Código Computacional

Abaixo é possível observar o script (código computacional) desenvolvido para a solução do problema.

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% Inputs
6
7 TB = 100;      % Temperature B [C]
8 Tinf = 20;     % Ambiente Temperature [C]
9 L = 1;         % Length [m]
10 h = 25;       % h = n^2 [m^-2]
11 n = 10;       % Number of nodes (grid generation)
12
13 %% Numerical Solution
14
15 dx = L/n;
16
17 % Preallocation
18
19 aW = zeros(n,1);
20 aE = zeros(n,1);
21 SP = zeros(n,1);
22 Su = zeros(n,1);
23
24 % Node 1
25

```

```

26 aE(1) = inv(dx);
27 SP(1) = -h*dx - 2/dx;
28 Su(1) = h*dx*Tinf + 2*TB/dx;
29
30 % Central Nodes
31
32 i = 2:(n-1);
33
34 aW(i) = inv(dx);
35 aE(i) = inv(dx);
36 SP(i) = -h*dx;
37 Su(i) = h*dx*Tinf;
38
39 % Node n
40
41 aW(n) = inv(dx);
42 SP(n) = -h*dx;
43 Su(n) = h*dx*Tinf;
44
45 % Matrix Equation
46
47 aP = aW + aE - SP;
48 a = diag(aP);
49
50 for i = 2:n
51
52     j = i-1;
53     a(i,j) = -aW(i);
54     a(j,i) = -aE(j);
55
56 end
57
58 T = a\Su;
59
60 %% Outputs
61
62 x_num = linspace(0,L-dx,n) + dx/2;
63 x_num = [0; x_num'];
64 T_num = [TB; T];
65
66 x_ex = linspace(0,L,100);
67 T_ex = Tinf + (TB - Tinf)*(cosh(sqrt(h)*(L - x_ex))/cosh(sqrt(h)*L));
68
69 figure
70 plot(x_num,T_num, 'sk', 'MarkerFaceColor','k')
71 hold on
72 plot(x_ex,T_ex, 'k')

```

```

73 legend('Numerical Solution', 'Exact Solution')
74 xlabel('Distance x [m]')
75 ylabel('Temperature [C]')
76 grid

```

4.3 Resultado

A Fig. 4.2 apresenta um comparativo entre as soluções analítica e numérica do problema.

A solução exata foi obtida através da equação:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_B - T_{\infty}} = \frac{\cosh[n(L - x)]}{\cosh(nL)} \quad (4.2)$$

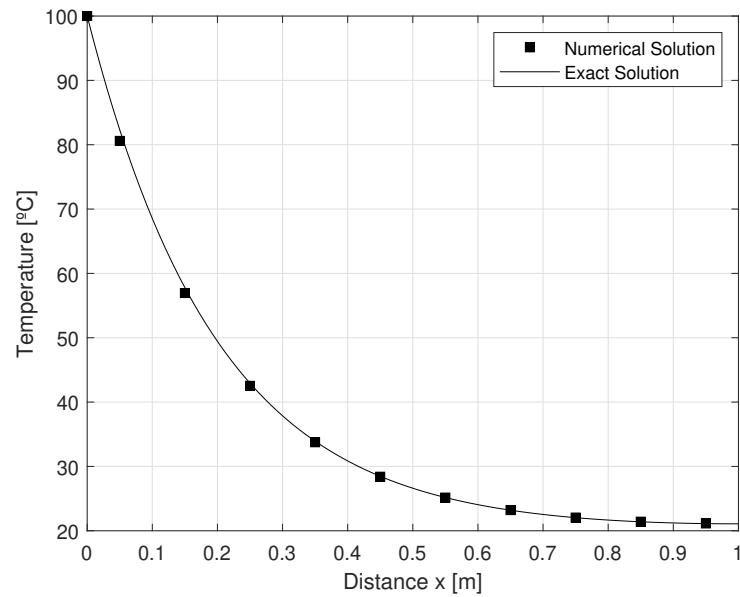


Figura 4.2: Comparação de soluções exata e numérica para o exemplo 4.3.

Comparando-se os resultados obtidos através do gráfico, é possível observar visualmente apenas uma pequena distinção entre os métodos utilizados.

Capítulo 5

Conclusões

O trabalho demonstrou-se como uma ferramenta muito eficiente para a compreensão matemática da abordagem utilizada: Discretização das equações de transporte pelo método dos volumes finitos.

Todos os códigos computacionais desenvolvidos foram bem semelhantes, com exceção de alguns pequenos ajustes realizados de um para o outro.

Os resultados obtidos através do método numérico apresentaram erros muito pequenos quando comparados com os obtidos através de métodos analíticos. Porém, vale salientar dois pontos: Primeiro, foram utilizados malhas numéricas grosseiras, para a resolução dos problemas, que poderiam serem refinadas a fim de se obter resultados com erros ainda menores; Segundo, o trabalho teve foco de ilustrar a capacidade e importância do uso dos métodos, visto que nem sempre (a depender da complexidade da geometria em estudo) é possível obter uma solução analítica para descrever um sistema físico.