Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica
Disciplina de Tópicos Especiais em Engenharia de Energias Renováveis I

Atividade 3: O Método dos Volumes Finitos para Problemas de Difusão

Thiago Ney Evaristo Rodrigues - 11502852
Professor: Dr. Gilberto Augusto Amado Moreira

João Pessoa, PB
Julho de 2020

Lista de Figuras

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho busca apresentar estudos de casos de problemas de **Difusão** utilizando-se o **Método dos Volumes Finitos**. Os casos foram retirados dos exemplos resolvidos 4.1, 4.2 e 4.3 do livro **An Introduction to Computational Fluid Dynamics**, de Versteeg, H.K. e Malalasekera, W.

O objetivo central é a compreensão da discretização das **Equações de Transporte**, sendo essas equações matemáticas que regem a física de problemas de Fenômenos de Transporte, a fim de se ter uma visão mais abrangente sobre o funcionamento de softwares simuladores de dinâmica dos fluidos computacional.

Para a resolução dos problemas, foram-se elaborados script no software de computação científica **MATLAB®**.

Capítulo 2

Estudo de Caso 1

2.1 Problema

O estudo de caso 1 busca demonstrar o exemplo resolvido 4.1 do livro referência.

O problema consiste em uma condução de calor unidimensional, sem fonte, em uma haste isolada, cujas extremidades são mantidas a temperaturas constantes. O problema é governado por a equação:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{2.1}$$

Onde as condições de contorno são:

- Temperatura A: $100°C$
- Temperatura B: $500°C$
- Comprimento da haste: $0.5\ m$
- Área da seção transversal: $10 \times 10^{-3}\ m^2$
- Condutividade térmica: $1000\ W/m.K$

A Fig. 2.1 apresenta um esboço ilustrativo do problema.

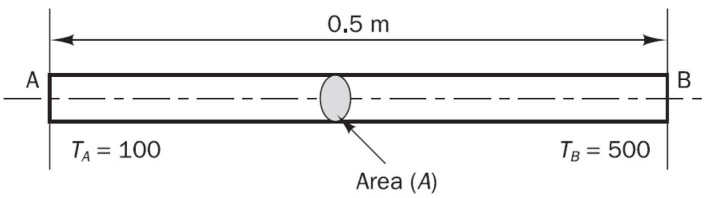

Figura 2.1: Esboço do estudo de caso 1.

2.2 Código Computacional

Abaixo é possível observar o script (código computacional) desenvolvido para a solução do problema.

```
clear
close all
clc

%% Inputs

TA = 100;      % Temperature A [C]
TB = 500;      % Temperature B [C]
k = 1000;      % Thermal conductivity constant [W/m.K]
A = 10*10^-3; % Cross-sectional area [m^2]
L = 0.5;       % Length [m]
n = 5;         % Number of nodes (grid generation)

%% Numerical Solution

dx = L/n;

% Preallocation

aW = zeros(n,1);
aE = zeros(n,1);
SP = zeros(n,1);
Su = zeros(n,1);

% Node 1

aE(1)  = k*A/dx;
SP(1)  = -2*k*A/dx;
Su(1)  = (2*k*A/dx)*TA;

% Central Nodes

i = 2:(n-1);

aW(i)  = k*A/dx;
aE(i)  = k*A/dx;

% Node n

aW(n)  = k*A/dx;
SP(n)  = -2*k*A/dx;
```

```
Su(n) = (2*k*A/dx)*TB;

% Matrix Equation

aP = aW + aE - SP;
a = diag(aP);

for i = 2:n

    j = i-1;
    a(i,j) = -aW(i);
    a(j,i) = -aE(j);

end

T = a\Su;

%% Outputs

x_num = linspace(0,L-dx,n) + dx/2;
x_num = [0; x_num'; L];
f_num = [TA; T; TB];

x_ex = linspace(0,L,100);
f_ex = 800*x_ex + 100;

figure
plot(x_num,f_num, 'sk',  'MarkerFaceColor', 'k')
hold on
plot(x_ex,f_ex, 'k')
legend({'Numerical Solution', 'Exact Solution'}, 'Location', 'southeast')
xlabel('Distance x [m]')
ylabel('Temperature [C]')
grid
```

2.3 Resultado

A Fig. 2.2 apresenta um comparativo entre as soluções analítica e numérica do problema.

A solução exata foi obtida através da equação:

$$T = 800x + 100 \tag{2.2}$$

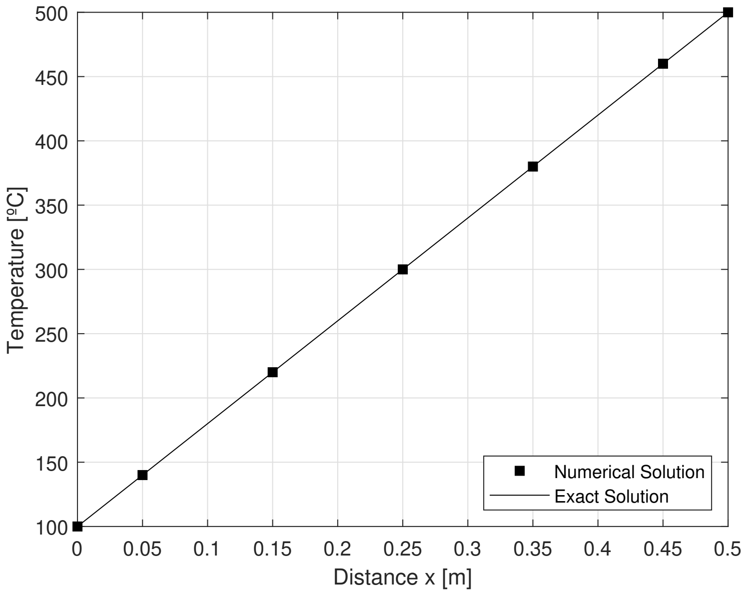

Figura 2.2: Comparação de soluções exata e numérica para o exemplo 4.1.

Comparando-se os resultados obtidos através do gráfico, não é possível observar visualmente nenhuma distinção entre os métodos utilizados.

Capítulo 3

Estudo de Caso 2

3.1 Problema

O estudo de caso 2 busca demonstrar o exemplo resolvido 4.2 do livro referência.

O problema consiste em uma condução de calor unidimensional, com fonte (ao contrário do estudo de caso 1), em uma haste isolada, cujas extremidades são mantidas a temperaturas constantes. O problema é governado por a equação:

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + q = 0 \tag{3.1}$$

Onde as condições de contorno são:

- Temperatura A: $100°C$
- Temperatura B: $200°C$
- Comprimento da haste: 2 cm
- Área da seção transversal: 10×1 m^2
- Condutividade térmica: 0.5 $W/m.K$
- Fonte de calor: 1000 kW/m^3

A Fig. 3.1 apresenta um esboço ilustrativo do problema.

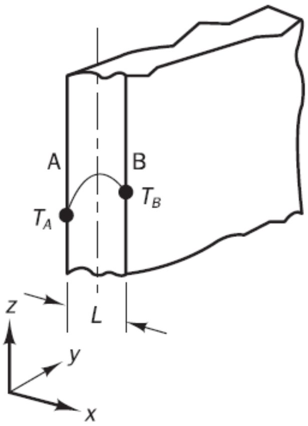

Figura 3.1: Esboço do estudo de caso 2.

3.2 Código Computacional

Abaixo é possível observar o script (código computacional) desenvolvido para a solução do problema.

```
clear
close all
clc

%% Inputs

TA = 100;       % Temperature A [C]
TB = 200;       % Temperature B [C]
q = 1000*10^3; % Heat generation [W/m^3]
k = 0.5;        % Thermal conductivity constant [W/m.K]
A = 1;          % Cross-sectional area [m^2]
L = 0.02;       % Length [m]
n = 5;          % Number of nodes (grid generation)

%% Numerical Solution

dx = L/n;

% Preallocation

aW = zeros(n,1);
aE = zeros(n,1);
SP = zeros(n,1);
Su = zeros(n,1);
```

```

% Node 1

aE(1) = k*A/dx;
SP(1) = -2*k*A/dx;
Su(1) = (2*k*A/dx)*TA + q*A*dx;

% Central Nodes

i = 2:(n-1);

aW(i) = k*A/dx;
aE(i) = k*A/dx;
Su(i) = q*A*dx;

% Node n

aW(n) = k*A/dx;
SP(n) = -2*k*A/dx;
Su(n) = (2*k*A/dx)*TB + q*A*dx;

% Matrix Equation

aP = aW + aE - SP;
a = diag(aP);

for i = 2:n

    j = i-1;
    a(i,j) = -aW(i);
    a(j,i) = -aE(j);

end

T = a\Su;

%% Outputs

x_num = linspace(0,L-dx,n) + dx/2;
x_num = [0; x_num'; L];
T_num = [TA; T; TB];

x_ex = linspace(0,L,100);
T_ex = ((TB - TA)/L + q*(L - x_ex)/(2*k)).*x_ex + TA;

figure
plot(x_num,T_num, 'sk',  'MarkerFaceColor', 'k')
```

```
hold on
plot(x_ex,T_ex, 'k')
legend({'Numerical Solution', 'Exact Solution'}, 'Location', 'southeast')
xlabel('Distance x [m]')
ylabel('Temperature [C]')
grid
```

3.3 Resultado

A Fig. 3.2 apresenta um comparativo entre as soluções analítica e numérica do problema.

A solução exata foi obtida através da equação:

$$T = \left[\frac{T_B - T_A}{L} + \frac{q}{2k}(L - x) \right] x + T_A \tag{3.2}$$

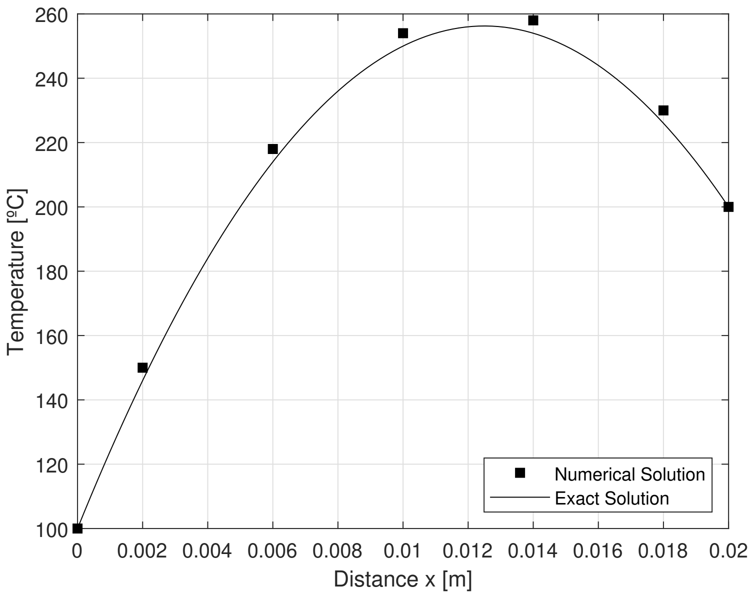

Figura 3.2: Comparação de soluções exata e numérica para o exemplo 4.2.

Comparando-se os resultados obtidos através do gráfico, é possível observar visualmente apenas uma pequena distinção entre os métodos utilizados.

Capítulo 4

Estudo de Caso 3

4.1 Problema

O estudo de caso 3 busca demonstrar o exemplo resolvido 4.3 do livro referência.

O problema consiste em uma condução de calor unidimensional, em uma aleta submetida a resfriamento por convecção. O problema é governado por a equação:

$$\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right) - hP(T - T_\infty) = 0 \qquad (4.1)$$

Onde as condições de contorno são:

- Temperatura na base da haste: $100°C$
- Comprimento da haste: $1\ m$
- Temperatura ambiente: $20°C$
- Parâmetro de descrição da convecção: $n^2 = hP/(kA) = 25\ m^{-2}$

A Fig. 4.1 apresenta um esboço ilustrativo do problema.

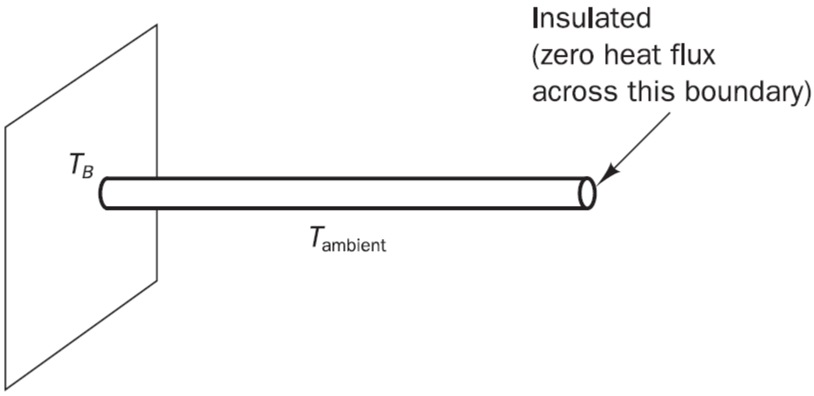

Figura 4.1: Esboço do estudo de caso 3.

4.2 Código Computacional

Abaixo é possível observar o script (código computacional) desenvolvido para a solução do problema.

```
clear
close all
clc

%% Inputs

TB = 100;        % Temperature B [C]
Tinf = 20;       % Ambiente Temperature [C]
L = 1;           % Length [m]
h = 25;          % h = n^2 [m^-2]
n = 10;           % Number of nodes (grid generation)

%% Numerical Solution

dx = L/n;

% Preallocation

aW = zeros(n,1);
aE = zeros(n,1);
SP = zeros(n,1);
Su = zeros(n,1);

% Node 1

```

```
aE(1) = inv(dx);
SP(1) = -h*dx - 2/dx;
Su(1) = h*dx*Tinf + 2*TB/dx;

% Central Nodes

i = 2:(n-1);

aW(i) = inv(dx);
aE(i) = inv(dx);
SP(i) = -h*dx;
Su(i) = h*dx*Tinf;

% Node n

aW(n) = inv(dx);
SP(n) = -h*dx;
Su(n) = h*dx*Tinf;

% Matrix Equation

aP = aW + aE - SP;
a = diag(aP);

for i = 2:n

    j = i-1;
    a(i,j) = -aW(i);
    a(j,i) = -aE(j);

end

T = a\Su;

%% Outputs

x_num = linspace(0,L-dx,n) + dx/2;
x_num = [0; x_num'];
T_num = [TB; T];

x_ex = linspace(0,L,100);
T_ex = Tinf + (TB - Tinf)*(cosh(sqrt(h)*(L - x_ex))/cosh(sqrt(h)*L));

figure
plot(x_num,T_num, 'sk',  'MarkerFaceColor', 'k')
hold on
plot(x_ex,T_ex, 'k')
```

```
legend('Numerical Solution', 'Exact Solution')
xlabel('Distance x [m]')
ylabel('Temperature [C]')
grid
```

4.3 Resultado

A Fig. 4.2 apresenta um comparativo entre as soluções analítica e numérica do problema.

A solução exata foi obtida através da equação:

$$\frac{T - T_\infty}{T_B - T_\infty} = \frac{\cosh[n(L - x)]}{\cosh(nL)} \tag{4.2}$$

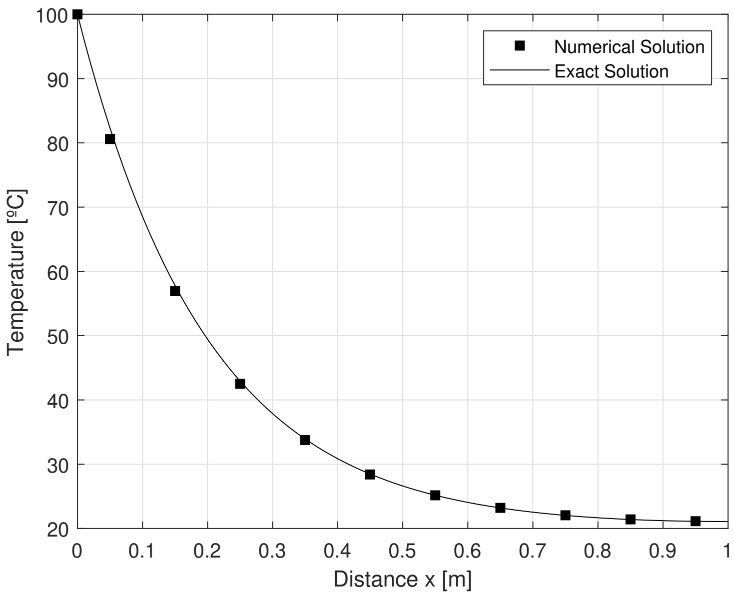

Figura 4.2: Comparação de soluções exata e numérica para o exemplo 4.3.

Comparando-se os resultados obtidos através do gráfico, é possível observar visualmente apenas uma pequena distinção entre os métodos utilizados.

Capítulo 5

Conclusões

O trabalho demonstrou-se como uma ferramenta muito eficiente para a compreensão matemática da abordagem utilizada: Discretização das equações de transporte pelo método dos volumes finitos.

Todos os códigos computacionais desenvolvidos foram bem semelhantes, com exceção de alguns pequenos ajustes realizados de um para o outro.

Os resultados obtidos através do método numérico apresentaram erros muito pequenos quando comparados com os obtidos através de métodos analíticos. Porém, vale salientar dois pontos: Primeiro, foram utilizados malhas numéricas grosseiras, para a resolução dos problemas, que poderiam serem refinadas a fim de se obter resultados com erros ainda menores; Segundo, o trabalho teve foco de ilustrar a capacidade e importância do uso dos métodos, visto que nem sempre (a depender da complexidade da geometria em estudo) é possível obter uma solução análitica para descrever um sistema físico.