Universidade Federal da Paraíba
Centro de Energias Alternativas e Renováveis
Departamento de Engenharia de Energias Renováveis
Disciplina de Tópicos Especiais em Engenharia de Energias Renováveis I

Atividade 4: O Método dos Volumes Finitos para Problemas de Convecção-Difusão

Thiago Ney Evaristo Rodrigues - 11502852
Professor: Dr. Gilberto Augusto Amado Moreira

João Pessoa, PB
Julho de 2020

Lista de Figuras

2.1 Primeira análise do estudo de caso 1. 7
2.2 Segunda análise do estudo de caso 1. 7
2.3 Terceira análise do estudo de caso 1. 8

3.1 Primeira análise do estudo de caso 2. 12
3.2 Segunda análise do estudo de caso 2. 12

Conteúdo

1 Introdução **3**

2 Estudo de Caso 1 **4**

2.1 Problema 4

2.2 Código Computacional 4

2.3 Resultados 6

3 Estudo de Caso 2 **9**

3.1 Problema 9

3.2 Código Computacional 9

3.3 Resultados 11

4 Conclusões **13**

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho busca apresentar estudos de casos de problemas de Convecção-Difusão utilizando-se o Método dos Volumes Finitos. Os casos foram retirados dos exemplos resolvidos 5.1 e 5.2 do livro An Introduction to Computational Fluid Dynamics, de Versteeg, H.K. e Malalasekera, W.

O objetivo central é a compreensão da discretização das Equações de Transporte através dos esquemas de **diferenciação centrada** e **diferenciação *upwind***. A principal distinção entre as duas abordagens, é que a primeira não leva em consideração (ao contrário da segunda) o sentido do fluxo da propriedade em estudo.

Para a resolução dos problemas, foram-se elaborados script no software de computação científica MATLAB®.

Capítulo 2

Estudo de Caso 1

2.1 Problema

O estudo de caso 1 busca demonstrar o exemplo resolvido 5.1 do livro referência. O problema consiste em uma convecção-difusão unidimensional, sem fonte, utilizando a discretização pelo esquema de diferenciação centrada e governado por a equação:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \tag{2.1}$$

Onde as condições de contorno são: $L = 1,0\ m$, $\rho = 1,0\ kg/m^3$ e $\Gamma = 0,1\ kg/m.s$

O problema foi dividido em 3 análises:

1. $u = 0,1\ m/s$ e $n = 5$ nós
2. $u = 2.5\ m/s$ e $n = 5$ nós
3. $u = 2.5\ m/s$ e $n = 20$ nós

2.2 Código Computacional

Abaixo é possível observar o script (código computacional) desenvolvido para a solução do problema.

```
clear
close all
clc

%% Inputs
```

```
n = 20;         % Number of nodes (grid generation)
u = 2.5;        % Velocity [m/s]
L = 1;          % Length [m]
rho = 1;        % Density [kg/m^3]
phi0 = 1;       % Boundary condition (x = 0 m)
phiL = 0;       % Boundary condition (x = L m)
Gamma = 0.1;    % Dynamic viscosity [kg/m.s]

%% Numerical Solution

dx = L/n;
F = rho*u;
D = Gamma/dx;

% Preallocation

aW = zeros(n,1);
aE = zeros(n,1);
SP = zeros(n,1);
Su = zeros(n,1);

% Node 1

aE(1) = D - F/2;
SP(1) = -(2*D + F);
Su(1) = (2*D + F)*phi0;

% Central Nodes

i = 2:(n-1);

aW(i) = D + F/2;
aE(i) = D - F/2;

% Node n

aW(n) = D + F/2;
SP(n) = -(2*D - F);
Su(n) = (2*D - F)*phiL;

% Matrix Equation

aP = aW + aE - SP;
a = diag(aP);

for i = 2:n
```

```
    j = i-1;
    a(i,j) = -aW(i);
    a(j,i) = -aE(j);

end

phi = a\Su;

%% Outputs

x_num = linspace(0,L-dx,n) + dx/2;
x_num = [0; x_num'; L];
f_num = [phi0; phi; phiL];

x_ex = linspace(0,L,100);
f_ex = phi0 + (phiL - phi0)*(exp(rho*u*x_ex/Gamma) - ...
    1)/(exp(rho*u*L/Gamma) - 1);

figure
plot(x_num,f_num, 'sk',  'MarkerFaceColor', 'k')
hold on
plot(x_ex,f_ex, 'k')
legend('Numerical Solution', 'Exact Solution')
legend('Location', 'southwest')
title('u = 2.5 m/s')
xlabel('Distance x [m]')
ylabel('Property \phi')
grid
```

2.3 Resultados

As Fig. 2.1, 2.2 e 2.3 apresentam comparativos entre as soluções analítica e numérica do problema, para cada análise realizada.

A solução exata foi obtida através da equação:

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{exp(\phi u x/\Gamma)}{exp(\phi u L/\Gamma)} \tag{2.2}$$

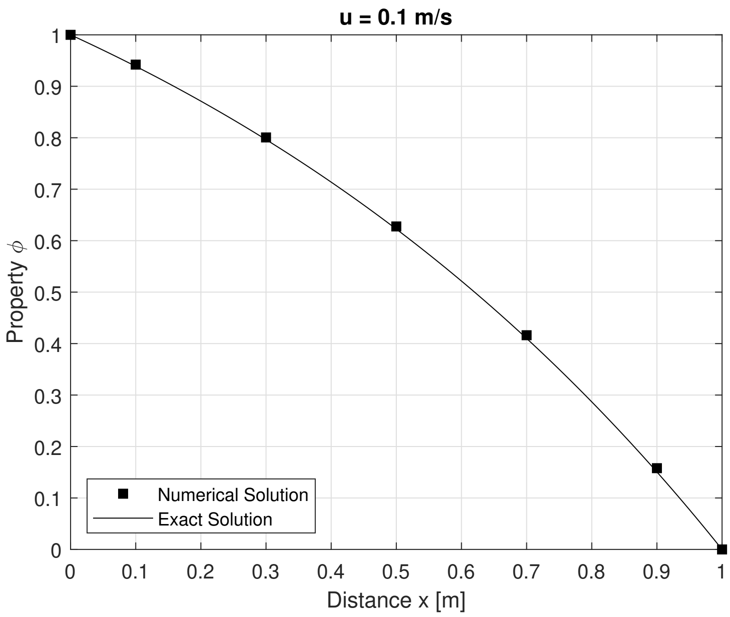

Figura 2.1: Primeira análise do estudo de caso 1.

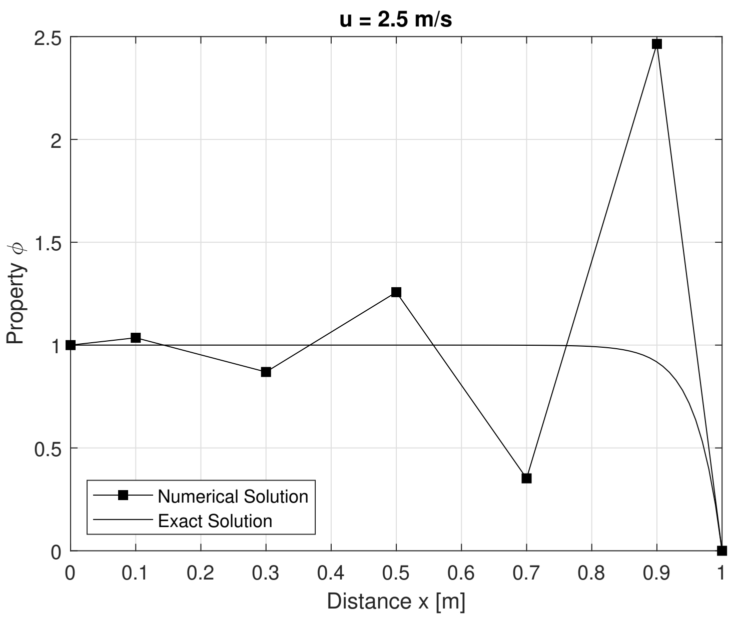

Figura 2.2: Segunda análise do estudo de caso 1.

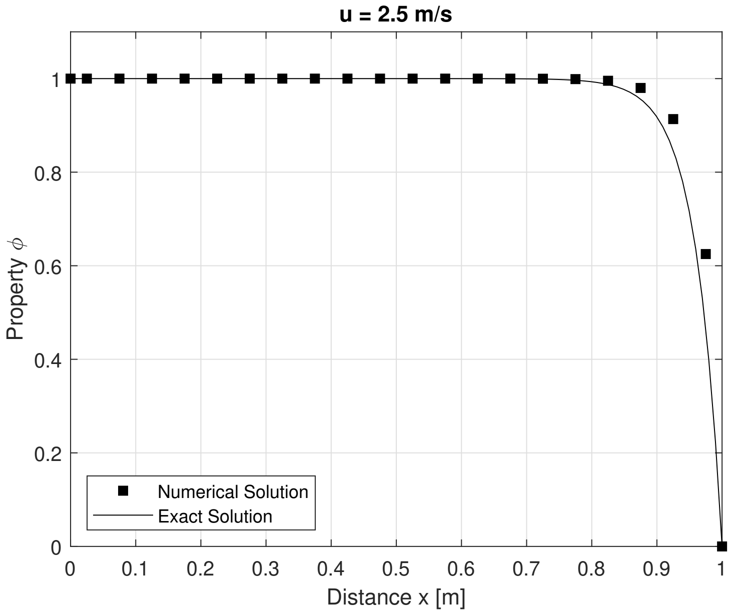

Figura 2.3: Terceira análise do estudo de caso 1.

Comparando-se os resultados obtidos (soluções analítica e numérica) através dos gráficos, só é possível observar visualmente distinção significativa entre os métodos utilizados na análise 2 (Fig. 2.2).

Capítulo 3

Estudo de Caso 2

3.1 Problema

O estudo de caso 2 busca demonstrar o exemplo resolvido 5.2 do livro referência. O problema consiste em uma convecção-difusão unidimensional, sem fonte, utilizando a discretização pelo esquema de diferenciação *upwind* e governado por a equação:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \tag{3.1}$$

Onde as condições de contorno são: $L = 1,0\ m$, $\rho = 1,0\ kg/m^3$ e $\Gamma = 0,1\ kg/m.s$

O problema foi dividido em 2 análises:

1. $u = 0,1\ m/s$ e $n = 5$ nós
2. $u = 2.5\ m/s$ e $n = 5$ nós

3.2 Código Computacional

Abaixo é possível observar o script (código computacional) desenvolvido para a solução do problema.

```
clear
close all
clc

%% Inputs

```

```
n = 5;          % Number of nodes (grid generation)
u = 2.5;        % Velocity [m/s]
L = 1;          % Length [m]
rho = 1;        % Density [kg/m^3]
phi0 = 1;       % Boundary condition (x = 0 m)
phiL = 0;       % Boundary condition (x = L m)
Gamma = 0.1;    % Dynamic viscosity [kg/m.s]

%% Numerical Solution

dx = L/n;
F = rho*u;
D = Gamma/dx;

% Preallocation

aW = zeros(n,1);
aE = zeros(n,1);
SP = zeros(n,1);
Su = zeros(n,1);

% Node 1

aE(1) = D;
SP(1) = -(2*D + F);
Su(1) = (2*D + F)*phi0;

% Central Nodes

i = 2:(n-1);

aW(i) = D + F;
aE(i) = D;

% Node n

aW(n) = D + F;
SP(n) = -2*D;
Su(n) = 2*D*phiL;

% Matrix Equation

aP = aW + aE - SP;
a = diag(aP);

for i = 2:n

```

```
    j = i-1;
    a(i,j) = -aW(i);
    a(j,i) = -aE(j);

end

phi = a\Su;

%% Outputs

x_num = linspace(0,L-dx,n) + dx/2;
x_num = [0; x_num'; L];
f_num = [phi0; phi; phiL];

x_ex = linspace(0,L,100);
f_ex = phi0 + (phiL - phi0)*(exp(rho*u*x_ex/Gamma) - ...
   1)/(exp(rho*u*L/Gamma) - 1);

figure
plot(x_num,f_num, 'sk',  'MarkerFaceColor', 'k')
hold on
plot(x_ex,f_ex, 'k')
legend('Numerical Solution', 'Exact Solution')
legend('Location', 'southwest')
title('u = 2.5 m/s')
xlabel('Distance x [m]')
ylabel('Property \phi')
grid
```

3.3 Resultados

As Fig. 3.1 e 3.2 apresentam comparativos entre as soluções analítica e numérica do problema, para cada análise realizada.

A solução exata foi obtida através da equação:

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{exp(\phi u x/\Gamma)}{exp(\phi u L/\Gamma)} \tag{3.2}$$

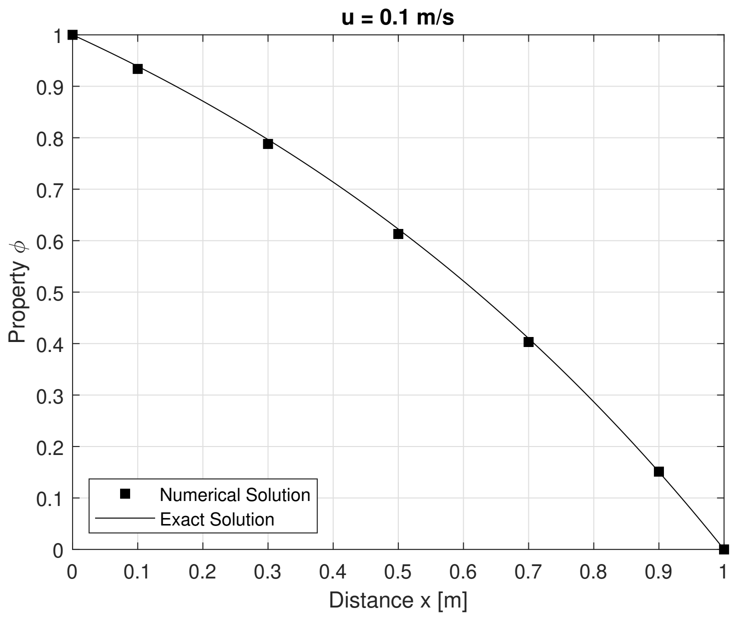

Figura 3.1: Primeira análise do estudo de caso 2.

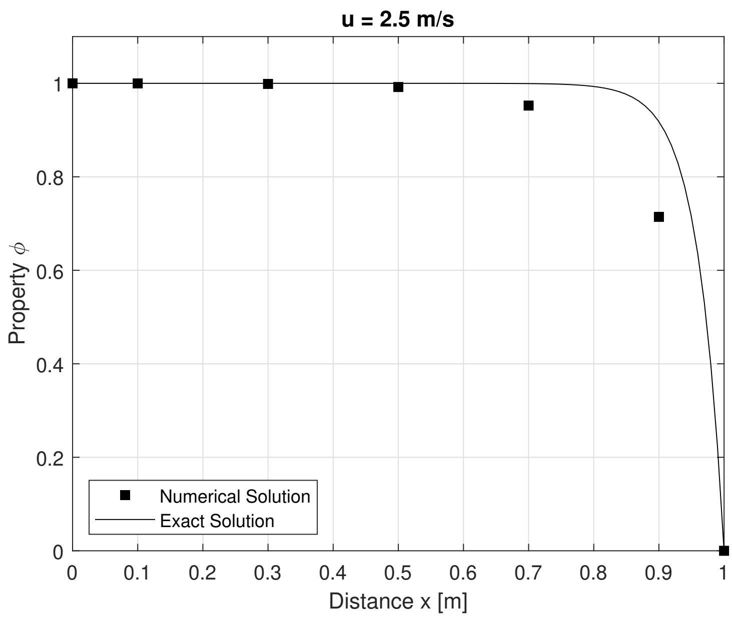

Figura 3.2: Segunda análise do estudo de caso 2.

Comparando-se os resultados obtidos (soluções analítica e numérica) através dos gráficos, só é possível observar visualmente distinção significativa entre os métodos utilizados na análise 2 (Fig. 3.2).

Capítulo 4

Conclusões

O trabalho demonstrou-se como uma ferramenta muito eficiente para a compreensão matemática da abordagem utilizada: Discretização das equações de transporte de problemas de convecção-difusão pelo método dos volumes finitos, através da discretização pelos esquemas de diferenciação centrada e diferenciação upwind.

Todos os códigos computacionais desenvolvidos foram bem semelhantes, com exceção de alguns pequenos ajustes realizados de um para o outro.

A primeira abordagem utilizada (diferenciação centrada) demonstrou-se sensível a malha numérica utilizada, podendo apresentar altos valores de under e overshoots quando utilizado uma malha grosseira. Isso deve-se às propriedades de discretização (conservatividade e vizinhança) não satisfeitas e, consequentemente, surgindo problemas no acoplhamento entre a convecção e difusão.

A segunda abordagem utilizada (diferenciação upwind) demonstrou-se mais realista ao problema para uma mesma malha numérica, embora ainda seja possível observar visualmente algum erro, a depender do problema.

Todos as abordagens apresentadas demonstraram satisfatórias quando utilizados malhas numéricas adequadas para o caso.