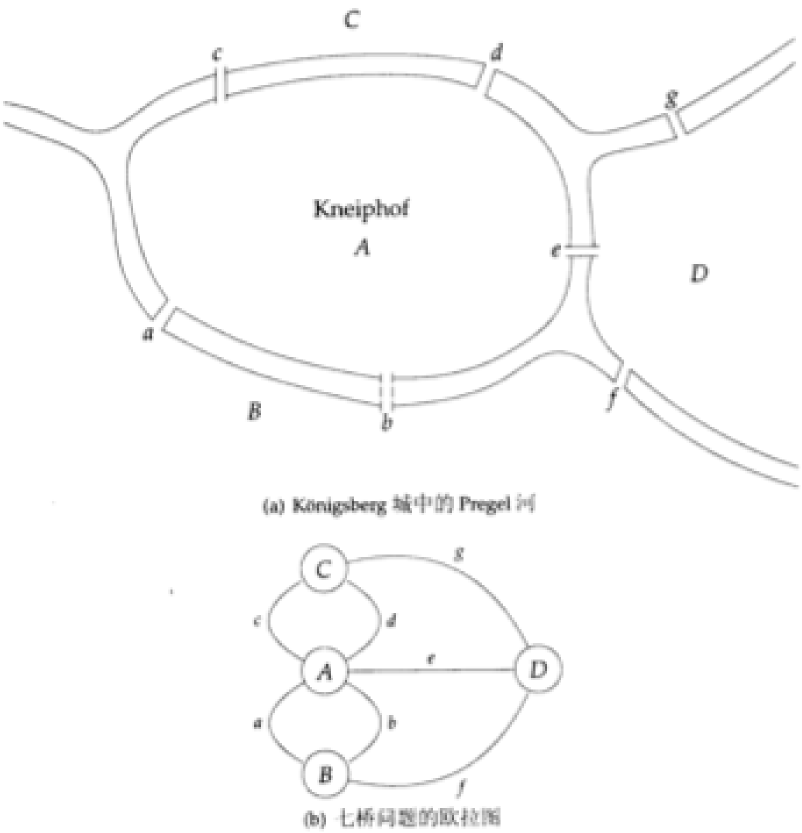
# 图的基本概念与抽象数据类型

张晓平

2016 年 11 月 15 日

图论是数学的一个分支，最早可以追溯到 1736 年，数学家欧拉用图论方法解决了 Königsberg 七桥问题，此后七桥问题成为著名的数学经典。Königsberg 城中的 Pregel 河围绕 Kneiphof 岛缓缓流过，分成两条支流。Pregel 河把 Königsberg 城分割成四个区域，四个区域由七座桥连接。




(a) Königsberg 城中的 Pregel 河

(b) 七桥问题的欧拉图

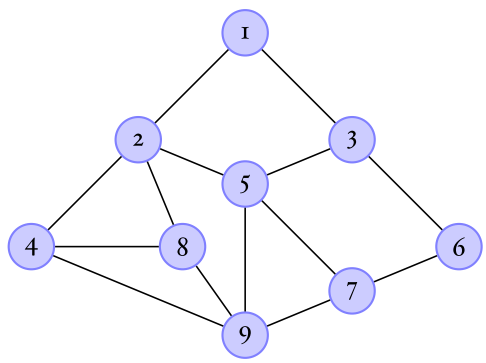
四个区域用 $A, B, C, D$ 标记，七座桥用 $a, b, c, d, e, f, g$ 标记。七桥问题的提法是：从任何一个区

域出发，跨过每座桥一次且一次，问最后能否回到出发的那个区域。

欧拉解决了这一问题，答案是不能。欧拉首先把这个问题描述为抽象的数学对象：图，用图的顶点表示区域，用图的边表示桥梁。图中顶点的度定义为与该顶点邻接的边数，欧拉证明了：如果从图中的一个顶点出发，经过图中所有边一次且仅一次，最后回到出发的顶点，那么当且仅当所有顶点的度都是偶数。后来为了纪念欧拉的发现，这样的回路称为欧拉回路。七桥问题之所以不存在欧拉回路，是因为所有顶点的度均为奇数。

# 1 图的定义与术语

图 $G$ 由两个集合 $V, E$ 组成，其中 $V$ 是顶点的有限非空集合，$E$ 是顶点的二元组集合，顶点二元组称为边。$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别称为图 $G$ 的顶点集和边集，以后也用 $G = (V, E)$ 表示图。




注意：

- 线性表的数据元素叫元素，树的数据元素叫结点，图的数据元素称为顶点 (vertex)。
- 线性表若无数据元素，称为空表。树中没有结点称为空树。但在图中，不允许没有顶点，即顶点集合 $V$ 有限非空。

1、无向图

- 若顶点 $v_i$ 到 $v_j$ 之间的边没有方向，则称该边为无向边 (edge)，用无序偶对 $(v_i, v_j)$ 表示。
- 若图中任意两顶点之间的边都是无向边，则称该图为无向图 (undirected graphs)。

2、有向图

- 若顶点 $v_i$ 到 $v_j$ 之间的边有方向，则称这条边为有向边，也称为弧 (arc)，用有序偶对 $< v_i, v_j >$ 表示，其中 $v_i$ 称为弧尾 (tail)，$v_j$ 称为弧头 (head)。
- 若图中任意两顶点之间的边都是有向边，则称该图为有向图 (directed graphs)。

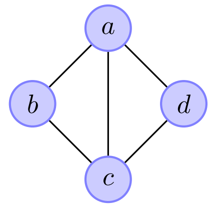



图 1: 无向图

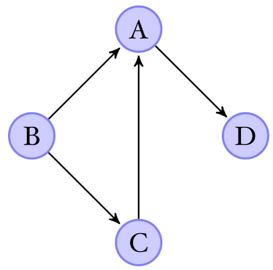



图 2: 有向图

3、简单图：若不存在顶点到自身的边，且同一条边不重复出现，则称这样的图为简单图。本章只讨论简单图。


图 3: 非简单无向图

4、无向完全图：在无向图中，若任意两顶点之间都存在边，则称该图为无向完全图。

含有 $n$ 个顶点的无向完全图有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边。

5、有向完全图：在有向图中，若任意两顶点之间都存在方向相反的两条弧，则称该图为有向完全图。

含有 $n$ 个顶点的有向完全图有 $n(n-1)$ 条弧。

对于具有 $n$ 个顶点和 $e$ 条边的图，无向图满足

$$0 \le e \le \frac{n(n-1)}{2},$$

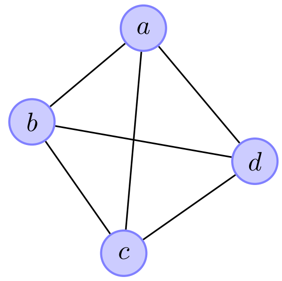



图 4: 无向完全图

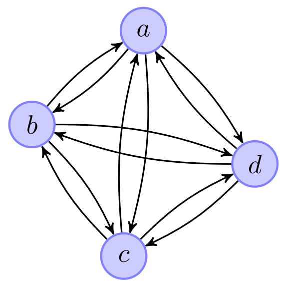



图 5: 有向完全图

有向图满足

$$0 \le e \le n(n-1).$$

6、稠密图与稀疏图：有很少条边或弧的图称为稀疏图，反之称为稠密图。

这里稀疏与稠密是模糊概念，都是相对而言的。

7、网络

- 有些图的边或弧具有与它相关的数字，这种与边或弧相关的数称为权 (weight)。这些权可以表示从一个顶点到另一个顶点的距离或耗费。
- 这种带权的图称为网 (network)。

8、子图：假设有两个图 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$，如果 $V' \subset V$ 且 $E' \subset E$，则称 $G'$ 为 $G$ 的子图 (subgraph)。

## 2 顶点与边的关系

1、无向图顶点的邻接、度

对于无向图 $G = (V, E)$,

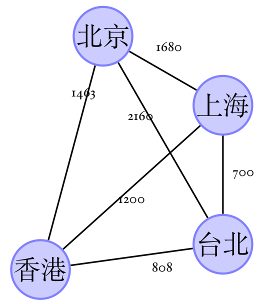

北京
1680
1463
2160
上海
700
1200
台北
香港
808

图 6: 网

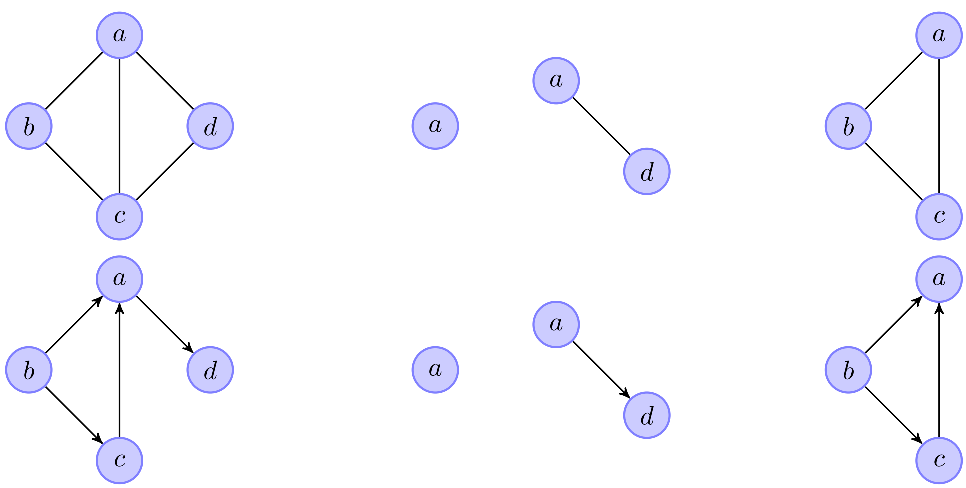

a
b
d
c
a
a
d
a
b
c
a
b
d
c
a
a
d
a
b
c

图 7: 子图

- 若边 $(v, v') \in E$，则称 $v, v'$ 相邻，称边 $(v, v')$ 邻接顶点 $v$ 和 $v'$。
- 顶点 $v$ 的度 (degree) 是和 $v$ 邻接的边的数目，记为 $D(v)$。
- 重要关系：
$$e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} D(v_i).$$

2、有向图顶点的邻接、入度、出度和度

对于有向图 $G = (V, E)$,

- 若弧 $\langle v, v' \rangle \in E$，则称 $v$ 指向 $v'$，顶点 $v'$ 发自 $v$，弧 $\langle v, v' \rangle$ 与 $v, v'$ 邻接。
- 以 $v$ 为头的弧的数目称为 $v$ 的入度，记为 $D_{in}(v)$；

  以 $v$ 为尾的弧的数目称为 $v$ 的出度，记为 $D_{out}(v)$；

  顶点 $v$ 的度为 $D(v) = D_{in}(v) + D_{out}(v)$。
- 重要关系：
$$e = \sum_{i=1}^{n} D_{in}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} D_{out}(v_i).$$

3、无向图的路径

对于无向图 $G = (V, E)$,从顶点 $v$ 到顶点 $v'$ 的路径 (path) 是一个顶点序列 $(v = v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_m} = v')$，其中 $(v_{i_{k-1}}, v_{i_k}) \in E$，$1 \le k \le m$。

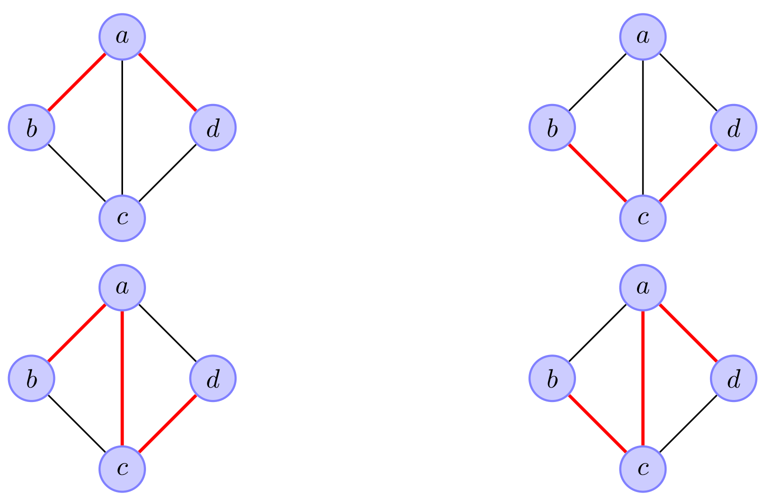



图 8: 顶点 $b$ 到 $d$ 有四条路径

4、有向图的路径


图 9: 顶点 $b$ 到 $d$ 有两条路径

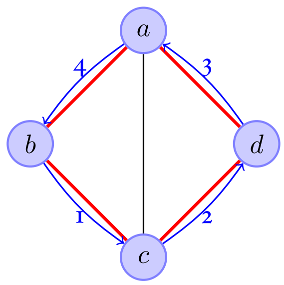



图 10: 简单回路

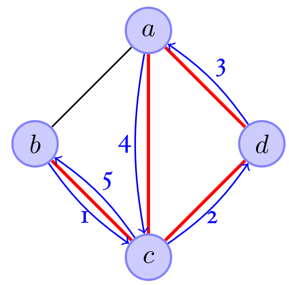



图 11: 非简单回路

对于有向图 $G = (V, E)$，其路径也是有向的，顶点序列应满足 $(v_{i_{k-1}}, v_{i_k}) \in E$，$1 \leq k \leq m$。

5、路径长度

路径的长度是路径上的边或弧的数目。

6、回路或环

第一个顶点和最后一个顶点相同的路径称为回路或环 (cycle)。

7、简单路径

序列中顶点不重复出现的路径称为简单路径。

8、简单回路或简单环除第一个顶点和最后一个顶点外，其余顶点不重复的回路，称为简单回路或简单环。

# 3 图的连通性

## 3.1 无向图的连通性

1、连通图：在无向图中，

- 若顶点 $v$ 到 $v'$ 有路径，则称 $v$ 与 $v'$ 是连通的。
- 若对任意两个顶点 $v_i, v_j \in E$，$v_i$ 和 $v_j$ 都是连通的，则称 $G$ 是连通图 (connected graph)。

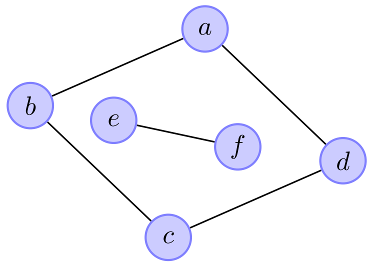



图 12: 非连通图

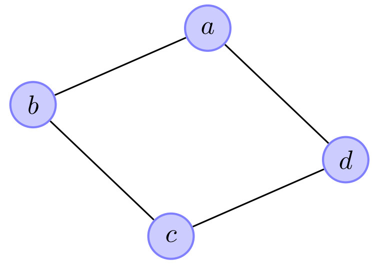



图 13: 连通图

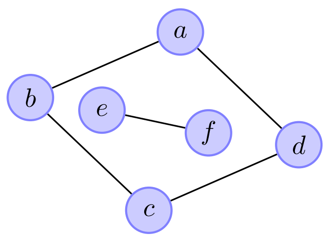



图 14: 非连通图

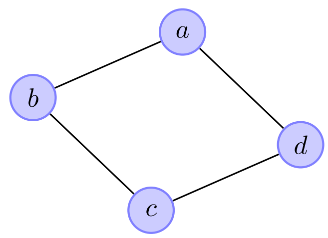



图 15: 连通分量

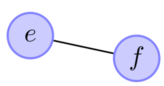



图 16: 连通分量

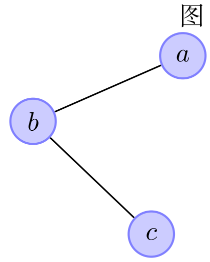



图 17: 不是连通分量

2、连通分量：无向图中的极大连通子图称为连通分量。

此概念强调

- 要是子图；
- 子图要是连通的；
- 连通子图含有极大顶点数；
- 具有极大顶点数的连通子图包含相关联于这些顶点的边。

3、连通图的生成树：一个连通图的生成子树是一个极小的连通子图，它含有图中全部的 $n$ 个顶点，但只有足以构成一棵树的 $n-1$ 条边。

设无向图 $G$ 有 $n$ 个顶点，

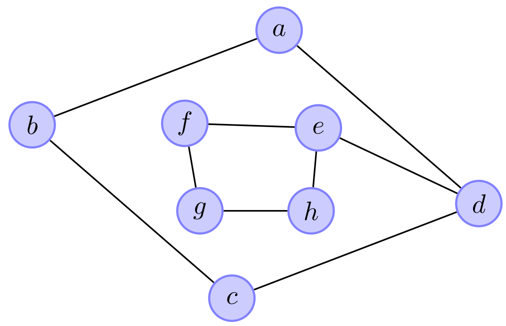



图 18: 普通无向图

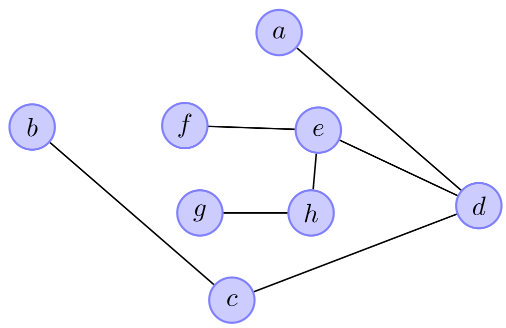



图 19: 无向图的生成树

- 若边数小于 $n-1$，则 $G$ 是非连通图；
- 若边数大于 $n-1$，则 $G$ 必定构成一个环；
- 但边数等于 $n-1$，并不一定是生成树。

## 3.2 有向图的连通性

1、强连通图：在有向图 $G$ 中，若对 $v_i, v_j \in V, v_i \neq v_j$，从 $v_i$ 到 $v_j$ 和从 $v_j$ 到 $v_i$ 存在路径，则称 $G$ 是强连通图。有向图中的极大强连通子图称为有向图的强连通分量。

2、有向树的生成森林

- 如果一个有向图恰有一个顶点的入度为 0，其余顶点的入度均为 1，则它是一棵有向树。
- 一个有向图的生成森林由若干棵有向树组成，含有图中全部顶点，但只有足以构成若干棵不相交的有向树的弧。

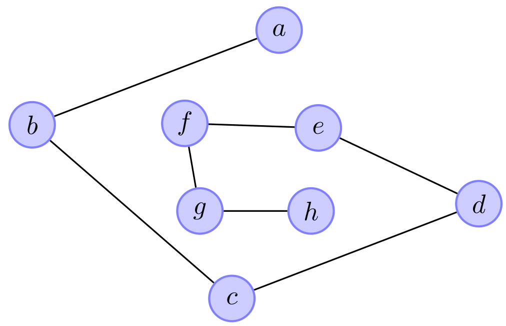



图 20: 无向图的生成树

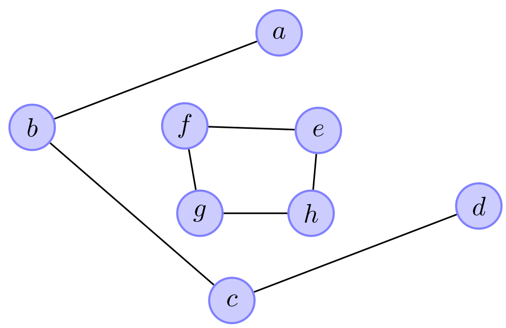



图 21: 不是生成树

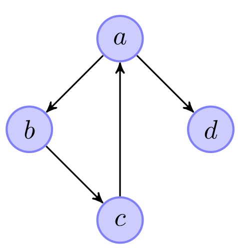



图 22: 非强连通图

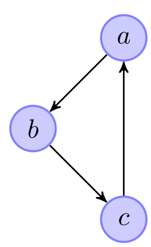



图 23: 强连通分量

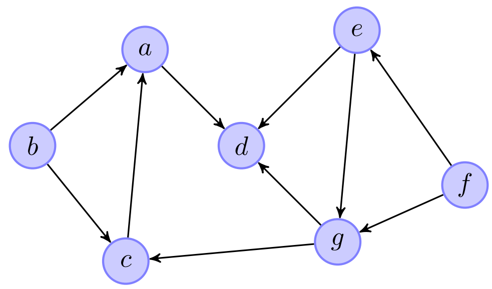



图 24: 普通有向树

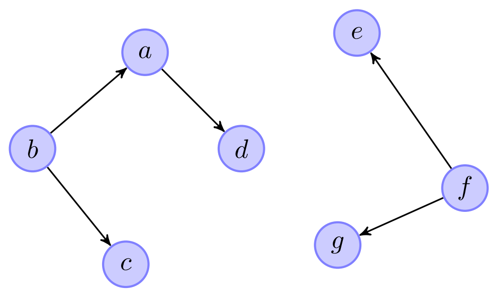



图 25: 有向树的生成森林

# 4 图的抽象数据类型

```
ADT Graph
数据对象：顶点的非空集合，由顶点二元组组成的边集
成员函数：
   Graph Create()                          return 空图
   Graph InsertVertex(graph, v)            在 graph 中插入 v，然后 return graph
   Graph InsertEdge(graph, v1, v2)         在 graph 中插入 (v1,v2)，然后 return graph
   Graph DeleteVertex(graph, v)            在 graph 中删除 v 及其邻接边，然后 return graph
   Graph DeleteEdge(graph, v1, v2)         在 graph 中删除 (v1,v2)，然后 return graph
   Boolean IsEmpty(graph)                  判断是否为空图
   List Adjacent(graph, v)                 return 与 v 相邻所有顶点的表
end Graph
```