基本数据结构

2017 年 9 月 25 日

1 目标

- 理解栈、队列、双向队列和列表的抽象数据类型
- 使用 Python 列表实现栈、队列和双向队列的抽象数据类型
- 理解基本线性数据结构的性能
- 理解前缀、中缀和后缀表达式
- 使用栈计算后缀表达式。
- 使用栈将中缀表达式转换为后缀表达式。
- 使用队列进行基本时序仿真。
- 学会根据问题性质，选择使用栈、队列和双向队列等合适的数据结构。
- 能使用结点和引用将列表实现转换为链表实现。
- 能比较链表实现与 Python 的列表实现的性能。

2 什么是线性数据结构？

我们开始数据结构的学习，从四种简单而功能强大的结构开始：

1. 栈（stack）
2. 队列（sequence）
3. 双端列表（deque）
4. 列表（list）

它们都是一种数据的集合，数据项之间的顺序由添加或删除的顺序决定。一旦一个数据项被添加，它就与之前和之后加入的元素保持一个固定的相对位置。诸如此类的数据结构被称为线性数据结构。

线性数据结构有两端，有时称为左和右，有时称为前与后，称为顶部和底部也无不可，叫什么名字并不重要。重要的是数据结构增加和删除数据的方式，特别是增删的位置。例如，一种结构可能只允许从一端添加数据，而另一种结构则两端都行。

这些变种的形式产生了计算机科学最有用的数据结构。他们出现在各种算法中，可用于解决很多重要的问题。

3 栈

栈是一种线性有序的数据元素集合，其中数据的增加删除操作都在同一段进行。进行操作的一端通常称为“顶部”，另一端称为“底部”。

- 栈的底部很重要，因为元素越接近底部，就意味着在栈里的时间越长。
- 最近添加的项是最先会被移除的。这种排序原则称为“后进先出”（LIFO）。
- 栈的排序是按时间长短来排列元素的。新来的在栈顶，老家伙们在栈底。

3.1 栈的举例

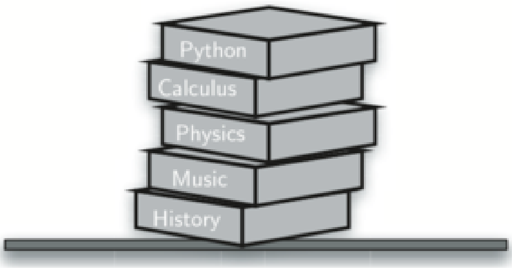
栈的例子很常见。

例:

自助餐厅的盘，人们总是从上面拿盘子，拿走一个后面的人再拿下面的一个，（服务员端来一些新的，又堆在上面了）。

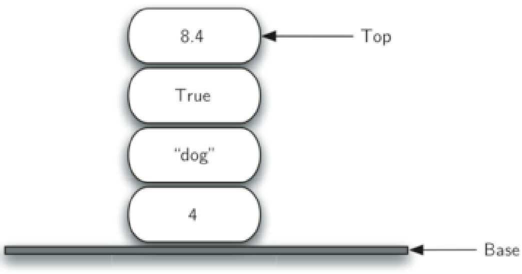
例:

又如一堆书，你只能看到最上面一本的封面，要看下面一本，就要把上面的先拿走。

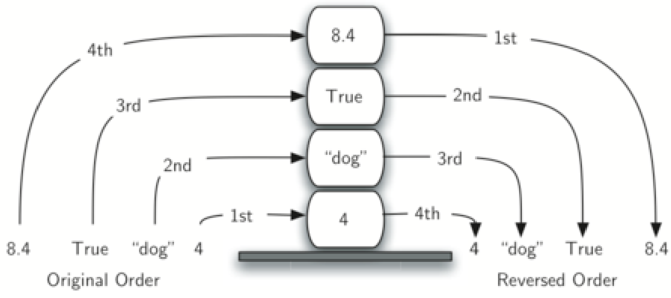


例:

下图展示了另一个栈，存储的是几个主要的 python 语言数据对象。



与栈有关的思想来源于生活中的观察，假设你从一张干净的桌子开始，一本一本地放上书，这就是在建立栈。当你一本一本地拿走，想像一下，是不是先进后出？由于这种结构具有翻转顺序的作用，所以非常重要。下图展示了 Python 数据对象创建和删除的过程，注意观察他们的顺序。



例:

栈这种翻转性，在你用电脑上网的时候也用到了。浏览器都有“返回”按钮，当你从一个链接到另一个链接，这时网址（URL）就被存进了栈。正在浏览的页就存在栈顶，点“返回”的时候，返回到刚刚浏览的页面。最早浏览的页面，要一直到最后才能看到。

3.2 栈的抽象数据类型

栈的抽象数据类型由以下结构和操作定义。如上所述，栈是结构化的、有序的数据集合，它的增删操作都在叫做“栈顶”的一端进行，存储顺序是 LIFO。栈的操作方法如下：

1. Stack(): 创建一个空栈，无参数，返回一个空栈。
2. push(item): 向栈顶压入一个新数据项，需要一个数据项参数，无返回值。
3. pop(): 从栈中删除栈顶数据项，无参数，返回删除项，栈本身发生变化。
4. peek(): 返回栈顶数据项，但不删除。不需要参数，栈不变。
5. isEmpty(): 测试栈是否为空，无参数，返回布尔值。
6. size(): 返回栈中数据项的个数，无参数，返回值为整数。

例:

设 s 是一个空栈，表 1 是一系列的操作，栈内数据和返回值。注意栈顶在右侧。

Stack Operation	Stack Contents	Return Value
`s.isEmpty()`	`[]`	`True`
`s.push(4)`	`[4]`	
`s.push('dog')`	`[4,'dog']`	
`s.peek()`	`[4,'dog']`	`'dog'`
`s.push(True)`	`[4,'dog',True]`	
`s.size()`	`[4,'dog',True]`	`3`
`s.isEmpty()`	`[4,'dog',True]`	`False`
`s.push(8.4)`	`[4,'dog',True,8.4]`	
`s.pop()`	`[4,'dog',True]`	`8.4`
`s.pop()`	`[4,'dog']`	`True`
`s.size()`	`[4,'dog']`	`2`

3.3 用 Python 实现栈

现在已经定义了栈的抽象数据类型，我们转向栈的实现。注意当我们说抽象数据类型的物理实现时，指的是建立数据结构。

如第一章所述，python 是面向对象的程序设计语言，栈一类的抽象数据类型是通过类实现的。栈的操作作为类的方法。另外，栈作为数据项的集合，我们使用 python 中强大而简单的数据集 list 来实现。

python 中的 list 类已经建立了一个数据集合机制和相应的方法，如果，有了一个列表 [2,5,3,6,7,4]，只需要约定哪一端是栈顶哪一端是栈底，list 中的方法如 append 和 pop 都可实现了。

以下的栈实现假定 list 的右侧是栈顶。这样当栈增长（push）时，新数据项就加在尾部，而 pop 也在同一位置。

```
class Stack:
    def __init__(self):
        self.items = []

    def isEmpty(self):
        return self.items == []

    def push(self, item):
        self.items.append(item)

    def pop(self):
        return self.items.pop()

    def peek(self):
        return self.items[len(self.items)-1]

    def size(self):
        return len(self.items)
```

上述代码只定义了 stack 类的实现，如果运行的话，什么反应也没有。我们需要创建一个栈，然后使用它。以下代码展示了我们通过实例化 Stack 类执行上述表格中的操作。

```
s=Stack()

print(s.isEmpty())
s.push(4)
s.push('dog')
print(s.peek())
s.push(True)
print(s.size())
print(s.isEmpty())
s.push(8.4)
print(s.pop())
print(s.pop())
print(s.size())
```

注意，我们也可以选择列表的左侧作为栈顶，这样，前面的 pop 和 append 方法就不能用了，而必须指定索引 0(列表的第一个项) 以便对栈内数据操作。如下面代码段：

```
class Stack:
    def __init__(self):
        self.items = []

    def isEmpty(self):
        return self.items == []

    def push(self, item):
        self.items.insert(0,item)

    def pop(self):
        return self.items.pop(0)

    def peek(self):
        return self.items[0]

    def size(self):
        return len(self.items)

s = Stack()
s.push('hello')
s.push('true')
print(s.pop())
```

对抽象数据类型的实现方式的变更，仍能保持数据的逻辑特性不变，就是"抽象"的实例。两种栈的方式都能工作，但性能表现却有很大的不同。Append() 和 pop() 都是 O(1)，这意味着，不管栈内有多少数据项，第一种实现的性能是常数级的，第二种实现的 insert(0) 和 pop(0) 却需要 O(n)。很明显，逻辑上是等同的，但在性能基准测试时，时间测试的结果是非常之不同的。

3.4 栈的应用

3.4.1 简单括号匹配

现在我们用栈来解决一个计算机科学上的实际问题。

- 你一定写过类似这样的算术算式：

```
(5 + 6) * (7 + 8) / (4 + 3)
```

  这里括号为了规范操作顺序。

- 你用过 LISP 语言的话，也许写过这样的语句：

```
(defun square(n) (* n n))
```

  这条语句定义了一个函数，用于返回参数 n 的平方值。Lisp 语言以用到大量的括号而闻名。

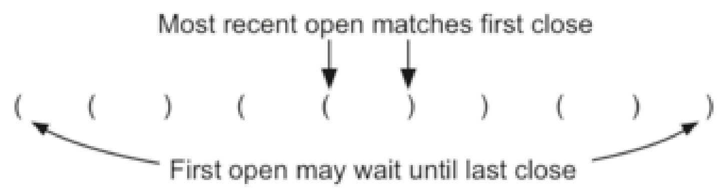
上面两个例子中，括号必须是平衡的。平衡括号的意思是，每个左括号一定对应着一个右括号，括号内又套着括号。看下面这些个括号组成的平衡表达式：

```
(()()()())
(((())))
(()((())()))
```

对比下面这些不平衡的括号：

```
((((((())
()))
(()()(()
```

正确地区分平衡和不平衡括号，对很多编程语言来说，都是重要的内容。现在的问题就是，写一个算法，读入一串括号，并判断它们是否平衡。仔细观察一下平衡式的结构特点。当从左到右读入一串括号的时候，最早读到的一个右括号总是与他前面紧邻的左括号匹配，同样，最后一个右括号要与最先读到的左括号相匹配。即右括号与左括号是反序的，它们从内到外一一匹配，这就给我们启示，可以用栈来解决问题。



一旦你明白栈的数据结构适合保存括号，算法就很简单了。创建一个空栈，从左到右读入括号串，如果遇到符号是左括号，把它压栈，标志着后面需要一个右括号与之匹配。另一方面，遇到一个右括号，就弹出栈顶数据。只要栈内还有数据可以弹出与右括号匹配，这些括号就仍然是平衡的。任何时候，栈内没有左括号用来匹配了，这个字符串就没有平衡好。到字符串的最后，所有的字符都处理过了，栈应该是空的。这个算法的 Python 代码如下：

```python
from pythonds.basic.stack import Stack

def parChecker(symbolString):
```

```
4      s = Stack()
5      balanced = True
6      index = 0
7      while index < len(symbolString) and balanced:
8          symbol = symbolString[index]
9          if symbol == "(":
10             s.push(symbol)
11         else:
12             if s.isEmpty():
13                 balanced = False
14             else:
15                 s.pop()
16
17         index = index + 1
18
19     if balanced and s.isEmpty():
20         return True
21     else:
22         return False
```

```
print(parChecker('((()))'))
print(parChecker('(()'))
```

```
True
False
```

函数 parChecker，假定栈类可用，并返回一个布尔值，表示这个字符串是否括号平衡的。注意变量 balanced 的初值是 True，因为没有理由在一开始就假定不平衡。如果当前符号是 ‘(’，压栈（9-10 行）。注意 15 行用 pop 直接删除一个栈顶元素。返回值没有用，因为我们知道栈顶元素一定是个 ‘(’。结尾部分（19-22 行），只要栈被完全清空，这个表达式就是平衡的。

3.4.2 平衡符号（通用）

相对编程语言的应用情形来说，上一节所讲的圆括号匹配只算是一个特例。不同种类的左符号和右符号的平衡实在是很常见的普遍问题。比如在 Python 中，左右方括号 [ ] 用于列表，左右大括号 { } 用于字典，左右圆括号 () 用于元组和算数表达式。多种符号的混合应用中也要保持符号的平衡关系。如符号组成的字符串：

```
{ { ( [ ] [ ] ) } ( ) }
[ [ { { ( ( ) ) } } ] ]
[ ] [ ] [ ] ( ) { }
```

不但符号的左右平衡，种类也是匹配的。

相反以下符串就是不平衡的：

```
( [ ) ]
( ( ( ) ] ) )
[ { ( ) ]
```

上节讲到的圆括号平衡算法很容易扩展到其他种类的符号中，只要每个左符号被压栈，然后等匹配的右符号出现，此时唯一的不同，就是左右匹配的同时，必须检查符号的种类也要匹配。如果发现不匹配，整个字符串就是不平衡的。最后，当整个字符串处理完毕并且同时栈被清空，字符串就是完全平衡的。

Python 语言的实现方法如下。与上一节的不同仅仅是调用一个辅助函数，matches，帮助检查符号各类的匹配。每个从栈顶弹出的元素必须检查是否与当前的右符号同一种类。如果不匹配，变量 balanced 被赋值为 False.

```
def parChecker(symbolString):
    s = Stack()
    balanced = True
    index = 0
    while index < len(symbolString) and balanced:
        symbol = symbolString[index]
        if symbol in "([{":
            s.push(symbol)
        else:
            if s.isEmpty():
                balanced = False
            else:
                top = s.pop()
                if not matches(top,symbol):
                       balanced = False
        index = index + 1
    if balanced and s.isEmpty():
        return True
    else:
        return False

def matches(open,close):
    opens = "([{"
    closers = ")]}"
    return opens.index(open) == closers.index(close)
```

```
print(parChecker('{{([][])}()}'))
print(parChecker('[{()]'))
```

```
True
False
```

3.4.3 十进制转换成二进制

在学习计算机过程中，你总会被以这样那样的方式灌输二进制的思想。的确，计算机内部数据就是二进制存储的，所有的数据都是由 0 和 1 组成的串。幸亏二进制和日常数据格式之间能够相互转换，不然计算机可就一点不好玩了。

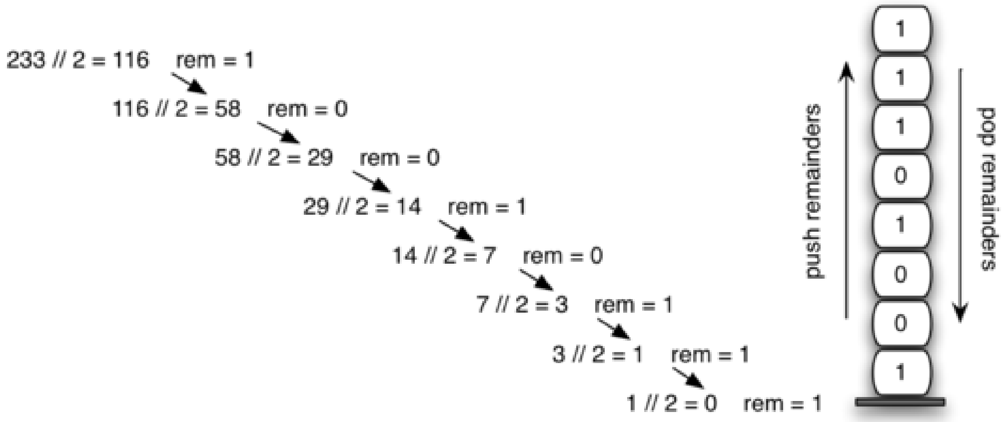
计算机程序里，整数无处不在，我们在数学课上也学习整数，当然是十进制的整数，或者说叫做以 10 为基数的整数。十进制 $(233)_{10}$ 以及对应的二进制表示 $(11101001)_2$ 分别解释为

$$2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

$$51 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

有一种很容易地把十进制转为二进制的方法，叫做“除二取余法”，用栈来保存二进制的位。

这种算法从一个大于 0 的整数开始，通过递归法连续除以 2，并保存除 2 得到的余数。第一次除以 2 可以判断这个数是偶数还是奇数。偶数除以 2 的余数是 0，这个二进制位就 0；奇数除以 2 的余数是 1，这个位就是 1。这样连续相除得到一串的 0 或 1，第 1 次得到的位实际是最后一位。如下图所示，我们又一次见到了反转的属性，这就表明需要利用栈的特性来解决问题了。



算法的 python 代码如下，函数 divideBy2() 的参数是一个十进制整数，连续被 2 除。第 7 行使用了 python 操作符% 取得余数。第 8 行把得到的余数压栈，当商为 0 时，第 11-13 行形成一个二进制字符串。第 11 行建立空串，二进制位从栈中一个一个被弹出，同时被追加到空字符串的右端，最终返回一个二进制字符串。

```python
1  from pythonds.basic.stack import Stack
2
3  def dec2bin(decNumber):
4      remstack = Stack()
5
6      while decNumber > 0:
7          rem = decNumber % 2
8          remstack.push(rem)
9          decNumber = decNumber // 2
10
11     binString = ""
12     while not remstack.isEmpty():
13         binString = binString + str(remstack.pop())
14
15     return binString
```

```python
print(divideBy2(42))
```

```
101010
```

上面的算法很容易扩展到任意进制的转换，计算机科学比较常用二进制、八进制和十六进制。$(233)_{10}$ 对应的八进制和十六进制分别为：$(351)_8$, $(E9)_{16}$，可表示为：

$$3 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 1 \times 8^0$$

$$14 \times 16^1 + 9 \times 16^0$$

函数 divideBy2 修改一下能用于转换其他进制，“除二取余法”就得改成“除基取余法”了，新函数名为 baseConverter，代码如下。第一个参数是任意十进制整数，第二个参数是任意 2 到 16 之间的基数，余数仍被压栈，直到商为 0。从左到右的字符串生成过程也是一样的。不过当基数超过 10 以后，问题就来了，因为栈内的余数是 2 位的十进制数！因此我们创建一组数位，用来表示超过 9 的余数。

```
def baseConverter(decNumber,base):
    digits = "0123456789ABCDEF"

    remstack = Stack()

    while decNumber > 0:
        rem = decNumber % base
        remstack.push(rem)
        decNumber = decNumber // base

    newString = ""
    while not remstack.isEmpty():
        newString = newString + digits[remstack.pop()]

    return newString
```

```
print(baseConverter(25,2))
print(baseConverter(25,16))
```

```
11001
19
```

上面的解决办法是建立一个集合，包括一些字母符号。比如十六进制使用了 6 个字母，所以 4 行建立一个字符串存储相应位置的字符，如 0 在 0 位上，1 在 1 位上，A 在 10 位上，B 在 11 位上，如此等等。当一个余数出栈时，以自己为索引到这个字符串上找到正确的字符并追加到答案的后面。比如 13 出栈，13 位上的 D 追加到结果中。

3.5 中缀、前缀与后缀表达式

3.5.1 基本概念

当写下 B * C 这个算术表达式的时候，你很清楚这表示什么。我们都知道这是要计算变量 B 乘以变量 C，因为乘法符号 * 出现在两个表达式中间。这种表达式我们称之为中缀，因为操作符在变量的“中间”。

来看另一个中缀表达式 A + B * C，操作符 + 和 * 仍在操作数中间，但这时有就疑问了，操作符是操作哪个数？是 + 操作 A 和 B 呢还是 * 操作 B 和 C？这个表达式似乎有点模糊。

事实上这种表达式我们经常见，也经常写，从来没有含混过。原因是我们知道操作符的优先级。优先级高的操作符优先计算，除非用括号改变顺序。优先级顺序是乘除加减，如果两个操作符在同一级别，那就从左到右依次进行。

现在用优先级顺序来解释 A + B * C。B 和 C 先相乘，然后 A 与乘积相加。(A + B) * C 将强制 A 和 B 先相相加，再相乘。但 A + B + C 就是从左到右相加。

是的，这些对你来说太显而易见了。但是请记住，计算机需要精确地知道操作符的行为和顺序。有一种书写表达式的方法叫做“完全括号”，这种表达式把每一个操作符都加了括号，表达完全精确，也不必记忆优先级规则。

- A + B * C + D 写成 ((A + (B * C)) + D) ，表明先算乘法，再算左边的加法;
- A + B + C + D 写成 (((A + B) + C) + D)，表明加法操作从左向右结合。

A + B 是操作符放在中间，如果把操作符放在操作数前面呢？变成 + A B。放在后面呢？A B +。是不是看起来很奇怪。

这两种变型形成新的格式，叫做前缀与后缀。前缀就是操作符放在他们的操作数前面，后缀就是放在后面。看看下表会更清楚：

中缀表达式	前缀表达式	后缀表达式
A + B	+ A B	A B +
A + B * C	+ A * B C	A B C * +

例：中缀表达式转换为前缀、后缀表达式

对于中缀表达式 A + B * C，

- 前缀表达式为 + A * B C

  操作数顺序不变，* 紧接在 B 和 C 之前，表示 * 优先于 +。然后 + 出现在 A 和乘法的结果之前。

- 后缀表达式为 A B C * +

  操作数顺序不变，因为 * 紧接在 B 和 C 之后出现，表示 * 具有高优先级，+ 优先级低。

虽然操作符在它们各自的操作数前后移动，但是操作数的顺序相对于彼此保持完全相同。

例：中缀表达式转换为前缀、后缀表达式

考虑中缀表达式 (A + B) * C，括号在乘法之前强制执行加法。

- 写成前缀表达式时，+ 简单的移动到 A B 之前，得 + A B。这个操作的结果成为乘法的第一个操作数。* 移动到整个表达式的前面，得出 * + A B C。
- 写成后缀表达式时，+ 简单的移动到 A B 之后，得 A B +。这个操作的结果成为乘法的第一个操作数。* 移动到整个表达式的后面，得出 A B + C *

把这三种表达方式放在下表中对比一下，见证奇迹的时刻到了，括号去哪儿了？为什么前缀和后缀不需要括号？答案就是，在前缀和后缀中，操作符和他们的操作数之间关系清晰，他们的位置就说明了计算顺序，不需要象中缀那样，额外用括号来帮助分辨。因此，在很多情况下，中缀是最不想用的表达式。

中缀表达式	前缀表达式	后缀表达式
(A + B) * C	* + A B C	A B + C *

下表提供了更多的对比例子，请仔细对比它们是怎样安排位置来保证计算正确的。

3.5.2 中缀表达式转换前缀表达式和后缀表达式

到目前为止，我们都是用特例的方法把中缀转换为前缀和后缀，也许有一种算法，能够转换任意复杂的表达式呢？

中缀表达式	前缀表达式	后缀表达式
A + B * C + D	+ + A * B C D	A B C * + D +
(A + B) * (C + D)	* + A B + C D	A B + C D + *
A + B + C + D	+ + + A B C D	A B + C + D +

我们考虑要用到前面所提到过的“完全括号”，如 A + B * C 写成 (A + (B * C)) 以保证乘法的高优先级。仔细观察发现，每一对括号内都是一个计算过程，包括一对操作数和一个操作符的完整计算。

从子表达式 (B * C) 来看，如果把乘号移动到右括号的位置取而代之，并去掉相应的左括号，变成了 B C * , 这不就是（B*C）的后缀式吗？更进一步，把加号移到它的右括号位置取而代之，再去掉相应的左括号，整个后缀表达式就出来了，如图**??**:

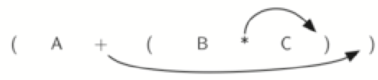


图 1: 中缀转后缀

如果改个方向，操作符左移取代左括号并去掉右括号，就得到前缀表达式。看来括号的位置，是找到操作符位置的线索，见图**??**

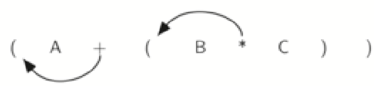


图 2: 中缀转前缀

所以要转换表达式，无论多么复杂，无论前缀还是后缀，先完全括号化，然后将操作符前移或后移取代括号。

这是一个更复杂的转换例子：(A + B) * C - (D - E) *(F + G)，图**??**展示了转换过程。

3.5.3 中缀转后缀通用法

现在我们要开发一个算法，把任何中缀表达式转换为后缀表达式。为了做到这一点，我们仔细看看转换过程。

还是这个表达式，A + B * C，如前所述，等价的后缀表达式是 A B C * +，而且 A、B 和 C 保留了原来的相对位置，只有操作符改变了位置。在中缀表达式中，从左到右第一个出现的是 + ，而在后缀式中，+ 最后出现，因为 * 的优先级高于 +。就是说，操作符在中缀表达式中的顺序和后缀表达式中相反。

在处理表达式的时候，操作符应该先保存在某处，因为操作符读进来的时候，它右边的操作数还没到。另外因为优先级的关系，保存的顺序要反转。就象上面说的乘号和加号一样，加号先出现，但因为乘法优先，加法先来也得靠后站。因为顺序反转的关系，考虑使用栈来保存操作符。

象 (A + B) * C 怎么办呢？其后缀表达式是 A B + C * 。从左到右的顺序，先读到了 +，但是当读到 * 的时候，+ 已经找好位置，因为括号的优先级高于 *。上一段的规则遇到了新问题。这里就要考虑有括号的时候怎么办。当读到左括号的时候，我们把左括号作为操作符保存起来，标志着一个高优先级的操作就要到了，直到匹配的右括号出现，左括号才能出栈。

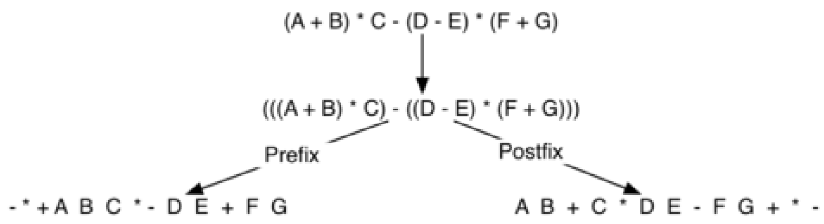


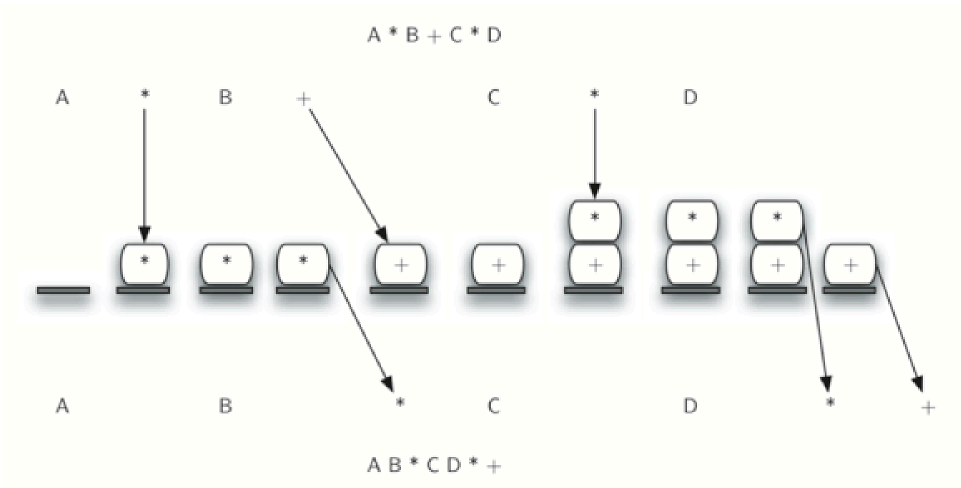
图 3: 中缀转前缀与后缀

算法扫描中缀式的时候，要用一个栈来保存操作符，栈的特性提供了反转功能，就如我们已经多次提到的。栈顶项总是我们最近一次压栈的操作符。每当读到一个新操作符，总要与栈顶的符号比较一下优先级。

我们把中缀表达式作为两种符号组成的字符串，一种符号是操作符，如 * / + -，还有左右括号 ()。操作数则包括单个字母，如 A、B、C 等。按以下操作，可将中缀表达式转换成后缀表达式。

1. 创建一个名为 opstack 的空栈以保存运算符。创建一个空列表以保存输出项。
2. 把中缀表达式转为列表，使用 split() 方法。
3. 从左到右扫描列表，对于每个元素：
   - 如果是一个操作数，追加到输出列表。
   - 如果是一个左括号 (，压栈到 opstack 。
   - 如果是一个右括号)，循环出栈，直到左括号出栈。此前出栈的元素追加到输出列表。
   - 如果标记是一个运算符，如 * ，/ ，+ 或 - ，先把栈内优先级大于当前操作符的项目全部出栈并追加到输出列表，然后把当前操作符压栈。
4. 当输入列表检索完成时，检查栈，把剩下的元素全部出栈并加到输出列表尾部。

例:
将 ‘A * B + C * D‘ 转换为后缀表达式



终于到了算法实现的时候。代码中，我们用了一个名为 prec 的字典保存操作符的优先级，每个操作符映射一个整数以便作优先级的比较。注意左括号 (也被定义为最低的优先级 1，这样每个操作符与之比较的时候，都会高于它。第 15 行定义了操作符为任意大写字母或数字。完整的代码如下：

```
1  from pythonds.basic.stack import Stack
2
3  def infix2Postfix(infixexpr):
4      prec = {}
5      prec["*"] = 3
6      prec["/"] = 3
7      prec["+"] = 2
8      prec["-"] = 2
9      prec["("] = 1
10     opStack = Stack()
11     postfixList = []
12     tokenList = infixexpr.split()
13
14     for token in tokenList:
15         if token in "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ" or token in "0123456789":
16             postfixList.append(token)
17         elif token == '(':
18             opStack.push(token)
19         elif token == ')':
20             topToken = opStack.pop()
21             while topToken != '(':
22                 postfixList.append(topToken)
23                 topToken = opStack.pop()
24         else:
25             while (not opStack.isEmpty()) and \
26                (prec[opStack.peek()] >= prec[token]):
27                   postfixList.append(opStack.pop())
28             opStack.push(token)
29
30     while not opStack.isEmpty():
31         postfixList.append(opStack.pop())
32     return " ".join(postfixList)
```

```
print(infix2Postfix("A * B + C * D"))
print(infix2Postfix("( A + B ) * C - ( D - E ) * ( F + G )"))
print(infix2Postfix("A + B * C"))
```

```
A B * C D * +
A B + C * D E - F G + * -
A B C * +
```

3.5.4 后缀表达式求值

栈的最一个应用例子，计算一个后缀表达式的值。这个例子中仍然用栈的数据结构。不过，扫描表达式时，是让操作数压栈等待，而不是转换算法中那样让操作符等待。另一条思路是，无论何时看到输入一

个操作符，最近的两个操作数就是操作对象。

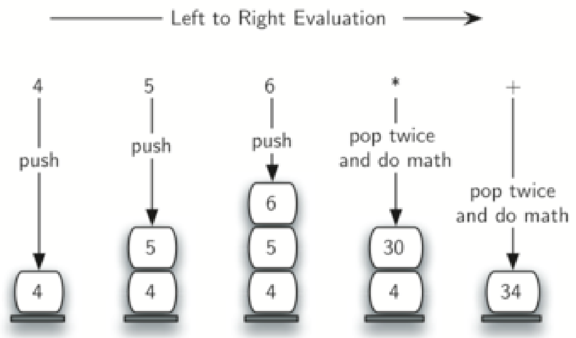
为了说清楚一点，我们来看两个例子：

例:

考虑表达式 4 5 6 * +。从左到右扫描时，首先得到 4 和 5，不过此时，并不知道怎样处理这两个数，直到看到后面的操作符。所以要把这两个数先压栈，得到操作符以后再出栈。

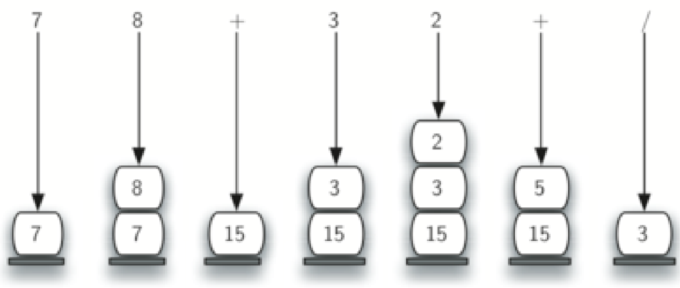
这个例子中，下一个符号仍然是操作数，所以照旧压栈，并检查下一个。现在看到操作符 *，这意味着最近两个操作数要用来做乘法。出栈两次，得到两个操作数并相乘（在本例中是结果是 30）。

这个计算结果要压回到栈内，并作为下一个操作符的对象。当最后一个操作符工作结束，栈内应该只有一个数值，出栈并作为计算结果返回。图?? 显示了该求值过程中栈内容的变化。



例:

再来看一个稍微复杂的表达式：7 8 + 3 2 + /。这里有两点要注意。第一，栈的大小，随着子表达式的计算过程而膨胀，收缩，再膨胀。第二，除法操作符要小心处理，因为后缀表达式的操作数顺序不变，但当两个操作数出栈时，顺序反了。因为除法不支持交换律，所以 15/5 与 5/15 不同，必须保证顺序没有交错。



算法假定后缀表达式是一系列被空格分隔的字符，操作符是 * /+ -，操作数假定是一位整数。最终结果也是整数。

1. 建立一个空栈 operandStack
2. 字符串使用 split 转为列表
3. 从左到右检索列表，对于每个元素，
   - 如果是操作数，字符转为整数，压栈
   - 如果是操作符，出栈两次。第一次出栈的是第二个操作数，第二次出栈的是第一个操作数。计算结果，并压回栈。

4. 检索结束，出栈结果就是返回值。

完整的函数代码如下，其中的 doMath 是算法辅助函数，定义为两个操作数和一个操作符的计算。

```
from pythonds.basic.stack import Stack

def postfixEval(postfixExpr):
    operandStack = Stack()
    tokenList = postfixExpr.split()

    for token in tokenList:
        if token in "0123456789":
            operandStack.push(int(token))
        else:
            operand2 = operandStack.pop()
            operand1 = operandStack.pop()
            result = doMath(token,operand1,operand2)
            operandStack.push(result)
    return operandStack.pop()

def doMath(op, op1, op2):
    if op == "*":
        return op1 * op2
    elif op == "/":
        return op1 / op2
    elif op == "+":
        return op1 + op2
    else:
        return op1 - op2

print(postfixEval('7 8 + 3 2 + /'))
```

4 队列

4.1 什么是队列

队列是有序数据集合，队列的特点，是在头部删除数据项，称为前端，在尾部增加数据项，称为后端。数据项总是在开始的时候排在队伍的后端，慢慢向前走，直到排到最前面，轮到它的时候离开队列。

刚进来的排在后端，待在队伍里时间最长的在前端，这种排列规则叫做 FIFO，意思是“先进先出”，或者叫做“先来先服务”。

例:

最简单的例子就是平时我们的排队，象排队买票看电影，在超市排队付款，在自助餐厅排队取盘子（嗯，盘子可是后进先出的，那是栈规则）。队列严格执行一字排开的规则，一个方向进，同一方向出，不许插队，不许离队。下图是个 Python 数据对象的队列。

例:

计算机科学里也有队列的例子，象我们实验室有 30 台电脑只有 1 台打印机，学生们要打印的时候，所有的打印任务排队等候，排在第一的马上就能打印，排在最后的就要等所有其他人都打完了才开始。随后我们会探讨这个很有意思的例子。

例:

除打印队列外，操作系统使用了不同的队列控制系统进程。象调度系统就是使用了队列算法以保证尽可能快地执行程序，并响应尽可能多的用户。比如有时候打字时发现敲了键盘，屏幕却延迟响应，这是因为系统系统正做其他事情，所以把键盘事件放在缓冲队列里，所以稍有延迟，不过最终还是会显示出来。

4.2 The Queue Abstract Data Type

队列的抽象数据类型由下面的操作定义。队列是结构化的、有序的数据集，前端删除数据，后端加入数据，保持 FIFO 属性：

1. Queue(): 定义一个空队列，无参数，返回值是空队列。
2. enqueue(item): 在队列尾部加入一个数据项，参数是数据项，无返回值。
3. dequeue(): 删除队列头部的数据项，不需要参数，返回值是被删除的数据，队列本身有变化。
4. isEmpty(): 检测队列是否为空。无参数，返回布尔值。
5. size(): 返回队列数据项的数量。无参数，返回一个整数。

举例说明，q 是一个刚创建的空队列，表 1 分别显示了操作、表内数据和返回值。4 是第一个加入队列的，所以也是第一个出队的。

4.3 Implementing a Queue in Python

有了队列的抽象数据类型，我们可以创建一个类来实现队列。和以前一样，我们采用 Python 列表来创建队列类。

队列也是有序的，所以需要决定队列的哪一头作为队列的前端和尾端。在下面的实现代码中，我们约定列表的 0 位置是队列的尾部，这样的好处是，可以直接使用列表的 insert 方法在队尾加入数据，使用 pop 方法在队列的前端（这时是列表的最后一个数据）删除数据。从性能上分析，这意味着 endueue 是 $O(n)$，而出队是 $O(1)$。

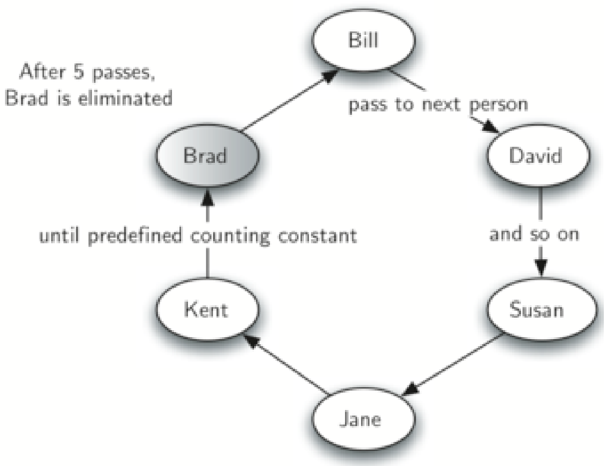
```
class Queue:
    def __init__(self):
        self.items = []

    def isEmpty(self):
        return self.items == []
```

```python
    def enqueue(self, item):
        self.items.insert(0,item)

    def dequeue(self):
        return self.items.pop()

    def size(self):
        return len(self.items)
```

```python
>>> q.enqueue(4)
>>> q.enqueue('dog')
>>> q.enqueue(True)
>>> q.size()
3
>>> q.isEmpty()
False
>>> q.enqueue(8.4)
>>> q.dequeue()
4
>>> q.dequeue()
'dog'
>>> q.size()
2
```

4.4 队列任务：烫手山芋

为了展示队列的应用，我们模拟一种真实的先进先出的情形。作为开始，我们观察一种儿童游戏，叫烫手的山芋（hotpotato），在这个游戏中，孩子们排成一圈，把手里的东西一个传一个。在某种情形下，停止传递，手上拿着烫手的山芋的人就要被请出来，其他的人继续玩，直到只剩一个人。

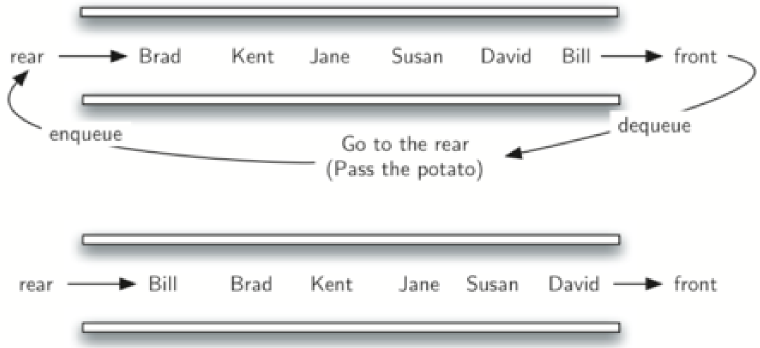


从现代意义上说，这个游戏等价于著名的约瑟夫问题。据说，一世纪左右，历史学家弗拉维. 约瑟夫与犹太人一起反抗罗马。一次，约瑟夫和他的 39 个同志一起在山洞里抵抗，不过眼看就要失败了，他们决定宁死也不做罗马的奴隶。他们围坐成一圈，一个人一个编号，按时针方向，每第七个人就要被杀死。

据说约瑟夫是个数学家，他马上就知道按这规则，应该坐在哪个位置会留到最后。看来约瑟夫最后没有自杀，相反却投降了。这个故事有很多版本，有的版本说是每 3 个人杀一个，有的说最后一个人可以骑马逃脱，但不管怎样，思想是相同的。

我们引入一个烫手的山芋的模拟过程，参数是一个名字列表和一个常数 num。num 用来计数，最后函数返回经多轮计数后，剩下的最后一个人的名字。后来发生什么，就看你的了。

为了模拟这个圆圈，我们使用队列（图 3)。假定开始拿着山芋的孩子站在队伍的前端，一经传出山芋后，模拟程序只需要简单地把这个孩子移出队列，然后再将他加入尾部，然后他在尾部再逐步前移，直到再次轮到他。经过 num 次出队入队之后，前端的孩子最终被完全清出队列，然后剩余的人继续游戏，直到最后一个。



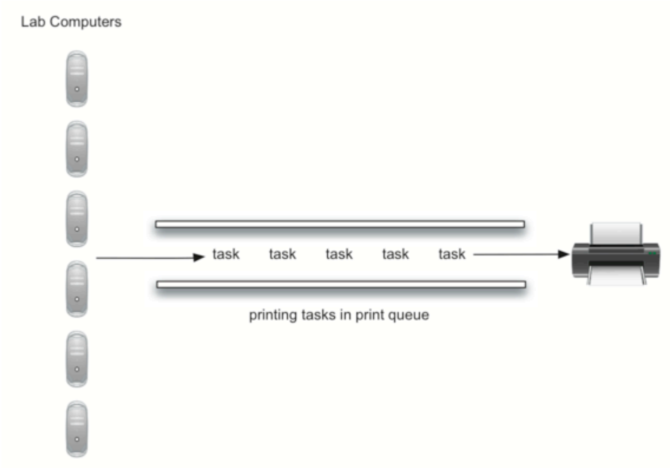

```python
from pythonds.basic.queue import Queue

def hotPotato(namelist, num):
    simqueue = Queue()
    for name in namelist:
        simqueue.enqueue(name)

    while simqueue.size() > 1:
        for i in range(num):
            simqueue.enqueue(simqueue.dequeue())

        simqueue.dequeue()

    return simqueue.dequeue()

print(hotPotato(["Bill","David","Susan","Jane","Kent","Brad"],7))
```

4.5 队列应用：打印任务

在本章开始我们就谈到过模拟打印任务队列的行为。回想学生时代，向共享打印机发送一个打印任务，并被放在一个先到先服务的队伍中等候处理。这种方法有很多的问题，最重要的是，打印机是否能够完成这么多数量的任务，如果打不完，学生们会等待太长时间，导致错过下次课。

考虑一下这种情形：计算机科学实验室里，平均每小时有 10 个学生在完成作业，这些学生在这段时间里一般打印两次，每次任务可能是 1-20 页不等。实验室的打印机有点老，按草稿质量能够打印 10 页/分钟，如果切换到高质量，则只能打印 5 页/分钟，越慢等的时候越长，那么应该设置成多少？

我们可以通过建立一个实验室模型帮助决策。需要建立学生、打印任务和打印机的的模型。因为学生发出打印任务时，需要把任务加入打印任务队列。当打印机完成一个任务后，它要到队列中查看是还仍有任务要处理。我们感兴趣的是，学生们的平均等待时间，也等同于队列中任务的平均等待时间。



这个模型需要一点概率知识。例如，学生打印长度 1-20 页，如果每个长度可能性相等，那么实际长度可以用一个 1-20 之间的随机数来模拟。这表示，1-20 之间的长度机会均等。

如果 10 个学生每人打印两次，那么平均每小时有 20 个打印任务。在每一秒钟产生一个打印任务的可能性多大？这就要考虑任务与时间的比率。20 个任务每小时，意味着平均每 180 秒产生一个任务。

$$20\text{任务}/\text{小时} \times 1\text{小时}/60\text{分钟} \times 1\text{分钟}/60\text{秒} = 1\text{任务}/180\text{秒}$$

我们可以通过产生一个 1-180 之间的随机数，来模拟每秒钟产生一个新任务的概率。如果数字是 180，那么任务已经产生了。要注意很多任务可能排成队，也有可能等好久也没有一个任务，这就是模拟的特性，我们的模拟总是想尽可能地接近真实情况。