基本数据结构

2017 年 10 月 11 日

目录

1 目标

- 理解栈、队列、双向队列和列表的抽象数据类型
- 使用 Python 列表实现栈、队列和双向队列的抽象数据类型
- 理解基本线性数据结构的性能
- 理解前缀、中缀和后缀表达式
- 使用栈计算后缀表达式。
- 使用栈将中缀表达式转换为后缀表达式。
- 使用队列进行基本时序仿真。
- 学会根据问题性质，选择使用栈、队列和双向队列等合适的数据结构。
- 能使用结点和引用将列表实现转换为链表实现。
- 能比较链表实现与 Python 的列表实现的性能。

2 什么是线性数据结构？

我们开始数据结构的学习，从四种简单而功能强大的结构开始：

1. 栈（stack）
2. 队列（queue）
3. 双端列表（deque）
4. 顺序表（sequence）

它们都是一些数据的集合，数据项之间的顺序由添加或删除的顺序决定。一旦一个数据项被添加，它就与之前和之后加入的元素保持一个固定的相对位置。诸如此类的数据结构被称为线性数据结构。

线性数据结构有两端，有时称为左和右，有时称为前与后，称为顶部和底部也无不可，叫什么名字并不重要。重要的是数据结构增加和删除数据的方式，特别是增删的位置。例如，一种结构可能只允许从一端添加数据，而另一种结构则两端都行。

这些变种的形式产生了计算机科学最有用的数据结构。他们出现在各种算法中，可用于解决很多重要的问题。

3 栈

栈是一种线性有序的数据元素集合，其中数据的增删操作都在同一端进行。进行操作的一端通常称为“顶部”，另一端称为“底部”。

- 栈的底部很重要：数据项越接近底部，它在栈里的时间就越长。
- 最近添加的项总是最先被移除，这种排序原则称为“后进先出”（LIFO）。
- 栈按”时间长短”来排列数据项：新来的在栈顶，老家伙们在栈底。

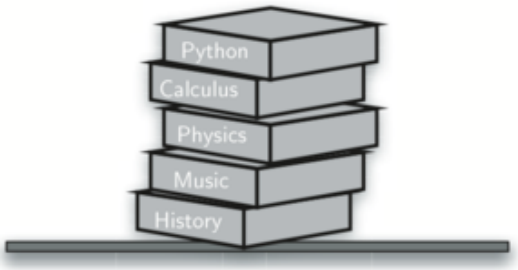
例:
中国有句成语，叫后来居上。原典故是这样说的：陛下用群臣，如积薪耳，后来者居上。栈的方式，可不就是堆柴草吗?

3.1 栈的举例

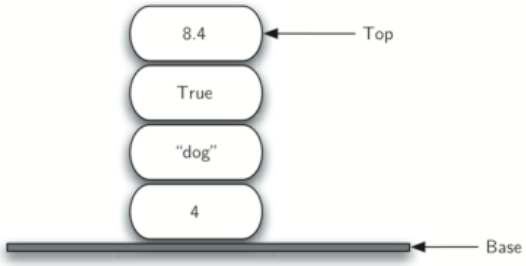
栈的例子很常见。

例:
自助餐厅的盘，人们总是从上面拿盘子，拿走一个后面的人再拿下面的一个，(服务员端来一些新的，又堆在上面了)。

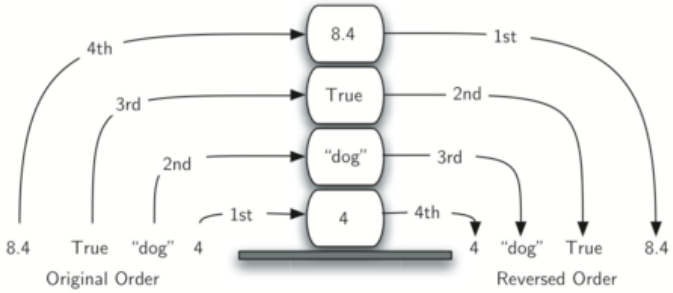
例:
又如一堆书，你只能看到最上面一本的封面，要看下面一本，就要把上面的先拿走。



例:
下图展示了另一个栈，存储的是几个主要的 python 语言数据对象。



例:
与栈有关的思想来源于生活中的观察，假设你从一张干净的桌子开始，一本一本地放上书，这就是在建立栈。当你一本一本地拿走，想像一下，是不是先进后出？由于这种结构具有翻转顺序的作用，所以非常重要。下图展示了 Python 数据对象创建和删除的过程，注意观察他们的顺序。



例:

栈这种翻转性，在你用电脑上网时也用到了。浏览器都有“返回”按钮，当你从一个链接到另一个链接，这时网址（URL）就被存进了栈。正在浏览的页就存在栈顶，点“返回”的时候，返回到刚刚浏览的页面。最早浏览的页面，要一直到最后才能看到。

3.2 栈的抽象数据类型

栈的抽象数据类型由以下结构和操作定义:

- 栈是结构化的、有序的数据集合，其增删操作都在“栈顶”进行，存储顺序是 LIFO。
- 栈的操作方法如下:

1. `Stack()`: 创建一个空栈，无参数，返回一个空栈。
2. `push(item)`: 向栈顶压入一个新数据项，需要一个数据项参数，无返回值。
3. `pop()`: 从栈中删除栈顶数据项，无参数，返回删除项，栈本身发生变化。
4. `peek()`: 返回栈顶数据项，但不删除。不需要参数，栈不变。
5. `isEmpty()`: 测试栈是否为空，无参数，返回布尔值。
6. `size()`: 返回栈中数据项的个数，无参数，返回值为整数。

例:

设`s`是一个空栈，下表是一系列的操作，栈内数据和返回值。注意栈顶在右侧。

Stack Operation	Stack Contents	Return Value
`s.isEmpty()`	`[]`	`True`
`s.push(4)`	`[4]`	
`s.push('dog')`	`[4,'dog']`	
`s.peek()`	`[4,'dog']`	`'dog'`
`s.push(True)`	`[4,'dog',True]`	
`s.size()`	`[4,'dog',True]`	`3`
`s.isEmpty()`	`[4,'dog',True]`	`False`
`s.push(8.4)`	`[4,'dog',True,8.4]`	
`s.pop()`	`[4,'dog',True]`	`8.4`
`s.pop()`	`[4,'dog']`	`True`
`s.size()`	`[4,'dog']`	`2`

3.3 用 Python 实现栈

前面已经定义了栈的抽象数据类型，现在我们转向栈的实现。注意：当我们说抽象数据类型的物理实现时，指的是建立数据结构。

众所周知，Python 是面向对象的程序设计语言。象栈这样的抽象数据类型可通过类来实现，而栈的操作则可看做是类的方法。另外，栈作为数据项的集合，我们可以使用 Python 中强大而简单的 List 类来实现。

Python 中的 List 类已经建立了一个数据集合机制和相应的方法。假设存在一个列表 `[2,5,3,6,7,4]`，我们只需约定哪一端是栈顶哪一端是栈底，就可以使用 list 中的方法（如 `append` 和 `pop`）来实现栈的相关操作。

在以下的栈实现中，我们假定 List 的右侧是栈顶。

```
class Stack:
    def __init__(self):
        self.items = []

    def isEmpty(self):
        return self.items == []

    def push(self, item):
        self.items.append(item)

    def pop(self):
        return self.items.pop()

    def peek(self):
        return self.items[len(self.items)-1]

    def size(self):
        return len(self.items)
```

这段代码仅仅是定义了 Stack 类，运行时什么反应也没有。以下代码将创建一个栈对象，并加入操作方法。

```
s=Stack()

print(s.isEmpty())
s.push(4)
s.push('dog')
print(s.peek())
s.push(True)
print(s.size())
print(s.isEmpty())
s.push(8.4)
print(s.pop())
print(s.pop())
print(s.size())
```

注意，我们也可以选择列表的左侧作为栈顶。这样，前面的pop和append方法就不能用了，而必须指定索引 0（列表的第一项）以便对栈内数据进行操作。如：

```
class Stack:
     def __init__(self):
         self.items = []

     def isEmpty(self):
         return self.items == []

     def push(self, item):
         self.items.insert(0,item)

     def pop(self):
         return self.items.pop(0)

     def peek(self):
         return self.items[0]

     def size(self):
         return len(self.items)

s = Stack()
s.push('hello')
s.push('true')
print(s.pop())
```

对抽象数据类型实现方式的变更，仍能保持数据的逻辑特性不变，这就是“抽象”的一个实例。两种栈的方式都能工作，但性能表现却有很大的不同。append()和pop()都是 $O(1)$，这意味着，不管栈内有多少数据项，第一种实现的性能是常数级的，第二种实现的 insert(0)和 pop(0)却需要 $O(n)$。很明显，两种实现方式在逻辑上等同，但时间复杂度却不一样。

3.4 栈的应用

3.4.1 简单括号匹配

现在我们用栈来解决一个计算机科学上的实际问题。

- 你一定写过类似这样的算术算式： (5 + 6)* (7 + 8)/ (4 + 3)，这里括号为了规范操作顺序。
- 你用过 LISP 语言的话，也许写过这样的语句： (defun square(n)(* n n))。这条语句定义了一个函数，用于返回参数 n 的平方值。Lisp 语言以用到大量的括号而闻名。

这两个例子中，括号必须是平衡的。平衡括号的意思是，每个左括号一定对应着一个右括号，并且括号能被正确嵌套。

平衡括号

```
  (()()()())
  ((((()))))
```

```
(()((())()))
```

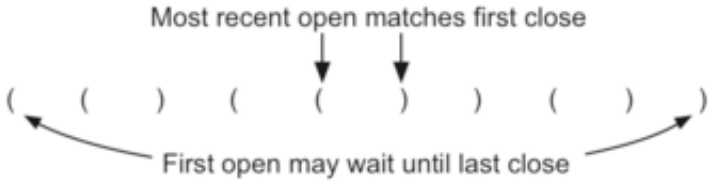
不平衡括号

```
((((((())
()))
(()()(()
```

正确地区分平衡和不平衡括号，对很多编程语言都非常重要。

问题 1 设计一个算法，读入一串括号，并判断它们是否平衡。

仔细观察一下平衡式的结构特点可以发现：从左到右读入一串括号时，最早读到的一个右括号总是与他前面紧邻的左括号匹配；同样，最后一个右括号要与最先读到的左括号相匹配。即右括号与左括号是反序的，并且它们从内到外一一匹配。受此启发，我们会马上想到用栈来解决该问题。



一旦你明白栈适合保存括号，算法就简单了：

1. 创建一个空栈；
2. 从左到右读入括号串：
   - 若遇到左括号，把它压栈，说明后面需要一个右括号与之匹配。
   - 若遇到右括号，就弹出栈顶数据。
3. 只要栈内还有数据可以弹出与右括号匹配，这些括号就仍然是平衡的。任何时候，栈内没有左括号用来匹配了，这个字符串就没有平衡好。到字符串的最后，若平衡，栈应该是空的。

这个算法的 Python 代码如下：

```
1  from pythonds.basic.stack import Stack
2
3  def parChecker(symbolString):
4      s = Stack()
5      balanced = True
6      index = 0
7      while index < len(symbolString) and balanced:
8          symbol = symbolString[index]
9          if symbol == "(":
10             s.push(symbol)
11         else:
12             if s.isEmpty():
13                 balanced = False
```

```
            else:
                s.pop()

        index = index + 1

    if balanced and s.isEmpty():
        return True
    else:
        return False
```

```
print(parChecker('((()))'))
print(parChecker('(()'))
```

```
True
False
```

3.4.2 平衡符号（通用）

对很多编程语言而言，上一节所讲的圆括号匹配只能算一个特例。不同种类的左符号和右符号的平衡与嵌套实在非常普遍。比如在 Python 中，[ ]用于列表，{ }用于字典，( )用于元组和算数表达式。多种符号的混合应用也需要保持相应的平衡关系。

平衡符号：既要保证左右平衡，也要求种类匹配。

```
{ { ( [ ] [ ] ) } ( ) }
[ [ { { ( ( ) ) } } ] ]
[ ] [ ] [ ] ( ) { }
```

不平衡符号

```
( [ ) ]
( ( ( ) ] ) )
[ { ( ) ]
```

前面讲到的圆括号平衡算法很容易扩展到其他种类的符号中：每个左符号被压栈，然后等匹配的右符号出现。此时唯一的不同，就是左右匹配的同时，必须检查符号的种类也要匹配。如果发现不匹配，整个字符串就是不平衡的。最后，当整个字符串处理完毕且栈被清空时，字符串就是完全平衡的。

Python 语言的实现方法如下：与圆括号平衡相比，仅多调用一个辅助函数 `matches()`，以帮助检查符号的类型匹配。每个从栈顶弹出的元素必须检查是否与当前的右符号同一种类，如果不匹配，`balanced` 被赋值为 `False`.

```
def parChecker(symbolString):
    s = Stack()
    balanced = True
    index = 0
    while index < len(symbolString) and balanced:
        symbol = symbolString[index]
        if symbol in "([{":
```

```
            s.push(symbol)
        else:
            if s.isEmpty():
                balanced = False
            else:
                top = s.pop()
                if not matches(top,symbol):
                        balanced = False
        index = index + 1
    if balanced and s.isEmpty():
        return True
    else:
        return False

def matches(open,close):
    opens = "([{"
    closers = ")]}"
    return opens.index(open) == closers.index(close)
```

```
print(parChecker('{{([][])}()}'))
print(parChecker('[{()]'))
```

```
True
False
```

3.4.3 十进制转换成二进制

计算机的内部数据以二进制形式存储，所有的数据都是由 0 和 1 组成的串。幸亏二进制和日常数据格式之间能够相互转换，不然计算机可一点都不好玩了。

计算机程序里，整数无处不在。数学上也有整数，当然是十进制的整数，或者说叫做以 10 为基数的整数。十进制 $(233)_{10}$ 以及对应的二进制表示 $(11101001)_2$ 分别解释为

$$2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

$$51 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

有一种很容易地把十进制转为二进制的方法，叫做“除二取余法”，它用栈来保存二进制的位。该算法可描述为：从一个大于 0 的整数开始，通过递归法连续除以 2，并保存除 2 得到的余数。第一次除以 2 可以判断这个数是偶数还是奇数。偶数除以 2 的余数是 0，这个二进制位就 0；奇数除以 2 的余数是 1，这个位就是 1。这样连续相除得到一串的 0 或 1，第 1 次得到的位实际是最后一位。

除二取余法的 Python 实现

```
1 from pythonds.basic.stack import Stack
2
3 def dec2bin(decNumber):
4     remstack = Stack()
5
```

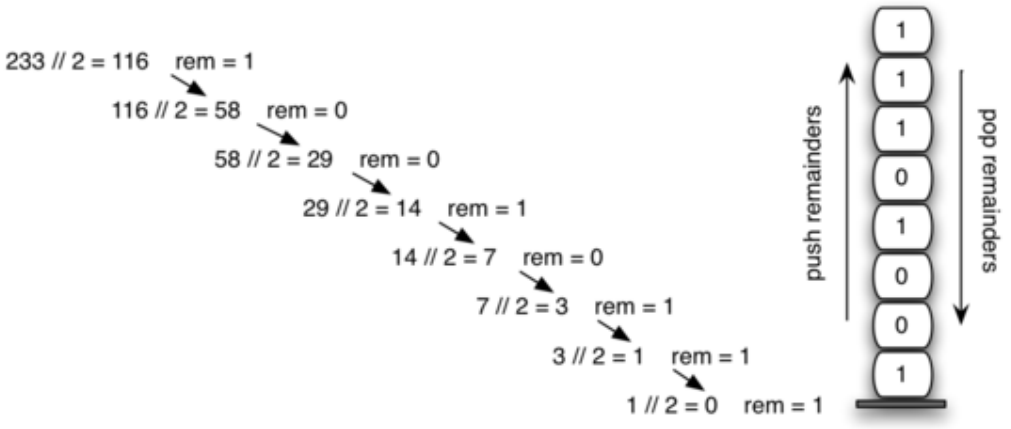


图 1: 除二取余法（又见反转，这表明可利用栈的特性来解决该问题）

```
    while decNumber > 0:
        rem = decNumber % 2
        remstack.push(rem)
        decNumber = decNumber // 2

    binString = ""
    while not remstack.isEmpty():
        binString = binString + str(remstack.pop())

    return binString
```

```
print(divideBy2(42))
```

```
101010
```

以上算法可以很容易地扩展到任意进制的转换。计算机科学比较常用二进制、八进制和十六进制，如 $(233)_{10}$ 对应的八进制和十六进制分别为：$(351)_8$, $(E9)_{16}$，可表示为：

$$3 \times 8^2 + 5 \times 8^1 + 1 \times 8^0$$

$$14 \times 16^1 + 9 \times 16^0$$

将`divideBy2()`稍作修改便可用于转换其他进制，“除二取余法”变成“除基取余法”，新函数名为`baseConverter`，它有两个参数：第一个是任意十进制整数，第二个是任意 2 到 16 之间的基数。余数仍被压栈，直到商为 0。从左到右的字符串生成过程也是一样的。

问题 2 *当基数超过 10 以后，余数也可能超过 9，而余数是需要被压栈的，那它该如何表示？*

解决办法是建立一个集合，包括一些字母符号。比如十六进制使用了 6 个字母，可建立一个字符串存储相应位置的字符，如 0 在 0 位上、1 在 1 位上、A 在 10 位上、B 在 11 位上，$\cdots$。当一个余数出栈时，便可索引到该字符串上找到正确的字符并追加到答案的后面。比如 13 出栈，13 位上的 D 追加到结果中。

```
def baseConverter(decNumber,base):
    digits = "0123456789ABCDEF"
```

```
    remstack = Stack()

    while decNumber > 0:
        rem = decNumber % base
        remstack.push(rem)
        decNumber = decNumber // base

    newString = ""
    while not remstack.isEmpty():
        newString = newString + digits[remstack.pop()]

    return newString
```

```
print(baseConverter(25,2))
print(baseConverter(25,16))
```

```
11001
19
```

3.5 中缀、前缀与后缀表达式

3.5.1 基本概念

当写下算术表达式 B * C 时，你马上就知道这是在计算“变量 B 乘以变量 C”，因为 * 出现在两个变量的中间。这种表达式称为中缀表达式，因为操作符在变量的“中间”。

而对中缀表达式 A + B * C，操作符 + 和 * 仍在操作数中间，但问题来了：操作符是操作哪个数？是 + 操作 A 和 B 还是 * 操作 B 和 C 呢？这似乎有点模糊。

事实上这种表达式我们经常见，也经常写，但从来没有怀疑过。原因是我们知道操作符的优先级。优先级高的操作符优先计算，除非用括号改变顺序。优先级顺序是乘除加减，如果两个操作符在同一级别，那就从左到右依次进行。

现在用优先级顺序来解释 A + B * C。B 和 C 先相乘，然后 A 与乘积相加。(A + B) * C 将强制 A 和 B 先相相加，再相乘。但 A + B + C 就是从左到右相加。

是的，这些对你来说太显而易见了。但是请记住，计算机需要精确地知道操作符的行为和顺序。有一种书写表达式的方法叫做“完全括号”，这种表达式把每一个操作符都加了括号，表达完全精确，也不必记忆优先级规则。

- A + B * C + D 写成 ((A + (B * C)) + D) ，表明先算乘法，再算左边的加法;
- A + B + C + D 写成 (((A + B) + C) + D)，表明加法操作从左向右结合。

A + B 是操作符放在中间，如果把操作符放在操作数前面呢？变成 + A B。放在后面呢？A B +。是不是看起来很奇怪。这两种变型形成新的格式，叫做前缀与后缀。前缀就是操作符放在他们的操作数前面，后缀就是放在后面。看看下表会更清楚：

中缀表达式	前缀表达式	后缀表达式
A + B	+ A B	A B +
A + B * C	+ A * B C	A B C * +

例: 中缀表达式转换为前缀、后缀表达式

对于中缀表达式 A + B * C,

- 前缀表达式为 + A * B C

  操作数顺序不变，* 紧接在 B 和 C 之前，表示 * 优先于 +。然后 + 出现在 A 和乘法的结果之前。

- 后缀表达式为 A B C * +

  操作数顺序不变，因为 * 紧接在 B 和 C 之后出现，表示 * 具有高优先级，+ 优先级低。

虽然操作符在它们各自的操作数前后移动，但是操作数的顺序相对于彼此保持完全相同。

例: 中缀表达式转换为前缀、后缀表达式

考虑中缀表达式 (A + B) * C，括号在乘法之前强制执行加法。

- 写成前缀表达式时，+ 简单的移动到 A B 之前，得 + A B。这个操作的结果成为乘法的第一个操作数。* 移动到整个表达式的前面，得出 * + A B C。
- 写成后缀表达式时，+ 简单的移动到 A B 之后，得 A B +。这个操作的结果成为乘法的第一个操作数。* 移动到整个表达式的后面，得出 A B + C *

问题 3 把这三种表达方式放在下表中对比一下，见证奇迹的时刻到了，括号去哪儿了？为什么前缀和后缀不需要括号？

中缀表达式	前缀表达式	后缀表达式
(A + B) * C	* + A B C	A B + C *

在前缀和后缀中，操作符和他们的操作数之间关系清晰，他们的位置就说明了计算顺序，不需要象中缀那样，额外用括号来帮助分辨。因此，在很多情况下，中缀是最不好用的表达式。下表提供了更多的对比例子，请仔细对比它们是怎样安排位置来保证计算正确的。

中缀表达式	前缀表达式	后缀表达式
A + B * C + D	+ + A * B C D	A B C * + D +
(A + B) * (C + D)	* + A B + C D	A B + C D + *
A + B + C + D	+ + + A B C D	A B + C + D +

3.5.2 中缀表达式转换前缀表达式和后缀表达式

至此，我们都是手动地把中缀转换为前缀和后缀。也许应该有一种算法，能够转换任意复杂的表达式。

回顾一下前面提到的 “完全括号”，如 A + B * C 写成 (A + (B * C)) 以保证乘法的高优先级。仔细观察可以发现，每一对括号内都是一个计算过程，包括一对操作数和一个操作符的完整计算。

看子表达式 (B * C)，如果把乘号移至右括号的位置，再去掉相应的左括号，就变成了 B C * , 亦即（B*C）的后缀式。更进一步，把加号移至其相应的右括号位置并取而代之，再去掉相应的左括号，整个后缀表达式就出来了，如图2：

图 2: 中缀转后缀

如果换个方向，操作符左移取代左括号并去掉右括号，就得到前缀表达式。看来括号的位置，是找到操作符位置的线索，见图3

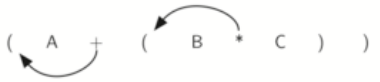


图 3: 中缀转前缀

总之，要转换表达式，无论多么复杂，无论前缀还是后缀，可以先完全括号化，然后将操作符前移或后移取代括号。

这是一个更复杂的转换例子：(A + B) * C - (D - E) *(F + G)，图4展示了转换过程。

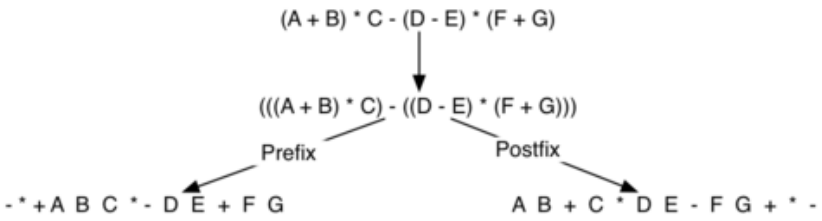


图 4: 中缀转前缀与后缀

3.5.3 中缀转后缀通用法

现在我们要开发一个算法，把任何中缀表达式转换为后缀表达式。为此，我们先来仔细看看其转换过程。

仍然考虑中缀表达式 A + B * C，其等价的后缀表达式是 A B C * +，注意操作数 A、B 和 C 保留了原来的相对位置，只有操作符改变了位置。在中缀表达式中，从左到右第一个出现的是 + ，而在后缀式中，+ 最后出现，因为 * 的优先级高于 +。也就是说，操作符在中缀表达式中的顺序和后缀表达式中相反。

在处理表达式的时候，操作符应该先保存在某处，因为操作符读进来的时候，它右边的操作数还没到。另外因为优先级的关系，保存的顺序要反转。就象上面说的乘号和加号一样，加号先出现，但因为乘法优先，加法先来也得靠后站。因为顺序反转的关系，考虑使用栈来保存操作符。

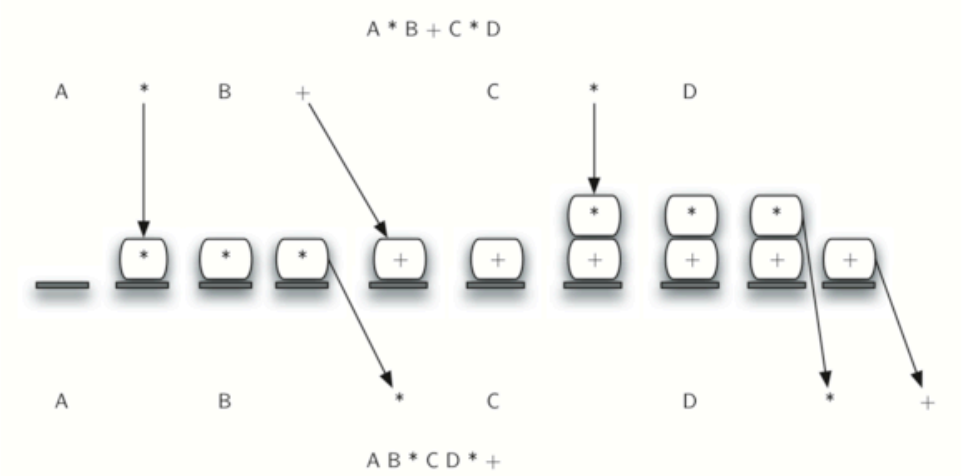
象 (A + B) * C 怎么办呢? 其后缀表达式是 A B + C * 。从左到右的顺序，先读到了 +，但是当读到 * 的时候，+ 已经找好位置，因为括号的优先级高于 *。上一段的规则遇到了新问题。这里就要考虑有括号的时候怎么办。当读到左括号的时候，我们把左括号作为操作符保存起来，标志着一个高优先级的操作就要到了，直到匹配的右括号出现，左括号才能出栈。

扫描中缀式的时候，要用一个栈来保存操作符，因栈的特性提供了反转功能。栈顶项总是我们最近一次压栈的操作符。每当读到一个新操作符，总要与栈顶的符号比较一下优先级。

设中缀表达式是由操作符和操作数组成的字符串，其中操作符包括 *、/、+、-，还有 (、)，而操作数则包括字母或数字。按以下操作，可将中缀表达式转换成后缀表达式。

1. 创建一个空栈 (opstack) 以保存运算符，创建一个空列表 (postfixList) 以保存输出项。
2. 利用字符串的 split 方法将中缀表达式转换为列表。
3. 从左到右扫描列表，对于每个元素：
    - 如果是操作数，追加到输出列表。
    - 如果是 (，压栈到 opstack 。
    - 如果是)，循环出栈，直到左括号出栈。此前出栈的元素追加到输出列表。
    - 如果是运算符 (*、/、+ 或-)，先把栈内优先级大于当前操作符的项目全部出栈并追加到输出列表，然后把当前操作符压栈。
4. 当输入列表检索完成时，检查栈，把剩下的元素全部出栈并加到输出列表尾部。

例:
将 'A * B + C * D' 转换为后缀表达式



以下是该算法的 Python 实现，其中使用了一个字典 (prec) 保存操作符的优先级，每个操作符映射一个整数以便作优先级的比较。注意左括号被定义为最低的优先级 1，这样每个操作符与之比较时，都会高于它。

```
1 from pythonds.basic.stack import Stack
2
3 def infix2Postfix(infixexpr):
4     prec = {}
```

```
    prec["*"] = 3
    prec["/"] = 3
    prec["+"] = 2
    prec["-"] = 2
    prec["("] = 1
    opStack = Stack()
    postfixList = []
    tokenList = infixexpr.split()

    for token in tokenList:
        if token in "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ" or token in "0123456789":
            postfixList.append(token)
        elif token == '(':
            opStack.push(token)
        elif token == ')':
            topToken = opStack.pop()
            while topToken != '(':
                postfixList.append(topToken)
                topToken = opStack.pop()
        else:
            while (not opStack.isEmpty()) and \
               (prec[opStack.peek()] >= prec[token]):
                  postfixList.append(opStack.pop())
            opStack.push(token)

    while not opStack.isEmpty():
        postfixList.append(opStack.pop())
    return " ".join(postfixList)
```

```
print(infix2Postfix("A * B + C * D"))
print(infix2Postfix("( A + B ) * C - ( D - E ) * ( F + G )"))
print(infix2Postfix("A + B * C"))
```

```
A B * C D * +
A B + C * D E - F G + * -
A B C * +
```

3.5.4 后缀表达式求值

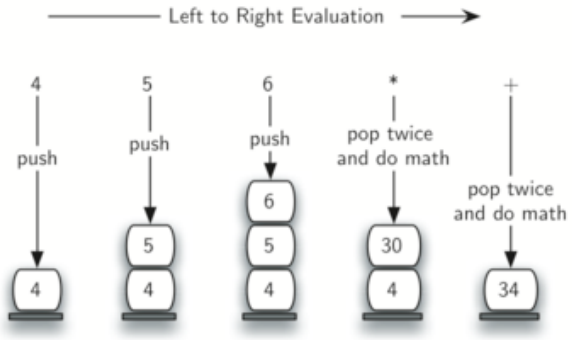
这一节将设计一个算法，以计算一个后缀表达式的值。无论何时看到输入一个操作符，最近的两个操作数就是操作对象。为了说清楚一点，我们来看两个例子：

例:
考虑后缀表达式 4 5 6 * +。从左到右扫描时，首先得到 4 和 5，不过此时，并不知道该怎样处理这两个数，直到看到后面的操作符。所以要把这两个数先压栈，得到操作符以后再出栈。

该例中，下一个符号仍然是操作数，所以照旧压栈，并检查下一个。现在看到操作符 *，这意味着

最近两个操作数要用来做乘法。出栈两次，得到两个操作数并相乘（在本例中是结果是 30）。

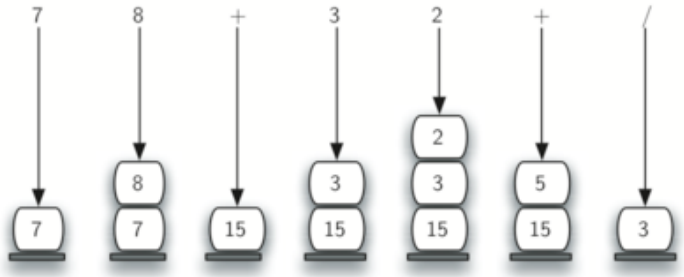
这个计算结果要压回到栈内，并作为下一个操作符的对象。当最后一个操作符工作结束，栈内应该只有一个数值，出栈并作为计算结果返回。图?? 显示了该求值过程中栈内容的变化。



例:

再来看一个稍微复杂的表达式：7 8 + 3 2 + /。这里有两点要注意：

- 栈的大小，随着子表达式的计算过程而膨胀，收缩，再膨胀。
- 除法操作符要小心处理，因为后缀表达式的操作数顺序不变，但当两个操作数出栈时，顺序反了。因为除法不支持交换律，所以 15/5 与 5/15 不同，必须保证顺序没有交错。



算法假定后缀表达式是一系列被空格分隔的字符，操作符是 * /+ -，操作数假定是一位整数。最终结果也是整数。

1. 建立一个空栈 operandStack
2. 字符串使用 split 转为列表
3. 从左到右检索列表，对于每个元素，
   - 如果是操作数，字符转为整数，压栈
   - 如果是操作符，出栈两次。第一次出栈的是第二个操作数，第二次出栈的是第一个操作数。计算结果，并压回栈。
4. 检索结束，出栈结果就是返回值。

完整的函数代码如下，其中的 doMath 是算法辅助函数，定义为两个操作数和一个操作符的计算。

```
from pythonds.basic.stack import Stack

def postfixEval(postfixExpr):
    operandStack = Stack()
    tokenList = postfixExpr.split()

    for token in tokenList:
        if token in "0123456789":
            operandStack.push(int(token))
        else:
            operand2 = operandStack.pop()
            operand1 = operandStack.pop()
            result = doMath(token,operand1,operand2)
            operandStack.push(result)
    return operandStack.pop()

def doMath(op, op1, op2):
    if op == "*":
        return op1 * op2
    elif op == "/":
        return op1 / op2
    elif op == "+":
        return op1 + op2
    else:
        return op1 - op2

print(postfixEval('7 8 + 3 2 + /'))
```