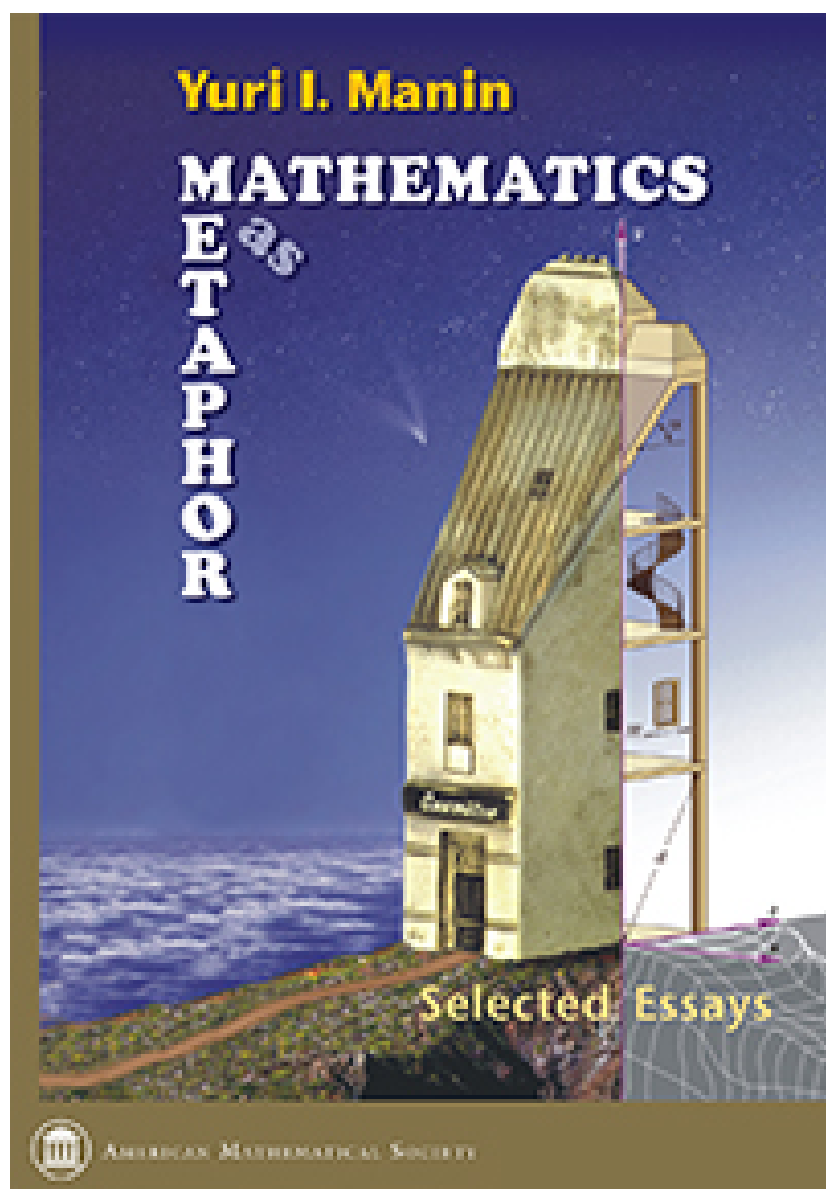


# 数学之为隐喻：随笔集

Yuri I. Manin （尤里·I·曼宁）



序言 -- 弗里曼·戴森

引言

## 第一部分 数学作为隐喻

数学知识：内在、社会和文化方面

数学作为隐喻

真理、严密和常识

格奥尔格·康托尔及其遗产

哥德尔的定理

引言：《可计算和不可计算的书》

数学作为职业和使命

## 第二部分 数学和物理学

数学与物理学

数学和物理学之间的相互关系

关于算术物理学的反思

## 第三部分 语言、意识、书评

神话中的魅惑者：心理学和文化理论研究

论语言和意识的早期发展（类群进化）

空城雏形

思想之三角形（书评）

“爱仍在”（书评）

“好证明使我们更明智”（采访尤里·I·曼宁）

## 出版物目录

## 致谢

## 目录

数学之为隐喻：随笔集.....	1
前言.....	1
引言.....	8
1. 数学.....	8
2. 骗子、语言、意识.....	11
致谢.....	13
第一部：数学之为隐喻.....	14
数学知识：内在、社会和文化方面.....	15
0. 前言.....	15
I. 数学知识 .....	17
I-1 鸟瞰图 .....	17
I-2. 数学知识的对象.....	19
I-3. 定义/定理/证明.....	28
I-4. 问题、猜想、研究纲领.....	30
II. 数学作为认知工具 .....	31
II-1 一些历史.....	31
II-2. 数学的认知工具。 .....	33
II-3. 模型.....	35
III. 数学科学与人类价值.....	45
III-1. 引言 .....	45
III-2. 理性 .....	46

III-3. 真理 .....	47
III-4. 行动与冥想 .....	47
参考文献.....	49
数学之为隐喻.....	52
引言.....	52
隐喻论.....	53
两个例子.....	53
语言与数学.....	57
隐喻与证明.....	59
真理、严谨和常识.....	62
0. 前言.....	62
1. 历史上的数学真理.....	63
2. 数学家的真理.....	68
3. 三个案例的材料.....	73
哥德尔的本体论证明。 .....	73
计算机计算什么，或者说广告中的真相.....	74
数学真理的随机性.....	76
参考文献.....	76
数学作为职业和使命.....	78
1.....	78
2.....	80
3.....	81
4.....	84
5.....	84

## 前言

---

FREEMAN DYSON

Institute for Advanced Study, Princeton, NJ

有些数学家是鸟，有些是青蛙。鸟在空中高飞，眺望数学的广阔视野，欣赏能够统一我们思维、整合不同领域各种问题的概念。他们喜欢远眺数学领域的远方，而青蛙们却生活在泥土里，只看到附近生长的花朵。他们喜欢研究特定对象的细节，一次解决一个问题。Manin 是只鸟。我恰好是只青蛙，但很高兴向大家介绍这本书，让我们从他的鸟瞰数学世界的视角来看待数学。

“数学作为隐喻”是鸟类的一个好口号。它的意思是，数学中最深刻的概念是将一个思想世界与另一个思想世界联系起来的概念。在 17 世纪，笛卡尔用他的坐标概念将代数和几何学这两个不同的思想世界联系在一起，而牛顿用他的流数概念（今天称为微积分）将几何学和动力学这两个世界联系在一起。在 19 世纪，布尔用他的符号逻辑概念将逻辑和代数这两个世界联系在一起，而黎曼用他的黎曼曲面概念将几何学和分析学这两个世界联系在一起。坐标、流数、符号逻辑和黎曼曲面都是隐喻，将单词的含义从熟悉的上下文扩展到不熟悉的上下文。Manin 认为，数学的未来是探索已经可见但尚未理解的隐喻。最深刻的隐喻是数论和物理学之间的思想结构相似性。在这两个领域中，他看到了平行概念的令人垂涎的片段，将连续和离散相互联系的对称性。他期待着一种称为数学量子化的统一。

Manin 不同意广泛接受的故事，即 Hilbert 在 1900 年巴黎国际数学家大会上向人们呈现了他的著名的 23 个未解决问题清单，从而为 20 世纪的数学设定了议程。Manin 认为，重要的数学进步来自于计划，而不是问题。问题通常是通过以新方式应用旧思想来解决的。研究计划是新思想诞生的温床。他将 Bourbaki 计划，以更抽象的语言重新书写整个数学领域，视为 20 世纪许多新思想的来源。他认为 Langlands 纲领，将数论与几何学统一起来，是 21 世纪新思想的有希望的来源。解决著名的未解决问题的人可能会赢得大奖，但开创新计划的人才是真正的先锋。

二十世纪最丰富的思想源泉之一是乔治·康托尔在 19 世纪开始的研究计划，探索无限集和无限基数和序数的世界。在此计划中，Hilbert 选择了一个特定的问题，即连续统假设的证明或证伪，这成为他的清单上的头号问题。但该问题的答案比 Hilbert 想象的更深刻、更重要。库尔特·哥德尔在 1938 年证明了这个假设永远不可能被证伪，而保罗·科恩在 1963 年证明了它永远不可能被证明。连续统假设成为一个不可判定的数学命题的例子，证明没有单一的公理集可以囊括整个数学。Manin 认为连续统假设本身其实不重要，如今很少有数学家关心连续统假设的真假。重要的进展是认识到许多替代的公理集可能作为数学基础，这一认识源于康托尔的整个研究计划，而非连续统假设的具体问题。

在他的论文中，Manin 将两个历史上分离的数学领域——19 世纪由 Cantor 创建的无限数学理论和 20 世纪由 Alan Turing 创建的有限可计算性理论结合在一起，用一句话概括了这两个世界：

“ $2^x$  远大于  $x$ ”

他指出, 当  $x$  是可数无限时, 该陈述变成了 Cantor 的连续统假设, 即线上的点集是大于整数集的最小无限集。当  $x$  很大但有限时,  $2^x$  大约是必须检查的实例数, 以便在长度不超过  $x$  的二进制展开中找到具有给定通用属性的整数 (或证明不存在这样的数字)。陈述 “ $2^x$  远大于  $x$ ” 意味着大多数涉及  $x$  个未知数的问题都不能在合理的时间内由数字计算机回答 (时间通常取决于输入的长度)。这个陈述是现代可计算性理论的基础。决定哪些算术函数在原则上是可计算的问题没有普遍的答案。Manin 认为这不是偶然的。Cantor 的无限集理论和 Turing 的算术函数可计算性理论之间存在形式上的相似性。在这两个理论中, 不可判定性是规则而不是例外, 不可判定性的证明在形式上是相似的。这两个理论中的每一个都是另一个的隐喻。

本书包含 11 篇数学论文, 展示了 Manin 的核心思想, 以及 5 篇非数学论文, 展示了他的智识兴趣。其中最实质性的数学论文是 “数学和物理”, 这是一本最初于 1979 年以俄文出版、1981 年以英文出版的书的再版。1983 年, 我为《数学知识分子》撰写了评论。以下是我评论中的几句话: “Manin 的目的是使物理思维对数学家来说易于理解。他通过巧妙选择例子实现了这个目的。顺便说一句, 通过他的写作和思考风格, 他使数学家的思维过程对物理学家来说易于理解。他没有试图废除或模糊数学和物理理解之间的区别。他的书籍众多优点之一是, 它没有解释或混淆中心的谜团, 即数学作为理解自然的工具的奇妙有效性。” 这篇论文只有 54 页, 但它在这个狭窄的范围内压缩了对惊人范围主题的清晰阐述。作为众多例子之一, 以下是 Manin 对费曼积分的评论:

“费曼积分是一种在物理学家描述量子过程时习惯使用的数学上未定义的表达式。 “在积分微积分的前史中, 开普勒的 “酒桶立体测量” 是一个重要的领



域。在一般积分定义出现之前，这项工作计算了商业用途的旋转体的体积分。费曼壮丽的积分的数学理论，物理学家经常大量写作的内容，实际上与酒桶立体测量并没有多大区别。” Manin 想象未来会有一场数学革命，就像牛顿发明微积分一样，使费曼积分变得如酒桶般坚固和明确。

Manin 是一位专业的数学家，他的书主要是关于数学的。西方读者可能会惊讶地发现，他同样地有关于其他主题的雄辩写作，比如集体无意识、人类语言的起源、自闭症的心理以及骗子在许多文化神话中的角色。对于俄罗斯的读者来说，这样多面向的兴趣和专业并不令人惊讶。俄罗斯知识分子保持着旧俄罗斯知识分子自豪传统，科学家、诗人、艺术家和音乐家属于同一个社群。正如我们在契诃夫的剧作中所看到的，他们今天仍然是一群理想主义者，他们因与迷信社会和反复无常的政府的疏离而结合在一起。在俄罗斯，数学家、作曲家和电影制片人互相交谈，一起在冬夜的雪地上漫步，一起坐在一瓶葡萄酒旁，分享彼此的思想。

的爱好之一是瑞士心理学家卡尔·荣格发明的原型理论。根据荣格的理论，原型是我们所有人都共享的根深蒂固的集体无意识中的心理形象。原型所带来的强烈情感是失落的集体欢乐和苦难的记忆的遗物。说，我们不需要接受荣格的理论为真才能找到它有启发性。神话中的骗子是描述的原型中他最喜欢的一个。在西方文学的开端，伊利亚特的英雄阿喀琉斯和赫克托尔完成了他们的悲剧命运，英勇地赴死。接下来是《奥德赛》的主人公奥德修斯，是个生存下来的骗子。奥德修斯通过聪明的方法向我们展示了如何应对困境。在十年的英雄式的决战之后，他最终通过建造一只木马并装满武装士兵来结束了特洛伊战争。特洛伊人被欺骗着将木马带进城中，士兵们跳出来，给特洛伊人以惊吓，

城市沦陷了。的《神话中的骗子》一文显示，骗子原型比西方文学更古老，可以追溯到世界各地的前文字传说和神话。在许多古老的传说中，骗子出现在一对兄弟中的其中一个。年长的兄弟是首领，是尊严和英雄式的部落创始人，是美德和正义的化身。年轻的兄弟是叛逆者，是大胆的骗子，打破规则，取笑首领，很少受到惩罚。在基督教出现之前的西伯利亚的灵动文化中，经常发生一个部落由两个兄弟统治，首领和萨满，而萨满扮演着骗子的角色。Manin 还讲述了 Wakdjunkaga 的故事，他是 Winnebago 印第安人传说中的一个骗子。Jung 将其作为骗子原型的典型代表之一。另一个酋长和骗子兄弟的例子可以在圣经《出埃及记》中找到。摩西领导以色列儿童走出埃及，而他的兄弟亚伦则耍把戏来惩罚和困扰埃及法老。

克拉拉·帕克是威廉姆斯学院的英语教授，她于 1979 年在《哈德逊评论》杂志上发表了题为“没有时间搞笑”的文章，描述了滑稽人物在文学中的角色。每个喜剧英雄都是一个骗子。帕克的文章用辞恳切、深刻地指出，我们的现代文学过于悲剧，而缺乏喜剧。帕克和曼宁是好朋友并非偶然。1967 年，帕克出版了《围城》一书，这是一本描述她自闭症女儿成长过程的经典之作。曼宁一直对自闭症感兴趣，将其视为了解人类思维运作的一扇窗户。在某种意义上，自闭症儿童是一种纯粹的智力，他们能够看到不受正常人情感和关系的扭曲影响的世界。帕克报告说，她的女儿在使用“是的”这个词之前就正确使用了“七边形”这个词。由于他们对正常人的约束和规定没有意识，自闭症儿童与骗子具有一些共同点。曼宁的文章“它仍然是爱”是对帕克书的评论，发表在俄罗斯杂志《普里罗达》上。他生动地描绘了这个非凡的孩子和她的母亲，

母亲始终与孩子密切相关，但保持着布莱希特式的距离，观察和描述着她缓慢的觉醒过程。

三十多年前，歌手莫尼克·莫雷利（Monique Morelli）录制了一张由皮埃尔·马科兰（Pierre MacOrlan）创作歌词的唱片。其中一首歌是《La Ville Morte》（死城），曲调悠扬，配合着莫雷利深沉的男中音，手风琴用声音与其呼应，歌词带有非凡的强度感。歌词印在页面上并不特别：

"EN PENETRANT DANS LA VILLE MORTE,  
JE TENAIT MARGOT PAR LE MAIN...  
NOUS MARCHIONS DE LA NECROPOLE,  
LES PIEDS BRISES ET SANS PAROLE,  
DEVANT CES PORTES SANS CADOLE,  
DEVANT CES TROUS INDEFINIS,  
DEVANT CES PORTES SANS PAROLE  
ET CES POUBELLES PLEINES DE CRIS".

“当我进入这座死城时，  
我拉着玛戈的手...  
我们穿过墓地，脚步无力，无语，  
在这些没有门把的门前，  
在这些不确定的坑洞前，  
在这些没有言语的门前，  
和这些充满呐喊的垃圾桶前走过。”

每当我听那首歌时，都会有一种不成比例的强烈感受。我常常问自己为什么这首简单的歌词似乎能够共鸣到某种深层次的无意识记忆，仿佛逝者的灵魂通过莫雷利的音乐在说话。而现在，出乎意料的是，我在这本书中找到了答案。在他的短篇散文《空城原型》中，曼宁描述了死城的原型如何一再出现在

建筑、文学、艺术和电影中，从古代到现代，自人类开始聚居于城市，自其他人类开始聚居于军队去蹂躏和摧毁它们。在马克奥兰的歌中，向我们讲述的是一个老士兵的故事，他曾经是一支占领军队的一员。在他和妻子走过死城的尘土和灰烬之后，他再次听到了：

CHANSONS DE CHARME D'UN CLAIRON  
QUI FLEURISSAIT UNE HEURE LOINTAINE  
DANS UN REVE DE GARNISON

"一名号手的迷人歌曲，  
在梦幻般的营房中绽放，  
那是遥远时光里的一小时。"

MacOrlan 的歌词和 Morelli 的声音似乎让我们的集体潜意识中的一个梦想变得真实，这是一位老兵漫步在一座死城中的梦想。集体潜意识的概念可能像死城的概念一样具有神话色彩。Manin 的文章描述了这两个可能是神话的概念相互照射时所呈现的微妙光芒。他将集体潜意识描述为一种强大的非理性力量，将我们拉向死亡和毁灭。死城的原型是几百个真实城市被摧毁的痛苦精华，自从城市和掠夺性的军队被发明以来，这种情况就存在了。摆脱集体潜意识的疯狂，我们唯一的出路是基于希望和理性的集体理智意识。我们当代文明面临的伟大任务是创造这样一种集体意识。

## 引言

---

### 1. 数学

本书包含了我在过去三十年左右所写和发表的十多篇非技术论文和一本薄的书。它是 1996 年出版的我的技术论文选集的补充；请参见本卷末的我的所有出版物的完整列表。

这个选择应该被看作是五十年的研究和对我们的行业的思考的背景。这种态度并不像听起来那么神秘，因为通过数学，就像通过诗歌和哲学，几代人之间进行交流，常常越过了他们的同时代人的头顶，因为在每一代人中，数学家的群体是小而分散的，遍布世界各地。

我参与的大部分数学研究都始于代数几何。它的核心是研究具有多个未知数的多项式方程组的解。当方程已经给出并固定时，我们想象它们的所有解的集合，由  $n$  个复数构成的元组，作为一个几何实体，一个位于  $n$  维空间中的形状，在某些方向上无限延伸，在其他方向上则随意闭合。这些形式的多样性和复杂性远远超过了现代抽象艺术展览中所能想象的任何东西，但代数几何学家设法找到了模式，发现了联系，并确定了这个广阔世界的规律。

我主要对代数几何在数论和理论物理中的应用感兴趣。

数论中最古老的问题之一，追溯到古希腊，以亚历山大的丢番图（约公元 300 年）命名，也涉及到多项式方程的解，但这一次假设多项式的系数是整数，并问：

是否存在一个所有坐标都是整数（点阵点）或有理数的解？人们能够找到多少这样的解？

最让我着迷的是，慢慢地开始理解这些丢番图问题的答案关键取决于所有复解的几何形状。

例如，所有复数解的空间可能是二维的，并且类似于一个球体，或一个环面，或一个带有两个或多个手柄的更复杂的表面。手柄的数量是所谓的亏格，是一个非常强壮的拓扑不变量，似乎与 Diophantine 系统的算术细节和离散晶格点无关。

然而，亏格基本上决定了有理解集何时可能无穷大：如果有至少两个手柄，则永远不可能。

这就是著名的莫德尔猜想，我在 60 年代曾试图攻克它，但只取得了部分成功。后来，我启动了一个计划，旨在建立在任意维度中，如何一些复杂解的拓扑特征确定解集中的格点的数量在一个逐渐增长的正方形体积内的渐近行为。

直到 20 世纪下半叶，量子场和尤其是量子弦的机制将基本代数几何的工具放在了前台，理论物理的数学工具箱才包括了更多的代数几何知识。

这里举例说，像点粒子的世界线的视觉形象被小弦的世界面所取代。这样的世界面看起来像一个（黎曼）曲面，它的亏格，即手柄的数量，对应于各种费曼振幅中的回路数量，自 20 世纪 40 年代以来，费曼振幅构成了量子场论的主要理论和计算机制。

在这个研究量子弦的过程中，我取得的一个成果是计算了所谓的 Polyakov 度量在黎曼曲面模空间上的值。结果发现，这个度量可以用在 Gerd Faltings 关于丢番图方程 Mordell 猜想的最终证明中扮演重要角色的相同上算术构件来构建。

实际上，这种柏拉图式的感觉，即即使最抽象的数学思想也注定与物理世界协调一致，始终是我这个行业中最为不可抗拒的吸引力之一。

斯特凡·马拉梅（Stephane Mallarme）想让我们意识到，诗歌是由词语构成而不是思想。在某种程度上，对于数学来说也是如此，但在更深层次上，它基本上是错误的。（我怀疑对于诗歌来说也是错误的。）

正如我最近在《数学知识》中写道：“数学家们发展了一种奇特的话语行为，可以称之为‘定义文化’。在这种文化中，许多努力都投入到了基本抽象概念的内容（语义）和它们之间语法关系的澄清中，而对于这些概念的词语选择（甚至更大程度上，符号表示）则是次要的、在很大程度上是任意的约定，受到方便性、美学考虑和想要调用适当内涵的欲望的支配。”

为了教自己数学语言维度，我写了《数理逻辑课程》，这本书于 1977 年在 Springer 研究生文本系列中出版。

该书的俄语版由“苏联广播”出版社分两部分出版：可证明和不可证明（1979 年）和可计算和不可计算（1980 年）。对于第二部分，我写了一篇介绍（在本卷中重印），在其中我简要讨论了量子计算机作为潜在强大计算工具的想法。几年前，我很高兴听到我的言论至少激励了俄罗斯的一位年轻研究者投身于这个有前途的领域。R. Feynman 的论文，于 1982 年发表在英文中，详细阐述了类似的论点，它更具有影响力。

事实上，语言及其起源和功能，无论是在当代数学和数理逻辑中，还是在我们只能推测其早期史前阶段的情况下，一直深深吸引着我。



## 2. 骗子、语言、意识

我一生中最具创造力的时期是在 1960 年代至 1980 年代的莫斯科，那里也充满了人文学科研究和对人类文化、历史和心理学意义的追寻。我很高兴地参加了由我的朋友，语言学家和语文学家组织的研讨会和会议，发表了关于神话中的欺诈者形象和列维-斯特劳斯的认识论等主题的业余论文。

多年来，我在莫斯科主持了一个有关心理语言学、思维和意识演化的研讨会。参与和贡献者包括语言学家、民族学家、神经生物学家、心理学家和精神病学家。我们都有不同的背景和不同的兴趣，试图找到可能通过将我们不同的经验汇集在一起来阐明的共同观点和问题。

我最初的调查逐渐聚焦于一个可能只有一个业余爱好者才会构思的项目。

我开始想象语言作为一种社会行为系统的出现情形，并试图透过世纪的迷雾，超越比较语言学方法由于可用数据的指数衰减而开始失败的边界。（例如，诺斯特拉蒂克（*nostratic*）重建是指约在公元前  $(10-13)10^3$  年的一个非常晚期时代。）这就使得从纯语言学的观点转向了心理语言学的观点。

为了简洁起见，我将以一些干燥而简化的论文形式呈现我的一些思考。

(i) 在现代社会中，有极少数的人，他们的语言能力水平明显高于普通人，甚至高于几乎所有其他社会成员。我指的是像但丁、莎士比亚和普希金这样的民族语言的结晶者。我假定在语言发展的非常早期阶段也是如此。有些人通过他们还未出生的语言说话，这种非系统的语言由突变的大脑产生，在原始巫师和原始诗人的引导下爆发到一个非语言环境中。因此，在索绪尔的语言学理论中，语言在意义上先于言语。



(ii) 发展意识的主要功能并非认知。它在于引入一种心理机制，可以暂时停止先天的行为模式。发展语言的主要功能是为这些本能行为提供信号系统；它可以被内化，从而构成个体心理的基础。与此密切相关的是，发展语言为特殊天赋的个体提供了控制他人行为的手段和创造“替代现实”的手段，后来演变成宗教、文学、哲学和科学。

(iii) 伴随早期人类语言能力的增长，发展出左右脑不对称，可能最初只表现在少数个体中，很容易导致现代术语中所描述的严重神经紊乱。（类似的推测是基于不同的材料，例如从动物状态特征到人类社会的首次性行为变化。）

在重构的某个阶段，我意识到我所想象的人物与神话中的骗子非常相似。我开始研究有关骗子的文献，发现令我高兴的是，全世界的骗子似乎都具有特殊的语言能力，同时也十分神经质。我在 1987 年发表的一篇论文中简要描述了这项研究的一些结果，该论文发表在俄罗斯科学院的《自然》杂志上。

进化有利于骗子的基因，因为他的非凡性活动得到了他的操纵技能的帮助。此外，骗子在权力源头附近担任智者的角色可能给他带来额外的繁殖优势。直到最近，我才发现大约在同一时间，即 1988 年，一组研究人员出版了《马基雅维利智慧》一书。它的内容在[MI2]中简要概述如下：“[...]智力的进化主要是由选择社交能力最强的人驱动的，因为这些人处理同伴时面临的最大问题是如何应对。”这个术语“马基雅维利智慧”恰恰是由作者（或编辑）发明的，以表达这种操纵社交能力，证据表明其在灵长类社会中已经起着重要作用。

我的整个智力生涯都被我逐渐认识到的伟大启蒙运动项目所影响。简而言之，它基于人类理性具有最高价值的信念，认为知识和教育的扩展将自动产生

更好的人类生活。在最好的启蒙传统中，科学家开始研究原始意识，因为它存在（必须理解存在的一切），并为了使我们摆脱其对我们施加的磁力。但事实证明，原始意识在现代时代只变得更加强大。上个世纪是一个理性和非理性同样强大，以怪异不协调的交响乐形式共存发展的时期。除了更有益的影响外，科学、政治和艺术也为人类提供了大规模毁灭性武器、高效的极权自组织形式和对所有这些的恶意颂扬。尽管如此，我仍然相信启蒙运动项目。

## 致谢

我不可能列出所有慷慨教授我所有知识（或我认为我所知道的）的朋友和同事，但我诚挚地感谢他们。特别感谢 Xenia 和 Mitya。Mitya 首先提出了这个选集的想法，当我认真开始工作时，他翻译了几篇仅以俄语发表的论文的英文版本。Xenia 的建议、批评、鼓励和爱是必不可少的，一如既往。

# 第一部：数学之为隐喻

数学知识：内在、社会和文化方面

数学作为隐喻

真理、严密和常识

格奥尔格·康托尔及其遗产

哥德尔的定理

引言：《可计算和不可计算的书》

数学作为职业和使命

## 数学知识：内在、社会和文化方面

---

### 0. 前言

一方面，我们为构建一个与现实需求毫不相关的优雅世界而感到自豪，另一方面，我们声称我们的思想几乎构成了所有重要技术发展的基础。

达尼尔·芒福德（摘自《ENS》的前言）。

纯数学是一个庞大的有机体，完全由数学家心中涌现的思想所构建，并且只存在于这些数学家的思想中。

如果你想要摆脱这种说法带来的不安感，至少有三种逃避方式。

首先，你可以简单地将数学视为数学手稿、书籍、论文和讲座的内容，视为越来越庞大的定理、定义、证明、构造、猜想的网络（我应该也包括软件吗？……）——即当代数学家在会议上展示、在图书馆和电子档案中保留、为之自豪、彼此颁发奖项、并偶尔争论其来源的一切。简而言之，数学就是数学家所做的事情，就像音乐是音乐家所做的事情一样。

其次，有人可以认为数学是一项深深扎根于现实并且不断回归现实的人类活动。从用手指头数数到登月再到谷歌，我们使用数学来理解、创造和处理事物，也许这种理解才是数学，而不是伴随抽象概念的无形低语。因此，数学家就像阿基米德帮助保卫叙拉古（并拯救当地的暴君）、艾伦·图灵解密隆美尔元帅被拦截的军事电报以及约翰·冯·诺伊曼建议高空爆炸作为一种有效的轰炸战术，都是人类历史上更或多或少负责任的行动者。接受这种观点，数学家可以强调其社会实用价值来捍卫他们的行业。在这个角色中，数学家可能和普通人

一样道德上困惑，如果我想展示这种困惑的一些特殊性，我找不到比[B-BH, 第 11 页]的尖酸讽刺更好的例子：“[...]数学也可以是一个不可或缺的工具。因此，在要测试碎片炸弹对人体的影响但人道主义的考虑禁止在猪身上测试时（我加的斜体。Yu. M.），就使用了数学模拟。”

或者说，第三种观点是，数学巨城高耸于柏拉图意念世界的某个角落，我们谦卑而虔诚地发现它（而非发明它）。最伟大的数学家能够理解宏伟设计的概要，但即使是那些只能看到厨房瓷砖上的图案的人，也可以感到幸福快乐。另外，如果一个人倾向于使用符号学隐喻，那么数学就是一个原型文本，其存在仅仅是假定的，但却是所有被我们处理的损坏和残缺副本的基础。这个原型文本的作者（或城堡的建造者）的身份任何人都无法确定，但乔治·康托尔以他关于“无限的无限”的想象，和库尔特·哥德尔以他的“本体证明”，似乎对这个问题毫不怀疑。

这些三种态度、社会地位的各种混合，以及个体行为所涉及的选择，给接下来的讨论涂上了各种色彩。这个简明前言的唯一目的是使读者意识到我们的表述中存在的内在张力，而不是模仿清晰的视野并提供明确的判断。

在这篇论述中，还有一个有关历史参考的最后警告。阅读旧文本有两种不同的模式：一种是理解它们所写的时代和种族；另一种则是为我们这个时代的价值观和偏见提供一些启示。在数学史上，这种相对立的态度被“民族数学”和 Bourbaki 风格的历史所代表。

为了本次演讲，我明确而有意识地采取了“现代化”的观点。

**感谢** Silke Wimmer-Zagier 提供了一些关于中国和日本数学史的资料，并讨论了它们对这个项目的相关性。Dmitri Manin 向我解释了谷歌的网页排名策略。我非常感激他们的慷慨帮助。

## I. 数学知识

### I-1 鸟瞰图

迈克尔·阿蒂亚爵士在他的报告[At]中以以下广义概述开始：“数学的三个主要分支按历史顺序排列是：几何学、代数学和分析学。我们基本上归功于希腊文明的是几何学，代数学源于印度和阿拉伯，分析学（或微积分）是牛顿和莱布尼茨的创造，开启了现代时代。” 他随后解释说，在物理学领域，这些分支分别对应于（对）空间/时间/连续体的研究：“关于几何学是空间研究，几乎没有争议，但代数学是时间研究可能不那么明显。但是，任何代数系统都涉及按顺序进行操作（加法，乘法等），这些操作被构想为一个接一个地执行。换句话说，代数学需要时间来理解其意义（即使我们通常只需要离散的时间瞬间）。”

人们可以根据另一种观点为代数学辩护，即它与语言有着密切关系，而不是与物理学有关。事实上，观察到数字的位置价值符号表示的毕业出现，以及后来的变量和运算的代数符号表示，可以识别出两个历史阶段。

在第一阶段，符号表示主要用于缩短和统一一定的含义的符号表示。在这个阶段，自然语言可以（而且确实）达到同样的目标，只是效率较低。因此，人们可以合理地将这个过程与自然语言的一个专门的子方言的发展相比较。仍在用于装饰目的的罗马数字是这个阶段的化石遗迹。作为另一个有用的比较，

也许更加流畅和文献记录更好的是，我们可以调用化学符号表示法的出现和演变。

在第二阶段，人们设计了用于十进制数位上加/乘和后来是除法的算法。与此同时，变量和代数运算开始结合成等式和方程，然后变成遵循相同转换/演绎规则的一系列方程式。在这个阶段，新（数学）方言中的表达式变得不再是某种意义的载体，而是计算的原料。这种意义的转移，从符号的更或明确语义到转换符号字符串的算法的隐藏语义，是标志代数学诞生的重要事件链。

自然语言没有发生类似于第二阶段的事情。相反，当在 20 世纪 60 年代，大型计算机使对英语、俄语、法语等文本进行算法处理的首次实验成为可能（例如，实现自动翻译），人们开始意识到自然语言对于计算机处理是多么不适合。词汇数据库是不可或缺的。复杂和不合逻辑的规则统治着形态、词序和语法结构的兼容性；更糟糕的是，在不同的语言中，这些规则往往是反复无常的矛盾的。经过所有努力，没有经过人工编辑的自动翻译能够产生令人满意的结果。

人类语言的这种特性——它们对算法处理的抵抗力——或许是为什么只有数学可以提供足够的物理语言的最终原因。这并不是因为我们缺乏表达所有这些  $E = mc^2$  和  $\int e^{iS(\phi)} D\phi$  的词汇——词汇可以轻松地被发明——关键是如果我们仅有这些词汇，我们仍然无法利用这些重大的发现。

但我们也不能跳过词汇，仅处理公式。数学和科学文本中的词汇发挥三个基本作用。首先，它们提供多个桥梁，连接物理现实和数学抽象的世界。其次，它们携带价值判断，有时是明确的，有时是隐含的，在我们选择特定的数

学推理链时起着指导作用。最后但并非最不重要的，它们允许我们交流、教学和学习。

我将以保罗·萨缪尔森对经济模型中使用语言和数学符号的评论作为结论（引自[CaBa]），来结束讲话：“当我们用语言来解决经济理论问题时，我们解决的是与写出方程式时相同的方程式[...] 真正的错误在于前提的制定[...] 数学媒介的一个优点，严格来说，是数学家在表达和证明时的惯用规范，无论是用语言还是符号，都强制我们把底牌摆在桌面上，让所有人都能看到我们的前提。”

回到数学领域的大规模地图，几何学/代数学/分析学，应该为（数学）逻辑学找到一个位置，包括现代算法和计算机科学。有令人信服的理由认为它是广义代数学的一部分（罗素·弗雷格）。如果我们同意这一点，阿蒂亚的洞察力关于将代数与时间联系起来得到证实。事实上，20 世纪 30 年代，逻辑学发展的重大转变发生在艾伦·图灵用物理隐喻“图灵机”描述算法计算时。在他的工作之前，逻辑学几乎完全是用语言学术语来考虑的，正如我们上面所做的。图灵设想的有限自动机沿着一维纸带离散地移动，并在上面写入/擦除位，以及关于这种类型的通用机器存在的定理，正强调了所有计算的时间特征。更重要的是，将计算视为物理过程不仅有助于创建现代计算机，而且还开辟了用经典和量子模式思考存储和处理信息的一般定律的物理学方法。

## I-2. 数学知识的对象

当我们学习生物学时，我们研究的是生物体。当我们学习天文学时，我们研究的是天体。当我们学习化学时，我们研究的是物质的种类和它可以转化的



方式。我们观察和测量原始的现实，我们在一个受控制的环境中设计狭窄的实验（但在天文学中不是这样），最终我们产生了一种解释性的范式，它成为科学的一个重要里程碑。

但是，当我们做数学时，我们在研究什么呢？

一个可能的答案是：我们正在研究可以像真实物体一样处理的想法（P.戴维斯和 R.赫希称它们为“具有可重复属性的心理对象”）。每个这样的想法必须足够严格，以便在任何可能使用它的情境中保持其形状。同时，每个这样的想法必须具有丰富的潜力，与其他数学思想建立联系。当一个最初的思想复合体被形成时（历史上或教育上），它们之间的联系也可能获得数学对象的地位，从而形成了一个伟大的抽象层次结构的第一级。

在这个层次结构的最底层是物体本身的心理图像和操纵它们的方式。奇迹般的是，高层次的抽象甚至可以反映现实：物理学家发现的世界知识只能用数学语言表达。

以下是几个基本的例子。

### I-2.1. 自然数

这可能是最古老的原始数学概念。“1、2、3、...”的“严格性”使得自然数在许多文化中获得了象征性和宗教意义。例如基督教的三位一体或佛教的涅槃：后者演变自梵语 *nir-dva-n-dva*，其中 *dva* 表示“两个”，整个表达意味着通过个体存在的消亡和与宇宙合而为一而达到绝对幸福的状态。（这些关于“两个”的消极内涵甚至在现代欧洲语言中仍然存在，它带有“怀疑”的联想：比如拉丁语 *dubius*、德语 *Zweifeln* 以及歌德对魔鬼梅菲斯托飞的描述）。

自然数也是一个原始的物理概念：计算物质对象（以及后来的非物质对象，例如日夜）是测量的第一个实例，见下文。

当自然数变成一个数学概念时：

a) 设计了处理自然数的方式，好像它们是实物一样：加法，乘法。

b) 发现了所有自然数内部结构的第一个抽象特征：质数，它们的无限性，质因数分解的存在和唯一性。这两个发现在历史和地理上是相隔甚远的；可以说，在文化和哲学上也是如此。位值系统标志着我们现在所称之为应用数学的起源，质数标志着过去所称之为数学的起源。以下是一些细节。

一开始，数字和处理数字的方法都是通过具体的物体进行编码的：手指和其他身体部位，计数棒，刻痕。刻痕已经是一个符号，不是一个恰当的物体，它可能开始表示的不是 1，而是 10 或 60，这取决于它在其他符号行中所处的位置。通往早期伟大数学发现的道路已经开启，那就是位值记数系统。然而，一致的位值系统还需要一个表示“零”的符号，这标志着数学抽象的一个新水平。

[B-BH]中的一份具有表现力的摘要描绘了以下情况：“公元前 2074 年，苏美尔帝国国王舒尔吉（Shulgi）进行了一次军事改革，接下来一年进行了一次行政改革（看似是在紧急状态下引入，但很快就变成了永久制度），将大部分劳动人口编入准奴役的劳动队伍，并使监工文书对他们的表现负责，计算方式为  $1/60$  个工作日（12 分钟）的抽象单位，根据固定的规范计算。在随后的记账中，所有的工作和产出都必须精确计算并转换为这些抽象单位，这需要进行大量的乘除运算。因此，为了进行中间计算，引入了以 60 为基数的进位制系统。它的运作需要使用乘法表、倒数表和技术常数表，并在学校进行使用培训；这

样一种基本思想已在空气中漂浮了几个世纪的制度实施需要国家层面的决策，并以强大的力量实施。然后，就像在许多后来的情况下一样，只有战争才提供了这种社会意志力的机会。”

另一方面，质数似乎源自纯粹的沉思，以及一个非常具体的无限概念，即自然数本身和质数的概念。

欧几里得《几何原本》中编码的质数无限性证明是早期数学推理的珠宝。让我们用现代符号简要回顾一下：有一个有限的质数列表  $p_1, \dots, p_n$ ，我们可以通过取  $p_1 \dots p_n + 1$  的任何一个质因数来将一个新的质数添加到其中。

这是一个完美的例子，将数学思想处理得好像它们是坚硬的物体一样。在这个阶段，它们已经是纯粹的思想，与苏美尔或任何其他符号无关。看着一个数字的现代十进制符号，人们可以轻易地判断它是偶数还是可被 5 整除，但不能判断它是否是质数。在欧几里得之后的几代数学家们惊奇地发现，质数以一种明显随机的方式出现在自然数序列中。

观察、受控实验，以及最近甚至是对质数的工程（通过可计算的算法来产生和识别大质数，用于安全应用）已经成为现代数论许多领域的标志。

## I-2.2. 实数和“几何代数”

整数源于计数，但其他实数来自于几何，如长度、面积、体积。毕达哥拉斯发现正方形对角线与其边的不可通约性，同时也证明了存在比“数字”更多的“量度”。后来，这些“量度”被称为实数。

整数上的算术运算从搭配棍子和凹槽演变成有序地处理规范化符号。实数上的代数运算则从绘制和观察素描中演变而来，这些素描可能是建筑工地的平面图或勘测结果，以及欧几里得圆、正方形和角度的表现。

二十世纪的数学史学家争论希腊数学中相当一部分是否为“几何代数”的解释。其中一个例子是一个大正方形的素描，由两条平行于正交边的线分成四部分，使其中两部分再次成为正方形。这个素描可以被理解为代数恒等式 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 的表达和证明。

我们现代化的观点建议更普遍地考虑几种心理过程的模式，特别是与数学有关的那些。以下两种是基本的：

a) 有意识地处理有限和离散的符号系统，明确规定了形成有意义的符号串的法则，构建新的串，并且有较不明确的规则来决定哪些串是“有趣的”（左脑，语言，代数活动）。

b) 主要是潜意识地处理视觉图像，隐含地依赖于过去经验的统计信息，估计未来结果的概率，但也判断平衡、和谐、对称性（右脑，视觉艺术和音乐，几何学）。

数学研究人员的心理过程必须以许多复杂的方式结合这两种模式。这不是一件容易的事情，特别是因为信息处理速率如此惊人地不同，有意识的符号处理约为 10 比特/秒，而潜意识的视觉处理约为  $10^7$  比特/秒（参见[N0]）。可能是由于这种（和其他）差异所产生的内在紧张感，它们倾向于情感化地被视为价值的体现——冷静的智力对抗热情的感觉，裸露的逻辑对抗深入的直觉。

请参见 David Mumford [Mu1]和[Mu2]的精美文章，他 eloquently 为统计学辩护

反对逻辑，但引用了数学统计学，这是以极其逻辑的方式构建的，正如任何数学学科一样。

回到实数和希腊人的“几何代数”，我们认识到其中体现了右脑对一个主题的处理方式，而后来在历史上演变成了由左脑主导的东西。或者，正如芒福德所说，现代代数是一种具有几何内在特征的对象的操作语法，而希腊代数则是这些操作的早期汇编。

也许希腊几何思维的认知现象的连续性不仅可以追溯到现代几何学，还可以追溯到理论物理学。过去几十年，从物理学到数学都出现了如此活跃的见解、猜想和复杂的构造，以至于出现了“物理数学”这个词。创造性地使用费曼路径积分的理论思维让我们感到惊奇的是，基于数学上不稳固的基础上构建出如此丰富的结果。这可以被认为是“几何代数”不仅是我们重建的东西，而且是现实的另一个证明。

### 1-2.3. $e^{i\pi} = -1$ ；三个数字的故事

可以说，欧拉公式  $e^{i\pi} = -1$  是数学中最美的单个公式。它以一种高度出人意料的方式结合了三个（或四个，如果将-1单独计算）在不同时代被发现的常数，并散发着非常不同的动机。

简而言之， $\pi = 3.1415926\dots$  是希腊人的遗产（再次如此）。即使它作为一个实数的存在，也就是一条线段或正方形表面的长度，也不是一件可以不费额外精神努力就能理解的事情。“平方圆”的问题不仅是下一个几何问题，而且还是一个合法性测试，其结果不确定。

相比之下， $e = 2.71828\dots$ 出现在已经成熟、如果不是完全发展的西方数学中（17 世纪中期）。它是对对数表的发明的结合理论副产品，作为优化数值算法（加法代替乘法）的工具，以及“平方双曲线”的问题。没有任何古典几何构造导致  $e$ ，也没有任何建议  $e$  和  $\pi$  之间有关系的。

最终，引入了  $i = \sqrt{-1}$  这个“虚数”，对于许多当代人来说是一种丑陋的形式，但在用根式表示立方方程的公式中，这个虚数被强制加入了 Cardano 的理论中。当所有三个根都是实数时，需要在中间计算中使用复数公式。

欧拉公式是“无限”恒等式的一个显著例子，他（以及后来的 Srinivasa Ramanujan）都是伟大的实践者。事实上， $e^{i\pi} = -1$  是级数  $e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} (ix)^n / n!$  的一个特例，它给出了更一般的表达式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 。

我们对实数和极限理论的进一步理解使欧拉和拉马努金处理“无限恒等式”的技能被边缘化。G.哈代（G. Hardy）在描述拉马努金（Ramanujan）的数学思维时感到困惑。这个故事确实讲述了逻辑与统计学的二分法，但我无法指出甚至是一个初步的陈述。

作为一个完全无关的发展， $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  被证明是二十世纪物理学中最重要和最意外的发现之一——量子概率幅度、它们的波动行为和量子干涉的充分描述的基础。

#### 1-2.4. 康托尔集合：终极数学对象。

在康托尔的原始描述中，

“UNTER EINER 'MENGE' VERSTEHEN WIR JEDE ZUSAMMENFASSUNG M VON BESTIMMTENWOHLUNTERSCHIEDENEN OBJEKTEN M UNSERER ANSCHAUUNG ODER

UNSERES DENKENS (WELCHE DIE ELEMENTE VON  $M$  GENANNT WERDEN) ZU EINEM GANZEN。 ”

“通过 '集合', 我们指的是任何将我们感知或思考的明确、不同的对象  $M$  (称为  $M$  的 '元素') 的特定集合  $M$  完整地聚合在一起的东西。”

德语语法允许康托尔在其结构中反映句子的含义: *Objekten m unserer Anschauung* 等被装在开括号 *Zusammenfassung* 和闭括号 *zu einem Ganzen* 之间。当第一次思考这个定义时, 很难想象可以使用这样单薄的手段进行什么样的数学或思维活动。实际上, 正是这种简朴, 使康托尔能够发明他的“对角线过程”, 将无限比较如同它们是物理对象, 以及发现实数的无限大严格大于整数的无限大。

同时, 康托尔的直觉是 20 世纪数学基础工作的基础: 它要么被各个时代的逻辑主义者激烈驳斥, 要么作为一个伟大的统一项目, 在集合论及其后继者范畴论的两种形式中发挥作用。

1-2.5. “所有人都是有一天会死的, 凯是一个人...”: 从三段论到软件。

亚里士多德系统化了陈述的基本形式和逻辑推理的基本规则。人们早期就注意到它们与基本算术之间的类比, 但是直到后来才变得精确; 我们认识到布尔在这一发展中的作用。科学哲学家们对两者之间的层次关系存在分歧。例如, 弗雷格坚持认为算术是逻辑的一部分。

20 世纪看到了两个领域的复杂融合, 30 年代哥德尔、塔斯基和柴契夫创造了数学推理的数学模型, 超越了有限文本的组合学。其中一个重要的工具是这



个想法，回溯到莱布尼兹，即我们可以使用整数的可计算枚举来替换逻辑推导中的算术运算。

塔斯基将真理建模为“所有解释中的真理”，并发现（数字的）算术真理集不能用算术公式来表达。塔斯基真理的无限性与逻辑公式允许包含“所有”和“存在”的量词有关，因此有限公式的解释涉及一个潜在的无限验证序列。

哥德尔使用了类似的技巧，证明了任何有限公理和推导规则系统推导出的算术真理集不能与所有真实公式的集合相一致。自我指涉是两个证明的一个重要共同特点。

哥德尔和塔斯基等人证明了基本的层次关系是语言和元语言之间的关系，这只有它们的相互关系而不是绝对状态是客观的。我们可以使用逻辑来描述算术，也可以使用算术来讨论逻辑。巧妙地混合这两个层次，可以明确地显示出纯逻辑作为认知工具的固有限制，即使它仅应用于纯逻辑本身也是如此。

同时期的图灵和丘奇分析了“可计算性”的概念，这个概念从一开始就有更多的算术特点。艾伦·图灵通过用物理形象（图灵机）代替传统的逻辑和计算的语言化表述，迈出了决定性的一步，这支配着塔斯基和哥德尔的话语。这是一个重要的思维步骤，为随后的技术进化做好了准备：可编程电子计算机的出现。

理论上，丘奇和图灵都发现存在一个“最终”的可计算性概念，体现在通用递归函数或通用图灵机中。这不是一个数学定理，而是一个“在形而上学领域中的物理发现”，不是通过证明而是通过事实证明，即所有后续尝试构想替代版本的尝试都导致了一个等价的观念。这一发现的“隐藏”（至少在大众账户中是如此）部分是意识到正确的可计算性定义包括不可计算性的元素，这是



不可避免的：递归函数通常不在所有地方定义，我们无法决定它在哪些点上被定义，在哪些点上不被定义。

现在运行的计算机体现了这些伟大洞见的技术异化形式。

### I-3. 定义/定理/证明

我将简要描述“纯粹”数学作为当代专业社群的集体活动的具体痕迹。我将强调这种活动的外部反映，而不是组织形式，来展示数学思想世界内部结构。

查看任何一篇主流研究期刊（如《数学年刊》或《发明数学》）上的现代论文，通常被划分为称为“定义”、“定理”（带引理和命题的亚种）和“证明”的相当短的片段，证明部分则可能更长。这些是现代数学阐述的基本结构单元；诸如动机、例子和反例、讨论特殊情况等花哨的东西使其更有生气。

这种组织数学知识的传统源自希腊人，特别是欧几里德的《几何原本》。定义的目的是介绍数学对象。定理的目的是陈述其属性或各种对象之间的相互关系。证明的目的是通过呈现一种被细分为小步骤的推理，每个步骤都被证明为“基本”的令人信服的论证，使得这样的陈述令人信服。

简单来说，我们首先解释我们在谈论什么，然后解释为什么我们说的是真实的（参见伯特兰·罗素）。

**定义。**第一个点在认识论上是微妙而有争议的，因为我们所谈论的是极具特殊性的心理意象，这些意象通常不会出现在未经训练的头脑中（什么是实数？随机变量？群？）。在上面介绍一些基本对象时，我使用了叙述设备使它们看起来更具形象或生动，但并没有在技术上给出真正的定义。

欧几里德的定义通常由涉及视觉形象的解释和涉及我们想要强加在它们上面的一些理想属性的“公理”混合而成。

在当代数学中，人们可以或多或少地明确地将自己限制在康托尔“集合”的基本心理意象上，以及一组有限的集合属性和从给定集合构造新集合的方法。然后，我们的每个定义都可以被看作是某种结构的标准化描述，包括集合、它们的子集等。这是由布尔巴基（Bourbaki）小组发展起来的一种观点，证明了它是一种极具影响力、方便且被广泛接受的组织数学知识的方式。不可避免地，一场反弹出现了，主要针对支持这种新欧几里德传统的价值体系，但它的实用价值是不容置疑的。至少，它使得来自不同领域的数学家之间的沟通更加高效。

如果一个人采用集合论作为进一步建构的基础，只有集合论公理仍然是“公理”，类似于被直观地接受而不需要进一步讨论的显然属性（但见下文），而实数公理或平面几何公理则变成了显式构造的集合论对象的可证明性质。

布尔巴基在他们关于现代数学的多卷著作中，发展了这一观点，并添加了一个美妙的“mere structures”概念（该问题[Sci]致力于布尔巴基小组的历史）。

在更广泛的框架下，人们可以认为数学家们发展了一种特定的讨论行为，可以称之为“定义文化”。在这种文化中，许多努力投入到澄清基本抽象概念的内容（语义）和它们相互关系的语法上，而对于这些概念的选择的单词（甚至更大程度上是符号）则是次要的，并且在很大程度上是一种任意的约定，由便利性、审美考虑、希望引起适当联想的愿望所驱使。这可以与人文学科的某

些习惯进行比较，其中像“存在”或“差异”这样的术语被严格地用作某一传统的标记，而不太关注它们的含义。

#### I-4. 问题、猜想、研究纲领

不时会出现一些文章，解决了或者至少以新的方式呈现了我们过去几十年甚至几个世纪来一直困扰着我们，无论是问题还是猜想，这些问题一直抵抗着许多努力，如费马大定理（由安德鲁·怀尔斯证明），庞加莱猜想，黎曼假设，P/NP 问题，这些问题现在甚至成为了报纸的头条。

1900 年 8 月 8 日，在巴黎举行的第二届国际数学家大会上，大卫·希尔伯特发表了关于 10 个杰出数学问题的演讲，这些问题是他 23 个问题清单中的一部分。可以争论这些问题在纯科学方面的比较价值，但毫无疑问，它们在将数学家的努力集中于明确定义的方向，并为年轻研究者提供清晰的任务和动机方面起到了重要作用。

虽然问题（是/否问题）基本上是关于某个陈述的有效性的猜测（例如哥德巴赫猜想：每个大于 4 的偶数都是两个质数的和），但研究计划则是一个广阔愿景的概述，一个地图，其中一些区域得到了深入的调查，而其他部分则是基于类比、实验以及简单特例的猜测。

两者之间的区别并非绝对。第一问题，连续体假设在康托和希尔伯特时代看起来像是一个是/否问题，引发了一个庞大的研究计划，特别是证明了在通常被接受的公理化集合论框架内，这两个答案都不能被推导出来。

另一方面，明确地制定一个研究计划可能是一次冒险。第六问题设想了对物理的公理化描述，但在接下来的三十年中，物理学完全改变了面貌。

近几十年最有影响力的一些研究计划表达了对柏拉图式现实结构的深刻洞察。魏尔猜测在有限特征下代数流形存在上同调理论，而格罗滕迪克构造了这些理论，从而永远地改变了我们对连续与离散之间关系的理解。

当庞加莱说“没有已经解决的问题，只有更或者更少已经解决的问题”时，他暗示了任何以是/否方式形式化的问题都是狭隘思维的表现。

21 世纪初的开始，以克雷研究所发布了“千禧年难题”清单为标志。这些难题一共有七个，都是是/否问题。这是计算机科学生成的问题首次被列入其中，著名的 P/NP 猜想也在其中。此外，克雷问题附带价格标签：任何其中一个问题的解决方案需要支付 106 万美元。显然，自由市场力量在此定价策略中没有发挥作用。

## II. 数学作为认知工具

### II-1 一些历史

被视为数学历史源头的古老文本表明，数学起初是一项特定的活动，以满足商业和国家的需要，为大型公共工程和战争服务：例如，关于苏美尔-巴比伦行政改革的摘录如上所示。

另一个例子是中国的《九章算术》，编纂于汉代初期，约公元前 3 世纪。在此我们引用 K. Chemla 在 1998 年柏林国际数学家大会上的报告[Che]。这本书通常是一系列问题及其解决方案，这些解决方案可以作为相当普遍的算法的特例阅读，因此具有结构相似的问题也可以被解决。根据 Chemla 的说法，

“这些问题定期调用汉朝官僚面临的具体问题，更确切地说，是由‘大司农’（dasinong）负责的问题，例如给文职人员发薪水、管理粮仓或制定标准粮食

措施。此外，《九章算术》的第六章以大司农桑弘羊（前 152-82 年）实际提倡的一项经济措施命名，旨在公正地征税，这个计划提供了数学程序。”

又一个关于中国数学家关注的内容的描述在[Qu]中给出：

“在中国帝国悠久的历史中，天文数学是唯一引起统治者极大关注的确切科学学科。在每个朝代中，皇家观象台都是国家不可或缺的一部分。三种专家——数学家、天文学家和占星家——被皇帝雇用作为专业科学家。那些被称为数学家的人负责建立制定日历系统的算法。大多数数学家都接受了制作日历的培训。 [...]

制作日历的人需要保持高度精确的预测。为了保证天文观测所需的精度，不断努力改进数值方法[...]。几何模型无法取代占据中国制作日历系统主要地位的数值方法，既不必要也不可能[...]。作为与数值方法密切相关的学科，而不是几何学，代数成为了中国古代最发达的数学领域。”

西方数学传统可以追溯到希腊。根据 Turnbull [Tu]的说法，我们将“数学”一词和将数学分为算术和几何学的划分归功于毕达哥拉斯（569-500 BC）。更精确地说，算术（和音乐）研究离散的内容，而几何学和天文学研究连续的内容。二级二分法，几何学/天文学，反映了稳定/移动的二分法。

经过小幅修改，这一分类在中世纪“知识四重奏”中得到了应用，并且迈克尔·阿蒂亚的整体数学观念仍然具有它的独特痕迹。

柏拉图（429-348 BC）在《理想国》第七卷 525c 中解释了为什么算术学习对于有见识的政治家是必要的：

“格劳孔，这是一种知识，立法者可以适当地规定；我们必须努力说服那些被规定为我们国家主要人物的人去学习算术，不是作为业余爱好者，而是必

须继续学习，直到他们只用头脑看到数字的本质；也不像商人或零售商那样，只是为了买卖，而是为了他们的军事用途和灵魂本身；因为这将是灵魂从变成到真理和存在最容易的方法。”

随着“纯数学”的逐渐出现，回归实际需求的行为开始被归类为应用。我们现在所知道的纯/应用数学对立在 19 世纪初已经形成。在法国，格尔贡（Gergonne）于 1810 年至 1833 年间出版了《纯数学与应用数学年鉴》。在德国，克雷尔（Crelle）于 1826 年创办了《纯与应用数学杂志》。

## II-2. 数学的认知工具。

为了理解数学如何应用于对真实世界的理解，我们可以将其方便地分为以下三种功能模式：模型、理论和隐喻。

数学模型以定量或定性方式描述一定范围的现象，但不愿意假装成为更多的东西。从托勒密的差圆（描述行星运动，约 150 年）到标准模型（描述基本粒子相互作用，约 1960 年），定量模型通过调整数值来紧紧地依附于可观察的现实，有时调整的自由参数数量甚至达到二十多个（标准模型）。这样的模型可以非常精确。

定性模型提供了关于稳定性/不稳定性、吸引子（一种趋向于独立于初始条件而发生的限制状态）以及复杂系统中的临界现象的见解。当系统穿过两个相位状态或两个不同吸引子流域之间的边界时，复杂系统中的临界现象会发生。最近的一份报告[KGSIPW]致力于预测洛杉矶凶杀案的激增，采用罕见事件的模式识别作为方法。结果是：“我们发现，凶杀率的上升在 11 个月内先于犯罪统计的特定模式：入室盗窃和攻击同时升级，而抢劫和凶杀则下降。这两种变

化，升级和下降，都不是单调的，而是零散地发生，每次持续 2-6 个月不等。”

计算机时代见证了模型的大量增加，这些模型现在已经在工业规模上生产并进行数值求解。R.M.索洛（1997 年所写）发表了一篇有洞察力的论文，认为现代主流经济学主要关注于模型构建。

模型通常被用作“黑匣子”，其内部存在隐藏的计算机输入程序，输出是给出人类用户的行为建议，例如在金融交易中。

一个（数学形式化的物理）理论与模型的区别在于其更高的追求。现代物理理论通常声称，如果世界只由某些受限制的物质种类组成：质点在重力作用下运动；真空中的电磁场；等等，它将以绝对精度描述这个世界。在牛顿关于作用于中心引力场中点的力  $Gm/r^2$  中， $Gm$  和  $r$  可能是对可测现实的让步，但  $r^2$  中的 2 是一个非常坚实的理论上的 2，而不是实验者所测量的任何 2.000000003 ...。一个好的定量理论在工程上非常有用：机器是宇宙的一个人工分片，在这个环境中只允许少数物理定律在一个良好的隔离材料环境中支配。在这个功能中，理论提供了一个模型。

一个不断驱动理论生成的动力是对超越物质世界的现实的概念，只有通过数学工具才能理解这种现实。从柏拉图的几何体到伽利略的“自然语言”再到量子超弦，这种心理态度有时甚至可以追溯到与研究者明确的哲学立场相矛盾的情况下。

一种（数学的）隐喻，当它试图成为一个认知工具时，假设一些复杂的现象可以与数学构造相比较。我所指的最近的数学隐喻是人工智能（AI）。一方面，AI 是与计算机相关的知识体系和一个由硬件、软件、互联网等构成的新



的、技术上创建的现实。另一方面，它是生物大脑和心灵功能的潜在模型。作为一个整体，它还没有达到模型的地位：我们没有关于芯片和神经元、计算机算法和大脑算法之间系统、连贯和广泛的对应关系的列表。但我们可以利用我们对算法和计算机的广泛知识（因为它们是我们创造的）来推断中枢神经系统的结构和功能：参见[Mu1]和[Mu2]。

一个数学理论是建立适用模型的邀请。一个数学隐喻是思考我们所知道的事情的邀请。苏珊·桑塔格在[So]中关于“疾病”隐喻的（误用）论文是一个有用的警告。

当然，我刚刚勾画的分类不是严格或绝对的。社会科学中的统计研究常常在模型和隐喻之间摇摆不定。随着范式的改变，科学理论被降为过时模型的地位。但为了我们的阐述，这是一种方便的方式来组织同步和历史数据。

我现在将详细介绍这些认知工具，重点强调模型和相关结构。

### II-3. 模型

人们可以通过思考以下与任何量化观测的系统研究相关的阶段来分析数学模型的创建和功能。

- i) 选择可观测的清单。
- ii) 设计一种测量方法：将数值分配给可观测值。通常在轴上（“更多-更少”关系）对这些值进行更或少的排序，然后期望测量与排序一致。
- iii) 猜测规定可观测值在结果通常为多维的构型空间中分布的定律。这些定律可以是概率的或精确的。平衡态可能特别有趣；它们通常被描述为整个构型空间上的一个适当泛函的静止点。如果涉及时间，则进入演化的微分方程。



关于“轴”的想法，应该提到卡尔·亚斯珀斯所阐述的其有趣和普遍的文化内涵。亚斯珀斯假定了公元前 500 年左右的一个现代转型时期，即一个“轴心时代”，当时基于内在和超验之间的对立而出现了一种新的人类心态。对我们而言，相关的是将对立视为同一轴的相反方向，以及自由的概念，即在两种不兼容的选择之间进行自由选择。这也是标准物理表达“自由度”的图像背后的意象，该意象现在几乎已经丧失，就像当它们成为术语时通常会发生的那样。

测量的概念是现代科学的基础，因此它有时会在建模中被盲目地接受。重要的是要记住它的限制。

在微观世界的量子描述中，“测量”是一种非常特定的交互作用，它会产生系统状态的随机变化，而不是提供关于该状态的信息。

在经济学中，货币作为“价格”所依据的通用轴。据称，“测量”是市场力量的一种功能。

市场隐喻（包括令人难以置信的“思想自由市场”）的核心内在矛盾在于：我们将多维且不可比较和不兼容自由度的世界投射到一维的货币价格世界中。原则上，人们无法将其与这些轴上的基本顺序关系甚至是不存在或不可比较的不同种类的价值相兼容。

在这方面，市场隐喻最矛盾的用法是“思想自由市场”的表述。

这个市场上只有一个想法出售：自由市场的想法。

### II-3.1. 测量的简要词汇表

关于测量的一般性说明：对于我们将要考虑的每个“轴”，测量的历史始于“人类尺度”阶段，涉及与物质对象的直接操作。逐渐地，它演变成更大和

更小的尺度，并为了应对这一演变带来的新挑战，创造和使用越来越多的数学。

**计数。**我们建议读者重新阅读上面关于自然数的小节，以了解计数（和会计）的历史。它清楚地表明，从计算少量物体（“人类规模”）到国家经济规模刺激了基于位值记数法的创建和规范化。

跳过其他有趣的发展，我们必须简要提到乔治·康托尔认为自己最杰出的成就：计算“无限”和发现无限增长级别的无限数量的无限比例尺。

他的中心论点在结构上与欧几里得证明无限质数的证明非常相似：如果我们有一个有限或无限集合  $X$ ，则所有子集  $P(X)$  的集合具有严格更大的基数。这是由康托尔著名的“对角线”推理所确定的。

康托尔的无限集理论对自然数的两个方面产生了难以置信的扩展：每个数字都测量“数量”，它们是由关系“ $x$  大于  $y$ ”排序的。无限分别是“基数”（无限量）和“序数”，它们是不断增长的无限有序轴上的点。

康托尔规模的奥秘导致了一系列未解决（在相当大程度上不可解决）的问题，并成为 20 世纪许多认识论和基础讨论的中心点。对他的心理构建的合法性的争议和激烈争论使他一生的最高成就也成为一系列神经崩溃和沮丧的根源，最终在第一次世界大战缓慢磨灭启蒙运动对理性信仰的最后残余时杀死了他。

**空间和时间。**人类的长度量度必须与地块相关，并由农业和建筑激发。一根带有两个刻痕的棒子或一条绳子可以用来从一个地方到另一个地方传输长度的测量值。

欧几里德的基本抽象概念：一个无限刚性和无限可分割的平面，具有平移和旋转的隐藏对称性群，其点没有大小，直线沿着两个方向不间断地延伸，完

美的圆和三角形，可能是古代测量学的一种精炼的心理形象。欧几里德的空间几何学可以说更接近可观察世界，值得注意的是，他系统地产生和研究了二维、一维和零维物体的抽象。

毕达哥拉斯定理与埃及建筑师的算术实践密切相关：公式  $3^2 + 4^2 = 5^2$  可以使用带有均匀距离结的绳子转化为生成直角的方案。

公元前 200 年左右，亚历山大的埃拉托斯特尼（Eratosthene of Alexandria）设计了一种方法，用于制作第一次真正大规模的科学长度测量，即地球的大小。他巧妙地利用了欧几里德几何的全部潜力。他观察到，在夏至日正午，位于锡纳的太阳恰好在天顶上，因为它照在一个深井里。同时，在亚历山大，太阳到天顶的距离是地球周长的五十分之一。他还使用了另外两个观测数据。首先，锡纳和亚历山大之间的距离被认为是 5000 个希腊体育场（这也是一种大规模的测量，可能是基于覆盖这段距离所需的时间）。其次，假设锡纳和亚历山大位于同一经线上。

埃拉托斯特尼的测量方法的剩余部分基于一个理论模型。假设地球是圆的，太阳距离地心具有本质上的无限远，因此从锡纳和亚历山大到太阳的视线是平行的。然后，在通过锡纳、亚历山大和太阳的地球和外层空间的截面上应用一个简单的欧几里德论证，可以显示出锡纳和亚历山大之间的距离必须是地球周长的五十分之一，从而给出后者的值为 250000 个体育场。（根据对希腊体育场的现代评估，这是一个相当不错的近似值。）

这个论证中暗含了欧几里德平面的扩展对称群，包括平移、旋转和重新调整比例尺：同时按照同一比例改变所有长度。这个想法的实际体现，即地图，对于许多人类活动，包括全球的地理发现，都至关重要。

细心的读者已经注意到，时间测量已经渗入了这个描述（基于 Cleomedes 的一本书，*De motu circulari corporum caelestium*，公元前一世纪中期）。实际上，我们怎么知道我们正在观察亚历山大和西乃这两地在相距 5000 斯塔德的同一时刻的太阳位置呢？

人类最早的时间测量与白天/黑夜的周期性循环以及太阳在天空中的大致位置有关。由 Cleomedes 和 Eratosthenes 提到的天文钟将时间测量转化为空间测量。

接下来的大规模时间测量与一年中的季节和社区所需的宗教活动的周期性有关。为了达到必要的精度，这里需要使用数学观测天文学。首先，它用于登记一年的周期性不规则性，基本上是地球在太阳系中的运动。这里使用的数学涉及基于插值方法的数值计算。

下一个大规模的测量是“历史时间”的年表。这被证明是一个相当不太数学化的尝试。

地质和进化时间将我们带回了科学领域：地球结构和生命的演化在高度数学化的物理时间的背景下得到了追踪；然而，变化是如此缓慢，证据如此分散，以至于测量的精度不再可得或必要。除了大量的观察数据、杰出的猜测和非常基本的附随推理之外，一小部分数学对于测定是至关重要的：放射性衰变留下衰变物质的残留物，其数量随时间呈指数衰减。这个想法的一个非常独特的版本被用于“语系年代学”：使用比较语言学的方法重建生活语言的原始状态的年代学。

当地质和进化时间首次被认识并进行科学阐述时，它所呈现的巨大挑战对（基督教）信仰的教条构成了巨大的不一致性：与从创造时期以来世界的假定年龄存在明显差异。

随着时钟的发明，小尺度的时间测量变得可能。日晷利用可见太阳运动的相对规律性并将白天分成较小的部分。水和沙漏测量固定的时间段。这利用了一些良好控制的物理过程的可重复性的想法。机械钟增加了人造周期性过程的构建。现代原子钟利用微观尺度上的自然周期性过程的微妙增强方法。

然而，时间仍然是一个谜。因为我们不能像在空间中那样自由地移动，我们被拖到谁知道哪里去了，奥古斯丁提醒我们这个永恒的、非科学的折磨：

“我知道我正在测量时间。但我不测量未来，因为它还没有来临；我不测量现在，因为它没有延长；我不测量过去，因为它已经不存在了。那么，我正在测量什么呢？”（《忏悔录》第 11 卷 XXVI.33）。

**机会、概率、金融。**在日常语言中，“机会”和“概率”的内涵与数学概率没有太多共同之处：有趣的是，[Cha]对几种古代和现代欧洲语言中相关词汇的语义进行了分析。基本上，它们调用了人类对不确定情况的信心（或不信心）的想法。

概率的测量和数学处理结果并不涉及信心本身，这是一个心理因素，而是涉及现实的客观数值特征，最初与计数密切相关。

如果一副牌有 52 张并且洗牌充分，抽到黑桃皇后的概率是  $1/52$ 。当人们开始计算各种组合（“好牌”）的概率时，基本但有趣的数学问题就出现了。这些计算隐含了对对称群的概念：我们不仅计算牌组中的数量，或者在所有可能

的情况下好牌的数量，而且假设如果游戏是公平的，每个可能性都是等概率的。

赌博数学是概率论的一个来源，另一个来源是银行、商业、税收等领域的统计学。各种事件发生的频率及其稳定性导致了经验概率的概念，并形成了“隐藏赌博”的相对明确的观念，即产生可观察频率的原因不可见，但具有足够的规律性以适应数学理论。现代概率空间的定义是对这种图像的公理化。

货币起初作为价值的度量单位，随着信贷作为银行体系的主要职能的确立，它对概率世界做出了重要的转变。

单词“信贷”的词源再次指向了人类信心的概念。根据玛丽·普维在《Po2》中的精辟分析，新兴的“金融文化”与“通过将劳动力转化为市场上定价和交换的产品来创造利润的生产经济”有着显著的不同之处。金融通过进行复杂的赌博（特别是“通过投注未来价格将上涨或下跌”，即通过纯粹的赌博）来创造利润。这种赌博的规模惊人，而金融文化中真实世界和虚拟世界的令人难以置信的混合是爆炸性的。

**信息与复杂性。**这是一个相当复杂和现代的测量范式。与“机会”和“概率”一样，信息量这个术语在二十世纪下半叶克劳德·香农（Shannon）和安德烈·科尔莫戈洛夫（Kolmogorov）的作品之后成为了重要的理论概念之一，但它的意义有些具有误导性。粗略地说，信息量只需用传达它所需的文本长度来衡量。

在日常用语中，这种度量似乎相当无关紧要，第一，并且令人迷惑，第二。我们需要知道信息是否重要和可靠：这些是定性而非定量特征。此外，重

要性是文化、科学或政治背景的一个函数。无论如何，仅仅通过纯粹的体积来衡量《战争与和平》的信息量似乎是荒谬的。

然而，如果我们处理的是不关心其内容或可靠性（但注意安全性）的信息，即媒体和通信行业的业务，那么信息量就变得至关重要。每天通过互联网、大众传媒和电话服务传输的文本总量是惊人的，远远超出了我们所谓的“人类尺度”的限制。

香农有关度量信息量的基本思想可以简要解释如下。首先想象一下，你要传输的信息仅仅是回答你通讯对象的一个问题，是“是”还是“不是”。对于这种情况，甚至不需要使用任何自然语言的单词：只需传输 1 表示“是”，0 表示“不是”。这是一个信息位。现在假设你要传输更复杂的数据，并需要一个包含  $N$  个比特的文本。那么你传输的信息量至少从上面受到  $N$  的限制，但你如何知道你不能使用更短的文本来完成同样的工作呢？事实上，存在压缩原始数据的系统化方法，并且它们是由香农明确提出的。其中最通用的方法是假定在你可能希望传输的文本池中，并不是所有的文本出现的概率都是相等的。在这种情况下，你可以改变编码方式，使得更有可能出现的文本获得比不太可能出现的文本更短的编码，从而在传输体积上节省，至少是平均而言。

下面是如何对自然语言文本进行编码。由于大约有 30 个字母， $2^5 = 32$ ，因此需要 5 个比特来编码每个字母，因此需要将比特长度约为 5 倍的字母长度的文本。但是一些字母在统计上比其他字母更常用，因此可以尝试使用更短的比特序列来编码它们。这导致了一个可以明确解决的优化问题，并且可以计算出平均压缩文本的长度。这本质上就是 Shannon 和 Kolmogorov 熵的定义。



利用统计测量的范式，Google 的创造者们为信息相关性数字化的问题找到了一个富有想象力的解决方案。粗略地说，搜索请求会让 Google 生成一个包含给定单词或表达式的网页列表。通常情况下，这样的网页数量非常庞大，必须按照重要性/相关性递减的顺序呈现。那么，Google 是如何计算这个顺序的呢？

每个网页都有指向其他网页的超文本链接。可以通过链接作为边将 Web 上的整个页面集合建模为一个有向图的顶点。初步可以假设，一个网页的重要性可以通过指向它的链接数来衡量。但是，这个假设可以通过指出所有链接并不相等来得到改进：来自重要页面的链接具有相对更大的权重，而来自链接到许多其他页面的页面的链接具有相对更小的权重。这导致了一个明显的循环定义（我们省略了一些细节）：每个网页将其重要性平均分配给其链接到的页面，每个网页的重要性是它从链接到它的所有页面那里获得的。然而，由 A. Markov 证明的一个经典定理表明，这个定义是明确的。现在，我们需要计算网页的重要性值，并将它们按递减顺序排列。

现在让我们回到 Shannon 的最优编码/解码过程。读者已经注意到了在传输中的经济性也是有代价的：信息的编码和解码都需要成本。如果我们允许更复杂的编码/解码过程以达到进一步的压缩程度会发生什么呢？

下面的隐喻可能有所帮助：源处的编码文本实质上是一个程序  $P$ ，用于在目标处获取解码文本  $Q$ 。现在让我们允许传输可以生成  $Q$  的任意程序；也许我们将能够选择最短的程序并节省资源。

由于 Kolmogorov 的一个显著结果是：这是一个明确定义的概念，最短程序  $P$  存在，并且它们的长度（ $Q$  的 Kolmogorov 复杂度）并不基本取决于编程方法。换句话说，存在一种完全客观的衡量给定文本  $Q$  中包含的信息量的方法。



然而，此处出现了一个不好的消息：a) 不能系统地重构 $P$ ，尽管已知 $Q$ （与 Shannon 熵的情况不同）；b) 即使已知 $P$ 并且长度很短，从 $P$ 中解码 $Q$ 可能需要很长时间。一个非常简单的例子：如果 $Q$ 是一个恰好由 $10^{10^{10}}$ 个1组成的序列，那么可以传输这个句子，让收件人费心将 $10^{10^{10}}$ 个1打印出来。

这意味着，Kolmogorov 的复杂性是美丽而高度复杂（尽管“基本”）的数学，它不是信息数量的实际衡量标准。然而，它可以用作一个强有力的隐喻，阐明现代信息社会的各种优点和缺点。

它使我们能够认识到科学（但也是日常生活）信息被编码的一种基本方式。基本的物理“自然定律”（牛顿的 $F = ma$ ，爱因斯坦的 $E = mc^2$ ，薛定谔方程等）是获得具体情况下相关信息的高度压缩的程序。它们的 Kolmogorov 复杂度显然是人类规模的，它们带有与其发现相关的人名，并且一个研究人员或学生的单个思维完全可以访问它们的全部信息内容。

现今，人类基因组计划等尝试为我们提供了大量的科学数据，这些数据在任何压缩形式下的容量都远远超出了任何单个人的能力。可以说，为了理解中枢神经系统（大脑）而创建的类似数据库将面临同样的挑战，其 Kolmogorov 复杂度与其容量大小相当。

因此，我们已经在研究那些具有比传统科学对象描述信息含量（Kolmogorov 复杂度）更高的材料世界领域。没有计算机，既不能实现观察数据的集体记忆，也不能实现它们的处理。

当总体上必要的新科学“知识”及其处理需要归属于大型计算机数据库和网络时，会发生什么呢？

### III. 数学科学与人类价值

#### III-1. 引言

谈论《林德纸草片段》（Rhind papyrus）——一本约于公元前 1700 年写成的埃及数学手册的片段，这本选集的编辑詹姆斯·R·纽曼 [WM]（1956 年出版的第一卷，第 178 页）写道：

“我认为，对埃及数学的正确评价取决于比埃及学家或科学史学家认识更广泛、更深刻的人类文化。至于埃及数学与巴比伦、美索不达米亚或希腊数学的比较，答案相对容易，但相对无关紧要。更重要的是要理解为什么埃及人产生了他们特定类型的数学，它在多大程度上提供了一种文化线索，它如何与他们的社会和政治制度、宗教信仰、经济实践、日常生活习惯相联系。只有从这些方面，才能公正地评判他们的数学。”

到了 1990 年，这成为了广泛接受的范式，而达布罗西奥（D'Ambrosio）为此创造了“民族数学”（Ethnomathematics）一词（参见[MAC]）。我们的拼贴画及其所属的整个项目，是从二十世纪下半叶的视角观察西方文化的民族数学的简要自我介绍。在

数学领域中最有趣的文化内部互动可能是那些不直接进行，而是通过价值体系的中介进行的。价值体系影响着每个领域的活动，实际上决定了它们的文化解释。相反，一个正在崛起的价值体系在一个文化活动的某一部分（例如科学活动）中开始了一种重新考虑其他活动的过程，它们的改革，有时会导致它们的消亡或彻底重塑。

这就是为什么在最后一节中，我简要涉及数学创造力背景下的人类价值观的原因。

### III-2. 理性

让我们再听一下 J·R·纽曼 ([WM]第一卷的导言) 的话：

“……我开始收集一些材料，希望能传达出数学的多样性、实用性和美感。”

该书[WM] “……将数学呈现为一种工具、一种语言和一张地图；作为一项艺术品和自身的终点；作为对完美追求的实现。它被看作是一个讽刺对象、一种幽默主题和一个有争议的来源；作为机智的刺激和讲故事想象的发酵剂；作为一种活动，它曾经让人类陷入疯狂并带给他们愉悦。从广义上来看，它是人类所创造的知识体系，但又独立于人类之外。”

在这个与数学相关的价值的私人和情感列表中，一个明显缺失的是理性。一个可能的解释是，在盎格鲁-撒克逊传统中，启蒙运动的这一基本价值被与经济行为联系起来，经常被狭义地解释为：理性的行为者是那些始终推动自身利益的人。

另一个解释是，理性并不真正令人愉悦：“我思故我在”是一个存在的证明，但它缺乏一个有生命的灵魂在不思考时所感受到的紧迫感。

然而，在文艺复兴时期的理性，即“自然渴望知识”（参见[Ce]），以及始终保持理性的驱动力是一种力量，如果没有它，数学在几个世纪中的存在，以及它在为社会的技术进步做出贡献方面的成功，将是不可能的。

### III-3. 真理

关于“数学中的真理”这个问题，人们阐述了广泛而复杂、微妙且相互矛盾的观点：详见最近的一篇综述文献[Tr]。在此，我只简单陈述一下，就价值论而言，不论其历史和哲学的背景是什么，这都是与数学相关的核心价值观之一。

当数学家开始工作时，权威、实用效率、竞争成功、信仰等等相互冲突的价值观必须在他们的心中退居二线。

### III-4. 行动与冥想

由于工作的性质，数学家比较倾向于冥想而非行动。

罗马人是出色的演员，同时也崇尚希腊文化，但他们却跳过了希腊数学。皇室美德清单上的勇气、荣誉、荣耀和服务并没有给几何留下多少空间。

这个传统延续了数个世纪，但像任何传统一样，也有激动人心的例外。在这篇论文中，我将以上个世纪的一位伟大数学家约翰·冯·诺依曼为例来结束。

约翰·冯·诺依曼生于 1903 年 12 月 28 日，出生于布达佩斯，于 1957 年 2 月 8 日在华盛顿特区去世。在这相对较短的一生中，他参与并做出了对集合论基础、量子统计力学和遍历论、博弈论作为经济行为范例、算子代数的理论、现代计算机结构、核弹制造的破裂原理等等的关键贡献。

以下是他思考和表达方式的两个示例，标志着他职业生涯的开始和结束。

**沉思：冯·诺伊曼宇宙。**在许多情况下，康托将集合描述为我们思想中任意不同元素的集合，这种描述太过宽泛。而冯·诺伊曼宇宙仅由其元素也是集合的集合组成。通过假设任何集合族  $X_i$ ，使得  $X_i$  是  $X_{i+1}$  的一个元素，则避免了潜在

的危险的自我指涉；最终集合，即所有集合中最小的集合是空集。因此，冯·诺伊曼宇宙诞生于“哲学真空”：它的第一个元素是 $\emptyset$ （空集）， $\{\emptyset\}$ （仅包含一个元素的单元素集合，该元素是空集）， $\{\emptyset\}$ ， $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ 等。吝啬的花括号取代了康托的“汇总为一个整体”，这个操作可以迭代重复，是唯一能从已构造的集合中生成新集合的操作。迭代可以是超限的，这也是康托的另一大发现。

很难想象有比这个安静而强大的层次结构更纯粹的沉思对象了。

**行动：广岛。**范·诺伊曼致 IBM 战争史部门 R.E.邓肯的信摘录，日期为 1947 年 12 月 18 日（[Neu，第 111-112 页]）：

“亲爱的邓肯先生，在回复您 12 月 16 日的来信时，我可以告诉您以下几件事情：我在战争期间开始并进行了斜激波反射方面的研究。这导致了一个结论，即大型炸弹最好在相当高的高度引爆，而不是在地面上，因为这会导致更高的斜入射压力。[...]

我确实获得了功勋奖章（1946 年 10 月）和杰出服务奖（1946 年 7 月）。

附言如下：“

附言：颁发功勋奖章证书

给

约翰·冯·诺伊曼博士

约翰·冯·诺伊曼博士在 1942 年 7 月 9 日至 1945 年 8 月 31 日期间对美国作出了杰出贡献。冯·诺伊曼博士以其杰出的职责尽责、技术领导、不懈的合作精神和持续的热情，主要负责美国海军对高爆炸药有效使用的基础研究，这导致

了一个新的攻击原则的发现，并已被证明在针对日本的原子弹攻击中提高了空中力量的效率。他的贡献对美国的战争努力价值不可估量。

哈里·S·杜鲁门”

[...]

## 参考文献

- [At] M. Atiyah. Geometry and Physics of the 20th Century. In: [GeoXX], pp. 4-9.
- [B-BH]B. Booß-Bavnbek, J. Шыгир. Introduction. In: [MW], pp. 1-19.
- [Bour] N. Bourbaki. Elements of the History of Mathematics. Springer-Verlag, Heidelberg, 1994.
- [CaBa] M. Li Calzi, A. Basile. Economists and Mathematics from 14a4 t° 1969. Beyond the Art of Accounting. In: [MC], pp. 95-107.
- [Ce] F. Cesi. Il natural desiderio di sapere. The Pontifical Academy of Sciences, Vatican, 2003.
- [Cha] Yu. V. Chaikovski. What is probability? (Evolution of the notion from antiquity to Poisson). In: Istoriko-Matematicheskie Issledovaniya (Studies in the History of Mathematics), ser. 2, 6(41), Moscow 2001, pp. 34-56. (Russian)
- [Che] K. Chemla. History of Mathematics in China: A Factor in World History and a Source for New Questions. In: Proceedings Intern. Congress of Mathematicians, Berlin 1998, vol. III, pp. 789-798. Documenta Mathematica, Bielefeld, 1998.
- [CVS] The Cultural Values of Science. Proceedings of the plenary session of the Pontifical Academy of Sciences, Nov. 8-11 2002. Vatican, 2003.
- [DaOl] H. G. Dales, G. Oliveri. Truth and the foundations of mathematics. An introduction. In: [Tr], pp. 1-37.
- [DH] P. Davis, R. Hersh. The Mathematical Experience. Birkhauser, Boston, 1980. H. M.
- [Ens] Enszenberger. Drawbridge Up. Mathematics—a Cultural Anathema. A. K. Peters, Natick, Mass., 1999.
- [GeoXX] Geometrie au XXe Steele. Histoire et Horizons. J. Kouneiher, D. Flament, Ph. Nabon-nand, J.-J. Szczeciniarz (eds.) Hermann, Paris, 2005.
- [KGSIPW] V. Keilis-Borok, D. Gascon, A. Soloviev, M. Intriligator, R. Pichardo, F. Winberg. On the predictability of crime waves in megacities - extended summary. In: [CVS], pp. 221-229. I.
- [KoMa] Yu. Kobzarev, Yu. I. Manin. Elementary Particles. Mathematics, Physics and Philosophy. Kluwer, Dordrecht, 1989.
- [MAC] Mathematics Across Cultures. The history of Non-Western Mathematics. H. Selin (ed.), Kluwer, Dordrecht, 2000.
- [Macr] N. Macrae. John von Neumann. Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1999.

- [Man1] Yu. Manin. Truth, rigor and common sense. In: [Tr], pp. 147-159.
- [Man2] Yu. Manin. Mathematics as metaphor. In: Proc. International Congress of Mathematicians (Kyoto 1990), vol. II, Math. Soc. of Japan, Tokyo, 1991, pp. 1665-1671.
- [Man3] Yu. Manin. Georg Cantor and his heritage. In: Algebraic Geometry: Methods, Relations, and Applications: Collected papers dedicated to the memory of Andrei Nikolae-vich Tyurin. Proc. Steklov Inst. Math. vol. 246, MAIK Nauka/Interperiodica, Moscow, 2004, pp. 195-203. Preprint math.AG/0209244.
- [MandHu] B. Mandelbrot, R. Hudson. The (Mis) behaviour of Markets. Profile, 2005. 328 pp.
- [MC] Mathematics and Culture I. Ed. by M. Emmer. Springer 2004.
- [Mul] D. Mumford. The dawning of the age of stochasticity. In: Mathematics: Frontiers and Perspectives, ed. by V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur. AMS, 2000, pp. 197-218.
- [Mu2] D. Mumford. Pattern Theory: the Mathematics of Perception. In: Proceedings of the Int. Congr. of Mathematicians, Beijing 2002, vol. I, pp. 401-422. Higher Education Press, Beijing, 2002.
- [MW] Mathematics and War. Ed. by B. Booß-Bavnbek, J. Hoyrup. Birkhauser Verlag, Basel, 2003.
- [Neu] J. von Neumann. Selected Letters, ed. by M. Redei. History of Math., vol 27, AMS and London MS, 2005.
- [New] J. R. Newman. The Rhind Papyrus. In: [WM], vol. 1, pp. 170 - 178.
- [N0] T. Norretranders. The User Illusion: Cutting Consciousness Down to Size. Penguin, 1998.
- [PI] Plato. Republic, Book VII. 522d, 525c, 526 b-d .
- [Po1] M. Poovey. A History of the Modern Fact. Problem of Knowledge in the Sciences of Wealth and Society. The University of Chicago Press, 1998.
- [Po2] M. Poovey. Can numbers ensure honesty? Unrealistic expectations and the US accounting scandal. Notices Amer. Math. Soc, vol. 50:1, Jan. 2003, pp. 27-35.
- [Qu] Anjing Qu. The third approach to the history of mathematics in China. In: Proceedings of the Int. Congr. of Mathematicians, Beijing 2002, vol. III, pp. 947-958. Higher Education Press, Beijing, 2002.
- [Sci] Bourbaki. Une societe secrete de mathematiens. Pour la Science, No 2, 2000; English Transl., Amer. Math. Soc, Providence, RI, 2006.
- [S-S] R. Siegmund-Schultze. Military Work in Mathematics 1914-19J.5: an Attempt at an International Perspective. In: [MW], pp. 23-82.
- [Sol] R. Solow. How did economics get that way and what way did it get? Daedalus, Fall 2005, pp. 87-100.
- [So] S. Sontag. Illness as Metaphor, and AIDS and its Metaphors. Picador; Farrar, Strauss and Giroux, NY 1990.
- [Tr] Truth in Mathematics. Ed. by H. G. Dales and G. Oliveri. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [Tu] H. W. Turnbull. The great mathematicians. In: [WM], vol. 1, pp. 75-168.

[WM] The World of Mathematics. A small library of the literature of mathematics from A'h-mose the Scribe to Albert Einstein, presented with commentaries and notes by James R. Newman. Vols 1-3. Simon and Schuster, New York, 1956.



## 数学之为隐喻

---

"秩序[ORDRE]。[...] 我有点了解它，知道多少人能够理解它的少之又少。任何人类的知识都无法将其保留。圣托马斯也无法保留它。数学能够保留它，但是在其深度上它是无用的。"

-- 帕斯卡，《思想录》

### 引言

当庞加莱在 1902 年出版他的书《科学与假设》时，它成为了一本畅销书。这本书的第一章专门讨论了数学推理的本质。庞加莱讨论了一个古老的哲学争论，即数学知识是否可以归结为一些基本的（“综合的”）真理的长链 tautological transformations，还是包含了更多的东西。他认为，数学的创造力归功于初始假设-定义的自由选择，这些假设-定义后来被与可观察世界的推导相比较所约束。

我们现在的社会似乎对哲学的微妙之处不如庞加莱的同时代人感兴趣。我并不是说科学本身变得不受欢迎了。像 S. Weinberg 的《前三分钟》和 S. W. Hawking 的《时间简史》这样的书籍以数十万册的销量出售，并在广泛分布的报纸上得到了好评。改变的是一般的情绪。新物理理论的悖论性感知变得不那么戏剧化，而更多地变得实用。（我们可以注意到，视觉艺术的感知方式以类似的方式发展：如果印象派的第一次展览是一种精神上的革命，那么战后前卫艺术的每一波新潮都立刻获得了学术主义的家族特征。）

在这种氛围下，过去的有关数学基础危机和无限的本质的激烈讨论似乎几乎无关紧要，甚至不合适。观众对学校教育或新一代计算机的意见反应更加活跃。

这就是为什么我决定在本节中呈现一篇谦逊的文章，其中我们的科学被视为自然语言的专业方言，其功能被视为言语的一个特殊情况。这意味着对高中和大学培训的某些建议。

## 隐喻论

这里使用的“隐喻”一词是非技术性意义上的，最好用詹姆斯·卡斯(James P. Carse)的书《有限与无限的游戏》中的以下引语来表达：

“隐喻是将相似的东西连接在一起，以使其中一个永远无法成为另一个。”

“从根本上讲，所有语言都具有隐喻的特性，因为无论其意图如何，它仍然是语言，并且与其所涉及的东西绝对不同。”

“自然的无法言说性是语言的可能性。”

将数学视为一种隐喻，我想强调解释数学知识是一种高度创造性的行为。在某种程度上，数学是一本关于自然和人类的小说。我们无法精确地告诉数学教给我们什么，就像我们无法确定《战争与和平》教给我们什么一样。教学本身在重新思考这种教学的过程中被淹没了。

这种观点似乎与应用数学在科学和技术计算中的历史传统相矛盾。实际上，我只是想恢复数学技术和人道主义两个方面之间的某种平衡。

## 两个例子

让我试图通过讨论两个不相关的主题：Kolmogorov 复杂度和 K. Arrow 的“独裁定理”来说明数学的隐喻潜力。

i) 自然数  $N$  的 Kolmogorov 复杂度是可以生成  $N$  的最短程序  $P$  的长度，或者  $N$  的最短编码的长度。读者应该想象一种编码整数的方式，它是一个取自然值的部分递归函数  $f(P)$ 。Kolmogorov 定理声明，在所有这样的函数中，存在最经济实惠的函数，即如果  $C_f(N)$  是使  $f(P) = N$  的  $P$  的最小值，则

$$C_f(N) \leq \text{const } C_g(N),$$

其中  $\text{const}$  仅依赖于  $f$ ， $g$  但不依赖于  $N$ 。

由于  $P$  可以从其二进制表示重构，因此生成  $N$  的最短程序的长度  $K$  受到  $\log_2 C_f(N)$  的限制。该函数或者说定义为有界求和的所有这种函数的类是 Kolmogorov 复杂度。

首先， $K(N) \leq \log N + \text{const}$ 。当然，这与位值符号系统的历史成功非常吻合，该系统为我们提供了对数长度的数字生成程序。但是，存在任意大的整数，其 Kolmogorov 复杂度要比其十进制或二进制表示的长度小得多，例如， $K(10^{10^N}) < K(N) + \text{const}$ 。通常情况下，当我们使用大数时，似乎仅使用具有相对较小的 Kolmogorov 复杂度的数。即使是  $\pi$  的小数部分，可能是数学家们制作的最长的显式数字，也很简单，因为  $K([10^N \pi]) < \log N + \text{const}$ 。总的来说，Kolmogorov 复杂度越小，组织程度越高。

另一方面，几乎所有整数  $N$  的复杂度都接近于  $\log N$ 。例如，如果对于最优的  $f$ ， $f(P) = N$ ，则  $K(P)$  相当于  $\log P$ 。这些整数具有许多显著的性质，我们通常将其与“随机性”联系在一起。

其次，Kolmogorov 复杂度可以很容易地定义为不是数字的离散对象，例如俄语或英语文本。因此，《战争与和平》具有相当明确定义的复杂度度量；不

确定性与最优编码的选择有关，并且如果选择一种合理编码中的一种，则似乎相当小。

从这个观点来看，是《战争与和平》一个高度组织化的对象，还是一个几乎随机的组合对象？

第三，Kolmogorov 复杂度是一个非可计算函数。更准确地说，如果  $f$  是最优的，则不存在一个递归函数  $G(N)$ ，它与  $K(N)$  相差  $O(1)$ 。我们只能通过可计算函数来限制复杂度。

我认为在讨论人类知识本质的任何讨论中，Kolmogorov 复杂度是一个非常重要的概念，值得牢记。

只要我们的知识内容以符号形式表达（语言、数字等），就会有物理限制，限制信息的容量和处理能力。我们总是依赖于各种信息压缩方法。

Kolmogorov 复杂度对这种压缩的效率施加了绝对限制。当我们谈论物理定律，例如运动方程，我们意味着通过将这些定律翻译成计算机程序，可以精确描述物理系统的行为。但我们能够发现和使用的定律复杂度显然是有限的。我们能否确定没有任何高度复杂的定律支配着“基本”系统？

在这一点上，我们的讨论完全脱离数学，对于数学思维的听众，我必须在这里停下来。但这就是任何隐喻的命运。

ii) Arrow 独裁定理是在 1950 年左右发现的。从数学上讲，它是一种描述具有二元关系值的某些函数的组合语句。直观上，它是对社会选择问题的问题进行形式化讨论。假设一个立法者必须制定一项法律，以管理选民的个人意愿如何转化为集体决策。如果选民被要求在两个选项中选择一个，标准解决方案是按照多数票进行投票。然而，通常有多于两个的选择（想象一下基金分配问

题)，并且选民可能被要求按照他们的喜好进行排序。从任何一组个人偏好中提取集体偏好的算法应该是什么？箭头认为满足一些自然和民主的公理的算法是可以接受的（例如，当多数人更喜欢 A 而不是 B 时，社会更喜欢 A 而不是 B）。然而，他发现当有多于两个的选择时，实现解决方案的唯一方法是指定社会的一位成员（“独裁者”），在不确定的情况下将他的个人偏好顺序与社会偏好顺序等同起来。（实际上，这是后来发现的 Arrow 定理的一个版本之一。此外，它涉及到有限社会的情况；在无限情况下，社会决策可以由超滤器适当地称为“统治阶层”来做出。）

从某种意义上说，这个定理说明了让-雅克·卢梭的社会契约思想的内容。

理想民主选择的图像存在根本内在的不一致性，以下故事可以说明这一点。故事讲述了三选和三种选择。这是关于三位骑士在十字路口的故事，面前有一块石头。石头上的铭文预言只有损失：向左走的人会失去剑，向右走的人会失去马，向前走的人会失去头。骑士们下马开始商议。在这个故事的俄罗斯版本中，骑士们有名字和个性：最年轻和热情的是阿廖莎·波波维奇，最年长和最聪明的是多布里尼亚·尼基提奇，而缓慢的农民伊利亚·穆罗梅茨。所以阿廖莎认为剑比马更重要，马比头更重要；多布里尼亚最看重他的头，其次是他的剑，再其次是他的马；而伊利亚则更喜欢他的马胜过头和剑。

读者会注意到，这三个人的个人偏好顺序构成了相同的循环顺序。因此，人们可以通过多数决定在任何两种选择之间的选择，但这些决定的联合将是不一致的：民主程序不能为我们提供一个有序的列表。骑士们叹了口气，把决策权委托给了多布里尼亚。

Arrow 定理告诉我们一些事情，这些事情我们之前并不知道吗？是的，我认为如果我们准备认真讨论它，那么它会告诉我们一些之前不知道的东西。也就是说，我们要仔细研究组合证明，想象各种假设和基本逻辑步骤在现实生活中的可能内容，总之，通过数学推理的严格逻辑来增强我们模糊的想象力。例如，我们可以更好地理解一些政策制定的技巧和社会可能会全心全意接受的一些陷阱（例如，毫不怀疑地接受一个由统治阶层强加的备选名单，尽管编制这个名单恰恰可以成为社会决策的核心问题）。

在这个阶段，我们来到了我们讨论的主要话题：数学话语与自然语言话语的区别，为什么帕斯卡的“秩序”统治了我们的专业符号活动，它在其深度上是否真的“无用”？

## 语言与数学

大约三十年前，数学和人文学科之间非常有趣的互动章节开始了，当时人们首次尝试进行自动翻译。这些最初的尝试是痛苦的失败，至少对于许多乐观主义者来说是如此。他们相信在这个领域中，没有根本性的障碍，只剩下克服与需要处理的大量信息相关的技术困难。换句话说，他们默认翻译原则上是由一个不太复杂的算法执行的，只需将其明确化，然后实现为计算机程序即可。

这种假设是数学隐喻的一个很好的例子（实际上，是大脑科学中使用的一种特殊化的“计算机隐喻”）。

这个隐喻对于整个理论语言学都证明了非常有成效，因为它迫使语言学家开始以前所未有的明确度和完整度描述人类语言的词汇、语义、屈折和句法。一些全新的概念和工具由此而发现。

然而，自动翻译本身的成功仍然很少（并且仍然如此）。很明显，书面人类语言是任何算法处理计划（无论是翻译还是逻辑推理）的极差的输入数据。

（我添加这个限定词，因为人类言语作为一种材料，例如用于统计学研究，没有什么特别之处。）

这个事实可以被认为是人类语言的普遍特性，并且值得一些关注。首先，我们必须拒绝一个通常的解释，即人类语言的意义宇宙太广泛、结构不好，无法容纳描述这个世界的良好组织的元语言，这种解释过于天真。问题在于，即使我们严格将这个宇宙限制在小整数量的算术子集上，我们仍将面临同样的困难。实际上，这个困难是算术符号系统和基本的计算算法，以及后来的符号代数系统形成的决定性原因。即使是人类语言中基本的算术词汇也基本上是过时的：原始社会的有限自然数系列“一、二、三、无限多”在我们的“千、万、亿、极大数”指数尺度中得到复制。像“1989”这样相对较小的数字的表达实际上是十进制符号的名称，而不是数字本身的名称。

F·维埃特的代数之所以优于丢番图斯的半语言代数，不是因为它能表达新的意义，而是因为它对算法处理的敏感度更高（我们高中代数的“相同变形”）。

科学语言的直观和情感联系的断裂被新的计算自动化所弥补。在它们（尽管受限）的领域内，它们被证明比日常语言话语的传统柏拉图式和亚里士多德式文化要高效得多。那么为什么我们的科学论文仍然写成词语和公式的无组织混合？部分原因是因为我们仍然需要那些情感联系；部分原因是因为有些意义（比如人类价值）最好用人类语言表达。但即使作为科学演讲的媒介，人类语言也具有一些固有的优势：它能够吸引空间和质量的想象力，有助于理解“结



构稳定”的属性，如自由参数的数量（维度）、极值的存在、对称性。坦率地说，它使科学的隐喻使用成为可能。

## 隐喻与证明

这里表达的观点可以与高中和大学课程相关联。

上个世纪上半叶的一般数学教育是应用导向的，它为实际生活问题提供了基本的最低限度，并使学生能够顺利过渡到大学水平的工程和科学计算学习。这种课程与职业数学家的活动越来越脱节。众所周知，这引起了反应，如美国的 NewMath 和其他国家的类似计划。这些计划引入了从专业人士借鉴的概念和原则，例如集合论、证明的公理演示和严格的定义文化。

NewMath 得到了广泛接受，但其扩展也伴随着抗议声音，这些声音在 70 年代和 80 年代融合成了一片响亮的合唱。批评者不同意 NewMath 支持者的基本论点。抛开基于认知科学和学习心理学数据的反对意见，我只会提到关于证明在数学中作用的一般评价的异议。

一个极点由 Nicolas Bourbaki 著名的声明代表：“自从古希腊时期以来，数学就意味着证明。”根据这种看法，在新数学课程中，严格的证明成为了一个原则问题。有人认为：a)证明有助于理解数学事实；b)严格的证明是现代专业数学最基本的组成部分；c)数学具有普遍公认的严谨标准。

这些观点受到了广泛批评，例如 Gila Hanna 在《Rigorous Proof in Mathematics Education》一书中指出，数学家并不一致地接受严谨标准（指逻辑主义、形式主义和直觉主义之间的争论），而且工作中的数学家经常打破书中的所有规则。

在我看来，这是不相关的。



相关的是，强调证明所产生的各种基本价值之间的不平衡。证明本身是“真理”概念的派生物。除了真理之外，还有许多价值观，其中包括“活动”、“美”和“理解”，这些价值在高中教学和以后都是必不可少的。忽略这些价值，教师（或大学教授）将会失败。不幸的是，这也不是普遍公认的。对 Rene Thorn 的“灾变理论”争议的社会学分析恰恰表明，从形式真理转向理解所引发的批评是如此尖锐。但当然，灾变理论是发展起来的数学隐喻之一，应该仅仅作为这样的隐喻来评判。

从教学角度来看，证明只是数学文本中的一种类型。有许多不同的类型：计算、注释草图、计算机程序、算法语言描述，以及被忽视的一种类型——关于形式定义和直观概念之间联系的讨论。每种类型都有其自己的规律，特别是严谨性的规律，只是因为没有被特别关注，所以没有被编码。

教师面临的一个核心问题是在其课程的受限领域内展示不同类型的数学活动和基础的价值取向。当然，这种多样性是按等级组织的。目标可能从实现基本的算术和逻辑素养，到编程技能，从最简单的日常问题到现代科学思维原则。在这些目标的光谱中，“严谨证明”的规范强调可以安全地占据一个边缘位置。

但是，我必须强调的是，我的论证绝不会削弱严谨数学推理的理想。这个理想是数学的一个基本构成原则，在这个意义上，布尔巴基显然是正确的。数学没有外部的研究对象，是基于一个有限圈子的信仰的共识，没有严格规则的持续控制，它就不能发展。数学在严格意义上的适用性（如在阿波罗计划中的不可或缺性）归功于我们能够控制一系列极其复杂的符号操作。这个理想的存在比其不可实现性更为重要。数学的自由（G. Cantor）只能在铁一般的必要性

的限制下发展。现代计算机的硬件是这种必要性的体现。隐喻有助于人类在这个高贵的空气中呼吸。

## 真理、严谨和常识

---

### 0. 前言

我认为，在 1995 年讨论数学真理的本质的主要困难在于，自三十年代初哥德尔的成果以来，没有获得新的洞见。

为了避免重复和活跃讨论，可以尝试将问题放在更广泛的背景下，并添加个人观点。这两种解决方案倾向于将读者的注意力转移到模糊相关的主题上，我为选择这些可疑的策略而表示歉意。

本文分为三个部分：a) 对数学历史的思考，将其视为符号（或半符号）游戏的一种类型；b) 在当代研究的背景下讨论真理和证明（重点是由 A.Jaffe 和 F.Quinn [JQ]的一封信引起的最近争议）；c) 三个案例研究的材料（理解为感兴趣的读者将进行研究）。

在这次讲话中，我们采取了一种非常朴素的哲学背景。朴素地说，真实的陈述是一种可以提交验证并通过测试的陈述。验证是一种涉及将陈述与现实进行比较的过程，即涉及意义的概念。（这同样适用于验证被跳过的“明显”陈述。）所涉及的现实可以是任何一种心理构造，从自由落体物体到无限基数。我们将不谈如何验证关于无限基数的陈述的问题，这个问题肯定会被其他演讲者讨论。

陈述本身是一种语言构造。因此，在提交验证程序之前，它必须首先在语法上正确，在意义上有意义。逻辑教我们，某些形式结构在应用于真实的陈述时会产生真实的陈述（三段论是最早的例子）。数学递归地使用这种结构。与

现实的所有比较都被归类为与应用程序和可能的基础研究相遇的相对稀少的情况。数学知识的主体看起来像一个严格规则的广阔心理游戏。

我们也可以思考将真理概念应用于像小说、科学理论或神学教义这样的实体。语法正确性、意义、现实和验证程序的概念获得了新的维度，但似乎没有失去其启发性价值。一个新现象是所谓的非局部性：理论的意义和真实性不完全驻留在其组成陈述中，而是在整个教义体系中。

上述所有常识观念都在许多哲学作品中接受了精细的理论分析。其中包括现实的概念，也受到了彻底的批判，以至于它们被完全摧毁。一个相关的例子是理论验证的概念：有人认为理论永远不能被验证，只能被证伪。接下来，我将尝试保持常识，并避免极端的观点。即使在最狂野的解构中，也会有一些真理，但是这些攻击的弱点通常很快就会显露出来，因为我们开始按照它们自己的标准进行评判。

## 1. 历史上的数学真理

现代数学真理的概念可以追溯到古希腊。正如布尔巴基简明地表达：“自从希腊人以来，数学就意味着证明。”

证明是至关重要的，这被理解为一系列组织良好、连贯而标准的步骤，而不是一种物理上的展示行为，这与“证明”这个词的词源相反。

这意味着，现代数学是一种基于语言、符号和符号操作的本质上的语言活动，即使涉及几何、物理等实际情况也是如此。在建立一个陈述所宣称的证明时，论证的一致性、避免矛盾和可怕的间隙扮演着重要的角色。严格来说，陈

述  $S$  的证明/证明所基于的假设  $P$  的地位在数学中不需要讨论，数学主要负责推理的结构。

这种理想化的形象有着悠久的前历史，我们将试图简要回顾一些原始数学行为的模式。

早期人类集体的经济和军事生活与会计和追踪食物资源、部落规模、季节等有关。我们所知道的基本算术只逐渐地成为支持这些活动的语言的子方言。

然而，自然语言的主要（并且在千年中唯一）存在形式是口头语言，基本算术的口头和书面语言必须缓慢地从许多原始形式中结晶出来，包括用手指和其他身体部位进行计数、收集石头和棍子、打结等。（现在这个过程正在逆转，因为我们观察到电子算术正在取代书面算术。）

如果数学家倾向于强调所有描述自然数和它们的运算的实现之间的“同构”，那么他必须理解这是一个可怕的现代化。

从古典的索绪尔二元论语言（作为系统）与言语（作为活动）的角度来看，我们观察到从“言语”中缓慢而艰难地出现“语言”，后者涉及将事物和身体部位直接操纵为其他事物的符号。无论将什么样的真理概念读入这样的活动中，最终都必须成为支持社会行为效率的功能。交换和贸易是明显的例子。正确的计数意味着只有交流和有利可图的贸易，简单而纯粹。

然而，这并不是整个故事。重要的是要意识到，不仅物质上有益，几乎任何形式的有组织行为都可以对人类个体或群体具有特殊意义。这使得原始的算术与仪式、音乐、舞蹈和各种魔法并列。这种将数学视为魔法形式的不加区分的感知在历史上被晚期记录下来。预测日食或不确定情况的结果的人不一定是智者，而更适合被称为通过操纵它们的符号表示使事情发生的骗子。

许多哲学家试图消除将数学视为主要是智力活动的形象。例如，A.叔本华在现代机构化数学的日子里就写道：“Rechnungen haben bloß Werth für die Praxis, nicht für die Theorie. Sogar kann man sagen: wo das Rechnen anfangt, hört das Verstehen auf。”（“计算仅对实践有价值，对理论没有价值。甚至可以说：计算开始的地方，理解停止。”）

引用这一点，S. Hildebrandt ([Hi, p. 13]) 继续说：“Anbetroffenen lesen es staunend und denken sich, daß Schopenhauer schwerlich einen Blick in die Arbeiten von Euler, Lagrange oder Gauß getan haben kann。”（“受影响的人惊讶地阅读这个观点，并认为叔本华很难看到欧拉、拉格朗日或高斯的工作。”）

然而，如果字面上理解，叔本华是正确的。计算不仅暂时中断思考，而且计算行为的最终正当化是通过一种虚拟的机械插曲来取代思考行为（或其阶段），以支持下一步更高水平的能力。如果思考是一种内化和试探性的行为，那么计算是一种外化的思考，现代计算机所实现的可能的的外化程度是惊人的。

同样地，在前一时期的生物进化过程中，意识思维的出现旨在停止本能行为，并将其替换为计划行为。动物的大脑计算以保持动物的生命和运动，奔跑、飞行、视觉、听觉。人类的大脑也是如此，这种活动是（非弗洛伊德主义的）个体潜意识的主要内容，必须不允许任何意识的干预，以免破坏相关计算的复杂架构。否则，就无法确保正确的（生物学上最优的）结果。

语言和意识的到来在某种意义上使人类大脑将这种无意识计算提升到常识思考和后来的理论思考的水平。付出的代价是行动的自发性减少，以及个体和集体行为模式越来越少的生物学模式的出现。简而言之，文明得以实现。

这种行动/思考/计算的互补性倾向于在不同的层次上复制。

计算机信息处理系统中的思想异化是（非荣格派的）集体无意识的怪诞物化。它失控的状态是我们社会的一场反复出现的噩梦，也是其高效运转的条件。

现代数学的抽象性不是其认识论特征，而是心理事实，支持我们的隐喻。如果我们想让数学发挥其功能，我们必须保持我们日常思维习惯与数学反思规范之间的巨大鸿沟。

本世纪几十年来持续的有关数学基础的激烈争论没有解决任何正在讨论的认识论问题。让我提醒一下，Cantor 的无限理论是争议的中心和批评对象。

Cantor 对 20 世纪数学的巨大贡献是双重的。首先，他引入了一种极其经济和通用的集合语言，随后证明它能够容纳所有实际和潜在的数学构造的语义。这是逐渐被理解的，而且直到本世纪中期才完全实现。我所说的是一种布尔巴基的图像：每一个数学或甚至是元数学的概念，例如概率、Frobenius 态射或演绎规则，都是一种从最初的集合开始，通过少量原始操作递归产生的结构的实例。数学本身的形式语言就是这样的结构。（有时，如在范畴论构造中，允许使用类而不是集合，但从我在此提倡的观点来看，这是一个次要的区别。）

我相信，当 Hilbert 预言“Cantor 的天堂”时，他心中有这样一个宏伟的图景。

但是，Cantor 对无限的秩序进行了一些深刻而非传统的数学推理，引发了长时间而激烈的争论。现在看来，他发现了可能是最简单的、最自然的不可判定问题，连续体假设（CH）。（关于在这个背景下不可判定性的意义的深入讨论，请参见[p. 162][G]。）

无结构无限集合的严峻和贫瘠的世界无疑有其自己的魔力，对这个世界的反思反过来吸引和排斥了几十年来有哲学头脑的数学家和有数学头脑的哲学家。科恩对 CH 否定的一致性的著名证明，完成了哥德尔早期证明 CH 本身一致性的工作，正是在无限奥秘的魅力已经减弱的时候出现的，因为此时集合语言已成为几乎所有数学讨论的语言。

重新思考这些旧论点，回忆直觉主义和构造主义的诞生，我惊讶于康托尔的一些批评者的完全古典思维方式。讨论的相当一部分集中在无限集的思考原则上。选择公理被认为基本上是从一堆对象中随机挑选个体的平凡经验的疯狂扩展。这种涉及无限选择的行为引起了构造主义者和直觉主义者对这种画面的深刻情感反感（在后来的 Essenin-Volpin 颓废、超直觉主义的世界中，甚至想象有限而相当小的事物集合也变得难以忍受）。

当然，区别明显且不变的对象集合的想法属于外行人的物理学。许多伟大的基础剧情演员似乎相信集合论的公理化必须被理解为这种幼稚的物理学的直接扩展。

即使是小量量子对象的行为也完全不同的事实从未被考虑过。（可能不应该。）工作数学家（实数、复数、算子谱等）的工作无限有效地用于理解现实世界的事实被认为与基础无关。（它可能是。）

无论如何，对于康托尔的论点的不安使 Hubert 开始深入研究数学语言的语法（与这种语言的语义相对），为 Tarski、Church、Godel 铺平了道路（并促使哲学陈词滥调如 Carnap 将数学视为“没有对象和内容的辅助语句系统”，参见 [G, 第 335 页]）。



这些研究教给我们的是形式推导结构、它们天真（或形式）的集合论模型以及相关数学真理的（不）可解性和（不）可表达性之间高度技术化的关系图景。哥德尔工作的简化（“粗略化”）很少能够传达这个图景的复杂性，因为它们无法传达其数学（而非认识论）背景的丰富性。

正是这种丰富性最让我们着迷。

## 2. 数学家的真理

在前一节开头引用的布尔巴基格言并不意味着两千年来对什么构成证明达成了共识。此外，A. Weil 在 1954 年阿姆斯特丹国际数学大会上的讲话中引用的以下话语给人留下了一个印象，即“严格”的证明概念是相当近期的，甚至可能归功于布尔巴基本人的努力。“严格已经不再被认为是一种笨重的正式着装，人们必须在国家场合穿着它，并在回家时松了一口气才能抛弃它。我们不再问一个定理是否已被严格证明，而是问它是否已被证明。”（[W, p.180]）。

但是，这似乎只是一厢情愿的想法。在数学家个人心理发展和数学的社会历史中，构成证明的理解和其作用的感知都发生了很大变化。

下面我收集了一些最近活跃的数学家的意见样本（A-F），摘自[JQ]和[R]。敦促读者阅读整个讨论；它非常有教育意义。它是由 A. Jaffe 和 F. Quinn 的信件“理论数学：迈向数学和理论物理的文化综合”（[JQ]）引发的。作者们对与数学物理相接壤的非常活跃的数学领域的局部情况感到担忧。他们认为物理推理的标准（远低于数学）倾向于不利地影响当今数学研究的标准。同时，他们完全认识到交叉授粉的价值，并建议对所有参与者施加一些行为规

则，特别是分配信用的规则。（在当前情况下，标题中的“理论”一词的用法不是很幸福，因为作者们所指的是受过教育的推测、示例和计算机输出的混合物，而不是带有自豪量词的定理）。

A. “当我在伯克利开始读研究生时，我很难想象我如何可以“证明”一个新的有趣的数学定理。我真的不理解什么是“证明”。

通过参加研讨会、阅读论文和与其他研究生交谈，我逐渐开始明白了。在任何领域内，都有一些定理和技术是普遍知晓和普遍接受的。当你写一篇论文时，你引用这些而不需要证明。你看其他领域的论文，看他们引用哪些无需证明的事实，以及他们在参考文献中引用了哪些内容。你从其他人那里学到他们证明的一些想法。然后你就可以自由地引用同样的定理并引用同样的引文。你不一定要阅读你的参考书目中的全部论文或书籍。

许多普遍知道的事情是没有已知书面来源的。只要领域内的人们认为一个想法可行，它就不需要有正式的书面来源。”（W. Thurston, 1983 年菲尔兹奖, [R, p.168]。Thurston 雄辩地论证了证明的主要目标是理解和沟通，最有效的方式是通过个人联系实现。他的对手特别注意到，跨代联系只能通过具有足够精度的书面文本实现，并且意大利代数几何的命运应该作为一个警示。）

B. “我们必须仔细区分包含数学推测的现代论文和一百年前发表的论文。这些论文在严谨性方面可能今天看来存在缺陷，但是它们在当时的标准下是完全严谨的。波安卡雷在他的《分析拓扑》中尽可能地严谨，当然并不是有意地进行推测。我没有看到当代数学家认为这是“鲁莽”或“过于理论化”的证据（按 JQ 的意义来说，Yu. M.）。当年轻的希加德在他 1898 年的论文中大胆地指出了波安卡雷的细微错误时，波安卡雷在 1899 年称希加德的论文为“非常出

色”，并恭敬地承认了自己的错误并加以修正。相比之下，在他 1912 年关于环扭曲定理的论文中（后来由伯克霍夫证明），波安卡雷为发表一个猜想而道歉，并以年龄为借口。”（M.W.赫希在[R，第 187 页]中）

C. “直觉是辉煌的，但数学的天堂需要更多[...]从神学的角度来看，我们不是仅仅凭信仰就能得救，而是凭信仰和行为[...]物理学为数学提供了许多好的建议和新的创举，但数学不需要模仿实验物理学的风格。数学建立在证明之上——而证明是永恒的。”（S.麦克莱恩，在[R，第 190-193 页]中）

D. “菲利普·安德森将数学的严谨描述为“不相关和不可能的”。我会通过称其为无关紧要和通常会分散注意力，即使可能，也会缓和这种打击。”

（B.曼德布罗特，在[R，第 194 页]中。曼德布罗特的贡献是对抽象的严谨证明概念的激烈攻击，也是对美国数学界的相当大一部分，“查尔斯数学家”的攻击，他们被指责是极权主义者，专注于分配信用，并努力孤立开放思想的研究人员。

E. “在 1958 年之前，我生活在一个基本上是布尔巴基主义者的数学环境中，即使我不是特别严谨，这些人——H.卡当、J.-P.塞尔和 H.惠特尼（一个想成为布尔巴基主义者的人）——帮助我保持了相当可接受的严谨水平。直到菲尔兹奖（1958 年）之后，我才屈服于我的天性，结果非常惨痛。此外，几年之后，我成为 IHES 的亚历山大·格罗滕迪克的同事，这一事实鼓励我认为严谨在数学思维中是一个非常不必要的品质。”（R.汤姆，在[R，第 203 页]中。汤姆的讽刺需要慢慢地阅读。遵循他自然的倾向在什么意义上最终产生了灾难性的结果？成为格罗滕迪克的同事如何影响了汤姆的思维方式？一个外人可能仍然感到困惑，格罗滕迪克本人是否分享了汤姆的信念，或者是另一种情况。在同

一篇文章的后面，汤姆引用了“严谨死亡”这个词，作为数学严谨的恰当内涵。

F. “我发现很难说服那些被抽象美感和确定性吸引进入数学领域的学生，让他们理解到具体、混乱和实例的观点的价值。在我看来，比起因缺乏广度而窒息的数学家，更多的数学家是死于严谨之剑的刺杀。”

现在我想总结一下，为这种普遍的混乱贡献我的一部分。首先，个人而言，产生可接受的证明是一项需要艰苦训练和引起强烈情感反应的活动。如果要求一个人做与其天性相矛盾的事情，他或她会感到厌恶。天生或习得的几何推理或代数计算偏好可以影响我们的职业生涯。当我们进行哲学思考时，我们不可避免地对这些基本本能进行理性化和概括，并且我们的整个态度谱系可以追溯到在面对我们所从事的领域的智力挑战时，我们所经历的愉悦或挫折感。

其次，社会上，即使是设计一个非常严谨的证明，我们也必须依赖于我们的同时代人和前辈。在数学中，权威发挥着双重作用：我们从我们的父辈和前辈那里获得了一个价值体系（值得提出什么问题、值得发展什么领域、值得解决什么问题），并且我们依赖于已发表和被接受的证明和推理的权威。在这里，没有什么是绝对的，但由于缺乏绝对性，也没有什么是不重要的。

第三，从认识论的角度来看，我们所有思考这个问题的人都知道什么是严谨的证明。这种理想化的表达是由数学逻辑学家在本世纪中期制定的，但它只是更加明确，而不是根本不同于欧几里得的概念。在这方面，布尔巴基是完全正确的。这种理想化的表达是一个想象中的文本，它一步一步地从公理中推导出我们的定理，而公理和推导规则都是事先明确的，比如在公理集合论的一个版本中。

如果这个形象在你的心中引起了强烈的厌恶，或者至少如果你想要实际一点，你可以（而且应该）反对这种理想是完全无法达到的，因为即使是最简单的形式推导的长度也是不可思议的，而且越接近形式证明的表述，越难以检查。此外，由于形式推导努力摆脱任何含义的残余（否则就不够形式化），它最终失去了含义本身。

相反地，如果这个形象激起了你的热情，或者如果你想要更加现实，你会同意数学的本质需要每天维护当前的证明标准。无论我们是从事像登月这样的大型技术项目的数学支持，还是简单地滋养一种自然的渴望，想知道哪些断言有可能是真实的，哪些不是，我们都必须诉诸于数学证明的理想，作为我们努力的最终裁判。

即使是使用数学“作为叙述目的”，正如赫希所说的那样，也不是例外，因为这样的叙述是建立在坚实的数学基础上，按照非数学的蓝图进行构建的。

“一个有故事要讲的作者认为，用数学语言最清晰地表达。为了能够连贯地讲述，避免可能无限的严格要求所需要的延迟，作者引入一些假设、推测和信仰跳跃，例如：‘为了进一步进行，我们假设级数收敛——随机变量是独立的——平衡是稳定的——行列式不为零——’。在这种情况下，数学是否能够被严格化往往是无关紧要的，因为作者的目标是说服读者相信某种关于某个真实世界系统行为的观点是合理或相关的。数学是一种充满微妙和有用的隐喻的语言。验证将来自实验——很可能是在计算机上。事实上，目标可能是建议一个特定的实验。叙述的结果不会是新的数学，而是现实（真实的现实！）的新描述。”（M. Hirsch, 在[R, p.186-187]中。）

D. Mumford 在第一届欧洲数学家大会上的演讲提供了最近一个美丽的数学叙述的例子。[Mu]。关于数学隐喻，还可以参见[Ma]。

### 3. 三个案例的材料

本节将介绍与我们讨论相关的三个案例：戈德尔的上帝存在证明（1970 年），有缺陷的奔腾芯片故事（1994 年）以及 G. Chaitin 的主张（1992 年及以前）：完全明确和统一定义的数学问题序列可以具有“完全随机”的答案序列。尽管它们有所不同，但这些论点代表了人类试图通过有限语言手段来探索无限，无论是上帝的无限、实数还是数学本身。

无论这些材料能够得出什么道德教训（如果有的话），读者都可以自由决定。

#### 哥德尔的 $\omega$ -一致性证明

牛津大学出版社最近出版的 K.Gödel 的《文集》第三卷包含了一篇日期为 1970 年的笔记。它提出了一个形式上的论证，旨在证明上帝存在为所有积极属性的体现。

R.M. 亚当斯的引言性说明 ([G, pp. 388-402]) 将这个证明放在历史背景下，特别是与莱布尼兹的论点进行比较，并讨论它在理论神学中的可能地位。

证明本身是用模态逻辑语言（除了通常的东西外，使用必要性和可能性量词）的一张公式页。它分为五个公理和两个定理。这页的出版版本的影印件（见图 1）可能会帮助读者。

## Ontological proof (\*1970)

Feb. 10, 1970

$P(\varphi)$   $\varphi$  is positive (or  $\varphi \in P$ ).

*Axiom 1.*  $P(\varphi).P(\psi) \supset P(\varphi.\psi)$ .<sup>1</sup>

*Axiom 2.*  $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi)$ .<sup>2</sup>

*Definition 1.*  $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$  (God)

*Definition 2.*  $\varphi \text{ Ess. } x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]]$ . (Essence of  $x$ )<sup>3</sup>

$$p \supset_N q = N(p \supset q). \text{ Necessity}$$

*Axiom 3.*  $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$   
 $\sim P(\varphi) \supset N\sim P(\varphi)$

because it follows from the nature of the property.<sup>4</sup>

*Theorem.*  $G(x) \supset G \text{ Ess. } x$ .

*Definition.*  $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi \text{ Ess. } x \supset N(\exists x) \varphi(x)]$ . (necessary Existence)

*Axiom 4.*  $P(E)$ .

*Theorem.*  $G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ ,  
 hence  $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ ;  
 hence  $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$ . ( $M$  = possibility)  
 $M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$ .

|  $M(\exists x)G(x)$  means the system of all positive properties is compatible.

This is true because of:

*Axiom 5.*  $P(\varphi).\varphi \supset_N \psi \supset P(\psi)$ , which implies

$$\begin{cases} x = x & \text{is positive} \\ x \neq x & \text{is negative.} \end{cases}$$

<sup>1</sup>And for any number of summands.

<sup>2</sup>Exclusive or.

<sup>3</sup>Any two essences of  $x$  are necessarily equivalent.

---

<sup>4</sup>Gödel numbered two different axioms with the numeral "2". This double numbering was maintained in the printed version found in *Sobel 1987*. We have renumbered here in order to simplify reference to the axioms.

FIGURE 1

计算机计算什么，或者说广告中的真相

在 1995 年 1 月的 SIAM News 杂志上，头版文章“两个数字的故事”以以下语句开头：

“这是两个数字的故事，以及它们如何通过互联网找到了世界各大报纸的头条新闻，在感恩节这一天让世界顶尖芯片制造商尴尬不已。”



简而言之，人们发现英特尔公司新推出的 Pentium 芯片（个人电脑中的中央处理器）在其浮点除法指令中存在一个错误，例如，计算

$r = 4195835 - (4195835 / 3145727)(3145727)$  会产生  $r = 256$  而不是正确值  $r = 0$ 。

现在，这并不是什么非常不寻常的事情。实际上，在所有计算机中，所谓的实数算术都是以这样一种方式编程的，即它系统地产生不正确的答案（舍入误差）。在这种特殊情况下，公众的（稍微夸张的）愤怒是由于在某些情况下，错误比承诺的更大（当承诺双精度时却使用了单精度）。

理论上可以编程精确计算任意大小有理数的计算机系统（并且已经为特殊用途编程）。这需要大量的资源，可能还需要专门的输入输出设备。理想的图灵机实现起来非常不切实际，实际计算机并不设计为方便完成这项任务。

可以想象，一个基于计算的决策系统在小的计算误差方面是不稳定的。股票市场或军事应用对这些问题非常敏感。这里是另一个例子。

最近一项针对美国性行为的研究据称旨在支持艾滋病传播流行病学模型，但未包括 3% 的美国人，即那些住在监狱、无家可归者或街头的人。这项研究的批评者（R.C. Lewontin, 《纽约书评》1995 年 4 月 20 日）合理地指出：“作者没有讨论它，他们甚至可能没有意识到，但是考虑到问题的实际复杂性的传染病传播的数学和计算机模型往往在其预测中对变量的数量值非常敏感。变量中的非常小的差异可能是流行病是否消失或灾难性传播的关键决定因素，因此在计划反制措施时使用不准确的研究可能会比完全无知更有害。”

随着计算机辅助数学定理证明的普及，理解计算机计算的内容变得越来越重要。我再次引用 M. Hirsch 的话（[R, 第 188 页]）：“Oscar Lanford 指出，为了将计算机计算作为证明的一部分进行证明（就像他在 Feigenbaum 级联猜想



的第一个证明中所做的那样），你不仅必须证明程序是正确的（这有多少次被做了？），而且必须理解计算机如何舍入数字，以及操作系统的功能，包括时间共享系统的工作方式。”

### 数学真理的随机性

在 A.N. Kolmogorov、R. Solomonoff 和 G. Chaitin [Ch] 发现复杂性概念和基于此的新的随机定义后，Chaitin 构建了一个具有以下特性的指数 Diophantine 方程  $F(t; x_1, \dots, x_n) = 0$  的例子。如果对于  $t = t_0$ ，这个方程只有有限（响应无穷）多个正整数  $x_i$  的解，则将  $\epsilon(t_0) = 0$ （响应 1）。然后，序列  $\epsilon(1)$ 、 $\epsilon(2)$ 、 $\epsilon(3)$ 、... 是随机的。（事实上，Chaitin 编写了一个产生  $F$  的程序。输出是一个约 17000 个未知数的 200 页长的方程。）

这是一个非常微妙的数学构造，使用了包括 Davis-Putnam-Robinson-Matiyasevich 递归可枚举集合表示在内的其他工具。从认识论的角度来看，重要的是发现随机性可以定义为不需要任何对物理现实的诉诸（然后通过检查“物理”随机性的所有标准属性来证明该定义是合理的），以这样的方式定义，在解决一系列参数问题时需要进行无限搜索，从而导致技术上的随机答案。

有些人发现很难想象像初等算术这样的严格确定的学科可以产生这样的现象。请注意，所谓的“混沌”曼德博样式是一种相对不太复杂的随机行为模型。

### 参考文献

[Ch] G. Chaitin. Information, randomness and incompleteness. Papers on algorithmic information theory. World Scientific, Singapore, 1992.

- [G] K. Godel. Collected Works, vol. 3. Unpublished Essays and Lectures. Oxford University Press, 1995,-
- [Hi] S. Hildebrandt. Wahrheit und Wert mathematischer Erkenntnis. München, Carl Friedrich von Siemens Stiftung, 1995. (Reihe "Themen", Bd. 59).
- [JQ] A. Jaffe, F. Quinn. Theoretical Mathematics: toward a cultural synthesis of Mathematics and Theoretical Physics. Bull. AMS 29:1 (1993), 1-13.
- [Ma] Yu. Manin. Mathematics as Metaphor. In: Proc. of ICM, Kyoto 1990, vol. 2, 1665-1671. The AMS of Japan and Springer Verlag,;
- [Muj] D. Mumford. Pattern Theory: a Unifying Perspective. In: Proc of the first ECM, vol. 1, 187-224, 1992, Springer Verlag.
- [R] Responses to "Theoretical Mathematics etc.," by A. Jaffe and F. Quinn. Bull AMS 30:2(1994), 161-177.
- [W] A. Weil. Collected Papers, vol. 2. Springer Verlag, 1980.

## 数学作为职业和使命

---

### 1

与任何职业一样，数学可以在不同的背景下被理解，我将从最私人的角度开始阐述。

在我十几岁的时候，我开始感到内心的紧迫感，兴奋和挫折感交替出现，这是由于一些不太可能的职业，比如读俄语版 1935 年由 N.N. 卢辛编辑和出版的格兰维尔微积分课程。我在朋友公寓的阁楼上发现了这本书。除了其他标准内容外，它还包含了臭名昭著的连续函数的  $\epsilon - \delta$  定义。在与这个定义苦苦挣扎了一段时间后（那是炎热的克里米亚夏天，我坐在一棵满是灰尘的苹果树的阴影下），我变得非常生气，于是我在根部挖了一个浅坑，把书埋在那里，然后不屑一顾地离开了。一个小时后，雨开始下了。我跑回树下，把可怜的书挖了出来。这样，我发现我爱它，无论如何。

我很快发现，莫斯科大学教授数学；著名数学家的集成作品存在（我母亲送我 I.M. 维诺格拉多夫的选集作为生日礼物）；可以从图书馆借阅《苏联数学学报》和尝试阅读其中的任何内容（我填了一页，抄录了尤. V. 林尼克关于算术进展中的质数的论文）。

我从来没有理解过为什么我想参与这种事情，但渐渐地我学会了认为这是理所当然的，并与之共存。我猜这种早期感受到的深刻个人参与感是许多人所共有的，也是导致数学家（音乐家、哲学家、诗人、牧师等）社群的创造和历史连续性的主要心理基础，这些社群超越了亲属、民族和时代的所有界限。然而，如果社会和历史没有为该人内在需求提供一种结构化的职业供给，这种感

受可能会被引导到不同的方向。（半个世纪前，所有这些艰苦编写大型软件包的人会做什么？唐纳德·克努特在 1979 年纪念阿尔·哈瓦里兹米的会议上问了这个问题，他的名字引发了算法这个词。）

似乎人类本身，或其集体意识，经历了关于其各种活动的兴奋和挫折的交替起伏。我们数学家是科学家更大社区的一部分，他们进行研究、教育下一代，并与工业、医学和商业合作，创建和维护我们文明的基础设施。这个文明是在启蒙运动和工业革命后所创造的氛围中形成的，但现在其价值体系正在与新时代的幻灭崩溃（这可能至少要追溯到奥斯瓦尔德·施彭格勒）。科学因帮助军事、破坏环境、在即将到来的灾难前为疯狂的狂喜做出贡献而受到严厉的指责。

很容易列出反对这种幻灭的知识论，但往往会落空。它们没有帮助亚历山大·格罗滕迪克，本世纪最有创造性的数学思想家之一，他比我们大多数人更清楚地感受到了可持续发展的危险。

那么，我们应该将书埋在树根下，并鄙视地走开吗？

当然，我不相信我们应该这样做。我相信科学总体上，特别是数学，不是我们文明的推动力。它确实提供地图和交通工具，但它并不决定我们应该或不应该去哪里。认为相反是回到了把知识看作一种魔法的古老观念，根据这种观念，预测日食或不确定情况的结果的人是一个通过操纵其符号表示使事情发生的骗子。

实际上，思维的生物学功能不是为了引发，而是为了防止自动行动，而科学的主要社会功能，作为我们时代的社会机构，是阻止后工业社会的狂热活动。

但即使如此，这并不是那些感到对数学和物理吸引的人的动力所在，我将在接下来的几页中致力于我认为我们职业的本质。

## 2

所有人类文化的基础是语言，而数学是一种特殊的语言活动。

自然语言是一种非常灵活的工具，用于传达生存所需的基本要素，表达自己的情感和强制自己的意志，进行诱惑和说服。在最高水平上，自然语言创造了富有诗歌和宗教的虚拟世界。

然而，自然语言不太适合获取、组织和保持我们对自然的不断增长的理解，这是现代文明最显著的特征。亚里士多德可以说是最后一个将语言能力推到极限的伟大思想家。随着伽利略、开普勒和牛顿的出现，自然科学中的自然语言被降级为一种高级媒介，用于实际科学知识在天文表、化学公式、量子场论方程、人类基因组数据库等方面的编码与我们的头脑之间的沟通。在研究和教授科学时使用自然语言，我们带着自己的价值观和偏见、诗意的想象、对权力的热情和诈骗者的技巧，但对于科学话语的内容来说，这些都不是真正必要的。一切必要的东西都由长列表的结构化数据或数学携带。而数学最初被用来更好地描述数据的结构，逐渐将它们压缩到我们开始谈论生成和解释无限多的现象的“自然法则”的程度。此外，在其内部发展的过程中，受其内在逻辑的推动，数学也创造了极其复杂和内在美丽的虚拟世界，挑战着许多连续几代人的想象力，但无法用自然语言描述。

数学作为一种语言，其最奇特的特性是，通过对输入的数学文本进行形式化游戏，可以得到一个看似带有新知识的输出文本。基本的例子是科学或技术计算：一般定律加上初始条件可以产生预测，通常需要耗费时间和计算机辅助工作。可以说，输入包含了一种隐含的知识，这种知识因此变得明确。可以尝

试通过将这与诠释学相比较来在人文学科中找到一个类比：发现神圣文本的隐藏意义的艺术。法律语言也与科学语言有一些共同点。在历史的进程中，现代科学语言缓慢地从这两种古老的活动中形成，并且它仍然在很大程度上受到它们的影响，特别是在更描述性和不太数学化的领域。

数学在物理世界中没有固定的语义解释规则：同样的波动方程可以描述海浪、声音、光以及量子力学中的“概率波”。在这个意义上，数学是一个伟大的隐喻源。在理论物理学中解释数学构造的行为必须与构造本身分开。

许多数学家仍然认为，数学直接涉及到一个意义的柏拉图世界，其中实数独立于它们的模型，并且连续假设是真或假的。最近我参加了一个即兴讨论：计算机模拟是理论还是实验？我的答案是：它是“真实现实”的理论，是柏拉图现实中的实验。

无论这些讨论可以归属于什么样的哲学地位，一些最美丽和最发展完善的数学部分无疑是柏拉图式的。我指的是所有代数数域及其伽罗瓦群的领域，这是数论的中心对象，以及相关的分析机器： $\zeta$ 函数、L函数和自守形式。整个数论的历史看起来像是对一个预先存在的世界的探索历史，而不是它的发明历史。而几何学的历史几乎与理论物理学的历史密不可分，数论几乎没有从我们的实际世界经验中借用任何东西。

### 3

传统的数学和物理学合作模式——物理学家发现方程，数学家研究方程——当然会继续下去，而计算机模拟的作用也会不断增长。

自 70 年代以来，一个不太传统的关系已经形成。随着“标准模型”的成功，该模型令人满意地描述了基本粒子和相互作用的可观察光谱，物理学家开始开发可能与宇宙大爆炸的极高能量相关的相当浪漫的模型。这些模型的研究

需要并刺激了复杂而有时惊人的新数学的发展，主要与量子场和弦理论有关。

这个过程正在全面展开：物理学家正在谈论“第二次弦论革命”，其内容似乎是所有基本的量子弦模型都是由它们的微扰级数给出的渐进逼近，而这些模型在模空间的不同区域中必须是一个相同的理论。

数学界对这一挑战作出了积极的回应并参与越来越多。这似乎是过去十年数学中最重要的趋势，将肯定持续到下一个世纪。

数学可以大致描述为问题解决的活动，或者作为广泛定义的计划的发展。这两个方面是互补的。20 世纪数学始于 23 个希尔伯特问题的列表，其解决方案构成了历史性的里程碑，但其主要成就可能包括拓扑学、数学逻辑和计算机。

有时，如果我们足够早地意识到一个新兴的研究计划，它可以被表述为一个猜想（例如 Weil 猜想）或者一个愿景（Grothendieck 的动机，Langlands 纲领的早期阶段）。

在我看来，现在可以谈论“经典数学量子化”的新兴计划，其范围比仅仅与物理学家合作共同理解量子弦理论更广泛。我将简要描述几个领域，在这些领域中，这个计划已经带来了成果，并且在可预见的未来可能会积极追求。

1). 拓扑学。物理学家的启发式路径积分形式主义导致了对结的新不变量，三维和四维流形的发现、解释和/或更好的理解。在辛几何中，它导致了 Arnold 猜想的证明。

2). 代数几何。相同的形式主义，但应用于不同的背景下，导致了生成系数为稳定曲线和代数流形上的模空间的数值不变量的显著微分方程的检测。量子共形理论、镜像现象的理论和与奇点理论的关系是一些例子。



3). 微分几何。扭曲器计划导致了几何的一个新章节的创立，发现了  $R^4$  上的非标准光滑结构，并最终分类了保角群。二维共形场论（CFT）导致了一个新的几何结构的形成：Frobenius 流形，现在有一个丰富的理论，并提供了量子共形的数学基础。

4). 代数。CFT 刺激了代数学的操作理论的复兴，并似乎是一些普通代数学领域中最重要、最近的近期事件。在更具体的对象中，最有趣的是构成 CFT 的一个更好的理解部分的顶点算子代数。它们的表示理论，月亮猜想的证明以及它们与（广义的）Kac-Moody 代数的关系属于最有趣的代数发展之一。

5). 非交换几何和超几何。物理学家发现了包含交换和反交换坐标的超几何学，作为玻色子和费米子的量子理论的经典逼近，并已经成为所有基本几何学（光滑、解析、代数）的标准扩展，尽管它不是非常受欢迎。特别重要的是超对称理论和 Killing-Cartan 分类的相应扩展。阿兰·康纳开发的非交换几何学有各种来源，其中量子理论是其中之一。它已经应用于标准模型，最近也应用于 zeta 函数的谱解释问题。

6). 量子计算。这是一个相当新颖和引人入胜的想法，值得在这里考虑，因为目前它是一个纯理论提议，如果可能的话，它的硬件实现将需要新技术。建议我们使用“量子  $n$  位寄存器”代替经典寄存器：这是一种设备，其量子态构成  $2^n$  维的 Hilbert 空间。因此，量子空间的体积随着  $n$  的增加呈双重指数增长。此外，量子演化定律将  $2^n \times 2^n$ -矩阵的乘法实现为一个基本操作。最近证明使用量子寄存器可以解决快速因式分解问题。该解决方案破解了目前最广泛使用的公钥加密系统。基本思想是通过“大规模量子并行性”取代并行计算（在不知



道有效算法时加速经典计算的主要工具），其理论可能性依赖于叠加原理。这个方向肯定会成为未来一段时间的热门话题。

#### 4

但这些都是脑力活动。生活实际性呢？

我每周二和周四有课（还有另一个选项，但我不是你的周一周三周五人），最好在下午，或者至少不是早上。对于许多数学家来说，早晨是地狱，他们必须为一个合理的日程表而奋斗。

教室里有粉笔的味道。黑板已经被写过和擦过无数次了，它看起来很疲惫。

在莫斯科、剑桥、马萨诸塞州剑桥、东京、波恩、巴黎六大和巴黎七大，粉笔的气味都是一样的。好吧，后两个不是城市，而是大学，但当然，莫斯科、东京和剑桥不仅仅是大学。数学让你走遍全世界，但不知怎么的，它带你去的地方看起来都很相似。

学生可能会让人烦恼，但在教学四十年后，你会发现你的学生是你生活中最重要的部分。他们比你更聪明，他们结婚、离婚并向你发送他们孩子和家庭的照片，他们要求推荐信和评估信，这些信填满了你电脑的一个庞大目录，而且不时地，他们以你从未想过的神奇新定理和见解震惊并充满自豪地填满你。

这是一份职业吗？嗯，是的，有点。有向上的运动，其中终身教授是最高的一步。这份工作为你和你的家人提供了日常生活所需，但也许需要更多的说服力论据来将自己的生命奉献给它。

因此，在告别之前，让我们再加点脑力活动。

#### 5

达尔文进化论非常浪费。一个群体的基因库受到随机突变的影响，这些突变与环境的变化没有任何关系。然后自然选择会支持那些能够最有效地传递给后代的基因变异。适应性更强的生物将产生更多的后代，从而传递他们的基因，其余不适应的变异则会被淘汰。

拉马克的后天特征遗传将会更加有效。你使用一个器官或能力并加强它，然后你的孩子就生来适应你所面临的困难。

我们现在更好地理解为什么自然选择达尔文而不是拉马克。它所编码的信息必须与环境隔绝，并且必须抵抗来自外界的干扰。否则，我们就需要一种机制，例如全球变暖这样的粗糙环境变化，才能被有意义地编码为产生新一代无毛老鼠所需的微妙化学缺失和替换。这样的确定性机制是闻所未闻的。相反，自然产生基因指令的随机变异，之前会在繁殖前冻死的无毛老鼠，现在却能够克服过热的同胞。

这种推理引发了一个有趣的问题。毕竟，将后天特征传递给后代的能力可以想象为生物物种整体设计的一部分。我们不知道这样的物种，但如果这种能力有效地促进适应性，为什么不能像飞行或色觉能力一样，从随机突变的序列中进化出来呢？换句话说，为什么拉马克式进化不能成为达尔文式进化的后期阶段？

人类可能会认为这正是发生在人类身上的事情，只是在不同的组织水平上。我们的生物进化在一段时间前就停止了，我们的文化进化则从拉马克所描述的道路上开始了。

语言提供了形成文化基因库的手段。它最初通过口头传统发展和传播，然后通过书面文本传播。后代的经验直接编码成史诗和计算机程序，然后用于通知下一代生物生存环境的变化。

## 第三部 语言、意识、书评

神话中的魅惑者：心理学和文化理论研究

论语言和意识的早期发展（类群进化）

空城雏形

思想之三角形（书评）

“爱仍在”（书评）

“好证明使我们更明智”（采访尤里·I·曼宁）

## 神话中的骗子：心理学和文化理论研究

---

各种文化的神话和史诗中都有被称为神话骗子（德语 Gottliche Schelm，俄语 plut）的角色，他们具有典型的身体和行为特征，既滑稽又恶魔。如北欧神话中的洛基，希腊神话中的赫尔墨斯，奥塞梯神话中的赛尔东，温尼巴戈神话中的瓦克德容卡加，楚科奇-堪察加卡恩的乌鸦。对涉及这个角色的动机和故事情节分析表明，骗子是一个滑稽的伴侣，一个孪生兄弟-或者是一个嘲弄的双重，一个照片负片-另一个角色，文化英雄。在原始系统中，文化英雄是起源神话的积极人物，他从神那里发明或窃取物质文化的基本元素，获得火，赋予第一批人类生命，并建立文化禁忌。骗子的行动是对这些功能的嘲笑：他破坏，侵犯，违反，说谎-言行，幻象和预言。他像赫尔墨斯一样偷走阿波罗的一群牛；他像洛基一样策划毫无意义的阴谋，将毫无戒备的盲人霍德交给杀死巴尔德的槲寄生枝；他改变外貌和性别；他在神和人之间，在生者和死者之间进行调解；他被无法满足的饥饿，超级情欲和漫游所吞噬。

神话人物越是原始，越难以在其中隔离出这个特定的特征复合体：图腾（通常是动物）祖先出现为文化英雄和他的孪生不可分割的融合体。随着我们将注意力转向更近期的进化层，这个复合体变得越来越明显-但失去了神话的遗产-在民间狂欢文化，童话，从荷马（奥德修斯，奥托利库斯的孙子，赫尔墨斯的儿子）到拉伯雷（加尔冈图亚）到托马斯·曼（费利克斯·克鲁尔）的文学作品中。

诡辩家在某种程度上体现了滑稽，但这种滑稽并不一定有趣。有时他主要是敌对和可怕的，在中世纪的基督教欧洲，他被认为是恶魔：“魔鬼被理解为

simia Dei, 即‘上帝的猴子’, 他不值得尊敬的模仿者, 诡辩家, 天堂和地球的 Polichinelle”。

但这种进化轨迹只是诡辩家形象成为文化研究一个吸引人的主题的原因之一。

另一个原因是诡辩家的特点是具有非常独特的心理紧张感。其他神话和史诗英雄通常被认为“缺乏心理学”-要么因为他们本身就是心灵的产物, 是无意识原型的表现, 如 Jung 所说; 要么因为, 根据 O. M. Freidenberg (部分地与 Levi-Strauss 一致), 他们不是他们活动的主体, 而是认知类别的替代品。

我们的直觉告诉我们, 诡辩家是不同的, 他越是沉浸在破坏和越轨的元素中, 他就越具有心理上的强度。正是这种心理强度使诡辩家成为童话或小说的自然英雄; 它也给我们在原始版本的角色中提供了人类心智状态早期的证据。在本文中, 我们尝试从上述两个视角考虑诡辩家形象: 文化史和心灵史。

以下是本文其余部分发展的主要命题的摘要。诡辩家复杂性的语义核心是文化的冲突在前文化自然状态中“萌芽”。复杂的古老特征可以追溯到新人类正在成为说话和社会的存在时代。诡辩家的内部不和谐通过传统爆发, 使自然和文化的任何和谐得到破坏。游戏, 恶作剧和笑话是文化在这种冲突中的暂时胜利的结果, 因为它被驯服, 平息和情感简化。诡辩家固有的边缘性使从心理病理学的角度分析这个角色的古老传统成为正当的。

### 诈骗者复杂性是什么?

青春期是诈骗者复杂性的核心。在进化方面, 这意味着参考新人类形成的早期时期; 在个体发育方面, 是指青春期, 即获得社交技能的阶段, 包括入门 (成人社交世界的入门仪式), 比当代社会的时间短和不那么分化。

总体的移动性是青春期的一个特征。在行为观察方面，它解释了诈骗者功能的弥散、不确定的特点，他的旅行，他的调解能力。在个性方面，移动性被转化为对言语和真相的松散处理，即从更现代和“成年人”的参考框架中，变成欺骗、虚伪和不道德。

意识到言语内容可能独立于特定的现实情况是人类历史上的一项重大发现。当实践掌握这种解放言语的能力时，它被证明能够对抽象和想象的实体进行建模，并控制行为。诈骗者的故事实际上是控制对方行为的第一次尝试，而不使用暴力，从而编程长链的意外事件。

骗子的流动性本身是价值中立的；它只在具体表现和存在条件中获得极性。当被积极评估时，骗子的流动性被解释为不服从，无视禁忌和规定，摆脱偏见的束缚。它使人能够克服社会障碍，颠覆社会等级制度，带来拒绝传统、用活跃的探索代替祖先权威的可能性。正是这一方面促使乔治·杜梅齐尔将洛基和斯尔东视为第一批科学家的精神先驱：“现有的社会秩序对不安定的智力的毁灭性力量做出自卫、敌视的反应，这使得头脑将它的一些——甚至是大部分——能力转向狡猾、欺骗、阴谋，以及在性格易受攻击的帮助下转向嘲笑、挑战、仇恨。”<sup>4</sup> 将小丑或丑角作为中世纪“狂欢精神”（米哈伊尔·巴赫金）的催化剂或传统社会仪式中的临时“地位变化”的正面评估也源于同样的起源。

而负面评估则认为，骗子的流动性具有破坏性和自我毁灭性的潜力。他的非社交性、危险的好奇心对自己和他人都有危险，不受任何禁令的约束，他的心理不稳定性——所有这些都充满了不幸，他无法预见和防止，因为他的左脑欣快症（这也是将他视为当代科学家的先驱的另一个原因）。在最终形式中，

骗子的行为就像是一种青春期精神分裂症患者。（患有青春期精神分裂症的患者被特征化为非社交性、无节制的性行为 and 怪异的心理变化。）

下面我们考虑一些支持刚才概述的概念的论点。当然，这个概念并不是没有问题。部分原因是概念化神话主题的普遍难度以及数据的不确定性。另一个原因是可用数据的不完整和精确性以及骗子形象存在的准确地理和时间描述的缺乏。

### 古心理重建

在我们的解释中，有两种证据使我们认为幼稚是骗子心态的核心特征：

- 骗子与特殊、退化、可能是史前早期的言语模式有联系的证据；
- 与心理病理症状相似的特征，尤其是青少年典型的特征。

在人类从动物进化为人的历史中，即掌握当代类型的口头表达的出现和演变的关键时期。这个过程的历史持续时间、其顺序阶段及其绝对日期的问题远未得到最终解决。可以从各种数据中获得间接证据，包括 a) 化石头骨测量，允许我们追踪人类大脑和声带系统的发展；b) 石器考古学研究，显示工具类型的增加和制造复杂度的增加，使我们可以推断出石器发展，因此间接地推断出大脑的功能不对称性；c) 早期艺术和符号活动的研究。

一般而言，可以假定在 100（或 50）万年到 20 万年前的穆斯蒂埃时期发生了一些关键性的变化。此时，古人类（欧洲尼安德特人）被新人类（克罗马农人）替代为主要的人类类型。有趣的是，人类学数据显示后者不可能是前者的后代。



当代类型的智人的出现、其多样性和与“死胡同分支”的关系、其在 Oikoumene 上的传播以及从生物进化向社会进化的转变，尚不清楚和有争议，但似乎穆斯蒂埃时期揭示了神话的原始史前心理主题的关键。

从神经生物学的角度来看，现代语言与大脑的功能不对称性密切相关。通常，占主导地位的半球，通常是左半球，包含了语音识别和生成的中心。这种不对称性本身可能早于语言的出现。人类中枢神经系统以高度发达的整合功能著称，包括主要感知模式之间的连接：视觉、听觉、触觉。有人提出，语音化的语言在假设的“内部中介语言”的神经生物基础上发展起来，其中所有感知模态特定的语言都被翻译成了这种语言。使用计算机隐喻，我们可以将人类中枢神经系统的这个进化阶段与同时支持单个 CPU 上的许多输入输出通道的操作系统的出现进行比较。然后，新兴的声音语音提供了一个通道，用于动态重新编程这个操作系统，其原始的生物运行模式象征着“自然”，而次要的社交模式则对应着“文化”。尽管在当代世界，语言通常被构想为信息传输的通信渠道，但根据一些提议，其最初的古老功能是修改行为，而第一个意义是禁令、限制和禁忌。在发展的下一个阶段，这种限制系统在心灵中（个体记忆）内在化，并相应地起到调节和工作行为的作用。这为基于越来越多的口头信息发展的人类社会内部生活奠定了基础，这些信息不再可以简化为直接的规定。这种历史重建与 L. S. 维果茨基对儿童语言发展的概念相吻合。

皮层中的语音中心的形成和相应的半球间连接的重构必须影响早期新人类的人格结构。这种影响在某些个体中可能尤为明显，暂时被认为是“原始萨满教徒”（请注意，即使在当今社会，语言能力的水平也在不同人群中存在很大

的差异，在古代，这种差异可能更加显著）。一些诈骗证据可以被解释为反映了这个时期。

早在 20 世纪初，民族学家保罗·拉丁收集了瓦克贡卡特里克斯特故事，并与拉丁、卡尔·克伦伊和荣格的解释作品一起出版。第五集讲述了瓦克贡卡在屠宰水牛（右手握刀）后左右手之间的争斗。

“突然，左手抓住了水牛。‘放开，那是我的！放开，否则我会割你！’右手喊道，‘我要把你撕成碎片！’左手放开了水牛，但立即抓住了右手。每次右手试图剥皮水牛，左手都会用手腕制止它。所以手打了一架，打了很久，直到左手受了重伤。‘哦，我为什么要那样做呢？我伤害了自己。’左手流血不止。”

手部行为的相同表现有时会在进行大脑半球分离手术后的患者中观察到。例如，有一个患者报告说，有一天早上他穿裤子时发现他的左手和右手在斗争。一只手在往上拉，而另一只手在往下拉。在另一个事件中，同一患者生气了，他强行用左手去抓他的妻子，而右手则试图阻止它。

即使在功能性大脑不对称的影响引起广泛关注之前，手部争斗的这一事件以及 Wakdjunkaga 的其他特征，被周期的出版者视为神话英雄深刻过时的精神状态的证据。目前，人们可以更有信心地认识到小丑 Wakdjunkaga 的分裂意识中涉及到与语言中心形成和半球间合作重构有关的各种神经功能障碍。

在赫尔墨斯神话中，与我们讨论相关的主题通过对荷马赞美诗进行仔细的语义分析揭示出来，这是由 T. B. Menskaya 进行的（带有不同目的）：

“在奥德赛 19.560-67 中描述的欺骗性、虚假的预言视觉是‘赫尔墨斯元素’、‘赫尔墨斯元素’的典型特征。这些视觉是混乱的，含糊不清的，承载着不可实现的承诺。”

“有充分的证据表明，赫尔墨斯与不可理解的言语（有害、不祥）谎言、无意义的声音有关。与真相相比，这种言语首先是间接的、不简单的...，其次，与声音范围无关。在后一种情况下，可以区分出一方面是笑声、耳语、低语 (...)，另一方面是尖叫声。”

这种描述与事实非常一致，准确地说，这些声音是直接刺激亚支配半球某些区域以及古老的边缘系统（嗅觉或内脏大脑）所产生的。它们可能在左脑语言发展时代更为普遍。梦和预言不真实的陈述只有在足够发展的语言基础上才可能。它应该被理解为，梦和预言的“真相”是与我们习惯的客观可验证陈述的“真相”完全不同的概念。前者具有强制性成分，它们迫使人们做出特定的行动选择，它们的“真实性”是这些行动有效性的函数。

最后，关于赫尔墨斯的歌唱，赞美诗反复坚持提到左侧、左手，支持他的个性是右脑性质的假设。

关于乌鸦的神话也明显揭示了他与右脑言语的密切联系，尤其是俗语。精神病性托雷特综合征涉及广泛的抽搐和发声（哼声、尖叫、吠声，有时还会出现粗话不受控制的使用）。除了模仿语言（机械重复另一个人的句子或短语）和神秘语（一连串听起来像语言的声音，但在任何语言中都无法解释）这些说话模式代表了言语发展的早期阶段的退化。它们经常伴随着萨满教、早期（和宗派）基督教、吟游诗人的滑稽表演（俄罗斯的斯科莫洛舍夫斯托）。

最后，我们可以在旧约圣经中的大祭司亚伦这一人物中发现诈骗者的古老特征，他是先知摩西的兄弟和灵性伴侣。这两个角色的双重性反映了神话层面上的文化英雄和诈骗者之间的双重性以及民族首领和萨满之间的民族学层面（当然，我们不将这两个对等起来）。引入亚伦进入叙述的动机非常典型：当上帝的声音告诉摩西召唤以色列人的儿子敦促他们离开埃及时，摩西请求无言以对。声音随即命令他召唤亚伦：“……我必使你的口，也必使他的口，教训你们所当行的事。他要替你向百姓说话”（出埃及记 4:15-16）。然后，亚伦在摩西面前、百姓面前和法老面前充当了声音对摩西的译者；显然，他不仅口才出众，而且通晓多种语言。当法老拒绝让以色列人离开时，是亚伦实现了前三个神秘的预言，“埃及的灾殃”：将手杖变成蛇等。这是亚伦和埃及魔法师之间的一种萨满比赛，亚伦的奇迹或魅力被证明更强大。因此，亚伦的神圣职能与他的语言技巧、诈骗和显然能够引起集体幻觉的能力（将水变成血）有关。同时，尽管他不善言辞，但摩西才是真正的文化英雄，是声音的媒介，而亚伦是他的次等复制品。值得承认的是，亚伦没有违反禁忌，但他的两个儿子却犯了错，因此被神的火焰烧死（利未记 10:1-2，民数记 3、4）。亚伦的贪婪表现在责备摩西的古实妻子的情节中（民数记 12:1-2），为此亚伦的妹妹米利暗受到了七天的“麻风病”惩罚。正如 S.Averintsev 所指出的那样，只有在最新的传统中，亚伦才获得了理想的大祭司形象，而古老的诈骗者特征已经消失了。

让我们简要谈谈诈骗者形象的心理病理学方面。通常，有一个既定的传统来绘制这样的相似之处（一个有趣的最近的进化心理病理学综述与众所周知的经典重建不同，它几乎只是基于临床和实验室数据，而不是基于民族和文化历史数据。10）以下考虑是初步性的。通过考虑有关所谓的“萨满疾病”的西伯

利亚数据，可以丰富对诈骗者形象的解释，这是一种特殊的心理障碍，是成为萨满的先兆，并从那时起成为萨满人格的一部分。将萨满仪式描述为一种可控的癔症发作，与 S.P. Davidenkov 和 Julian Jaynes 的假设相符，即社会进行了一致的选择，选出了具有精神分裂症心理的个体。<sup>11</sup>

然而，我们在这里想进一步探讨恶作剧者的行为模式与青春期痴呆症之间的相似之处（我要感谢 V.A. Faivishevsky 引起了我对这些相似之处的关注）。B.F. Porshnev 曾在不同的场合写过关于青春期痴呆症的古心理学方面的文章。青春期痴呆综合症是由德国精神病学家 Karl Kahlbaum 于 1889 年描述的。它以宙斯的女儿、奥林匹克神的酒杯托 Hebe 为名；在俄语诗歌中，它是她的“雷鸣般的酒杯”。青春期痴呆症的症状包括对周围人的超批判态度，特别是对长辈的；自我控制能力减弱，头晕目眩；感官贪婪和旅游热情；类似于青春期的过度性倾向，导致无节制的行为。这与一般的理性态度相结合，对自己和世界进行细致的行动规划，但不评估其最终结果，对哲学系统、宗教和艺术的“形而上醉”也是如此。

这两组特征的并置本身就很有说服力。它证实了 B.F. Porshnev 关于不易建议性的论点，这是大多数精神病中常见的特征，从生物进化的角度来看，可能是言语发展的早期阶段之一的特征。

### 骗子和喜剧问题

古代的高贵欺诈者的喜剧性可能并不是指有趣的。根据 O. M. Freidenberg 的说法，“古代的喜剧是一种认知范畴。经典文化中的双重‘di-une’世界不断地在各个方面包含着两个现象轨迹，其中一个是对另一个的讽刺”。因此，理

解这种喜剧元素不能心理上均匀，因为不同的对立在其重要性上有很大的变化，甚至不可比较。

此外，在“diune 世界”公式中，“-une”难道不是决定性的部分，而不是“di-”吗？普遍的深刻情感，包括滑稽的经验，都是非理性的。对其原因的理性化减轻了情感，并用一系列价值不确定的发现取代了它。

滑稽和有趣的语义领域是广泛而异质的。其中一个焦点是积极味道的交流概念。这是一个文化前的组成部分：这是婴儿的第一个微笑，尽管动物不笑，但它们的幼崽的游戏似乎充满了欢笑的气氛。（请注意，只有人类、类似人类、与人类有关的事物才能有趣：美丽的风景可以唤起想象中的世界和谐的想法，但有趣的风景——如果我们能够想象出这样的东西——只能让我们想起自己。）

从游戏情境中减去其交流和情感方面，剩下的就是“实际”现实的建模，准备或替代它。在文化框架内，游戏是带有一些特殊功能的建模。它的目标是揭示文化的整个相空间，潜在可访问状态的总体。一种经济的方法是在相空间的“远离角落”中构建一个模型。这种构造最常见的设备是正常关系的反转。

（参见傻瓜在葬礼上说的“愿你的捕获丰收！”<sup>14</sup>）创造笑声情境的人沿着几个轴移动，并在达到可能性的极限时，将文化上重要的对立关系颠倒。但是，笑声情境是传统的。这是一种协议的结果。违反禁忌可能仅在公共同意和暂时的情况下保持在积极味道的交流范围内，否则文化将被另一种文化所爆炸和取代。将违规行为转移到言语平面中，实现了第二阶建模。这有助于达成社会协议：傻瓜的把戏故事比实际把戏更容易引起更多的笑声。那么，也许笑声是发展成熟的言语的副作用？



让我们比较几种排泄物（希腊语单词σκατος，意为粪便）主题的解释，这种主题在“低级”幽默和民间“狂欢广场”文化中是普遍存在的。其中一种象征性的代表是一个裸体身影（魔鬼，小丑）在神殿或世界的象征物上方（或前方）采取排便姿势。A.M.潘琴科认为，这个身影表达了“一种非人的、特别是撒旦式的傲慢，对世界的轻蔑”（如果描绘的是魔鬼），或者是将同样的想法转化为“滑稽的堕落平面”。但对于圣愚巴西尔·布莱斯特的传记作者来说，他曾在公共场合进行肉体功能，这些行动的意义不同，是灵魂从身体获得的自由：“拥有自由的灵魂，……并且对人们认为可耻的事情没有羞耻感，就像他的肚子需要一样，在人们之前。”<sup>15</sup> 这种感知的模棱两可和模糊性被接受和强调，但它并不能枯竭现象的深层语义。

回想一下荣格的著名青少年视觉：上帝坐在一个金色的天堂宝座上，他的排泄物摧毁了一座闪耀的神庙。因此，从荣格的分析心理学角度来看，我们在这里处理的是某种原始的原型主题，它只在引起深刻的情感冲击的幻觉中表现出来，但原则上不能被合理化地枯竭。最后，临床精神病学的实践和解释表明，可以用自闭症患者的病理性自闭个性变化来理解这一系列主题：患者体验到与其他个体和物体的接触的满足不足，导致自恋和自体性。从这个角度来看，排泄物形象构成了自体性的基本心理语言；可以在许多乌鸦和Wakdjunkaga 的故事以及圣徒和圣愚的传记中看到它。

当然，在这个领域，笑声效果得到了增强，或者有时是第一次被创造出来，通过良好发展的文学传统得到了精致的体现。拉伯雷是一个无尽例子来源（260,418 人在加尔甘图阿的尿液中淹死应该引起普罗达读者的充分反应：精确度是滑稽的）。

因此，原始的滑稽并不是一开始就有趣的。在诡计者形象中拟人化，它体现了文化限制的幼稚破坏。对于文化以前和文化以外的探险扩展了文化领域，但最重要的是扩大了对它的态度。诡计者的不稳定作用最初是破坏性的。笑声从滑稽中发展而来，当个体和社会心理成熟并能够通过将这些破坏性力量转移到游戏领域来中和它们时，就会产生文明的笑声，这是对暂时越界的欣然同意。



## “好的证明是让我们变得更加聪明的证明”

---

——由马丁·艾格纳和瓦斯科·A·施密特采访的尤里·I·曼宁

**国际数学家大会即将到来，下一个世纪也将到来。您认为今天还可能出现类似于希尔伯特问题的问题吗？是否有任何现代问题与希尔伯特问题相对应？**

我实际上并不认为希尔伯特的清单在本世纪的数学中扮演了重要角色。它肯定在心理上对许多数学家起了重要作用。例如，阿诺德曾经说过，在他还是年轻的研究生时，他曾在笔记本上抄下了希尔伯特问题的清单，并一直随身携带。但当格尔芬得知此事后，他实际上嘲笑了阿诺德。阿诺德认为问题解决是伟大数学成就的重要组成部分。对我来说则不同。我将数学创作过程看作是一种认识预先存在模式的过程。当你学习某些东西——如拓扑、概率、数论等——首先你需要获得一个广阔领域的总体视野，然后你会专注于其中的一部分。之后，你会尝试认识“有什么？”和“其他人已经看到了什么？”。因此，你可以阅读其他论文，最终开始辨别出在你之前没有人看到过的东西。当我还很年轻的时候，我对高斐发现了七八个二次互反律的证明非常感兴趣。让我困扰的是，他为什么需要七八个证明。每次我对数论有更深入的理解时，我就更能理解高斐的思想。当然，他不是寻找更有说服力的论据——一个证明足够有说服力了。关键是，证明是我们发现新领域、数学景观新特征的方式。任何证明都是从一个地方到另一个地方的方式：当你走不同的路时，你会看到不同的东西。

**强调解决问题是一种浪漫的观点吗：一个征服山峰的伟大英雄？**

是的，这是一种有点运动化的观点。我不是说这不重要。对于年轻人来说，这是一种心理策略，可以吸引年轻人，为伟大成就创造一些社会认可。一个好的问题是伟大数学思想的体现，这种思想可能看不到通往某个高度的途径，但它认识到有一个山峰。但这不是看待数学的方式，也不是向大众介绍数学的方式。特别是当这些问题被列在一张清单中时，就像是一个伟大国家的首都列表：它根本没有传达最小的信息。我实际上不相信 Hubert 认为这是组织数学的方式。

### **你敢预测下一个世纪数学的主要模式吗？**

这很困难。我认为 20 世纪的数学最好围绕计划而非问题来呈现。有时它们会被明确地制定，有时它们会逐渐成为一种盛行趋势。例如，数学逻辑和数学基础的发展。这确实是一个被理解为计划的发展。在 Cantor 的发现之后，很明显我们必须深入考虑我们如何思考无限。或者我们有朗兰兹计划，通过观察伽罗瓦和自守形式的表示来理解伽罗瓦群。有一个计划让我们进入下一个世纪。这个计划可以被认为是数学的量子化。当我们看到过去二十年中有多少数学概念以新版本的方式改变时——令人惊讶：看看量子群、量子上同调、量子计算——我认为我们还有更多。这很奇怪，因为实际上没有人把这样一个计划当作发展数学的计划。这只是想要理解物理学家用奇妙的直觉发明的数学工具，他们从纯数学家的角度看，使用这些工具时充满了刺激但有些粗心大意。

### **你认为从历史角度来看，20 世纪会怎样评价？它是一个重要的世纪吗？**

我认为是的。本世纪的数学成功地在规模上协调和统一了各种不同的领域，这可能是前所未有的。在这一统一中起到最重要作用的是集合论。最初由

康托尔构思成为数学的一个新篇章，“无限论”，集合论逐渐改变了它的地位，并发展成为普遍的数学语言。人们意识到，从一个相当短的基本术语和操作列表开始，可以递归地生成语言结构，这些结构显然同样能够传达微积分、概率、数论、拓扑、微分几何等创始人的直觉。因此，整个数学界获得了共同的语言。此外，允许清楚地区分数学构造的集合论和几何内容，以及它们灵活的语言表达（符号、公式、计算），集合论极大地简化了每个工作数学家作为个体的左右脑之间的互动。这种集合论语言的双重功能成为开发新技术工具、解决旧问题以及制定研究计划的基础。数学的多样化首先与外部社会现象有关：科学界的快速增长和物理学的突破性发现。在我看来，过去一百年的数学没有像量子理论或广义相对论那样在改变我们总体世界观方面产生可比的东西。但我相信，如果没有数学语言，物理学家甚至不能说他们看到了什么。物理学发现和数学思维之间的这种相互关系，以及这些发现只能用数学语言表达，是绝对令人惊奇的。从这个意义上说，20 世纪肯定会被视为一个伟大突破的世纪。

### **你脑海中是否有某些特定的话题，使得我们这个世纪真正处于顶尖水平？**

在 18 和 19 世纪，数学语言比我们现在习惯的要模糊得多。我认为 20 世纪开始重新思考基础知识。当基础知识足够清晰时，就会出现一种极强的技术方法的大规模搜索，这导致了强大的工具的产生，使我们能够将我们的几何直觉发展和扩展到新的领域。我想到的是拓扑学、同调代数和代数几何。一旦技术发展完成，几个非常困难的问题的解决就在三十年的时间内实现了——德利涅的魏尔猜想证明、法尔廷斯的莫德尔猜想证明、怀尔斯的费马大定理证明。所有这些都不能在上个世纪完成，因为数学还没有发展到足够的程度。

**有些人——其中一些是数学家——声称证明的终结，部分原因是计算机的普及。你对此有何评论？**

如果你谈论没有证明的数学，那么你谈论的就是一些本质上矛盾的东西。证明不可能消失——只有和数学一起消失。但是数学可以作为人类文化的一部分而消失。我认为，在我们这一代人中，数学家仍然按照我们所理解的方式进行数学研究。证明是我们知道我们思想的真相的唯一途径；实际上，这是描述我们所看到的唯一途径。证明不仅仅是一种说服想象中的对手的论证。完全不是。证明是我们传达数学真理的方式。其他一切——直觉的飞跃、突然发现的兴奋、没有根据但坚定的信仰，仍然是我们的私人事务。当我们进行一些计算机计算时，我们只是证明在我们检查的情况下，事情与我们所看到的一样。

**最近报纸上刊登了一则通知，称一台计算机通过对所有可能策略的全面搜索，证明了赫伯特·罗宾斯的一个猜想。**

当然这是可能的。为什么不呢？如果你发明了一种好的证明策略，但其中包含了广泛的搜索或长时间的形式计算，并且之后你编写了一个实现这个搜索的程序，那就完全可以。但是辅助计算机的证明和未辅助计算机的证明一样，可能好也可能不好。一个好的证明是让我们变得更有智慧的证明。如果证明的核心是一个大量的搜索或一串冗长的等式，那么它可能是一个不好的证明。如果某些东西是如此孤立，以至于只需要在计算机屏幕上弹出结果，那么它可能不值得做。智慧在于联系。如果我必须手算出 $\pi$ 的前20位数字，我肯定会变得更有智慧，因为我会发现我所知道的这些 $\pi$ 公式需要太长时间才能产生20位数字。所以我会挖掘出一些我不知道的东西。我可能会想出一些算法来最小化我

的努力。我肯定会变得更聪明。但是，如果我使用别人的库程序从计算机中获得 200 万位数字的  $\pi$ ，我仍然和以前一样愚蠢。

**如果你有一个美妙的定理，它有一个同样美妙的证明，但需要计算一千个案例，你会介意将它交给计算机吗？这是一个真正的证明吗？**

它将是一个真正的证明，但我对书面证明也有同样的保留。编程中可能会出现错误，计算实现中可能会出现错误，最后我们对如何分类所有案例的理解也可能出现错误等等。我们有这些证明的例子。我们有四色定理和简单群的分  
类。在这两种情况下，大量的组合材料部分地通过计算机计算处理。因此，仍然存在疑虑和重新检查计算的需要，但最重要的是，要想出新视角来看待问题。

**让我向你提出一个关于数学的问题。近年来，数学界似乎强调应用。你认为与应用数学相比，纯数学会有问题吗？你是否有这样的印象，未来的资金只会流向那些领域？**

应用数学要求并获得比纯数学更多的资金。但我认为这实际上不是分配有限资源的问题。数学家不需要也不会花费太多的钱。这是一个公众关注和公共价值观的问题。我看到我们的社会与传统启蒙价值观日益疏远，公众不愿意花费在数学上，可能也包括大学教育。如果数学成为受害者，那将是这个普遍过程的受害者，而不是资金流向应用领域的事实。但是，我肯定认为，在定量资源分配和对年轻人吸引力方面，将会不断向应用领域转移。应用数学与计算机模拟有关，包括计算机、数据库、程序等。我曾经翻译过 Donald Knuth 的一次演讲。在乌兹别克斯坦，有一个会议专门研究 Al'khorezmi。Knuth 以一个有趣

的陈述开始了他的演讲。在他看来，计算机对数学界的主要重要性在于，那些对数学感兴趣但拥有算法思维方式的人终于能够做他们想做的事情了。在此之前，这个子文化不存在。Knuth 描述了他自己是一个专门为编写软件设计的人，他很高兴终于能够做自己想做的事情。我认真对待这个论点，并相信在未来潜在数学家的社群中，有一个子社群的思维更适合编写计算机程序而不是证明定理。在上个世纪，他们可能会证明定理，但现在却不会了。我非常怀疑，例如欧拉今天会花费更多的时间编写软件，因为他花费了大量的时间来计算月球位置表。我相信高斯也会花更多的时间坐在电脑前。

**让我们回到应用数学的问题。数学通常是成功的，但计算机科学人员获得了大部分荣誉，这难道不是真的吗？一个标准的例子是计算机断层扫描。我曾经和很多人谈过，但没有人听说过 Radon 变换，这是计算机断层扫描的核心。即使是受过教育的人也认为这是计算机科学家的独家工作。**

问题在于，试图通过说它们有用来证明自己的担忧存在内在的弱点。有用是一种工程学的词语。无论你对量子力学（或芯片或其他什么）理解多少，它仅仅是纸面公式的理解。它本身没有任何用处。只有当它被应用于事物并成为工程化的时候，它才变得有用。

**数学家们应该采取攻势吗？他们应该走出去，宣传我们的成就吗？我们是否太不情愿宣传自己的成就了？**

我强烈主张保持谨慎。我是一个相当隐居的人，我不喜欢把我的观点强加给公众。我认为任何好的东西最终都会被发现，尽管存在一个出售文化的普遍问题——假设我们正在创造一些文化价值的东西。这取决于公众是否愿意为此



付费。当然，我们中的一些人可能必须试图证明他们很重要，但我认为这很难。如果你无法证明自己有用，那么你该如何争辩呢？Rembrandt 怎么可能争辩自己在完全的痛苦中濒临死亡，成为一个贫穷的人。他该如何争辩？我不知道数学到底是什么。但文化也是如此，因为同样地，我们不知道 Rembrandt 的画作是关于什么的，为什么他描绘人物——如他所做的——一个老人和背景。为什么这很重要？我们不知道。这就是文化的问题：你不能说“为什么”。

**有很多受过教育的人真的想知道数学是什么。他们说，当他们问数学家在做什么时，通常的回答是：这太复杂了，我无法解释。我们应该改变这种态度吗？我们应该至少向那些想要了解的人解释数学吗？**

14 岁之前，我住在克里米亚，那是一个省份，我不知道实际上有大学存在。我已经学过一些数学，基础微积分，因为我有一个好老师。但我不知道这个兴趣可以做什么，可能的职业是什么。然而，在图书馆和书店里，我发现了几本书，这些书帮助我非常了解什么是数学。我找到了 Courant/Robbins 和 Polya 和 Szego。我绝对不觉得我无法学习数学是什么。所以我不明白这些人在说什么。只要去图书馆，有很多解释数学是什么的书。如果你懒得拿一本厚厚的书，那就拿任何一期《数学智能》或《美国数学月刊》开始阅读。

**你认为数学的文化作用是什么？**

在我看来，人类文化的基础是语言，而数学是一种特殊的语言活动。自然语言是一种非常灵活的工具，用于传达生存所需的基本要素，表达自己的情感和实现自己的意愿，创造诗歌和宗教的虚拟世界，诱惑和说服。然而，自然语言并不非常适合获取、组织和保持我们对自然的不断增长的理解，这是现代文

明最显著的特征。亚里士多德可以说是最后一个将语言能力推向极限的伟大思想家。随着伽利略、开普勒和牛顿的出现，自然语言在科学中的作用被降级为把实际的科学知识编码成天文表、化学公式、量子场论方程、人类基因组数据库等等，作为高层次的中介者，与我们的头脑相连。在研究和教学科学时使用自然语言，我们带来了我们的价值观和偏见、诗意的意象、对权力和骗子技巧的激情，但对于科学话语的内容，没有任何真正必要的东西。一切必要的东西都是通过长长的、更或者更不好地结构化的数据列表或者数学来传达的。数学最初是用来更好地描述数据结构的，逐渐将它们压缩到一定程度，以至于我们开始谈论“自然法则”，生成和解释无限多的现象。此外，在其内部发展的过程中，受其内在逻辑的推动，数学创建了极其复杂和内部美丽的虚拟世界，这些世界无法用自然语言描述，但挑战着多代许多专业人士的想象力。因此，我认为数学是文化中最值得称道的成就之一，我的终身职业是研究员和教师，每个工作日结束时，我仍然感到敬畏和钦佩。然而，在当代科学和人类价值观的公共辩论中，我不相信我能令人信服地捍卫这种信念。

### **你为什么这么悲观？**

我将开始解释我的悲观主义，提醒大家在当前的用法中，“文化”已经成为一个深刻的自我参照的词。也就是说，任何文化的定义都是由先前的文化背景决定的，即使后者没有明确表述。这意味着没有可能进行客观的文化评价。此外，任何关于文化的权威声明都会改变文化的公众形象，从而改变文化本身。任何涉及文化的集体讨论都成为文化的一部分。最重要的是，现代文化话语在很大程度上受制于政治话语。四十年前，C·P·斯诺发起了“两种文化”的讨论，我们对所有这些都没有太多意识。基本上，斯诺担心的是在他的环境



中，科学知识不被视为文化人教育的有机组成部分，与希腊人和莎士比亚相反。此外，人们可以公开甚至自豪地承认对基本物理定律的无知，而不会损害他或她作为文化人的形象。斯诺认为这是对文化实际内容的扭曲公众认知的结果，并希望公共辩论和改革教育能够帮助恢复平衡。

### “两种文化”的论题仍然具有现实意义吗？

这个观察对我们的现实意义取决于我们是否能够认同他理想化的大写“文化”概念，包括荷马和巴赫、伽利略和莎士比亚、托尔斯泰和爱因斯坦。恐怕这种认同能力已经大大丧失。事实上，多元文化主义的普遍观念创造了许多同等有效的文化形象，每种文化都被分配给少数族裔，并基本上与该少数族裔的定义相吻合。欧洲起源和/或培养的大文化被与其他地区文化并列，并受到文化帝国主义和欧洲中心主义等贬义内涵的削弱。环保主义者指责科学和技术的破坏性用途，进一步削弱了它们的文化吸引力。具有讽刺意味的是，科学家们用来证明他们职业道德的同样论点现在被用来反对他们。解构主义和后现代话语趋势对至少可以追溯到伽利略和培根的认识科学真理的基本标准产生怀疑，并试图用极为任意的智力建构来取代它们。因此，许多有影响力的思想家不仅忽略了，而且积极否定了当代文化的科学对应物。我可能（就像我所做的那样）发现这种情况令人遗憾，但我不能现实地指望在可预见的未来有实质性的改善。事实上，所有促成它的因素都是相当近期的，而且很难很快失去它们的动力。具有讽刺意味的是，当代西方文化的自我贬低立场是其自由主义价值观发展的逻辑延续，而启蒙和科学对此做出了如此重要的贡献。在这种情况下，除了数学家的少数人之外，任何讨论数学文化作用的讨论都注定是无关紧要的。

回到数学的未来。你个人是否有一个理论，你会说：“如果我还能活得长久，我希望看到它在下一个世纪得到发展。”

这我不知道的原因是：在我的科学职业生涯中，我几次改变了自己的研究方向，这并不是因为我发现有些事情比其他事情更有趣。基本上我觉得一切都很有趣，但是不可能同时做到一切。第二个最好的策略是依次尝试掌握几个领域。我一直对数论和物理学两个领域很感兴趣。所以我认为在这两个领域中，我总是试图利用在这两个领域中发展的直觉。理解数论问题帮助我理解物理问题，反之亦然。在我的私人价值观列表中，“*varietà*”这个文艺复兴时期的术语占据了一个荣誉地位，它意味着通过伟大的思想家实现的生活和世界的丰富性，匹配着各种经验和思想的多样性，我们试图效仿他们。