

---

## 目录

惠更斯与巴罗，牛顿和胡克.....	2
第一章：万有引力定律.....	4
1. 牛顿和胡克.....	4
2. 落体问题.....	8
3. 反比平方定律.....	13
4. 《自然哲学数学原理》.....	15
5. 球体的吸引力.....	17
6. 牛顿证明了轨道是椭圆形吗？.....	20
第二章 数学分析.....	23
7. 幂级数分析.....	23
8. 牛顿多边形.....	24
9. 巴罗.....	25
10. 泰勒级数.....	29
11. 莱布尼兹.....	30
12. 论分析学的发明.....	34

---

## 惠更斯与巴罗，牛顿和胡克<sup>1</sup>

---

1987 年是牛顿《自然哲学的数学原理》出版 300 周年纪念日，这本书奠定了现代理论物理学的基础。准确地说，理论物理学始于这本书。同时，数学分析也开始了。第一篇关于分析的文章发表于 1684 年，这并不是牛顿发现的，因为他没有在这个领域发表他的发现，而是莱布尼兹。

当我们谈论《自然哲学的数学原理》的内容时，我们应该考虑这本书是如何写成的，它是从哪里产生的，解决了哪些问题，何时创建了分析，为什么创建了分析，为什么叫它分析，它的基本思想来自哪里，例如，为什么在分析中我们谈论函数等等。所有这些问题都涉及到牛顿在 17 世纪末期的时代，当时一群杰出的数学家正在工作。随后数学的发展完全掩盖了他们的成就，因此那个时代的宏伟发现在我们看来似乎比它们实际上少。除了最著名的笛卡尔、帕斯卡和费马，在牛顿和莱布尼兹之前，以及稍晚一些工作的约翰·伯努利之外，我们必须提到巴罗，牛顿的直接前任和老师，以及惠更斯，他解决了与牛顿和莱布尼兹相同的问题，但通常比他们更快，甚至没有使用任何分析。

惠更斯的数学发现遭遇了奇怪的命运。其中大部分并不是在他的生命中进入分析领域的，而是在很多年后，主要归功于其他数学家的工作（例如汉密尔顿，他在 100 多年后工作）。这些结果现在以辛几何、变分法、最优控制、奇

---

<sup>1</sup> 这本书是 1986 年 2 月 25 日莫斯科数学学会学生讲座系列开幕式上所作的演讲的扩展版。作者感谢 A. Yu. Vaintrob 传递了他的演讲记录，以及 V. L. Ginzburg、A. P. Yushkevich 和 G. K. Mikhailov 提供的有用意见。演讲中还补充了来自文章“三百年的数学科学”（Priroda, 1987 年，第 8 期，第 5-15 页）和“开普勒第二定律与阿贝尔积分的拓扑”（Kvant, 1987 年，第 12 期，第 17-21 页）的材料。

作者感谢纽约大学的款待，他在那里参加了 1988 年詹姆斯·阿瑟讲座系列“时间及其奥秘”的部分内容被纳入了本书，并感谢约翰·H·洛温斯坦为本演讲制作电脑图像的帮助，其中部分内容被重现在本书中。

---

点理论、灾变理论等形式进入科学。我们现在才开始了解其中的一些。例如，最近在 Bourbaki 研讨会上，Bennequin 的一次讲座使人们清楚地看到，由 Johann Bernoulli 的讲座编写的分析教材，包含了 Coxeter 群  $H_3$  的不规则轨道流形的表示（由一个二十面体的对称平面的反射生成）。这个表示并不是与二十面体的对称群有关，而是作为研究具有拐点的平面曲线的演化线和演化面的结果，这些研究非常接近于惠更斯的研究（甚至可能是他进行的，尽管第一篇发表似乎是由 l'Hopital 完成的）。在关于二十面体和演化线和演化面奇点之间联系的最近著作中出现的插图，应该说，现代数学家们并不轻松地用计算机获得，但在当时就已经知道了。

我们将回到演化线和演化面，我现在谈论的是牛顿的《自然哲学的数学原理》的历史和这本书的主要内容。本质上，这本书是为了解决一个特定的问题而写的。尽管它包含了所谓的牛顿三定律和大量其他材料，但实际上它只是在不到一年的时间内写成的，目的只是为了呈现这个问题的解决方案，即在与吸引中心距离的平方成反比的力场中的运动问题。

故事的第一部分是这个问题从哪里来的，牛顿为什么开始研究它，以及在这个方向上他证明了什么。这是牛顿和胡克的故事。

---

# 第一章：万有引力定律

---

## 1. 牛顿和胡克

牛顿的名字和他在数学和物理学领域的巨大贡献是众所周知的。他出生于 1642 年，也就是伽利略去世的那一年，去世于 1727 年。牛顿在引力理论领域的工作因伏尔泰而在欧洲大陆上得到了广泛的知名度。伏尔泰在牛顿晚年时访问英国，并宣传了普遍引力定律，这给他留下了深刻的印象。伏尔泰向世界介绍了著名的苹果故事，这是牛顿的侄女凯瑟琳·巴顿告诉他的。

罗伯特·胡克是牛顿的前辈，但知名度远不及牛顿。他出生于 1635 年，去世于 1703 年。胡克是一个贫穷的人，开始担任博伊尔的助手（现在因胡克发现的博伊-马里奥特定律而闻名）。随后，胡克开始在刚刚成立的皇家学会（即英国科学院）担任馆长。皇家学会馆长的职责非常繁重。根据他的合同，每次学会会议（除了暑假期间每周都有会议）他必须展示三到四个证明新自然法则的实验。

胡克担任馆长职位长达四十年，他一直认真履行职责。当然，合同中没有规定所有要展示的法则都必须由他发明。他可以阅读书籍，与其他科学家通信，并对他们的发现感兴趣。他只需要验证他们的陈述是否正确，并让皇家学会成员相信某个法则是可靠的。为此，必须通过实验证明这个法则，并展示相应的实验。这是胡克的官方活动。

在履行职责的过程中，胡克对其他人在自然科学方面的所有发现都感兴趣，但也需要他自己进行发现。在他生命的最后阶段，他数了一下自己发现了

---

500 个定律。需要指出的是，胡克的许多发现构成了现代科学的基础。其中很多发现与其他科学家几乎同时发现，因此现在经常归因于其他人的定律实际上是胡克发现的。因此，弹性定律（力与伸长成正比）以胡克的名字命名，但是他的其他发现则以其他人的名字命名。例如，胡克发现了植物的细胞结构。他改进了显微镜，并首次观察到植物由细胞组成。他在显微镜下仔细观察各种物体，他看到的每一件事情都会画出来。显然，当他在显微镜下看到新事物时，他很快就会发现新的东西。胡克亲自雕刻了他在显微镜下看到的图片，甚至基于此出版了一本名为“显微术”的书，后来导致了列文虎克的著名生物学发现。

当时进行基础性发现很容易，并且有大量的这样的发现。例如，惠更斯改进了望远镜，观察了土星并发现了它的环，胡克发现了木星上的红斑。当时发现并不是不寻常的事件，它们没有被记录，也没有被专利，它们是相当普遍的事件。（这不仅适用于自然科学，数学发现在那个时候也像从丰盛的角落里倾泻出来一样。）

但是胡克从未有足够的时间去深入研究他的任何一项发现并详细发展，因为在接下来的一周里，他需要展示新的定律。因此，在胡克的众多成就中，他的发现显得有些不完整，有时当他匆忙时，他会做出无法精确并具有数学严密性的断言。

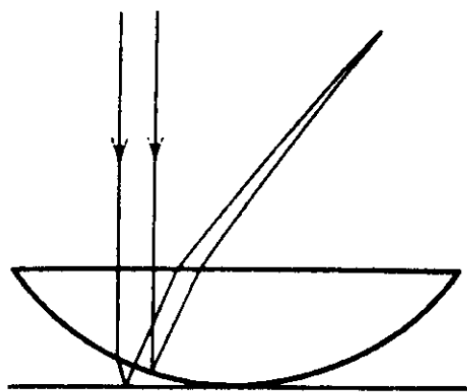
胡克声称之一的发现是光的波动性质。（大约在同一时间，休谟声称光是波动的。）胡克基于对薄膜颜色（例如肥皂泡）的研究得出结论。他假设光在肥皂膜中的干涉证明了它的波动结构。这引起了胡克和牛顿之间的第一次冲

---

突。牛顿也探讨了光的问题。他将白光分解成彩虹的组成部分，确定了太阳光谱的颜色，从而奠定了现代光谱学的基础，这是一门相当波动理论的科学。

然而，牛顿坚持另一种理论，并假设光由移动的粒子组成。声音由波组成，因此声音可以绕过障碍物弯曲（即使来源被山丘遮挡也可以听到声音，因此基本上山丘对声音不构成障碍），但光不能绕过障碍物弯曲，我们无法看到山丘后面的东西，因此光不能由波组成。

尽管有关光是由粒子组成的说法，牛顿却是第一个测量光波长的人。他是这样做的：如果我们在玻璃上放置一个透镜，从上方照射光线（图 1），那么汇聚在一个点上的光线路径长度将不同，根据路径长度的差值是否是波长的整数倍，光线将会增强或抵消。因此，从上面看玻璃，我们可以看到由等亮度点组成的环形（这些被称为牛顿环，尽管胡克发现了它们）。重要的是，透镜和玻璃之间的空气楔形厚度与接触点到距离的平方成比例。由于这个原因，环的半径与透镜的曲率半径和波长的乘积的平方根成比例。因此，环的半径不会像波长那么小，可以观察到这些环。通过测量这些环，我们可以找到光的波长，这就是牛顿所做的。但是，如果他不相信光的波动性质，他是如何计算波长的呢？我们关注的是牛顿光学理论的具体特征。他认为光粒子在空间中飞行不均匀，而是在运动时经历周期性的攻击（发作——类似于现代粒子内部自由度的思想）。因此，他测量了相邻两次攻击下粒子位置之间的距离。



**Fig. 1.**  
**Formation of Newton's rings**

因此，牛顿和胡克之间出现了分歧。如果没有加剧的情况，他们可能本可以避免这些分歧。牛顿住在剑桥，胡克住在伦敦，他们之间的通信主要通过皇家学会的秘书奥尔登堡进行。看起来，奥尔登堡的性格不太好，他很喜欢在人们之间制造麻烦。结果，由于光的本质不同，牛顿和胡克之间的关系完全恶化了。但是过了一段时间，奥尔登堡去世了（我们将在谈论分析时回到他身上），胡克写了一封让步的信给牛顿。这封信写于 1679 年 11 月 24 日，实际上是普遍引力定律历史的开始（5）。

胡克写给牛顿的调和信的主旨是建议共同工作。胡克认可牛顿的著名成就，建议他们讨论和实验验证所有可能的想法和理论。胡克特别建议牛顿表达他对几个胡克的猜测的想法，并承诺不会因批评而生气，并放弃他们的旧分歧，共同研究自然。在这封信中，胡克告诉牛顿最新的物理和数学新闻。新闻中的一个项目是最新的行星运动理论，它来自欧洲大陆。根据这个理论，假定外层空间不断肆虐着旋风，它们把行星带着运动、支持它们，并因此迫使它们绕着太阳旋转。另一个理论是胡克关于引力的猜测。在这封信中，他没有详细提到它，只是询问牛顿对这个猜测的看法。胡克的另一个猜测是弹性物体振荡

---

的定律。在这封信中，胡克讨论了法国探险家皮卡德对子午线长度（因此是地球半径）的新测量。

牛顿很快回答了这封信——在四天内。这封牛顿于 1679 年 11 月 28 日写下的杰出信件以承认他正在结束哲学并最近关注其他事情开头。显然，年龄正在告诉（牛顿已经 37 岁，这是一个对数学和其他哲学分支感兴趣变得困难的年龄）。牛顿写道：“我甚至都没有听说过你把行星的天体运动组合在一起的假设……虽然这些无疑是哲学界所熟知的……我的哲学热情已经消磨殆尽，以至于我对它几乎像一个商贩对另一个商贩的行业或一个农民对学问一样不关心……”。

当时，“哲学”一词指的是所有精确科学。当时物理被称为自然哲学。牛顿写的其他 15 个问题似乎都是关于他对炼金术的热情。（显然，他并不认为这是哲学，尽管这门科学的目的在于寻找炼金术士的石头。）牛顿有一个大型的化学（或者，如果你愿意，炼金术）实验室，在 20 到 30 岁期间，他在数学和物理学上进行了大量的工作，并且主要关心的是获得黄金。他收集了许多中世纪保留下来的炼金术配方，并打算按照其中包含的指示制造黄金。他在这方面花费的努力显著大于他在数学和物理学作品的创作中所花费的努力，但他没有得到任何有用的结果。尽管有时牛顿并不相信这一点。据说在他的笔记本中（他详细写出了他的实验，描述他混合了什么，得到了什么结果，这样如果他偶然得到了黄金，他可以重复这个过程），有一条记录，其中在详细描述他所做的行动之后，他讨论了结果：“可怕的臭味。看来，我接近目标了。”

## 2. 落体问题



---

让我们回到牛顿的信中。他进一步写道，尽管他已经在这样一个崇敬的年龄决定不与年轻的头脑竞争，但他可以提出一个问题，似乎值得像胡克这样出色的实验者来验证。这就是哥白尼理论的问题。正如哥白尼所断言的那样，地球绕着太阳运转，也绕着自己的轴旋转。牛顿建议通过实验来验证第二个断言。实际上，根据伽利略的不变性原理，发现自身的匀速直线运动是不可能的，但原则上旋转仍然可以被观察到。因此，牛顿说，为了说服那些不相信哥白尼理论的人（例如天主教会直到 1837 年才承认这一点），有必要进行实验验证。显然，牛顿是第一个提出实验证明地球自转问题的人。此外，在向胡克提出这个问题时，牛顿提出了一种方法，原则上可以实现这一点。

牛顿的建议是这样的。如果地球自转，那么自高处自由落下的物体将从垂直方向偏转。因此，只需测量重球从垂直方向（通过铅垂线确定）偏离的程度，就可以发现地球的自转。

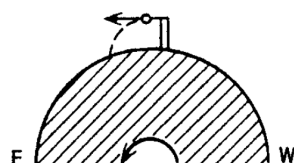


Fig. 2.  
A trajectory in a non-rotating space

牛顿在这封信中说，实际上，想象我们从北极望向地球，看到赤道和一座山，或更好的是一座塔，从其中自由落下的球最初是静止的（图 2）。假设哥白尼是对的，地球从西向东旋转。牛顿写道，一个无知者会认为，在球下落时，地球会向东旋转，球将落在原来位置的西边。但这种观点经常被用作对哥白尼理论的反对意见，是完全错误的。错误在于，在球下落时，它相对于“固定”的参考系具有非零的初始速度，指向东方。此外，球在地球上方，因此其

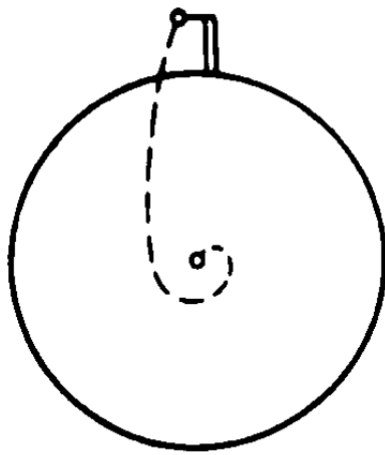
---

速度大于地球表面上的点的速度。但是，球在水平方向上的速度在下落期间不会改变，因此它在东方方向上行驶的距离比它所在的表面点要长。因此，球应该落在该点的东边，而不是西边。

但是这种观点经常被提出作为反对哥白尼理论的异议，是完全错误的。错误在于当球落下时，它相对于“固定”的参考系具有非零的初始速度，指向东方。此外，球在地球上空，因此它的速度比地球表面上的点的速度更快。但是球在水平方向上的速度在下落过程中不会改变，因此它在东向上行进的距离比它所在的地表点更远。因此，球应该落在这个点的东边，而不是西边。

如果球不是在赤道上落下，而是在 0 度纬度上落下，那么这种影响将会稍微小一些，但牛顿说，仍然应该有可能发现它。当然，这个影响非常小，所以牛顿建议采取以下措施。在从北到南的方向上，从垂直于落点的位置上，必须放置一个“钢”物，然后悬挂可能更重的球，用线穿过球并燃烧，以避免不必要的初始震动。然后，如果我们多次放下一个球，并计算球多少次在撞击钢物后向东飞行，多少次向西飞行，通过比较这两个数字，我们可以确定是否可以观察到微小的向东偏转。

在他给胡克的一封信中，牛顿谈到了另一个问题。他讨论了如果地球中有一个轴，球经过表面后会如何运动（也就是说，球在穿过地球时没有遇到任何阻力）。牛顿假设球将沿着一个螺旋线运动，并在信中画了这个螺旋线以便更清楚地展示（图 3）。



**Fig. 3.**  
**A trajectory inside the**  
**Earth according to**  
**Newton**

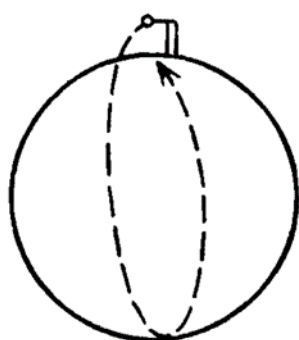
胡克在 1679 年 12 月 4 日的皇家学会上读了牛顿的信。这引起了热烈的讨论，其中许多科学家参与了讨论。每个人都在讨论牛顿所描述的现象是否真实存在，以及球应该偏转到哪一侧。例如，皇家天文学家弗兰姆斯蒂德根据学会的议定书发表了声明，称这种效应在炮兵中早已被知晓。弗兰姆斯蒂德认为，炮弹以  $87^\circ$  的仰角掉回炮口，这表明地球正在自转，否则危险的角度将是  $90^\circ$ 。换句话说，弗兰姆斯蒂德建议对牛顿的建议进行轻微修改。他建议竖直向上发射炮弹，看看它们是否会掉回来。

霍克在接下来的 12 月 11 日的会议上发表了一些有关牛顿论据的批评意见，牛顿无法忍受任何批评，于 12 月 13 日回信长篇论述了这个问题，清楚地表明当时牛顿不知道球的轨迹应该是什么样子的。

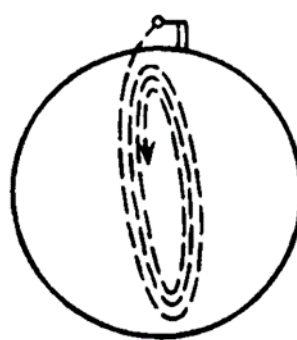
首先，牛顿的理论非常不完整。必须考虑到垂直方向(指向地心的方向)在球的运动过程中会发生变化，因此轨迹不同点上的重力方向也不同。这导致向东移动的球会受到一个偏向西方的影响。因此，虽然球仍然会掉落在铅垂线的

东侧，但实际偏转的角度将小于牛顿预测的值。如果我们根据现代知识进行准确的计算，我们会发现真实效果是牛顿应得偏转角度的  $2/3(6)$ 。因此，由于到地心的距离的差异而引起的向东移动和由于重力方向的差异而引起的向西移动是同等级别的量，因此牛顿的定性论据完全是错误的。如果这两种效应，即向东偏转和向西偏转的关系稍有不同，那么定性图像将会有所不同。

其次，胡克正确地观察到，在北半球，一个球不仅会偏向东方，还会偏向南方。此外，他声称（由于不可理解的原因），在我们的纬度上，向南的偏转甚至比向东的偏转更大。最后，胡克提到了一个关于球在地球内部运动轨迹的评论。他说，牛顿所描述的螺旋轨迹让他有些怀疑。在他看来，在地球内部，大约会发生与在绳子上摆动振荡相同的情况，如果一个球在地球内部自由运动而不经阻力，那么它的轨迹将是封闭的，并且会提醒我们一个椭圆形（图 4），螺旋只能通过考虑空气阻力来获得。但在这种情况下，获得的螺旋与牛顿的不同，不会形成一个循环，而是缓慢地绕着大量旋转（图 5）。



**Fig. 4.**  
**Trajectories inside the Earth**  
**according to Hooke**



**Fig. 5.**  
**Taking account of air resistance**  
**according to Hooke**

事实上，如果我们用现代方法解决这个问题，我们会发现在地球内部，作用的不是普遍引力定律，而是胡克定律——引力与距离中心的距离成正比。因此，在地球内部，球的轨迹与弹性振荡（或挂钟摆）相同，即椭圆形。

---

胡克不仅在理论论证方面批评牛顿，还决定进行实验验证。他在 12 月 18 日向皇家学会报告了他的结果。他的实验组织方式有所不同，不像牛顿建议的在水层下放置“钢球”，而是在“填满烟斗泥”的盒子里放置，以减弱冲击力。在盒子上，有一张细线网格，中心在悬挂点下方，可以从球的轨迹中确定向西或向东的偏转，以及南北方向的偏转。球首先在露天放置，后来在教堂从约 9 米的高度落下，门窗要仔细关闭，以保护球免受气流的有害影响。如果一切都经过适当计算，考虑到湍流的影响，那么很明显，在这样的小高度下不可能观察到任何影响（理论偏转为 0.3 毫米）。

但胡克是一位非常熟练的实验者。在此之前，这个实验还没有被完成，但胡克“完成”了。胡克告诉皇家学会，在三次试验中，每次都至少将一个球向东南偏转了四分之一英寸。显然，他没有掌握统计分析，试验次数也不够多。此外，他很可能没有在相应的显著性水平上验证结果的偏转，并认为这种现象已经被证实，即使没有清楚地证明任何事情。在 1680 年初，胡克再次重复了他的实验，并再次“成功”。他在 1 月 6 日发给牛顿的一封信中告诉他他的结果。

### 3. 反比平方定律

除了他的实验记录外，霍克的这封信还包含了以下重要的话：“我的假设是，吸引力始终与距离中心的倒数成二次比例，因此速度将与吸引力成亚二次比例，因此，就像开普勒所假设的那样，速度与距离的倒数成反比例.....哈雷先生从圣赫勒拿回来后告诉我，他的摆在山顶上比在山脚下慢，这让他非常惊讶，无法想象原因。但我立刻告诉他，他解答了我长期以来想知道的问题.....就

---

是想知道重力是否真的在距离中心更高的地方实际上会减小.....我提到了关于地球内部下降的事情.....不是我真的相信地球的中心存在这种[反比于距离平方]的吸引力，相反，我认为，越接近中心，它受到的吸引力会越小，可能有点像摆或在凹面球体中移动的物体的引力，其中力量随着物体越接近水平运动而不断减小.....但在天体运动中，太阳、地球或中心体是引力的原因，尽管它们不能被认为是数学点，但它们可以被认为是物理点，远离中心的吸引力可以根据前面的比例[反比于平方]计算，就像从“中心”一样.....”。

这个反比平方定律显然是胡克在第一封信中提到的引力胡克理论，而在胡克看来，在研究物体在地球内外的落体问题时，必须考虑到这个定律。胡克写道，在地球内部，这个定律当然是不同的，因为物体穿过的每一层将以不同的方向吸引它。因此，在内部的运动定律显然类似于弹性振动中观察到的定律。胡克还写道，当他研究这些力的定律时，他试图确定物体必须移动的轨道形式。他得出的结果是，在地球内部，轨道将大致相同于摆的振动，而在只有一个吸引中心的外部，物体将沿着他称之为偏心椭圆轨迹运动。

最有可能的情况是这样的。胡克没有必要的数学技巧，无法准确地解决从反比平方定律得到的运动方程，为了找到轨道，他在模拟机器上数字、图形或模拟地将这些方程积分。他有这样一台机器：他研究了各种引力定律下的运动性质，将引力模拟为平面对通过其滑动的重量的作用。(我们观察到，所有这些都发生在牛顿写下他的书并陈述了力学的普遍规律之前六年。根据我们现代的想法，在当时还没有力学。尽管如此，在这个力学之前，胡克找到了反比平方定律下运动方程的近似解，而休谟则陈述了能量守恒定律。当然，休谟没有给出它的最一般形式，但在他的公式(7)中，这个定律适用于我们的情况，并使我

---

们能够意识到，在没有空气阻力的情况下，地球内的石头轨道必须是封闭的。) 胡克积分了运动方程，画出了轨道，并看到它们类似于椭圆。这就是“椭圆体”这个词的由来。他的科学诚实不允许他称它们为椭圆，因为他不能证明它们是椭圆形的。胡克建议牛顿这样做，说他毫不怀疑牛顿用他的卓越方法可以解决这个问题，并检查开普勒的第一定律(它断言行星的运动是椭圆形的)是否也可以从反比平方定律中得出。

霍克写信给牛顿提出了一个建议，但由于没有时间处理数学细节，他转向了后来的发现。牛顿保持沉默，除了一次向霍克发送了一位意大利医生的请求，希望与皇家学会合作，并借此感谢他提供的有关落球实验的信息外，再也没有给霍克写信了。他从未提到这份信函（尽管他保留了这些信件），也没有提到霍克提出了引力问题这一事实。

但牛顿接受了这个问题，研究了运动定律，检查了椭圆轨道是否真的被获得，并证明了反比平方定律是由开普勒轨道椭圆性定律推导出来的。为了将这个问题正确地呈现出来并以易于理解的方式呈现出来，他需要阐明基本原理，涉及诸如质量、力和加速度等一般概念。这就是著名的“牛顿三定律”产生的方式，牛顿本人并不自称（第一定律，即伽利略的惯性定律，早已为人所知，其他两个定律不能晚于霍克的弹性定律或惠更斯的离心力公式被发现）。但在普遍引力定律方面，牛顿的行为不太谨慎。

#### 4. 《自然哲学数学原理》

天文学家哈雷（1656-1742）的倡议下，牛顿写了一篇题为《自然哲学数学原理》的详细报告，并于 1686 年 4 月 28 日将其送到皇家学会。在手稿中，霍

---

克的名字没有被提到。哈雷是他们两个人的朋友，对此非常不满，并说服牛顿插入对霍克的引用。牛顿被说服了，但用了一种非常独特的方式。他写道，反比平方定律对应着开普勒第三定律，“正如伦、霍克和哈雷独立地声称的那样”。伦和哈雷当然不是随意的人物。伦是一位建筑师，皇家学会的创始人之一，与霍克一起忙于 1666 年大火后伦敦的重建，并积极参与了有关物体运动问题的讨论。哈雷事后预测了他名字的彗星回归，他花了很多精力迫使牛顿写这本书，他在圣赫勒拿岛上的时钟实验是引力定律的实验确认。因此，将霍克置于他们之间，牛顿不仅贬低了他的角色，而且剥夺了他在即将开始的关于优先权的争论中朋友的支持。

在这里，适当地说一些有关我们英雄的物质状况。霍克很穷，靠皇家学会支付的薪水生活。他做了一些额外的工作，利用他广泛的机械知识，在伦敦大火后进行了巨大的修复工作。这些建筑收入最终帮助他创造了一定的财富。担任剑桥大学主席的牛顿赚了相当多的钱（每年 200 英镑），他继承的农场（他将其出租，著名的苹果树在那里生长）给他带来了大约相同的收入。尽管牛顿相当富裕，但他不想在出版这本书上花费任何钱，因此他将《自然哲学数学原理》送到皇家学会，该学会决定自费出版这本书。但是该学会没有钱，因此手稿就一直放在那里，直到哈雷（他是一个富有的肥皂制造商的儿子）自费出版了它。哈雷自己承担了出版这本书的所有麻烦，甚至自己读了校样。牛顿在此期间的通信中称其为“你的书” ...

在与哈雷的通信中，牛顿回应了引用胡克的请求，他写下了一句引人注目的话，揭示了他对数学家和物理学家之间差异的看法。牛顿认为自己是一名数



---

学家，而胡克是一名物理学家。以下是他描述数学家和物理学家在自然科学中方法差异的方式。

“那些发现、解决和完成所有工作的数学家，必须满足于成为干燥的计算机和苦工，而另一个什么都只是假装和抓住所有东西的人，必须把所有的发明都带走，无论是那些在他之后的人还是那些在他之前的人...而且...我现在必须公开承认，我所有的知识都是从他那里得来的，所以我自己什么也没有做，只是在计算、证明和写作伟大人物的发明方面苦干。”

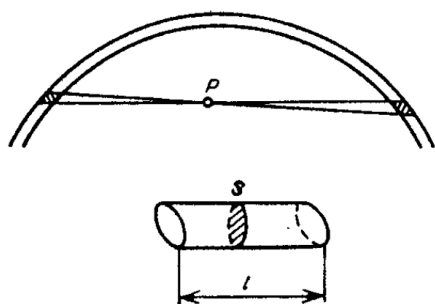
必须说，牛顿在没有使用分析的情况下完成了《自然哲学的数学原理》中包含的所有发现，尽管他当时掌握了它。他通过直接的基础几何证明了所需的一切，这些证明更或多或少等同于分析（而不是将分析计算转化为几何语言）。

## 5. 球体的吸引力

让我们以牛顿的论证为例，看看他是如何证明内部有石头的伊尔厄尔堡不受外层的作用，也就是说，在一个均匀的重力场中，重力场内部不会对石头产生作用。早先这个事实在俄罗斯的高中里学习过，但现在已经不在课程中了，因此这个引人注目的证明可能不是普遍为人所知。

让我们考虑一个点  $P$  位于一个由无限薄的球形层界定的球内（图 6），取一个以  $P$  为顶点的小立体角，并证明由此角切出的两个无限小体积对放置在  $P$  处的物体施加的力是平衡的。（现在，在教授分析时，讨论无限小量并不是非常流行的。因此，现代学生对此并不完全掌握。尽管如此，仍然有必要掌握它。）这两个体积是无限小的棱柱（它们的母线略微发散，但是这个开口量可

以被忽略，因为误差是高阶无限小），它们的体积可以从公式  $V = is$  计算得出，其中  $i$  是斜边的长度， $S$  是截面积。但是我们的棱柱的边是相等的，就像是由一对同心圆切出的线段一样，而截面的大小则与距离  $P$  的平方成比例。因此，这两个体积以相同的力在相反的方向上吸引  $P$  处的物体。以完全相同的方式，所有其他影响都是平衡的，因此所有力的结果为零。



**Fig. 6.**  
**Attraction of a spherical layer according to Newton**

牛顿的这个论证样例展示了如何在不使用分析、不了解调和函数理论、拉普拉斯方程基本解或单层和双层势的情况下解决潜在理论问题。在分析出现之前，类似的论证经常出现在那个时代的论文中，且被证明非常强大。这里是一个问题的例子，像巴罗、牛顿和惠更斯这样的人会在几分钟内解决，而现代数学家则无法迅速解决：计算...

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \tan x - \tan \sin x}{\arcsin \arctan x - \arctan \arcsin x}$$

牛顿还证明了，一个均匀的球体（或球形层）吸引外部区域的点，就好像它的质量全部集中在中心一样。牛顿的证明很基础，但并不容易（就像计算对应的积分一样）。下面给出的现代证明（由拉普拉斯提出）不幸地超出了俄罗斯高中所教授的科学范围（这并不奇怪），甚至超出了莫斯科国立大学数学力学学院的范围。

---

让我们考虑一种不可压缩流体的速度场，它充满了整个空间，并以球对称的方式从原点向半径方向扩散。这种流动的速度与距离源的平方成反比。

事实上，由于不可压缩性质，通过以源为中心的每个球体，在单位时间内流体通过量相同（与源产生的一样多）。由于电流的球对称性，这种流量等于球的面积与通过它的流速的乘积。但是球的面积与半径的平方成正比。因此，为了使流量不取决于半径，速度必须与距离的平方成反比。

因此，不可压缩流体的球对称流的速度随着距离中心的减少而减少的规律与重力力量的减少规律相同。（因此，显然，在  $n$  维空间中重力场的自然类比是什么：力必须与距离的  $(n-1)$  次方成反比。）

我们已经证明了一个物质点引力场具有以下显著的不可压缩性质：如果我们将其视为电流的速度场，则通过不包含引力点的任何有界域的边界的流量为零：它流入，它流出。

结果表明，在任何质量分布下，这些质量引力场外的引力场具有相同的不可压缩性质。因此，在两个不可压缩流的速度场相加时，它们通过任何表面的流量大小相加。因此，在两个不可压缩流的速度场相加时，我们再次获得一个不可压缩流的速度场：如果要添加的场的流为零，则通过该域的总场的流为零。因此，几个质量的总引力具有不可压缩性质（在引力质量外的域中）。

特别是，让我们考虑由均匀球（或球形层）引起的引力场。在外部域中，此场与不可压缩流的速度场重合（正如我们刚刚证明的那样）。它是球对称的。但是，不可压缩流的唯一球对称速度场与中心距离的平方成反比例关系。因此，该球（或层）吸引外部点就像放置在中心的质量一样。中心处的质量必

---

须与球（或层）的总质量重合，这一点通过比较包围所讨论的球的球体的流量是显而易见的。

这个定理，一个层不吸引内部点，也可以从这个论点中得出。\*[牛顿的两个定理（关于球形层对内部和外部点的吸引力）都可以扩展到同样比例椭球之间的层的吸引力（这里中心的作用由任何比所讨论的更小的共轭椭球扮演）。甚至可以用任何阶数的代数曲面代替椭球（9）。唯一重要的是，表面应是双曲线（它应与从某一点发出的每条线相交，交点数与表面方程的次数相同）。]

## 6. 牛顿证明了轨道是椭圆形吗？

为了总结普遍引力定律的描述，我们必须谈一些关于最近物理学期刊上发生的讨论。在过去，这种讨论是不可能的，但现在情况已经改变，得益于现代数学精神已经渗透到许多物理学家中，导致他们开始担心早先没有人会认真谈论的问题。许多物理学家参与了这个问题（可以在 R. Weinstock（10）的文章中找到它的描述），讨论的主题是：牛顿是否证明了开普勒第一定律是由普遍引力定律导出的？实际上，这就是这个问题。对于在重力作用下移动的物体的轨迹，牛顿定律给出了微分方程

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{k\vec{r}}{r^3}$$

牛顿在他的书中并没有按照科学的所有规则来解决这个方程，而是提出了许多解，并验证了对于任何初始条件，其中有一个解能够满足它。换句话说，在牛顿找到的轨道集合中，对于空间中的任何一点和向量，都有一条轨道最初穿过该点并具有给定的速度向量。如果物体的初始速度不太大，则轨道是椭圆形的。但是，有经验的物理学家问道，谁说不存在其他满足相同初始条件的轨

---

迹，沿着它物体可以以完全不同的方式遵守普遍引力定律移动？数学家知道，没有这种轨迹的存在被称为唯一性定理。因此，为了从普遍引力定律中推导出物体以这种方式而不是其他方式移动，牛顿不仅需要产生不同微分方程的许多解，还需要证明它的唯一性定理。他做到了吗？没有。那么，一般来说，在唯一性定理被证明之前，使用这个定律来描述现实是不可能的。谁是第一个做到这一点的人？约翰·伯努利。因此，是他而不是牛顿从普遍引力定律中推导出了开普勒定律，所有的荣耀必须归于他。参与讨论的物理学家们说的就是这样，重复了许多年前数学家们说过的话（例如，1941 年 A·温特纳的书中）。

实际上，这一切争论都基于一种深刻的错觉。现代数学家实际上区分了微分方程的存在定理和唯一性定理，甚至给出了存在定理满足但唯一性定理不满足的方程的例子（11）。因此，各种问题可能会出现，如果牛顿方程有问题，实际上就不可能得出任何推论。由于考虑函数类的无根据扩展，产生了错误的观点。事实上，在现代数学中，函数、向量场、微分方程的概念与经典数学相比已经具有不同的含义。谈到函数，我们可能会想到一个相当讨厌的对象——一些只能微分一次甚至根本不能微分的東西——我们必须考虑包含它的函数类，依此类推。但在牛顿时代，函数一词只表示非常好的事物。有时它们是多项式，有时是有理函数，但无论如何，它们在其定义域内都是解析的，可以用泰勒级数展开。在这种情况下，唯一性定理不是问题，在那个时候没有人想过它。但实际上，牛顿证明了一切，达到了更高的标准。以下定理是真实的。假设我们有一个微分方程

$$\dot{x} = v(t, x)$$

---

对于任何初始条件  $a$ ，我们都可以产生一个解  $x(t, a)$ ，其中  $x(0, a) = a$ ，而这个解在  $a$  上平滑地依赖（也就是无限可微）。那么这个方程的唯一性定理就成立了。

这个定理可以很容易地证明。从依赖于初始数据的平滑解的存在性可以得出，存在一个（局部）微分同胚，将原始的方向场矫正为标准的水平方向场（我们的解提供了这个微分同胚： $(t, a) \leftarrow (t, x(t, a))$ ）。矫正后的场显然满足唯一性定理，因为方程变成了  $\dot{a} = 0$ 。

因此，一般来说，唯一性不是从解的存在性得出的，但如果产生的解平滑地依赖于初始条件，一切都将有条不紊。

让我们看看牛顿做了什么。对于每个初始条件，他都产生了一个解，描述了它，并从这个描述中立即显而易见地得出了解平滑地依赖于初始条件。因此，唯一性是毫无疑问的，牛顿正确地证明了开普勒第一定律。

当然，有人可能会提出异议，认为牛顿不知道这个定理。事实上，他没有以我们刚才使用的形式陈述它。但他肯定知道它的本质，以及扰动理论的许多其他应用——牛顿的数学分析在很大程度上是扰动理论的一个成熟的理论。

---

## 第二章 数学分析

---

### 7. 幂级数分析

牛顿曾经说过，自然界的法则可以用他所发明的微分方程来表达。以前人们曾经考虑和解决过一些独立的、有时非常重要的微分方程，但是牛顿把它们转化成了一个独立而强大的数学工具。

牛顿发现了一种解决任何方程的方法，不仅是微分方程，还包括代数方程。他认为这是他最重要的成就，并在 1676 年 10 月 24 日写给莱布尼茨的一封信中（通过奥尔登堡发送，因此被称为“第二封给奥尔登堡的信”（*epistola posterior*））对分析进行了描述。

分析是一个相当难以定义的概念。牛顿理解分析是通过无限级数的手段对方程进行研究。换句话说，牛顿的基本发现是一切都必须用无限级数来展开。因此，当他需要解决一个方程时，无论是微分方程还是定义某个未知函数的关系（现在已知这是隐函数定理的一种形式），牛顿都会按照以下步骤进行。所有函数都用幂级数展开，级数互相代入，相同幂次的系数进行比较，然后逐个找出未知函数的系数。用这种方法瞬间证明了关于微分方程的解的存在性和唯一性定理，以及关于初始条件的依赖定理，只要我们不担心所得到的级数的收敛性。至于收敛性，这些级数收敛得如此迅速，以至于牛顿虽然没有严格证明收敛性，但对此毫不怀疑。他有收敛性的定义，并为具体的例子明确计算了级数的巨大位数（在致莱布尼茨的信中，牛顿写道，他很惭愧地承认他计算了这些数值到多少位）。他指出，他的级数像等比级数一样收敛，所以对于他的级

---

数的收敛性没有疑问。继承他的老师巴罗的思想，牛顿意识到分析是有正当性的，但他很明智地认为没有必要在这个问题上停留太久（“可以通过一种推论的论证来扩展它，”巴罗写道，“但有什么用呢？”）。

## 8. 牛顿多边形

除了用幂级数展开微分方程的解之外，牛顿还使用了分数幂，当需要找到由方程  $f(x, y) = 0$  定义的代数函数  $y(x)$  的展开式时使用。例如，假设我们需要解代数方程

$$ax^2 + by^3 + cxy^2 + dx^7 = 0$$

然后，牛顿说，我们需要进行以下变换（类似的变换现在称为傅里叶变换，但在给定的情况下它们仍然是牛顿变换）。我们不再将多项式视为变量  $x$  和  $y$  的函数，而是将其视为平面整数点阵上的函数。在坐标为  $(m, n)$  的点处，该函数的值等于多项式中  $x^m y^n$  的系数。现在我们在点阵上标出对应于非零系数的单项式的点，并取它们的凸包。我们得到牛顿多边形（图 7）。事实证明，在凸包内部顶点对应的单项式对级数的形式没有影响，所以我们可以忘记它们，只需要考虑边。例如，在图 7 中，AB 边对应于两项方程  $ax^2 + by^3 = 0$ 。忽略其他一切，解决这个方程，我们可以找到  $x$  的函数  $y$ ： $y = kx^{2/3}$ 。这个函数在原点附近给出了我们方程的解的良好近似。如果我们想找到下一个近似值，我们需要写  $y = kx^{2/3} + z$ ，并将其代入原方程中。代入后，我们再次得到一个代数方程，但现在是关于  $z$  的，我们需要以完全相同的方式处理它。迭代这个过程，我们得到了一个分数幂的级数（现在称为 Puiseux 级数），它在原点附近给出了方程的解  $y(x)$ 。这种方法总是有效的。如果我们从多边形的另一边开



---

始，我们将得到另一个级数，它对应于代数函数的另一个分支。在图 7 中，BD 边对应于无穷远处的渐近行为。

在这里，我介绍了牛顿工作的这一小部分，他为此感到非常自豪，并在 1676 年同样的信件中提到了它。这部分内容很不幸在第一门课中没有向学生介绍，尽管它是局部分析的基本工作装置，并且非常美丽。在现代数学中，牛顿多边形（和多面体）出现在托里克流形的几何学中，这是在 1973 年左右出现的，并且在物理学和力学中也出现在相似性、维度和比例理论中。

如我们已经提到的，这封信件是为莱布尼兹而写的。但是莱布尼兹住在德国，牛顿住在英国，那时与外国学者通信并不安全。牛顿没有把信件发送给莱布尼兹，而是将其寄给皇家学会的秘书奥尔登堡，以便信件走正式途径。奥尔登堡将这封信件转交给莱布尼兹。牛顿的谨慎是必要的。太过社交的奥尔登堡因与外国人接触而在塔里度过了几个月。

## 9. 巴罗

现在我们开始考虑分析的起源，并且我从巴罗的描述开始。牛顿的老师艾萨克·巴罗出生于 1630 年，去世于 1677 年（13）。与害羞而腼腆的牛顿不同，即使当他当选为剑桥大学的代表参加议会，也从未在那里说过一句话（据说牛顿曾在一次会议上站起来发表了一个非常简短的演讲：他建议关闭窗口），巴罗在年轻时是个狂野的人。他的父亲是一位伦敦亚麻布商，由于儿子性格过于狂野，他确保儿子无法进入商业世界，并派他去学习。巴罗学习了各种学科，但他最感兴趣的是神学。决定他未来道路的思维方式是这样的：为了成为一名优秀的神学家，需要了解年代学...

---

当时，包括牛顿在内的每个人都明白年代学是非常重要的科学。目前，一些数学家，可能是在巴罗和牛顿的影响下，虽然不是在英格兰，而是在莫斯科，对年代学问题非常感兴趣（14）。牛顿非常认真地研究了古埃及的年代学。其中出现了以下问题。迄今为止已经发现了大量的历史信息，这些信息与圣经中的世界创造日期不符。根据圣经，从挪亚到基督的诞生，人类的存在时间为 2348 年，但有许多法老和王朝，不可能有足够的空间容纳所有人。牛顿写了专门的文本，提出了解决这个困境的方法。他在圣经中找到了名字以字母 S 开头的法老（Sheshonk 或 Shishak），赫罗多托斯提到了另一个名字不同但同样以 S 开头的法老（Sesostris，现在称为 Senurset）。牛顿建议将这两个法老视为一个，从而修正了古埃及的年代学（将其缩短了 2000 年-完全符合现代数学家的精神）。但显然，在这个时候，对这个问题的更科学的方法正在成熟。例如，巴罗建议使用有关日食的信息。因此，他说：“要成为一名优秀的神学家，就需要了解年代学，这需要对天文学有所了解”。

对天文学的熟悉让巴罗开始对几何学产生兴趣。这是由于两个原因。首先，需要将望远镜对准星星，其次需要使望远镜工作，即磨制透镜。牛顿的第一个活动与天文学有关。他制造了第一架反射望远镜 - 一架金属望远镜（15）。

巴罗开始发现他的显著透镜公式  $1/f = 1/r_1 + 1/r_2$ ，现在在俄罗斯高中教育中教授（没有提到巴罗的名字）。为了推导出这个公式，需要能够画透镜的切线，找到无限接近的法线的交点，并分析产生的焦点。因此，巴罗对几何学感兴趣。

---

必须说，他的生活非常艰辛，因为在那个时候，英格兰的封建主义残余非常强大，王朝在更替，革命在发生，人们因其宗教信仰而受到迫害（当时即使是最文明的国家，这被认为是完全可以容忍的）。巴罗的宗教观念与当时英格兰盛行的观念不符。因此，他需要离开某个地方，于是他前往圣地安排一切。但在航行途中，海盗袭击了船只，尽管巴罗是唯一一位手持剑的乘客，参加了登船战斗并击败了海盗，但他没有到达航程的终点。巴罗安全地返回了英格兰，在那个时候，王朝和宗教局势已经改变。他因此获得了亨利·卢卡斯创建的数学讲座，卢卡斯留下了钱给剑桥大学三一学院。当时正在学习几何学的巴罗开始在那里授课。牛顿当时是二年级学生，显然参加了这些讲座。巴罗的讲座后来被出版，莱布尼茨在 1673 年购买了他的一本书。不过，莱布尼茨后来说他很少看到一个人或一本书，他不能从中获得一些用处，但他把巴罗的书放在书架上，没有读过。

巴罗的讲座内容是什么？Bourbaki 写道，他的书中有一百页文本，其中有大约 180 幅图画（16）。（关于 Bourbaki 的书，可以说在一千页中没有一幅图画，这一点一点也不清楚哪一个更糟糕。）由于这些图画的丰富，根据 Bourbaki 的看法，没有人注意到这本书的内容，因为它的所有内容都在几何丰富性中找到。在这本书中，没有引入新的术语或思想，也没有函数或导数。它主要致力于一个原则的发展，从这个原则中得出了许多结果。这个原则是关于切线问题和面积问题之间的对偶关系。 \*

这种对偶关系使我们能够在解决了一些切线问题之后（我们知道如何画曲线的切线或计算切线、法线等），解决这个曲线所回答的相应的面积问题。在对偶问题中，问题是关于另一条曲线下面积的问题，这可以从第一条曲线中几

---

何地得到。因此，这本书实际上是致力于牛顿 - 莱布尼兹公式，巴罗不可能知道这个公式，因为这发生在他们第一次出版之前二十年。巴罗也从这个原则中得出了一些结果。其中一些走得很远。如果我们仔细观察，我们可以发现两个主要的这种结果：一方面，一个确定积分中变量变换的公式，另一方面是分离变量的普通微分方程的积分。最后，在积分中变量的定理上，巴罗补充说，不幸的是，他发现这个事实很晚，如果他早些知道，之前的大部分文本都可以简化。但是因为巴罗还有许多其他事情要做，他没有在文本中进行这些更改。

巴罗的著作（17）实际上很难阅读，不无道理的是，布尔巴基说如果不分析这 180 幅图，就不可能理解其中的任何内容。但牛顿参加了巴罗的讲座，因此他理解了一切，并完全理解了这本书的内容。在许多情况下，他甚至简化和改进了展示方式，关于这一点，极为认真的巴罗在适当的参考文献中告知了读者。但牛顿的这种帮助并没有触及主要问题——牛顿 - 莱布尼茨公式和分离变量方程的解。这是巴罗自己的贡献，牛顿从未声称这些发现是他的。

巴罗注意到这样一个才华横溢的学生，他在 27 岁时已经在望远镜、光学和几何方面做出了一些深刻的发现，认为他已经太老（他当时 39 岁）不能担任教授职位了，并决定转向意识形态工作，因此将椅子让给了牛顿。后来他遇到了很大的困难。事实上，巴罗是一名神职人员，只有因为这个原因他才能保持教授职位。在那个遥远的时代，没有发誓是不可能保持教授职位的。牛顿不想发誓（尽管他被承诺成为教堂院长）。因此，牛顿在剑桥的教授职位不能超过七年。但巴罗是一个有影响力的人，在离开剑桥后成为了伦敦的宫廷传道人。因此，他能够获得国王的特别许可，将牛顿作为例外留在剑桥担任教授，并在那里进行了非常有成效的活动。

---

## 10. 泰勒级数

阿基米德已经遇到了积分，帕斯卡和费马则遇到了微分；这些操作之间的联系已经为巴罗所知。牛顿在分析学中做了什么？他的主要数学发现是什么？牛顿发明了泰勒级数，这是分析的主要工具。

当然，这里可能会有一些困惑，因为泰勒是牛顿的学生，他的相应论文日期是 1715 年。我们甚至可以说，牛顿的工作中根本没有泰勒级数。这是真的，但只是部分真的。以下是实际发生的事情。首先，牛顿找到了所有基本函数的展开式 - 正弦、指数、对数等等 - 并用泰勒级数验证了所有出现在分析中的函数都可以用幂级数展开。他写出了这些级数 - 其中一个被称为牛顿的二项式公式（当然，这个公式中的指数不必是自然数） - 并经常使用它们。牛顿正确地假设，在分析中所有的计算都需要通过幂级数展开而不是通过重复微分来完成。（例如，他使用泰勒公式来计算导数，而不是使用导数来展开函数 - 在分析教学中，这种观点不幸地被莱布尼茨的无穷小笨拙的机器所取代。）牛顿在有限差分微积分中推导出了类似于泰勒级数的公式 - 牛顿公式 - 最后他在一般形式中得到了泰勒公式，只是那些阶乘应该在那里的系数没有明确写出。

牛顿本可以说明这些系数应该是多少（他在有限差分公式中使用了阶乘），但他认为这并不必要。他可能有心理上的原因。事实上，对于牛顿来说，数量不是抽象的数字，它们具有一定的物理存在。但是，泰勒公式中的所有量  $h^n$  都具有不同的维度，为了使一切有序，每个量前都应该有一个适当维度的系数。但是，在不同的单位制下，系数也会不同。当时没有唯一的单位制；计量单位从一个国家到另一个国家甚至从一个县到另一个县都会改变。因此，

---

人们更愿意在规律陈述中不声明维度系数，而是仅讲述比例关系，例如胡克定律：“伸长量与力成比例”。如果泰勒公式也以这种无量纲形式书写，则阶乘将消失，我们发现函数增量中的项与  $n$  阶导数和自变量增量的  $n$  次幂成正比。此后，可以找到每个比例系数，具体取决于所使用的单位。

在有限差分微积分中的牛顿公式中，阶乘系数明确写出，因为在这种情况下，测量单位由格点步长的选择固定。莱布尼茨用于高阶导数的笨拙符号在这里很方便，因为它自动考虑了维度，所以公式在任何单位制下都看起来相同。牛顿没有在分析领域发表他的发现。他只是告诉莱布尼茨，他能够在“四分之一小时内比较任何图形的面积”。我不知道现在的一年级学生是否能达到这种分析的掌握水平。

## 11. 莱布尼兹

当谈到分析学的历史时，不得不提到牛顿和莱布尼茨之间的竞争。牛顿非常关注优先权问题。早些时候，他曾陈述过以下原则：每个人都必须在某一天做出选择，要么不出版任何东西，要么将自己的一生都投入到争夺优先权的斗争中。牛顿显然也在这方面做出了决定，同时选择了这两种策略：他几乎没有发表过任何东西，而且一直在为争夺优先权而奋斗。

至于分析学的发明，这里的第一篇出版物归功于莱布尼茨，他说他独立于巴罗和牛顿发展了他的微积分和积分学。然而，对此进行的讨论激烈到结果认为最好不要争夺优先权，而不是继续进行这样的讨论。

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（1646-1716）是一位大选侯（Kurfirst）的外交官，他于 1672 年在非常困难的条件下被派往巴黎。当时，法国已经是一个统一

---

的绝对权力，由路易十四掌权，他在军事上非常强大，但德国却分裂，无法以任何方式对抗路易十四的军事力量，其骑兵可以在一天内覆盖整个德国。德国人非常害怕这一点，希望找到一些出路。莱布尼茨凭借他固有的外交能力，设计出了一种解救德国免受法国入侵的方法，并被派往巴黎执行这个计划。莱布尼茨的方法如下：他希望向路易十四推销征服埃及的计划。莱布尼茨制定了一个适当的计划，并实际提交给了法国政府。法国政府执行了这个项目，但只是在拿破仑时代才实现，但这个想法可以追溯到莱布尼茨。

尽管路易十四没有执行莱布尼茨的计划，但巴黎之行并不是徒劳的。莱布尼茨认识了那里的惠更斯。惠更斯是一位荷兰科学家，但在 1666 年被邀请到法国担任学院的首任主席。后来，在废除纳恩特诏令和恢复宗教信仰迫害后，他决定返回荷兰。从惠更斯那里，莱布尼茨了解到了一些非常有趣的数学论文。莱布尼茨早就对数学感兴趣，因为他总是对任何一般的事物感兴趣，并有各种各样的一般想法。

例如，他认为有必要联合所有宗教，如果不是所有宗教，那么至少是所有基督教宗教，如果东正教徒不同意，那么至少天主教、新教同意，如果这是不可能的，那么至少联合所有新教徒。确实，这并不成功，尽管他尽了全力。同样地，莱布尼兹认为有必要发现所谓的特征，一种普遍的东西，将科学中的一切统一起来，并包含所有问题的答案。他还设计了所有可能的通用方法，以便立即解决所有问题。例如，他制造了帕斯卡计算机（与帕斯卡的算术计算器相比，莱布尼兹的算术计算器使得可以进行平方根计算）。算术计算器本身没有保存下来，但有证据表明莱布尼兹曾访问英国，向英国科学家展示了他的工作（胡克立即改进了他的结构）。因此，莱布尼兹非常喜欢数学，他希望将所有

数学方法统一起来，而惠更斯建议他研究帕斯卡。从帕斯卡的继承人那里，莱布尼兹获得了他的信件和笔记（后来失落了），并在帕斯卡的论文中找到了一幅描绘着著名的微分三角形的图画（图 8）。

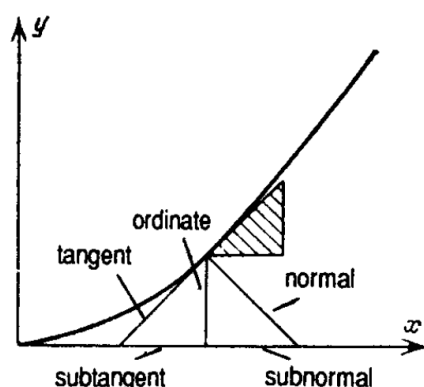
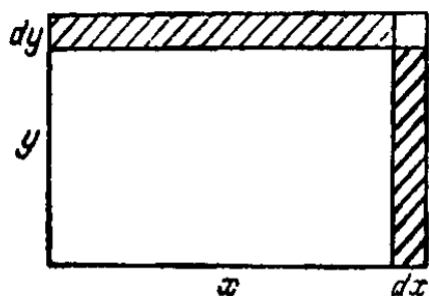


Fig. 8.  
The infinitesimal Pascal triangle and  
various functions

当时，笛卡尔、费马和帕斯卡能够分辨多项式，并知道如何画出所有程度的抛物线切线，基本的无穷小三角形已经明确地出现在帕斯卡的作品中。在其他几何学家的作品中，如惠更斯和巴罗，也出现了许多与给定曲线相关的对象。例如，在图 8 中有以下数量：横坐标、纵坐标、切线（从横坐标轴到接触点的切线段）、切线斜率、曲线图形面积、副切线、法线、副法线等。通常所有这些对象都被分开考虑。例如，巴罗通过在新平面上绘制新曲线，导出了副法线和副切线之间的关系。而莱布尼兹则凭借他的普遍性倾向，决定将所有这些与给定曲线相关并在与给定曲线的关系中具有某些功能的量都以同样的方式考虑。为此，他引入了一个术语，用于表示与给定曲线相关的任何量，并且在与给定曲线的关系中具有某些功能——函数。函数的例子包括图 8 中出现的所有量，例如横坐标、纵坐标、副法线、副切线等。



因此，根据莱布尼兹的观点，许多函数与曲线相关联。牛顿则有另一个术语——流数，表示流动量、可变量，因此与运动相关。基于帕斯卡的研究和他自己的论点，莱布尼兹相当迅速地发展了形式分析，以一种特别适合向不理解它的人教授分析的形式呈现给永远不会理解它的人们。莱布尼兹写道：“一个贫乏的头脑，具有附带的优势，可以击败最好的头脑，就像一个孩子可以用尺子画出一条比最伟大的大师手绘还要好的线一样”（Guhrauer, 《莱布尼兹的德语著作》，第1卷，第377-381页）。莱布尼兹相当迅速地建立了操作无穷小的形式规则，其含义是模糊的。



**Fig. 9.**  
**Leibniz's formula**

莱布尼兹的方法如下。他假设数学的整体，就像科学的整体一样，存在于我们内心，通过哲学的手段，我们可以探究一切，只要我们注意到发生在我们头脑中的过程。通过这种方法，他发现了各种定律，有时非常成功。例如，他发现了  $d(x + y) = dx + dy$ ，这一重要发现立即迫使他思考乘积的微分是什么。符合他思想的普遍性，他迅速得出结论，微分是一个环同态，即公式  $d(xy) = dx dy$  必须成立。但是过了一段时间，他验证了这会导致一些不愉快的后果，并找到了正确的公式  $d(xy) = x dy + y dx$ ，现在称为莱布尼兹法则。没有归纳思维的数学家，如巴罗或牛顿，作为结果在马克思主义文献中被称为经验主义者，能够将莱布尼兹的原始假设融入他的头脑，因为对于这样的人来说，乘积的微分是很

---

明显的，从简单的图形（图 9）中可以看出。显然，矩形面积的增量由三项组成：两个极细的矩形面积  $xdy$  和  $ydx$  以及可以忽略的高阶微小量  $dxdy$ 。有了这样一种几何解释，他永远不会怀疑所需的增量等于这个可忽略的量。但对于学院派的莱布尼兹来说，这种代数思维方式非常典型。

## 12. 论分析学的发明

有必要谈谈牛顿和莱布尼兹在 1684 年莱布尼兹发表他的微积分学后爆发的丑陋争执。大约十年间一切平静和平，但随后牛顿和莱布尼兹的学生开始争论谁最先发明了分析学。

牛顿使用“研究”（通过幂级数研究曲线）的意义来使用分析学这个术语。牛顿认为分析学是笛卡尔分析几何学的发展，他高度评价它。对于高中课程和教材的作者来说，有趣的是牛顿学习几何学的要素不是按照通常的欧几里得方式（实质上仍然是通常的），而是按照笛卡尔的方式，并且他可能因为这种不寻常的学习几何学的方式而发明了分析学。后来，在巴罗的建议下，牛顿仔细研究了欧几里得，并虔诚地掌握了古人的技术，但最初他不喜欢欧几里得，因为他认为证明显而易见的事情是愚蠢的。

牛顿的分析学是将幂级数应用于运动的研究，也就是函数和映射，正如我们现在所说的。对于莱布尼兹，如我们所见，分析学是微分环的更为形式化的代数研究。

这里有一些关于这场争执的细节，它们清楚地表明，人们永远不应该卷入这种争论中，因为像牛顿、莱布尼兹和约翰·伯努利这样卓越的人物和伟大的数学家在这里显得非常糟糕。

---

例如，在这一事件中，出现了一封匿名信。这封信由莱布尼兹的学生约翰·伯努利写的，他在其中为莱布尼兹辩护并攻击牛顿。但是牛顿和他的学生们后来回复这封信，称其为伯努利的信。伯努利看到自己无法保持匿名，责备莱布尼兹，说这使他与牛顿翻了脸，而牛顿正好向皇家学会介绍了伯努利，并承诺将来选举他的儿子。约翰·伯努利写信给莱布尼兹说：“我很惊讶牛顿怎么会知道我写了这封信，因为除了你，没有人知道我把它发给了谁，我也不知道。”但是后来他能够解开这个谜团。在信中有一个表达“*meam formulam*”的地方，即“我的公式”的引用。由于这个公式是约翰·伯努利的，牛顿很容易认出了信的作者。

莱布尼兹写信给威尔士亲王的妻子卡罗琳公主，警告她“不要让反宗教的牛顿扰乱她那单纯的德国信仰”。当时（大约是 1715 年），这对牛顿来说是一个危险的指控，因为他当时担任高级国家职务——造币厂厂长。一个被指控反宗教的官员可能会为此付出高昂的代价。幸运的是，这在牛顿的情况下没有发生。

在这一事件中，牛顿的表现也不是很好。他设立了一个委员会，任务是审查优先权问题并做出最终决定。当时牛顿是皇家学会的主席，所以他在委员会的组成中加入了許多来自外国的学者，以增加其公正性。

委员会考虑了争议的优先权问题，并发表了报告。报告之前的话是国际权威公正委员会的：“没有人可以为自己作证。如果有人允许任何人在自己的案件中作为合法证人，他将成为一个不正当的法官，并践踏所有人的法律。”报告为牛顿辩护，并指责莱布尼兹对牛顿未发表成果提出无根据的优先权要求。

---

后来，在牛顿去世后，从他的文件中可以清楚地看出，牛顿指导了报告的起草，并且“不正当法官”的可悲指责是他个人写的，而“许多科学家”中只有两个来自英国以外，其中只有一个是数学家。

离开这个悲惨的事件，我们应该从中得出有关讨论优先权和其他与科学边缘相关问题的科学价值的推论，我将谈一下那些导致分析学创立的几何学作品。