

理解加加速度及其导数：急动度与更高阶运动动力学及其工程意义

第一章：揭示超越加速度的动力学

1.1. 从位置到加速度：基本运动学回顾

经典运动学主要通过位置、速度和加速度来描述物体的运动状态。位置（通常用 x 或 \vec{r} 表示）定义了物体在特定时刻的空间坐标。速度（ v 或 \vec{v} ）是位置随时间的变化率，即 $v = \frac{dx}{dt}$ ，描述了物体运动的快慢和方向¹。加速度（ a 或 \vec{a} ）则是速度随时间的变化率，即 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ，它量化了物体速度变化的快慢¹。这三个基本物理量能够有效地描述物体在任何给定时刻或时间间隔内的运动状态。

然而，仅有位置、速度和加速度并不足以完全刻画运动的所有特性，特别是在涉及到运动变化的平稳性或突兀性时。例如，两辆车可能以相同的最终加速度达到某一速度，但一辆车可能是平稳加速，另一辆则可能是突然猛地加速。这种差异对乘客的舒适度、机械系统的磨损以及控制系统的稳定性都有着显著影响。因此，对加速度自身变化率的研究，引出了更高阶的运动动力学概念。

1.2. 急动度（Jerk）的引入：加速度的一阶时间导数

加速度对时间的导数被称为“急动度”（Jerk），有时也称作“冲击”（Jolt）¹。急动度（通常用 j 或 \vec{j} 表示）定义为加速度随时间的变化率，数学表达式为 $j = \frac{da}{dt}$ ¹。由于加速度是速度的二阶时间导数和位置的三阶时间导数，因此急动度相应地是速度的二阶时间导数（ $j = \frac{d^2v}{dt^2}$ ）和位置的三阶时间导数（ $j = \frac{d^3x}{dt^3}$ ）。

急动度的引入，不仅仅是运动学描述在数学上的简单延伸。它标志着我们从仅仅描述运动的瞬时“状态”（如当前速度或加速度是多少）转向了关注这些状态之间“过渡的质量”。急动度衡量的是加速度变化的平稳程度。一个较低的急动度值意味着加速度的变化是平缓和渐进的，而一个较高的急动度值则表示加速度发生了急剧甚至突兀的改变。这种从“状态”到“过渡质量”的关注点转移，对于那些运动体验（如乘客舒适度）或运动变化过程中系统完整性

（如机械磨损、结构稳定性）至关重要的领域，具有根本性的意义。因此，研究加速度的导数——急动度，是为了更深入地理解和控制运动变化的动态特性本身，而非仅仅是其瞬时值。

第二章：理解急动度：定义、物理意义与感知

2.1. 数学公式与术语

2.1.1. 急动度 (j) 的定义

如前所述，急动度在数学上定义为加速度对时间的一阶导数、速度对时间的二阶导数以及位置对时间的三阶导数³： $j(t) = \frac{da(t)}{dt} = \frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{d^3x(t)}{dt^3}$ 与速度和加速度一样，急动度是一个矢量，具有大小和方向。然而，在特定应用场景或简化分析中，它也常被用作标量来讨论其大小⁴。

2.1.2. 急动度的单位

在国际单位制（SI）中，急动度的单位是米每秒立方（ m/s^3 ）。

2.1.3. 替代术语：“冲击” (Jolt)

除了“急动度” (Jerk)， “冲击” (Jolt) 是另一个用来描述加速度变化率的术语，尤其在英国的一些文献中较为常见，并被认为是可接受的同义词⁵。尽管如此，“急动度”似乎是更广泛使用且更为通用的术语，并已被国际标准所认可，例如 ISO 2041 《振动与冲击词汇》中就对急动度进行了定义⁷。文献中也曾出现过其他一些描述加速度三阶导数的术语，如“脉冲” (pulse)、 “喘振” (surge)、 “颠簸” (bounce) 和“超加速度” (super acceleration)，但这些术语通常因为在工程领域中已有其他特定含义，或者其常用英文词义与加速度变化率的物理概念不够贴切，因而“急动度”和“冲击”被认为是更合适的选择⁹。

2.2. 急动度的物理实质：平稳性、力与突兀性

急动度从物理上量化了运动变化的平稳性或突兀性。一个较低的急动度值意味着运动过程中的加速度变化是平缓、渐进的，使得整个运动感觉更为流畅。相反，一个较高的急动度值则表示加速度发生了快速甚至剧烈的改变，可能导致运动感觉生硬、不连贯，甚至产生冲击感³。

根据牛顿第二定律， $F = ma$ （其中 F 为合外力， m 为质量， a 为加速度）。若物体质量 m 保持不变，则力对时间的变化率 $\frac{dF}{dt}$ 与急动度 j 之间存在直接关系： $\frac{dF}{dt} = m \frac{da}{dt} = mj$ 。这意味着急动度与作用在物体上合外力的变化率成正比¹。有些文献甚至提出了“拽力”（Yank, Y ）的概念，将其定义为质量与急动度的乘积（ $Y = mj$ ），以此类比牛顿第二定律中的力（ $F = ma$ ），更直观地表达急动度与力变化之间的联系，尽管“拽力”并非一个标准化的物理术语⁹。

通过一些日常生活的例子可以更好地理解急动度的物理意义。例如，驾驶汽车时，平稳地踩下油门或刹车，加速度会逐渐变化，此时急动度较小，乘客感觉较为舒适。而如果突然猛踩油门或急刹车，加速度会在短时间内发生剧烈变化，产生较大的急动度，乘客会明显感觉到冲击力，甚至前仰后合⁵。当车辆以恒定加速度行驶时，由于加速度没有变化，其急动度为零⁷。乘客在车辆启动瞬间感受到的“推背感”的突然出现，与急动度有关；而当车辆以稳定加速度行驶时所感受到的持续推力，则主要与加速度本身相关¹⁰。

急动度作为加速度变化快慢的量度，是预测和评估机械系统动态应力和磨损的重要指标。由于急动度与力的变化率直接相关，高急动度意味着系统承受着快速变化的力。这种快速变化的动态载荷，特别是当它们具有冲击性或振荡性时，很容易激发系统的固有振动模式，导致结构共振。长此以往，这些振动和冲击会加速材料疲劳，导致零部件（如凸轮从动件、轴承、机器人关节、机床刀具等）的磨损加剧，甚至引发系统故障¹¹。因此，控制急动度不仅仅是为了提升运动的平稳性和人体舒适度，更是机械系统设计中确保其耐久性、可靠性和精确性的基本工程原则。这解释了为何在机器人技术、数控加工、凸轮机构设计等领域，急动度控制都受到高度重视。

2.3. 人体对急动度的敏感性：舒适度、不适感与安全阈值

人体对运动的感知非常复杂，其中急动度是一个重要的影响因素，很多情况下人体对急动度的敏感性甚至超过对恒定加速度的敏感性⁹。高急动度会引起乘客的不适感，如恶心、晕动症，严重时甚至可能导致伤害，例如车辆急刹车或碰撞时常见的“挥鞭伤”⁷。人体通过拮抗肌的平衡来控制自身姿态和位置，当外部作用力（进而加速度）发生突然变化（即高急动度）时，肌肉可能无法足够快地调整张力以适应这种变化，导致身体暂时失控或过度反应⁷。

为了保障乘客的舒适度和安全性，工程设计中通常会对急动度设定限制。以下是一些不同应用场景下的参考值：

- 电梯：大多数乘客认为 2 m/s^3 的垂直急动度是可以接受的，而 6 m/s^3 则被认为是难以忍受的。对于医院等对平稳性要求极高的场所，推荐的急动度限制为 0.7 m/s^3 ⁷。
- 火车：为保证乘客舒适，火车设计中通常要求急动度低于 2 m/s^3 ⁷。
- 一般舒适度感知：有研究指出，低于 1.0 m/s^3 的急动度通常被评价为舒适⁹。

除了急动度和加速度的幅值外，加速度的持续时间也会影响人体对运动强度的感知¹⁴。关于急动度和加速度对感知运动强度的相对贡献，研究仍在进行中。一些研究表明，对于短时运动，感知强度主要取决于加速度，而另一些研究则认为急动度和加速度均有贡献¹⁶。这表明人体对运动的感知是一个多因素相互作用的复杂过程。国际标准 ISO 2631 提供了评估人体全身振动暴露和乘坐舒适度的指南，虽然没有直接规定急动度限值，但通过对加速度曲线的要求间接涉及了对急动度的考量⁹。

值得注意的是，人体对急动度的感知具有显著的主观性和情境依赖性。尽管存在一些量化的急动度限值，但这些限值并非普适，而是会根据具体的应用场景（例如，医院电梯的要求远严于高速列车，而高速列车的要求又可能不同于追求刺激感的游乐设施）以及个体差异（如年龄、健康状况、预期等）而有很大不同¹⁸。影响感知的因素还包括运动方向、乘客姿态、视觉输入等¹⁶。研究中关于加速度和急动度在感知短时运动强度中主导作用的结论不一¹⁶，进一步说明了这种感知的复杂性，其相互作用可能是微妙的，并取决于具体的运动特征（如幅值、频率成分、持续时间等）。为了更准确地预测乘坐舒适度，研究人员甚至开始采用神经网络等更复杂的模型¹⁷，这表明简单的线性阈值可能不足以全面描述人体对急动度的反应。特别是在自动驾驶汽车等新兴领域，乘客体验是技术能否被广泛接受的关键因素，因此对急动度及其感知的研究显得尤为重要¹⁵。

下表总结了一些文献中报道的与人体感知相关的急动度参考值：

表2.1：代表性急动度限值与感知阈值

应用/情境	参考急动度值 (M/S³)	来源/备注
电梯 (一般乘客)	2.0	大多数乘客可接受
电梯 (医院推荐)	0.7	推荐限值
火车 (乘客舒适度)	< 2.0	一般设计要求
一般舒适度感知	< 1.0	评估为舒适的阈值
高速铁路 (设计标准)	0.2 - 0.6	不同国家/地区标准
公路设计 (横向急动度)	0.29 - 0.88	AASHTO 标准 (0.03 – 0.09 g/s)

第三章：急动度的广泛应用：贯穿工程与科学领域

急动度作为描述加速度变化快慢的关键物理量，其重要性不仅体现在理论层面，更在众多工程技术和科学研究领域中有着广泛而实际的应用。通过对急动度的控制与分析，工程师和科学家能够优化系统性能、提升用户体验、确保结构安全，并深入理解复杂动态过程。

3.1. 提升出行体验：交通运输系统中的急动度控制

在各类交通运输系统中，对急动度的有效控制是提升乘客舒适度、保障运行安全的关键环节。

3.1.1. 道路与轨道设计：欧拉螺线（克罗索이ㄷ曲线）的应用

为了使车辆在直线与弯道之间平稳过渡，现代公路和铁路（以及过山车轨道）的弯道设计常采用欧拉螺线（Euler spiral），也称为克罗索이ㄷ曲线（Clothoid curve）或科尔纽螺线（Cornu spiral）。欧拉螺线的核心特征是其曲率随弧长线性变化。这意味着当车辆从直线段驶入缓和曲线（欧拉螺线段）时，其向心加速度会逐渐、平稳地从零增加到弯道所需的定值，从而使得作用在车辆上的横向急动度保持在一个较小且相对恒定的水平，甚至在理想情况下可以实现恒定急动度¹⁹。这种设计极大地减小了乘客因横向力突然变化而产生的不适感，提升了乘坐的平顺性和安全性，尤其对于高速铁路和公路至关重要¹⁹。例如，高速铁路的急动度设计标准通常在 0.2 m/s^3 到 0.6 m/s^3 之间⁹，而美国州公路及运输官员协会（AASHTO）标准则建议公路设计的横向急动度在 0.03 g/s 至 0.09 g/s （约 0.29 m/s^3 至 0.88 m/s^3 ）范围内⁹。

3.1.2. 车辆动力学与乘坐舒适性

车辆的主动悬架系统旨在通过实时调整悬架参数来改善乘坐舒适性和操纵稳定性，这其中就隐含了对车辆振动和加速度变化的控制，进而影响急动度水平²¹。一些先进的控制策略，如基于主动空气动力学表面的抗急动预测控制器（AJPC），能够通过预测前方路况并调整车辆姿态，主动减小外部扰动引起的车身急动，从而提升乘坐品质²²。驾驶经验的差异也会显著影响车辆的急动度：经验丰富的驾驶员能够平稳操控，而新手驾驶员在换挡或加减速时，往往会因操作不当产生较大的急动度，导致车辆顿挫，影响乘坐舒适性⁹。此外，一些车辆安全相关的国际标准，如 ISO 11026（重型商用车侧倾稳定性试验方法）和 ISO 15623（前方车辆碰撞预警系统性能要求），虽然不直接规定急动度，但其衡量的车辆动态性能与急动度管理密切相关⁹。

3.1.3. 电梯与自动扶梯

在电梯和自动扶梯等垂直交通工具中，控制垂直方向的急动度对于乘客的乘坐便利性和舒适感至关重要⁷。如前所述，医院等特殊场所对电梯运行平稳性的要求更高，推荐急动度限制为 0.7 m/s^3 ，而普通乘客电梯的急动度一般认为在 2 m/s^3 以内是可接受的⁷。为了实现平稳的加减速过程，电梯控制系统广泛采用S型速度曲线（S-curve profiles）。与传统的梯形速度曲线在加减速转换点存在无限大急动度不同，S型曲线通过平滑加速度的变化率，显著降低了峰值急动度，从而减少了运行过程中的冲击和振动²⁵。国际标准 ISO 18737-1 专门针对电梯乘坐质量的测量方法进行了规范，其中急动度是评估的关键指标之一⁹。

3.1.4. 游乐设施

在过山车等游乐设施的设计中，急动度是一个需要精密权衡的参数。设计者需要在提供刺激体验的同时，避免过大的急动度对乘客造成不适或潜在伤害（如挥鞭伤）。通过优化加速度曲线，在轨道的特定区段控制和减小急动度，可以在保证安全和舒适的前提下，最大化游乐体验的刺激感⁷。

在这些多样化的交通运输应用中，无论是道路的几何设计（如欧拉螺线），还是电梯、电机驱动系统的运动控制策略（如S型速度曲线），其核心目标之一都是对急动度进行有效管理。这不仅仅是简单地限制急动度的峰值，更重要的是通过精心设计整个运动过程的加速度变化剖面，确保在不同运动状态（如直线到弯道、静止到匀速、加速到减速）之间的过渡尽可能平滑。这种主动管理动态效应的设计理念，体现了现代工程设计对优化人因体验和提升系统综合性能的深刻理解。急动度控制因此成为连接复杂几何路径与平稳动态响应的桥梁。

3.2. 精密与耐久：机械工程与机器人技术中急动度的角色

在机械工程和机器人技术领域，对急动度的认知和控制直接关系到系统的运动精度、运行平稳性、部件耐久性以及整体工作效率。

3.2.1. 机器人与运动控制

对于工业机器人，特别是执行精密操作的机械臂，以及其他自动化机械设备，最小化急动度对于实现平滑、精确且高效的运动至关重要⁹。过高的急动度会导致机器人末端执行器定位不准、产生计划外的振动、对设备自身造成损害、降低能量利用效率，并加速执行机构（如电机、减速器、连杆）的磨损¹²。因此，现代机器人运动控制中的轨迹规划算法通常会明确考虑急动度限制，或以最小化急动度为优化目标之一。常用的技术包括采用高阶多项式样条（例如，五次多项式可以保证急动度连续）或B样条曲线来生成平滑的运动轨迹²⁶。通过限制急动度，不仅可以延长机械臂的使用寿命，还能提高其轨迹跟踪的精确度²⁷。

3.2.2. 凸轮机构设计

在凸轮机构设计中，急动度是一个核心的设计变量。描述凸轮运动特性的SVAJ图，即位移（S）、速度（V）、加速度（A）和急动度（J）随凸轮转角变化的曲线图，是凸轮设计和分析的重要工具³⁰。凸轮设计的基本法则是要求从动件的位移、速度和加速度曲线必须连续，并且急动度曲线必须有界（即有限值）。如果加速度曲线不连续，将导致理论上无限大的急动度，这会激发系统的高频谐振，引起振动、噪声，并加速凸轮和从动件的磨损，甚至导致从动件跳跃或脱离凸轮表面（即“振颤”）。因此，设计者会选用特定的凸轮轮廓曲线（如摆线、改进梯形线、高次多项式线等），以确保加速度的平稳过渡，从而使急动度保持在可控范围内，避免冲击和振动³¹。

3.2.3. 动力总成与电机驱动的平顺性

在电机驱动系统中（例如用于电梯、机器人、精密机床的电机），控制急动度对于实现平稳运行、降低振动、延长电机和传动部件寿命至关重要⁹。如前所述，S型速度曲线通过平滑加减速阶段的加速度变化，取代了在过渡点存在无限急动度的梯形速度曲线，从而显著改善了系统的动态性能²⁵。在汽车动力总成中，无论是在自动变速器换挡过程中，还是在发动机扭矩输出的快速变化时，对急动度的管理都有助于提升驾驶的平顺性，减少冲击感，并可能降低传动系部件的疲劳损伤⁹。日常驾驶中感受到的车辆“顿挫”或“闯动”，很多情况下就是由于动力总成系统或驾驶员操作未能有效控制急动度所致³³。

对急动度的控制，其影响远不止于单个部件的平稳运行，而是会对整个机械系统的性能和经济性产生连锁反应。在部件层面（如一个执行器、一个凸轮从动件）控制好急动度，能够直接提升其运动的平滑度和可预测性。这种平滑的部件级运动会进一步减少整个机械系统的振动。振动的减小意味着作用在轴承、连杆、结构件等上面的非期望动态载荷降低，从而有效减缓这些部件的磨损和疲劳累积。其结果是，系统的整体运行寿命得以延长，维护频率和相关成本也随之降低，可靠性得到提升。更进一步，对于那些需要高精度的任务（例如机器人装配、精密加工），更平滑的运动意味着更高的定位精度和更好的产品质量。所有这些因素——更长的使用寿命、更低的维护成本、更高的产出质量——都为部署这些系统的企业带来了显著的积极经济影响。这正是为何在机器人领域需要复杂的轨迹规划算法²⁶，以及在凸轮设计中需要精细的轮廓曲线选择³⁰的深层原因。

3.3. 优化制造流程：数控加工与自动化中的急动度

在现代制造业，特别是数控（CNC）加工和自动化生产线中，对急动度的控制是确保加工质量、延长刀具和设备寿命、提升生产效率的关键技术之一。

数控机床在执行加工程序时，刀具需要沿着预设路径高速精确运动。如果刀具在改变运动方向（如加工拐角）或速度时，其加速度发生剧烈变化（即高急动度），会导致一系列问题：首先，它会激发机床结构和刀具系统的振动，这些振动直接影响加工精度，可能导致工件尺寸超差、形状畸变，并在加工表面留下震纹，降低表面光洁度⁹。其次，高急动度意味着刀具承受着快速变化的切削力，这会加剧刀具的冲击磨损，缩短刀具使用寿命，增加生产成本⁹。此外，剧烈的加减速变化也会对机床的驱动系统（如伺服电机、滚珠丝杠、导轨）产生过大的动态负载，加速这些关键部件的磨损，甚至可能引发故障。

为了解决这些问题，现代数控系统的运动控制器通常都内置了急动度限制或平滑功能⁹。这些功能通过特定的算法（如“前瞻控制”look-ahead）预读加工程序段，分析即将到来的路径变化，并据此动态调整进给速率和加减速曲线，以确保在满足加工效率的同时，将急动度控制在允许范围内。常用的方法包括使用B样条曲线或高阶多项式（如S型加减速曲线就是一种常见的多项式组合形式）来拟合或生成平滑的刀具运动轨迹，从而避免加速度的突变，实现对急动度的有效调制²⁹。在3D打印（增材制造）领域，急动度（尽管在某些固件中的定义可能与标准物理定义有所不同）的控制同样对打印件的尺寸精度和表面光滑度有重要影响⁹。

在高效率生产的驱动下，制造业对加工速度的要求不断提升。然而，当加工速度非常高时，机床运动部件的惯性效应变得尤为突出。在加工复杂轮廓或急转弯角时，刀具需要快速改变运动方向，如果没有有效的急动度控制，理论上将产生极高的甚至无限大的急动度。机床的物理结构（如电机扭矩限制、结构刚度等）决定了其能够承受的加速度变化率是有限的。一旦实际运动指令要求的急动度超出了机床的物理承受能力，就会导致振动、精度下降、刀具

磨损，或者迫使机床在这些复杂路径段大幅降低速度，从而影响整体加工效率。因此，不受控制的急动度成为了限制高速、高精加工性能的一个关键瓶颈。通过有效的急动度控制技术（例如，智能进给率调度、平滑路径生成算法³⁵），机床能够在保持较高平均加工速度的同时，平稳地通过复杂路径，维持加工精度并减少部件磨损。这表明，急动度控制不仅仅是一种运动平滑的“润色”技术，更是实现高速度、高精度制造目标的一项核心使能技术，它解决了动态系统中一个基本的物理限制问题。

3.4. 驾驭极端环境：航空航天工程中的急动度

在航空航天工程领域，飞行器和航天器往往需要在极端环境下执行高精度、高稳定性的任务，这对运动控制的平顺性提出了极高要求，使得急动度乃至更高阶导数的控制变得至关重要。

航天器在轨运行期间，可能需要进行姿态调整、轨道机动或与其他航天器对接等操作。在这些过程中，对急动度的控制有助于避免因加速度的快速变化而对航天器上的精密仪器（如光学望远镜、传感器、通信天线等）产生过大的冲击力或振动，从而保障这些敏感设备的正常工作和长期可靠性⁷。一个著名的例子是哈勃空间望远镜（HST）。为了确保其指向的超高精度和成像质量，美国国家航空航天局（NASA）在设计哈勃望远镜的姿态控制系统时，不仅对急动度（Jerk）设定了限制，甚至对其导数——加急动度（Jounce，也称Snap）也提出了明确的控制要求⁷。这凸显了在极端精密的应用中，对运动平滑性的要求已经超越了常规的加速度控制。航空航天工业甚至发展并使用了专门测量急动度的仪器——“急动度计”（Jerkmeter），以支持相关的研发和测试工作⁷。

在无人机（UAV）的设计、测试和飞行控制中，急动度及其更高阶导数（如加急动度/Snap）也扮演着越来越重要的角色³⁷。无人机执行的任务日益复杂，如高空侦察、精确测绘、货物运输、特技飞行等，这些任务往往要求无人机具备快速响应、灵活机动且飞行姿态平稳的能力。通过在轨迹规划和飞行控制算法中引入对急动度和加急动度的限制或优化，可以显著提升无人机飞行的平稳性，减少因气流扰动或机动指令导致的晃动和振动，从而提高传感器（如相机、激光雷达）的数据质量，增强任务执行的成功率和安全性。

航空航天系统通常包含大量对振动和冲击极为敏感的精密部件，并且其任务的成败往往取决于能否实现极高标准的姿态稳定和轨迹精确。例如，哈勃望远镜的成像系统对任何微小的抖动都非常敏感，任何计划外的运动都可能导致图像模糊，使观测数据失效。同样，航天器的对接操作要求姿态和相对速度得到极其精准的控制，过大的急动度可能导致对接失败甚至碰撞。在这些高精度、高风险的应用场景中，仅仅控制加速度的变化率（急动度）可能仍不足以完全抑制所有有害的动态效应。通过进一步控制急动度的变化率（即加急动度），可以实现对加速度变化过程更为精细的调制，使得加速度的变化更加平缓，从而最大限度地减少高频振动的激发。因此，航空航天领域对加急动度的关注，标志着其对运动控制精细化程度的

极致追求。这预示着一个趋势：随着系统对精度和稳定性的要求不断攀升，理解和控制更高阶运动导数的必要性也将随之增加。

3.5. 解析运动之妙：生物力学与运动机能学中的急动度

急动度分析为理解和评估生物体（包括人类和动物）运动的质量、协调性和神经肌肉控制机制提供了有力的定量工具。

在生物力学和运动机能学研究中，急动度被广泛用于分析各种人类运动，如行走、跑步、投掷、跳跃以及各种体育专项运动⁹。运动的平稳性（smoothness）是衡量运动协调性和效率的重要指标，而急动度正是量化这种平稳性的一个关键参数。较低的急动度值通常与更平稳、更协调、更高效的运动模式相关，而较高的急动度值则可能意味着运动的突兀、不连贯或效率低下。例如，对数无量纲急动度（Log Dimensionless Jerk, LDLJ）是一种常用的综合性平稳度评价指标，它结合了急动度的大小和运动的持续时间及幅度等因素⁴⁰。

急动度分析在临床医学和康复领域也具有重要价值。它可以作为评估神经肌肉控制功能和感觉运动障碍的客观指标⁹。例如，异常增高的急动度值可能预示着某些神经系统疾病（如帕金森病早期）导致的运动控制能力下降，或者提示存在步态异常、平衡功能障碍等问题³⁸。通过对患者在执行特定任务（如行走、伸手取物）时的急动度进行监测和分析，医生和康复治疗师可以更准确地评估病情、制定个性化的康复计划，并量化康复治疗的效果。此外，急动度分析也被应用于人因工程学（工效学）中，用于优化工作场所的动作设计以预防重复性劳损，以及改进假肢、矫形器和辅助行走装置的设计，使其更能模拟自然、平稳的人体运动，减少对使用者的额外负担³⁸。

有趣的是，一些生物力学研究表明，人类大脑在规划和执行某些肢体运动（如手臂的抓取动作）时，似乎在潜意识中遵循着某种“最小急动度”的原则⁷。这意味着生物体在进化过程中可能已经发展出一种倾向于使运动尽可能平滑、能量消耗尽可能高效的控制策略。

从更深层次看，急动度可以被视为一种反映神经肌肉系统健康状况和运动技能水平的“生物标志物”。平稳、协调的运动是健康且熟练的神经肌肉系统的重要特征。急动度通过量化运动的平稳性，为这种定性的观察提供了客观的定量依据。较低的急动度对应于平稳高效的运动，而较高或不规则的急动度则可能暗示着潜在的问题或效率低下。这些问题可能源于影响运动控制的神经系统疾病（如帕金森病），也可能反映了运动员在技术动作上的不足，或者是患者在康复过程中运动模式的调整和适应。大脑可能以最小急动度为目标来规划运动的观点³⁸，进一步支持了急动度作为生物运动控制基本原则的重要性。因此，急动度分析为诊断、监测和理解与人类运动相关的广泛状况提供了一个强大的、非侵入性的工具。它在定性的运动质量观察与定量的客观评估之间架起了一座桥梁，在临床诊断、运动科学研究和人因工程设计等领域展现出巨大的应用潜力。

3.6. 应对自然之力：地震学与结构完整性中的急动度

在地震工程和结构动力学领域，急动度作为描述地震动特性和评估结构响应的一个参数，正受到越来越多的关注。

地震发生时，地面会产生剧烈的振动，其特征可以用位移、速度、加速度以及更高阶导数来描述。急动度被用来量化地震过程中地面加速度的快速变化程度，从而更全面地评估地震的强度和潜在破坏力⁸。研究表明，地震波中的急动度主要反映了地震动高频段的非平稳特性⁸。对地震急动度及其反应谱（Jerk Response Spectra）的研究，有助于增强对地震动非平稳性的认识，并可能改进现有的抗震设计理念和方法⁸。

从结构完整性的角度来看，快速变化的加速度（即高急动度）意味着结构承受着快速变化的惯性力。这种动态加载，特别是当其具有冲击性时，可能在结构材料内部引发应力集中和疲劳累积，长期或多次作用下可能导致材料产生疲劳裂纹，最终甚至引发结构失效⁸。虽然在大多数情况下，地震对结构的影响主要由峰值地面加速度（PGA）等参数主导，但对于某些特定类型或周期的结构，或者在评估地震动的冲击效应时，急动度的影响可能变得显著⁸。例如，对于一些刚度较大、自振周期较短的结构，或者某些非延性连接节点，可能对地震动中的高频、冲击性成分更为敏感，而高急动度正是这种成分的体现。

传统的地震分析方法，如一些逐步积分法，在计算时可能假设在一个小的时间步长内加速度是常数或线性变化的，这种假设会导致在该时间步内计算得到的急动度为零或一个常数，这与实际地震动中加速度的复杂变化情况不符，可能低估急动度的真实影响⁸。因此，更精确的急动度求解方法，如基于状态空间方程和龙格-库塔法的数值计算，被推荐用于地震响应分析⁸。

地震是一个包含丰富频率成分的复杂动态过程。峰值地面加速度（PGA）是衡量地震烈度的常用指标，但它并不能完全捕捉地震动的全部特性，特别是其“突发性”或“冲击性”。急动度作为加速度的变化率，天然地对地震动中的快速波动和高频成分敏感。那些峰值加速度可能并非极端，但加速度变化非常迅速（即高急动度）的地震动，仍可能对特定结构造成严重破坏。因此，将急动度纳入地震分析，可以提供超越PGA的、对地震动特性更细致的理解。这有助于识别那些由于其冲击特性而可能特别具有破坏性的地震记录，从而指导更具韧性的结构设计，并深化对地震损伤机制的认识，特别是对于那些对高频激励敏感的结构（如砌体结构、一些工业设备等）。

3.7. 优化用户交互：消费电子产品中的急动度（新兴领域）

随着消费电子产品日益智能化和功能多样化，用户对交互体验的平顺性和自然性的要求也越来越高。虽然“急动度控制”这一术语在消费电子领域不像在重型工程中那样被明确和广泛地提及，但其 *underlying principles* 正在悄然影响着这些设备的设计与性能优化。

- **相机稳定系统**：在智能手机、无人机和专业摄影设备中，图像和视频的稳定性是评价相机性能的关键指标。当相机运动时，如果其姿态发生突兀变化，会导致拍摄画面出现“抖动”（jitter）或“跳动”（jerks），严重影响观看体验⁴³。虽然许多设备采用光学防抖（OIS）和电子防抖（EIS）技术，但其核心目标都是尽可能平滑相机传感器的运动轨迹，抑制因手持晃动或设备振动引起的快速、不规则的姿态变化。从动力学角度看，这就是在努力减小相机运动的急动度及其更高阶导数，以实现流畅的视觉效果。特别是在低光照条件下，相机快门时间延长，运动模糊会加剧，此时如果稳定系统不能有效抑制急动，画面质量会显著下降³⁷。
- **运动捕捉与虚拟/增强现实（VR/AR）**：基于惯性测量单元（IMU）的运动捕捉技术越来越多地应用于消费级设备（如智能手机、智能手表、VR/AR头显和控制器）中，用于姿态估计、人机交互和沉浸式体验。这些应用对运动追踪的实时性、准确性和时间一致性要求很高。在一些先进的运动姿态估计算法中，研究人员已开始将急动度作为损失函数（loss function）的一部分（例如， $\mathcal{L}_{\text{jerk}}$ ），以促使算法生成更平滑、更符合人体运动学规律的姿态序列⁴⁴。文献中甚至使用“抖动”（Jitter），以 m/s^3 为单位，作为评估运动捕捉系统输出质量的指标之一，这实际上就是急动度⁴⁴。较低的“抖动”值意味着更平滑、更自然的动作捕捉效果。在VR/AR应用中，头部和身体追踪的平滑性直接影响用户的沉浸感和舒适度，过大的急动度可能导致晕动症（cybersickness）。
- **触觉反馈（Haptics）**：虽然现有研究材料未直接涉及，但可以合理推断，为了提供真实、细腻且舒适的触觉反馈，控制施加在用户身体上的力或振动的变化率（即急动度）也是重要的。过于尖锐或突兀的触觉反馈（高急动度）可能会让用户感觉不自然甚至不适，而平滑变化的触觉效果（低急动度）则更能模拟真实世界的物理交互。

从历史上看，对运动动力学（包括急动度）的精确控制主要应用于大规模工业设备、航空航天系统或专业科研仪器。然而，随着技术的进步和成本的降低，消费电子产品（如智能手机、可穿戴设备、无人机等）正越来越多地集成复杂的运动传感器（如IMU）和执行器（如用于触觉反馈的振动马达、相机云台电机）。当这些设备执行日益复杂的与运动相关的任务时（如姿态估计、图像稳定、沉浸式VR/AR交互），运动质量对于用户体验和核心功能的实现变得至关重要。在VR中，突兀、不平滑的运动会导致晕动症；不稳定的相机拍摄的视频几乎无法使用；不准确的运动追踪则会令用户感到沮丧。因此，以往应用于重型工程的急动度控制原理，如今正逐渐渗透到消费电子产品的软件算法和硬件设计层面，以确保其运动性能的平滑、稳定和精确。例如，在训练用于姿态估计的人工智能模型时，将急动度纳入损失函数⁴⁴，就是一个明确的信号。这反映了消费电子市场对产品复杂性和性能要求的不断提

升，使得更高阶的动力学管理不再局限于专业工程领域，而是开始成为提升日常科技产品体验的关键因素。

第四章：探索更远：加急动度（Jounce/Snap）及更高阶导数

在深入探讨了急动度（Jerk）之后，运动动力学研究并未止步。加速度的二阶及更高阶时间导数，虽然在日常工程中的应用不如急动度广泛，但在某些对运动平顺性和精确性要求达到极致的尖端领域，它们正扮演着越来越重要的角色。

4.1. 定义加急动度（Jounce/Snap）：急动度的变化率

位置对时间的四阶导数被称为加急动度（Jounce），一个更常用且更易记忆的别称是 Snap⁶。它是急动度随时间的变化率，即 $s = \frac{dj}{dt}$ 。因此，加急动度也可以表示为加速度的二阶导数（ $s = \frac{d^2a}{dt^2}$ ）、速度的三阶导数（ $s = \frac{d^3v}{dt^3}$ ）或位置的四阶导数（ $s = \frac{d^4x}{dt^4}$ ）。在国际单位制中，加急动度的单位是米每秒四次方（m/s⁴）。顾名思义，加急动度描述的是急动度自身变化的快慢。

4.2. 加急动度在高级应用中的新兴意义

尽管加急动度的概念不如其低阶“亲戚”（速度、加速度、急动度）那样广为人知，但在一些对运动控制精度和系统稳定性有着极端要求的应用中，它已成为一个不可忽视的设计考量因素⁶。

- **航空航天：**如前所述，NASA在设计哈勃空间望远镜时，不仅对急动度设定了限制，也对加急动度（Snap）提出了控制要求⁷。这表明对于需要极高指向精度和稳定性的光学系统，控制加急动度对于抑制微小振动至关重要。此外，在无人机（UAV）的设计和控制中，加急动度也被提及，用于实现更平滑的飞行轨迹和姿态过渡³⁷。
- **机器人技术：**“最小加急动度轨迹”（Minimum Snap Trajectory）的概念在机器人领域，尤其是在敏捷型无人机（如四旋翼飞行器）的轨迹规划中得到了应用³⁷。这类轨迹旨在使急动度的变化尽可能平缓，从而最大限度地减少飞行器在高速机动过程中产生的振动，确保其稳定性和任务执行的精确性。
- **精密制造/加工：**在一些前沿的高速加工研究中，为了实现比传统急动度限制轮廓更为平滑的刀具路径过渡（尤其是在加工复杂曲面的拐角处），研究人员开始探索基于加急动度限制的加速度规划方法³⁷。

- 土木工程：在铁路和公路的几何设计中，尤其是在处理不同曲率半径弯道之间的连接时，可以通过优化缓和曲线（如克罗索이름曲线）的参数，以最小化甚至消除加急动度（即实现加急动度为零），从而保证向心加速度的线性变化，进一步提升行驶的平顺性和舒适性³⁷。
- 机械系统动力学分析：在对复杂机械系统（如多连杆机构、机器人）进行运动学误差传播分析时，对于实值函数描述的系统，分析的阶次有时会延伸到加急动度/Snap的层面，以更全面地评估参数不确定性对高阶运动学量的影响⁴⁸。

对急动度的控制旨在平滑加速度的变化过程。而对加急动度的控制，则更进一步，旨在平滑急动度自身的变化过程。这意味着对运动动态特性的控制达到了一个更高的精细化水平。在那些即使是微小的振动或扰动也会对系统性能或任务结果产生不利影响的应用场景中（例如哈勃望远镜的天文成像、高速精密加工的表面质量、无人机在复杂环境中的稳定飞行等），仅仅控制到急动度可能不足以完全抑制所有不期望的动态效应。通过管理加急动度，工程师可以实现急动度剖面的更平缓过渡，从而生成异常平滑的加速度变化曲线，这有助于进一步减小高频振动的激发。因此，对加急动度的考量代表了运动控制领域向极致平滑和振动抑制目标迈进的前沿。它表明在某些性能要求极其严苛的应用中，即便是“加速度变化率的变化率”也已成为一个关键的设计参数。这在轻量化结构、高速运行或搭载高度敏感有效载荷的系统中尤为突出。

4.3. 初识“Crackle”与“Pop”

在加急动度之后，运动学导数的探索仍在继续。位置对时间的五阶导数有时被称为Crackle（可译为“裂纹声”或“噼啪声”），它定义为加急动度（Snap）随时间的变化率。相应地，位置对时间的六阶导数有时被称为Pop（可译为“爆裂声”或“砰声”），它定义为Crackle随时间的变化率⁶。

需要指出的是，“Crackle”和“Pop”这两个术语的标准化程度远不及急动度或加急动度，它们有时甚至被认为是“半开玩笑式”的命名，其灵感来源于某谷物早餐包装上的吉祥物名称⁶。目前，这两个更高阶导数在工程实践中的应用极为罕见。它们主要出现在理论运动学推导、某些高度专业化的研究领域（例如，有研究提及利用Crackle等高阶导数评估认知障碍对人体运动学参数的影响³⁷），或者在一些探讨极限运动控制的理论文献中。对于绝大多数工程应用而言，理解和控制到急动度，以及在特定情况下控制到加急动度，已经能够满足需求。

下表清晰地总结了从位置到Pop的各阶运动导数的层级关系：

表4.1：运动导数的层级体系

阶次	名称 (英文/中文)	符号 (常用)	数学定义 (从位置 x 或 \vec{r} 导出)	物理意义
0	Position / 位置	x, \vec{r}	$x(t)$	物体在空间中的位置
1	Velocity / 速度	v, \vec{v}	$\frac{dx}{dt}$	位置的变化率，运动的快慢和方向
2	Acceleration / 加速度	a, \vec{a}	$\frac{d^2x}{dt^2}$	速度的变化率，速度变化的快慢
3	Jerk (Jolt) / 急动度 (冲击)	j, \vec{j}	$\frac{d^3x}{dt^3}$	加速度的变化率，运动变化的平稳性
4	Jounce (Snap) / 加急动度	s, \vec{s}	$\frac{d^4x}{dt^4}$	急动度的变化率，加速度变化率的变化情况
5	Crackle / (可译：裂纹声)	c, \vec{c}	$\frac{d^5x}{dt^5}$	加急动度的变化率
6	Pop / (可译：爆裂声)	p, \vec{p}	$\frac{d^6x}{dt^6}$	Crackle的变化率

第五章：结论：通过高阶动力学掌控运动

对加速度及其导数——急动度（Jerk）和加急动度（Jounce/Snap）——的理解与应用，标志着我们对物体运动的认知从简单的状态描述深化到了对动态变化过程质量的精细控制。这些高阶运动学量不仅丰富了动力学理论的内涵，更在广泛的科学和工程实践中展现出其不可替代的价值。

5.1. 急动度（及加急动度）关键作用的回顾

加速度的导数，即急动度，是描述加速度变化快慢和运动平稳性的基本物理量。它深刻影响着从宏观的交通工具乘坐体验到微观的精密制造过程的方方面面。通过对急动度的有效控制，可以显著提升人类在运动环境中的舒适感和安全性，例如在电梯、列车、汽车以及游乐设施的设计中。在机械工程和机器人技术领域，急动度管理是确保系统运行精度、延长部件寿命、减少振动和噪声的关键。在制造业，尤其是在数控加工中，对急动度的优化直接关系到加工质量和生产效率。航空航天工程则利用急动度控制来实现航天器的精密机动和敏感仪器的保护。此外，急动度分析还在生物力学领域为我们理解人类和动物的运动协调性、诊断神经肌肉功能障碍提供了独特的视角，并在地震学中帮助我们更全面地评估地震灾害的潜在风险。

而急动度的导数——加急动度（Jounce/Snap），则为那些对运动平顺性和稳定性有着极致要求的应用（如哈勃望远镜的指向控制、敏捷无人机的飞行、超精密加工等）提供了更深一层的控制手段。它代表了运动控制向更高精细化水平的迈进。

5.2. 未来展望与不断演进的应用

随着科技的飞速发展，对系统性能的要求日益提高，急动度及更高阶运动导数的重要性预计将持续增长³⁷。

- **自动驾驶汽车：**在自动驾驶汽车领域，为了获得公众的广泛接受和信任，提供安全、平稳且舒适的乘坐体验至关重要。这就要求车辆的运动规划和控制算法必须能够精确管理加减速、转向等过程中的急动度，以避免令乘客感到不适的“顿挫感”或“摇晃感”。
- **先进机器人与人机交互：**随着机器人越来越多地进入人类的工作和生活空间，它们运动的自然性、平滑性和可预测性变得尤为关键。在人机协作、服务机器人、康复机器人等应用中，低急动度的运动不仅能提升安全性，还能增强用户对机器人的信任感和接受度。
- **虚拟现实（VR）与增强现实（AR）：**在VR/AR应用中，用户头部或身体追踪的平滑性和响应的即时性直接影响沉浸感和用户舒适度。对显示画面或虚拟物体运动的急动度进行有效控制，有助于减少视觉辐辏调节冲突（VAC）和晕动症的发生。
- **人因工程学与生物特征识别：**对人体运动中急动度特征的深入研究，有望进一步揭示人类运动控制的精细机制，为改善人机界面设计、开发更高级的生物特征识别技术（如基于步态的身份认证）以及更精准的运动障碍早期诊断提供新的途径。
- **人工智能与自适应控制：**将人工智能和机器学习技术与高阶动力学控制相结合，有望开发出能够实时感知环境变化、预测动态扰动并自适应调整运动策略的智能控制系统。这类系统能够根据实际工况动态优化急动度和加急动度剖面，实现前所未有的运动平顺性和鲁棒性。

有效管理急动度及其更高阶导数，并非仅仅是控制理论或算法设计的问题。它实际上是一个涉及多学科知识融合的挑战。这其中既包括对材料科学的理解（例如，材料如何响应动态载荷、其疲劳极限如何），也需要对人因工程学的深刻洞察（例如，人体对不同类型运动的感知阈值、舒适度偏好、安全界限等），当然更离不开先进控制理论的支撑（例如，如何设计出能够精确跟踪复杂高阶运动剖面的控制器）。未来的进步，将越来越依赖于这些领域知识的协同与集成。例如，新型智能材料或许能提供更好的振动阻尼特性，以被动方式吸收急动度引起的冲击；而更复杂的控制算法则可能结合实时的生物反馈信号或结构健康监测数据，动态调整运动参数。特别是在自主系统（如自动驾驶汽车、自主机器人）的设计中，这种跨学科的融合将是实现其被社会广泛接受、并能安全舒适地服务于人类的关键。这预示着，对

高阶运动动力学的研究和应用，正推动着我们创造出运动行为更接近自然生物系统那样平滑、高效和自适应的智能机器。

引用的文献

1. [Content - Differential calculus and motion in a straight line](#)
2. web.ma.utexas.edu
3. [\[Jerk \(physics\) - Wikipedia\]\(https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_\(physics\)#:~:text=Jerk%20\(also%20known%20as%20jolt,an%20object's%20acceleration%20over%20time\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_(physics)#:~:text=Jerk%20(also%20known%20as%20jolt,an%20object's%20acceleration%20over%20time))
4. [What is the term used for the third derivative of position?](#)
5. [Understanding Jerk in Physics: Definition, Formula, Examples, and ...](#)
6. [Fourth, fifth, and sixth derivatives of position - Wikipedia](#)
7. [Jerk \(physics\) - Wikipedia](#)
8. [An in-depth investigation of ground jerk characteristics for the four strongest Vrancea \(Romania\) earthquakes in the past half-century - Frontiers](#)
9. [Jerk within the Context of Science and Engineering—A Systematic ...](#)
10. [Is jerk \(the derivative of acceleration\) related to the physical act of jerking someone? - Reddit](#)
11. [What are the application of Jerk in Engineering physics ...](#)
12. [What does joint jerk mean in robotics - Reddit](#)
13. [Key Dynamic Parameters that Influence Ride Quality of Passenger Transportation Systems - The Lift and Escalator Library](#)
14. [The Effect of Jerk and Acceleration on the Perception of Motion Strength - ResearchGate](#)
15. [Standards for passenger comfort in automated vehicles: Acceleration and jerk](#)
16. [The role of acceleration and jerk in perception of above-threshold surge motion - PMC](#)
17. [Evaluation of Vehicle Ride Comfort based on Neural Network - ResearchGate](#)
18. [analysis of proposed criteria for human response to vibration](#)
19. [Euler spiral - Wikipedia](#)
20. [The Euler spiral: a mathematical history | Request PDF - ResearchGate](#)

21. [\(PDF\) Optimal Control of an 8-DOF Vehicle Active Suspension System Using Kalman Observer - ResearchGate](#)
22. [Performance Improvement during Attitude Motion of a Vehicle Using Aerodynamic-Surface-Based Anti-Jerk Predictive Controller](#)
23. [NOISE AND RIDE COMFORT PERFORMANCE - TK Elevator](#)
24. [etasr.com](#) (注: 标题为 "A Study on Improving Ride Comfort for Electric Vehicles")
25. [Mathematics of Motion Control Profiles](#)
26. [Trajectory planning algorithm based on the continuity of jerk - ResearchGate](#)
27. [A Piecewise Acceleration Optimal and Smooth-Jerk Trajectory Planning Method for Robot Manipulator along a Predefined Path - ResearchGate](#)
28. [Synchronous feedrate scheduling for the dual-robot machining of complex surface parts with varying wall thickness - Bohrium](#)
29. [Accurate Interpolation of Machining Tool-paths Based on FIR Filtering](#)
30. [Cams - MechSE Reference Pages](#)
31. [Cam Systems and Cam Design – Introduction to Mechanical Design and Manufacturing](#)
32. [Jerk Control in machines - CNCzone.com](#)
33. [Jerk analysis based on engine working cycle number. As shown in Figure... - ResearchGate](#)
34. [Question about cutting speed and efficiency - Autodesk Community](#)
35. [Feedrate scheduling and jerk control algorithm for high-speed CNC machining - Inderscience Online](#)
36. [An application of screw theory to the jerk analysis of the PUMA robot](#)
37. [\(PDF\) Beyond Acceleration: Exploring Higher-Order Time Derivatives of Position in Physical and Engineering Systems - ResearchGate](#)
38. [The Biomechanics of Stability and Smoothness: Integrating Tensegrity Principles with Jerk/RMS Acceleration Metrics in Gait Analysis | Brian Esty LMT](#)
39. [Using Jerk/RMS Acceleration for Context-Free Gait Evaluation | Brian Esty LMT](#)
40. [Smooth Moves: Comparing Log Dimensionless Jerk Metrics from Body Center of Mass Trajectory and Wearable Sensor Acceleration During Walking - PubMed](#)
41. [Estimating Movement Smoothness From Inertial Measurement Units - Frontiers](#)

42. [Research Article Characteristics of Jerk Response Spectra for Elastic and Inelastic Systems - Semantic Scholar](#)
43. [DJI Neo camera jerks. What's going on? - Reddit](#)
44. [MobilePoser: Real-Time Full-Body Pose Estimation and 3D Human Translation from IMUs in Mobile Consumer Devices - arXiv](#)
45. phys.libretexts.org
46. [8.4: Higher Derivatives - Physics LibreTexts](#)
47. [Jounce Rate - Adogy](#)
48. [Error Propagation Analysis of Kinematic Quantities for Robots and Mechanisms - ASME Digital Collection](#)
49. [Full article: Higher order angular kinematic quantities computed with dual numbers](#)