梦境

Michael Atiyah

在白天的广阔光明下，数学家检查他们的方程和证明，不放过任何一个细节，为了寻求严密性而不遗余力。但是，在晚上，满月下，他们做梦，漂浮在星空之间，对天空的奇迹感到惊叹，这激发了他们的灵感。没有梦想，就没有艺术，没有数学，也没有生命。

**梦想的力量**：这是最严格的批评家罗杰·卡略瓦所赋予他的名为“梦想力量”的睡眠文学选集的标题。白天，黑夜。计算、灵感。它们并不相互对立，而是相互滋养。在白天，普通的生物在工作。晚上，它们睡觉（有时也会反过来）。迈克尔·阿蒂亚所提到的那些人，他们将在页页之间不断地显现，不知疲倦地穿过镜子，如同穿过幕布一般，这种难以模仿的轻松自如，只有通过多年的努力才能获得。

Pitiless Reality

前言

本文描述了一种非常个人化的与数学的关系，因为我们不应忘记，每个数学家都是“一个特例”，这里写的只适用于作者，不能被认为是“通用”的观点。

在我看来，数学首先是我们拥有的最精细的思维工具和概念生成器，以便特别地理解我们周围的世界。新的概念是通过思想蒸馏的缓慢过程产生的。

起初将数学分为几个独立的领域（如几何学，空间科学，代数学，符号操作艺术，分析学，可访问无限和连续，数论等）是很诱人的，但这并不能描述数学世界的一个重要特征，即无法将其一个部分隔离出来而不剥夺其本质。

叛逆的行为

在我的看法中，要成为一名数学家，首先要知道的是不是通过学习而成，而是通过实践数学而成。因此，重要的不是“知道”，而是“知道如何做”。当然，知识是绝对必要的——绝不能抛弃已经掌握的知识——但我一直认为，在几何问题面前陷入困境比吸收更多未经消化的知识更能使人进步。

对我而言，成为数学家的起点或多或少是一种叛逆的行为。什么意义上的叛逆？即未来的数学家将开始思考某个问题，并发现实际上他在文献中读到的，他在书中读到的，与他个人对这个问题的看法并不相符。当然，这往往是出于无知的结果，但只要他的论证基于个人直觉，并且当然是基于证明，那么这就不重要了。因此，这样做并没有关系，因为他将学习到，在数学中没有最高权威！如果一个12岁的学生发现自己的论点得到证明，他完全可以反对他的老师，这就区别于其他学科，老师可以轻易地躲在学生不知道的知识背后。

一个五岁的孩子可以对他的父亲说，“爸爸，没有最大的数字”，并且可以确定这一点，不是因为他在书中读到的，而是因为他在脑海中找到了证明......这种自由可以被那些认识到并尊重规则的人所把握。而首要的事情是成为自己的权威。也就是说，要理解某些东西，而不是试图立即检查它是否写在书中；这不是正确的方式。那只会拖延他对独立性的觉醒。他所要做的是，在他的脑海中检查它是否正确。

当一个人明白了这一点，他可以逐渐熟悉数学领域的一小部分，并从自己的个人参照点开始，开始跨越这些美妙的领域的漫长旅程。

诗意的力量

可以说，数学家的任务有两个方面：一个是证明、检查等方面，需要强烈的集中注意力，需要过度的理性主义，但幸运的是，还有一个具有远见卓识的方面！这种远见卓识有点像通过直觉启动，它不受确定性的限制，更像是一种诗意的吸引力。简单地说，数学发现有两个时刻。第一个时刻是当直觉尚不能以合理的方式传达时。此时，视觉才是最重要的！不是静态的方面，而是一种诗意的推动力。

这种诗意的力量几乎无法用言语表达。当我们试图传达它，试图表述它时，我们只会成功地使它变成石头，所以我们会失去发现过程中必不可少的动力。

然后，当足够多的难题的碎片到位时，我们可以看到这种远见卓识可以转化为问题的解决方案时，情况就会发生改变。例如，当我开始成为一名数学家时，在我所发现的事物中，其中一个对我印象最深的事情是，在与雅克·迪克斯米尔（Jacques Dixmier）撰写论文时（相反的照片），非交换代数随时间演变！我所展示的是，事实上，非交换代数有一个完全规范的时间演变。更准确地说，由Tomita理论给出的演变，但它取决于一个状态，实际上只取决于这个状态对内部自同构的模，这是平凡的，不存在。所以这表明了非交换性生成时间！仅此而已！当然，直接的结果是代数有许多不变量，例如其周期，也就是演变为平凡的时间t。但是这些结果，虽然可以被表述和传达，但并不能完全表达出诗意的内容和最初发现时的奇妙推动力。

数学的现实性

有些诗人我非常欣赏，比如伊夫·邦费，因为他们在方法论层面上与数学非常接近。在我看来，区分诗人和数学家的是，诗人的原材料是人类经验的物理现实。诗歌的主要成分是个人内在世界与外部现实的冲突，这种暴力总是令我们惊讶。另一方面，数学家的旅程是在另一种不同的地理空间中穿行，穿过不同的景观，与另一种现实相遇。

数学现实与我们所生活的物理现实一样严酷，一样难以逾越。视觉的瞬间并不足以使数学家真正做数学。也就是说，与先见之明相对应的是不确定的时刻，是痛苦的时刻，是不断害怕自己犯了错误的时刻。有点像攀登悬崖，迫使人们不断地向下看……你必须一直对自己说，“在这里我可能犯了错误，也许我真的犯了错误。”你不知道，你总是害怕！有时你可能会因为遇到真正的现实而度过数小时的可怕痛苦。

因此，这不是普通意义上的现实，但它可能更加残酷。

真理的概念适用于另一个世界，这不是人类经验在外部现实中的世界，而是数学现实的世界。关键点是要理解，虽然许多数学家都花费了一生的时间探索这个世界，但他们都同意它的轮廓和连通性：无论旅程的起源如何，如果旅程足够漫长，而且不将自己局限于极端专业化的领域，总有一天你会到达其中一个著名的城市，比如椭圆函数、模形式、ζ函数等。“所有的道路都通往罗马”，数学世界是相互关联的。当然，这并不意味着它的所有部分都是相似的，Grothendieck在《收获与播种》中这样描述了他从分析学的景观开始他的旅程，到代数几何的景观：“我仍然记得那个令人震惊的印象（无疑是非常主观的），就像我已经离开了严酷、荒凉的草原，突然间来到了一片‘

“I still remember that striking impression (certainly

quite subjective), as if I had left behind the harsh, arid

steppes and was suddenly in a kind of ‘promised land’

whose luxuriant riches, multiplied to infi nity, could

be plucked, sifted wherever the hand chose to delve.”

Alexandre Grothendieck

伽罗瓦

伽罗瓦所理解的，也是现代数学的基本出发点，就是你必须能够超越计算。也就是说，不是进行计算，而是在脑海中进行计算！理解它们的本质，理解将要遇到的困难等等，但是不进行具体的计算，而是理解结果的形式，结果的对称性。从而超越你可能很容易被困在其中的外部包络线。你必须尝试超越计算，沉思对称性等层面。

“跳进计算之中；将操作归类，按照它们的难度而不是按照它们的形式进行分类；在我看来，这是我们的任务。”——伽罗瓦

他的前辈们寻找方程的根的对称函数，而伽罗瓦则通过打破对称性来开始探究。他的起点是任意选择一个根的函数，这不允许任何对称性。奇迹就在于，他从函数到根的不变性群是与最初任意选择无关的。

伽罗瓦的思想远非过时，仍然在当代数学中发挥着作用，仅仅因为它们的简单性和它们引起的运动。格罗滕迪克的“动机论”是伽罗瓦理论在维度大于0时的自然推广，也就是说，如果你愿意，是多元多项式。这些当代的发展，就像伽罗瓦微积分理论一样，直接放置在伽罗瓦思想的动态之中。在这里，我们应该引用他的信和遗嘱。

“你知道，亲爱的奥古斯特，这些课题不是我所探究的唯一内容。有一段时间，我主要的冥想是将模糊理论的理论应用于超越分析。目标是看到在量或超越函数之间的关系中，我们可以进行哪些交换，哪些量可以替代给定量而不使关系停止。通过这种方式，我们立即看到许多我们可能寻找的表达式是不可能的。但是我没有时间，我的思想在这个广阔的领域中还没有得到充分发展。”——伽罗瓦

代数与音乐

在我看来，让孩子在早期接触音乐至关重要。我相信，让孩子在五、六岁左右接触音乐，可以平衡他智力中视觉感官的主导地位，这种不可思议的、纯粹的视觉天赋，孩子很早就会发展出来，实际上与几何学有关。音乐使我们能够与代数平衡，也就是说，音乐与时间密切相关，正如代数一样。一方面，在数学中，几何学和大脑的视觉区域之间存在着基本的二元性，几何学给我们带来了瞬间和即刻的直觉。我们看到一个几何图形，嘭！那就是全部，我们不需要解释，也不想解释。另一方面，代数则不是视觉的，但是与时间有关；它是“随时间而变化的”！这是计算等等，它是一种演化，非常接近语言，并具有语言的恶魔般的精确性。我们可以通过音乐来感知代数的这种力量和精致，以这种方式感知音乐与代数之间的不可思议的勾结。例如，我非常喜欢肖邦的某些前奏曲，因为我觉得它们有着非常奇妙的浓缩、蒸馏的特性。这种音乐就像突然被一阵风打开的窗户一样，悄悄地钻进房间，然后从另一边出去。把一个思想浓缩到它最清澈、最纯粹的形式……这就是代数的某种方式。

建议

我将以一些实际的建议来结束这篇文章：

**去散步**

当你遇到一个非常复杂的问题（通常涉及计算）时，健康的做法是去散个长步（不带纸笔），在脑海中进行计算（忽略“它太复杂了”的初步印象）。即使你没有成功，这也是很好的记忆训练，可以锻炼智力。

**沙发床**

数学家（男性和女性）通常很难让他们的配偶相信他们在躺在床上黑暗中时是最专注的。不幸的是，电脑屏幕和电子邮件的普及使这种专注方式变得不太常见：这使得它更加珍贵。

**要勇敢**

数学发现有两个时刻; 有时候你必须勇敢: 你必须爬上岩石，永远不要往下看……为什么？因为如果你开始往下看，你会说：“是的，当然，某某已经研究了这个问题，没有成功解决，所以我没有成功的理由。”你会找到一百个理性的理由来阻止你往上爬。所以你必须抽象出来。为了使一个想法能够在t时刻之前形成而不过早地在知识的迷雾中消解，你必须“保护你的纯真”。

**压力**

在他的一生中（通常是在开始时），数学家通常会面临由于激烈的竞争而引起的困难。例如，你收到了一个竞争对手关于你正在研究的同一主题的“预印本”，你会感到不合理的压力来迅速发表。我唯一知道的在这种情况下的方法就是尝试将这种挫败感转化为更加努力工作的能量。

**不要生气**

我的一个同事很久以前向我吐露了自己的想法：“我们（数学家）为了一些朋友的勉强认可而工作。”事实上，由于研究是一项孤独的工作，研究人员以某种方式感到需要得到认可。事实上，只有一个真正重要的法官; 就是你。你不能与之交易。过于担心别人的看法是浪费时间；没有定理是通过公投证明的，正如费曼所说：“你为什么在乎别人的想法？”

Alain Connes

来自塔斯马尼亚的爱

13年前的一个炎热夏日，也就是1994年的1月份，我发现自己坐在澳大利亚霍巴特的塔斯马尼亚大学的办公室里。我看着窗外，忽略着一场正在靠近校园的灌木丛火灾；而在室内，我正在试图理解我亲爱的同事David Broadhurst最后一封电子邮件中有关我们刚刚在费曼图的计算中发现的一些奇怪而神奇的数字。

我于1993年搬到了塔斯马尼亚，被访问Bob Delbourgo的团队的机会所吸引，并在那里逗留了好两年。这证明是一个完美的选择：理论粒子物理学是一个常常需要进行大规模计算的领域，而反思的时间总是很短。我希望，塔斯马尼亚是一个可以退后一步，重新思考粒子物理学的某些理论基础的地方。

一切都始于我们观察到费曼图展开中来自拓扑简单项的某些振幅只产生有理数，而更为复杂的拓扑则给出了更为杰出的数字，也就是我们现在已经学到的混合动机的周期。

然而，为了达到这种理解，需要数据，这仅仅意味着在图形扩展中计算更多项。幸运的是，David是一个无与伦比的合作者，当涉及这样的计算时，他的技能无可匹敌，因此我坐在霍巴特的办公室里，那里的窗户确实有一个视野，南海仅有一英里之遥，我在那里写下了所有这些图形，思考它们的拓扑，疯狂地与David交换电子邮件。对我们来说很合适，他正好在英国的地球的相反点上；他的睡眠模式和十个小时的时差让我们经常同时在线。

其中一封电子邮件突然询问，“顺便问一下，灌木丛着火了怎么样？”——显然已经进入了BBC新闻。嗯，我抬头看到物理楼被遗弃了，50码之外的桉树开始燃烧，但那也是它的终点。因此，我们的合作进展顺利，我们发现了足够奇怪和神奇的数字。但是，在塔斯马尼亚岛度过的那些年，那里比人类更密集地分布着恶魔、蜘蛛和鲨鱼，为量子场论的数学结构和其摄动展开打下了更深刻的基础。

这个追求最终把我带到了IHES，但那是另一个故事，这个故事将再次以与Alain Connes的愉快合作开始。因此，IHES现在是我反思量子场和我们如何在世界描述中使用它们的地方。它是一个反思和思考的场所，灵感来自那个小岛南部尽头沿海孤独的海滩。

Dirk Kreimer

Puzzles

我只是为了解谜而研究数学。我喜欢玩一些有趣的想法，享受它们的旋转、分解和组合过程。大体上来说，我的兴趣在于那些具有递归性质，可以通过图像理解，或是由各种不同的组成部分构成的事物。将一些零散的部分组合在一起形成复杂的结构，揭示出各种规律和例子。

纯粹的数学既受到宏观视角的驱动，比如一些重大的猜想、深刻的定理和宏伟的视野，也受到微观视角的驱动，比如那些有趣的谜题和小型的思想实验。而我更倾向于微观层面。

很幸运地，Dirk Kreimer收编了我这个迷失的灵魂。Dirk是一个思维敏捷、富有创造性的人，他的每一次思考都能带给我新的灵感。现在，我甚至可以自娱自乐地认为，我所研究的这些谜题与宇宙和其他重大的问题有关。但最近我也意识到，有很多有趣的数学难题我可能永远无法探索到。或许，我能抱着一线希望，希望自己的博士学位只是人生职业生涯中的一小部分，早年有更多的机会去尝试各种可能性，而在以后则可以因为更加专业而涉猎更广。

Karen Yeats

结构化的愤怒

保罗·阿尔梅达

里斯本大学

“数学的本质就是自由。”

Georg Cantor的名言传达了所有数学家的内在感觉，即使他们交替扮演解密者或创造者的角色，这种感觉常常被忽视。一种仅仅受理性支配的自由，一个不无矛盾的概念，因为在自由行使其活动时，数学家自愿地遵守着严格的规则。另一方面，理性是现代科学和民主思想的试金石，在希腊的最初阶段，需要完全的自由，这有利于系统地质疑所有所谓的真理。因为人只能拥有相对的确定性。对于每个人来说都是如此，但对于数学家来说，自由既是一种命令，又是理性的一种条件。

数学家的个人地位预示了文艺复兴时期的思想，即艺术中的透视法可以扩展到整个世界，赋予每个人拥有自己观点的解放力量。另一方面，数学家从未能够摆脱罗马式的公民身份地位，根据一系列标准的等级来享有权利和合同义务；在他的身份绝对和属于一个社区之间，数学家以自己的方式处理自由和法律；他创造和推理，而在此过程中，神秘地解密。

千年的经验使我们相信，在许多科学领域，理性的东西是真实的，真实的东西是理性的，数学的独特之处在于现实更常常是非常遥远的，既包括思想起源，也包括思想的命运，这一点并不质疑数学家安静、地下的工作。这项工作，带着它的不规则进展，疯狂的痛苦，有时一连串的挫败，仍然在某些地方保留着秘密的、私人的乐趣，就像拉伯雷的狗咀嚼骨头一样，吸出了实质的髓，这种髓被数学家感觉到是超越他自己的机械装置中的齿轮，特别是因为它对现实世界的影响。所有这一切并非没有令人担忧，因为数学思想的本质总是相同的，无论它们是造福人类还是给战争贩子带来利润的来源。

自愿遵守其自由范畴内的严格规则——主要是论证规则——自古希腊以来，数学家们已经成功地发现了一种不同于文艺复兴引入的系统性实验方法的获得真理的独特方法：在两种情况下，确认或否定的思想都首先是直观的。由直觉引发的损害风险由证明或实验限制，但它仍然是启动发现过程的直觉。

然而，在数学中，“原始思想”的“私人生活”通常是不可访问的，实际上人们只知道它们在定义和证明的正式外观中的“公开生活”。

这种情况导致了一种扭曲，对数学教育产生了严重的后果，因为人们往往认为数学思想的双重生活仅限于它们的“公共生活”；但对于数学家来说，形式主义就像刑法一样具有技术价值，自然必须掌握；然而，真正的进步建立在由对事物可理解性的本能引发的直觉上，更具体地说，在数学中，是建立在对合理表达的直觉上；与音乐或更普遍地说，与所有艺术品中所找到的难以言表的合理性本质不同。

在那里，音符、舞者的动作、画家的笔触、作家的语言选择或摄影师的角度都有其自己的不可争议的必要性。然而，如果说所有这一切的难以捉摸的性质使我们解脱了束缚，同时也禁止我们进行繁琐而脆弱的建构，这种建构在距离其起源地的地方仍然保持着相关性。

在这里，我们再次找到了浪漫爆发和经典严谨之间的对立，二者都可能过度，或者因过度的激情或过度的结构。数学活动，永远在两个极端之间寻求平衡，无非是借用葡萄牙哲学家Antonio Sérgio的一句话，即一种“有结构的狂怒”，但它是可表达的。

一个鞑靼荒漠

Ngô Bao Châu

巴黎南大学

普林斯顿高等研究院

到达IHES后，我们这些普通的数学家和穆斯林去麦加朝圣时有着相同的感受。这是一个地方，在这里，Grothendieck十几年来不知疲倦地向他的门徒解释神圣的话语。关于那个传奇，只有伪经传到了我们的手中，以Springer出版的大黄色乏味的书籍的形式。这些数十卷的《Bois-Marie代数几何研讨会》是我们学徒时期的主要食粮，也是我们最珍贵的工作伴侣。

那里是控制塔，传说Deligne在那里关门自闭，为Weil猜想找到了他的证明。

然而，几周后，宗教的感觉消失了，无聊占据了上风。在这个被郁郁葱葱的乡村环绕着的漂亮建筑里，没什么大事发生。回头看看，我现在确信事情正在进行，但我们没有注意到。以下是我个人的经历，支持这一不那么明显的信念。

几个星期以来，我一直在与Faltings的一篇文章进行斗争。他无疑是所有实践数学家中最伟大的天才之一，此外还有写文章的精致习惯，有时会出现完全无意义的句子。几周以来，我一直在试图理解其中的一句话。在他自己的背景下，可以理解他的意思。但是，他明显荒谬的句子暗示了更广泛的背景。我感兴趣的就是这个。那个下午，我成功地给它赋予了明确的含义。然后，尽管在所有的努力之后有点失望，我最终写了一个十行的引理，它并不令人惊讶，除了它似乎直到那时还是未知的。在茶点时间，我告诉Laurent Lafforgue我的引理，他以他一贯的热情回答道：“但这正是你要做的！”他的热情温暖了我的心，但并没有完全消除我的疑虑。

我现在认为那个下午Lafforgue是正确的，我经历了我职业生涯中最关键的时刻之一。

Ngô Bao Châu

异国情调

保罗-奥利维尔·德艾

牛津大学默顿学院

“你的研究课题是什么？”

“你为什么对它感兴趣？”

“它有什么用？”

“那位俄罗斯人为什么拒绝了奖章？”

“那你每天都在做什么？”

“只有纸和笔吗？”

每个数学家都经常面临这样一连串的问题，证明了公众对他的学科的着迷。每年出版的众多通俗读物是另一个证明，以及为解决我们这个时代的重大问题而颁发的奖金和捐款的增加。

这种好奇心来自哪里？

也许是数学家的态度相当特殊。或者是真正异国情调的语言的吸引力。或者，是一种把数学家放在顶端的科学学科的等级制度。

至于你，我的朋友，读者，你为什么要翻阅这本书呢？

保罗-奥利维尔·德艾

好奇心

Sophie De Buyl

布鲁塞尔自由大学- IHES

据说每秒钟有六十五亿个微弱相互作用的粒子——中微子，穿过我们皮肤的每个平方厘米；在密西西比河岸的时间比珠穆朗玛峰山顶上的时间流逝得更慢；我们的身体主要是空的；光速是有限的……

我着迷于人类的抽象和演绎能力。通过推理，有时是非常简单的推理，他成功地解读了他周围的世界并且超越了他通过五感所能感知的范围去理解它。他无法满足的好奇心是越来越多的问题的源泉，而这个冒险可能没有尽头。我们可以轻易地打赌，很多根本性的但尚未明确的问题，例如当今困扰物理学界的空间和时间的确切本质，将来的某一天将以完全不同的方式被看待，大约一百年后。就像我们今天知道地球绕着太阳转一样，知道为什么天空是蓝色的一样。

此外，您是否知道我们的宇宙可能有十个时空维度，我们的银河系中心可能有一个黑洞，我们可能生活在像蚂蚁在细绳上一样的“膜”上，只有对其中一部分空间有意识，或者每个基本粒子可能拥有一个“超对称”伴侣？

对称原理已经在其他领域引领出了标准模型和广义相对论这两个当今物理学的支柱。我们可以推测这些原理将指导理论物理学未来的进展。当答案涉及优雅的数学，将概念统一起来并给我们带来对周围世界的更深层次理解的感觉时，我很喜欢这种情况。

Chartres路线的路面石板和琼斯的多项式

Thibault Damour

IHES

Einstein Medal, Powell Medal

那个叙述者经历了“重拾时光”的喜悦，正是在踏上Guermantes酒店不平整的院子石板时。

1989年的一个晴朗的秋日，当我作为新任“正教授”穿过Chartres路35号的大门石板时，也有了类似的经历，看到了那块镶着亮晶晶金色字母的大理石牌匾：“高等科学研究所”。

突然间，我看到了15年前的自己，重新体验了那一刻：在Achille Papapetrou的陪同下，第一次跨进IHES的门槛。我再次看到了“音乐亭”的窗户透过春天公园的景色，听到了J.A. Wheeler讲座前用不同颜色的毛毡笔提前写在大纸张上的主题内容在风中飘荡的声音。对于当时还很不成熟的研究生来说，这个研讨会在多个方面都是一个重要时刻。首先，这是与一位伟大物理学家的思想和本人的印象深刻相遇。其次，因为我直观地理解到（对于一个没有经验的研究生来说），最好避免Wheeler现在致力于的研究项目，即与可观测现实相去甚远的深刻研究（超空间中的量子引力）。最后，因为我作为“École Normale”（法国师范大学）的一名年轻研究生，获得了普林斯顿大学Jane Eliza Proctor博士后补助金，来到Wheeler的相对论引力研究小组，询问他是否接受我在1974-1975学年中加入他的小组。他接受了，我在普林斯顿的博士后留学（1974-1976）在我的科学发展和职业生涯中起着至关重要的作用。

又是一个渐入渐出。时光倒流了十五年。现在的我是一位新当选的全职教授，在IHES的自助餐厅里吃了第一顿午餐。我因自己对数学等方面的无知感到畏惧，觉得在这些名人中显得格格不入。我的左边是沃恩·琼斯，他的著名“多项式”最近因爱德华·威顿的一篇文章，展示了与某些物理模型的联系而成为科学界谈论的话题。我敢向他承认我对“多项式”一无所知吗？沃恩·琼斯是一个亲切、外表和蔼的人，他很友好地让我放心，并主动提出为我讲解。他用餐桌上随手可得的小纸条和笔向我解释了琼斯多项式的作用、本质和定义。我当时明白了两件事：首先，IHES的特殊结构有利于各领域最高水平的科学家之间自由友好的交流（在午餐、在茶歇、在黑板前...），从而提供了一种特权访问知识的途径，这比通过阅读发表的文本获得知识要困难得多而且效率更低。其次，我很幸运被选入这个温暖的科学集体，我需要超越自己才能配得上这个特权，并且我在IHES在智力和个人层面上都会非常快乐。

——蒂博·达穆尔

从1948至今

Cécile DeWitt

University of Texas

我第一次在普林斯顿见到了莱昂·莫查内，那是1948年11月13日，当时我是普林斯顿高等研究院的博士后学生。他请我帮他安排与J·罗伯特·奥本海默见面的约会，这是一件简单的事情，如果不是弗里曼·J·戴森也是一位博士后学生，他在给父母的每周信中描述了莫查内的访问，我可能很快就会忘记这件事情。戴森给父母的信以及在他们去世后写给姐姐的信都包含了他一生中许多有趣的遭遇，其中一些已经发表。11月14日，戴森写信给父母说：“塞西尔昨天带来一个法国百万富翁（一种工业巨头）给我们看研究所。她告诉我们她建议在法国建立这样的研究所将非常有用；她告诉我们她已被任命为这个法国研究所的负责人，并且我们都将被邀请到那里教书。看看这个想法能带来什么有趣的事情吧。”

回到法国后，我的目标是创建一个理论物理的夏季学校。莫查内的目标更加雄心勃勃：创建一个普林斯顿模式的研究所。但我们的愿望是同等级别的。所以我去见了他。夏季学校可以成为他的研究所的第二个家。我们的讨论非常友好。在这个领域，我们是唯一设立新研究所的人。但我比莫查内更着急。我把创建夏季学校作为与外国人结婚的条件。此外，莫查内正在寻求私营部门的补贴，而我则在各个地方寻找，最终从法国教育部的高等教育司获得了一笔资助。1951年4月18日，格勒诺布尔大学理论物理夏季学校在勒让山（上萨瓦省）成立。1961年4月26日，我与Bryce DeWitt结婚。1958年，IHES在巴黎的Thiers基金会成立。1962年，该研究所搬到了布雷西尔伊维特的Bois-Marie。

50年来，我以各种身份频繁地参加了IHES的活动，但始终怀着同样的魅力。几个里程碑：60年代，在IHES的鸡尾酒会上，我遇见了Pierre Cartier，并发现他在各个领域的专业知识。2006年，我们的书《Functional Integration, Action and Symmetries》出版了（剑桥大学出版社），这是20年合作的成果。没有IHES提供的绝佳工作条件，这项工作是不可能完成的：可以根据其他承诺的时间长短在那里逗留；无与伦比的组织（我可以做出这样的比较，因为我旅行了很多）——生活条件、餐食、办公室、专业的员工总是乐于照顾他人的需求；地方的精神，Bois-Marie，让人重新振作。

1999年11月17日，在“友谊日”上，Jacques Friedel向我颁发了“荣誉军团勋章”。

自1996年以来，我作为行政委员会的成员参与了该研究所的生活。每次会议都充分展示了在Jean-Pierre Bourguignon的领导下所取得的进展。当回顾自1948年以来的进程时，IHES的历史上有两个名字：Léon Motchane和Jean-Pierre Bourguignon：第一个创立了它，第二个给了它一股推动力，保证了它的永久性。他们俩都全心投入到这个任务中，许多人都应该感激他们。

Cécile DeWitt

认识、理解、发现

Yvonne Choquet-Bruhat

Pierre and Marie Curie University

CNRS Silver Medal

一个巨大的谜团出现在我们每个人面前，那就是我们意识到了两个不同的实体——我们的思想和外部世界。“我思故我在”，笛卡尔说。然而，我们所有人（或几乎所有人）都承认“另一个”也存在。每个人都以一种方式渴望知道它，以便掌握它或仅仅理解它。但是“理解”是什么意思？这个词有很多含义。对于科学思维来说，首先是将现象分类并确定它们之间的关系。分类和关系是存在的。这是一个可观察的事实，它区别于我们有时在梦中构建的现实。第二阶段是将这些关系组合成一个更普遍的定律，这些关系是其结果，最后将这个定律转化为我们思想构建的模型。也许理解总是在我们的思想和外部世界的现实部分之间找到适当性。

在科学家构建模型时，数学是一种基本工具。它长期以来一直很有用；现在对于观察事实的表述已经不可或缺。现实被揭示为比我们的感官所能感知的要丰富和更奇怪。对于一个物理学家来说，用日常用语精确描述量子现象是很困难的，但是越来越复杂的数学模型可以转化它们的特性...对于数学家来说，这些模型变成了现实本身。令人惊奇的是，数学，一种思维工具和概念生成器，拥有与现实如此适应的能力。然而，我认为没有模型能够完全穷尽现实。我希望我们无法预见的新工具和可观察事实将为未来的一代带来惊喜。生物系统的特殊复杂性现在也需要数学模型化。这反过来又启动了构建思维模型的新分支和尝试。然而，这是否足以解释笛卡尔格言中的“我在”呢？

表达了对数学能力的保留之后，我现在要赞美它了。它是一种普遍的语言，其中的真理是绝对的、无可置疑的，即使验证有时是困难的。用任何其他语言，即使是自己的母语，在传达相对微妙的思想时也很难完全表达清楚，更不用说在另一种语言中进行翻译了。数学是一个宝贵的工具，用来构建实验现实的模型，但它本身也是一个奇妙的现实，所有地球上（也许在其他星球上）的智慧都可以咨询它，如果他们感兴趣的话。许多物理学家正在寻找物理现象的模型，他们发现了新的数学概念，这些概念使他们着迷。因此创造的数学存在有了自己的生命，也产生了其他数学存在。数学和物理的相互促进已经有很多文章，我不再赘述。

让我转向更个人的考虑。对我来说，从事数学工作就是一种逃避到一个理想世界的出口，旅程只受自己的限制。这个国家充满了需要学习或需要发现的真理；我喜欢学习，但是发现一个新的真理，即使是一个非常微小的真理，也是很棒的事情。一个有关物理模型的数学结果具有非常特殊的味道，因为它预示着我们所沉浸的不可枯竭的现实的一个尚未知道的属性。即使发现是非常微小的，研究人员也会感到高兴！我喜欢数学家的职业，这是一种理性视野和计算技能的混合。没有关于计算的结构和目的的引导线索，无论是人类思维还是计算机，都无法进行计算。某些结果——有时是惊人的——只有在长时间的计算之后才能获得，这些计算在以后的证明中不能总是避免。

我要说的最后一点是，数学宇宙存在于创造它的数学家社区之中——或者，如果读者更喜欢那种哲学，存在于发现它的数学家社区之中。作为数学家，能够属于这个理想国家的公民社区是一种巨大的快乐。无论国籍如何，同一学科的专家们都分享着一些真理和未解决问题的好奇心。他们的共同知识和兴趣使他们比起先后权的竞争更紧密地联合在一起。观点的交换是刺激和充实的。协作工作尤其令人满意。数学上的共鸣有时会转化为真正的友谊，这是人生的调味品。

——Yvonne Choquet-Bruhat

告别亚历山大之剑

Arndt Benecke

CNRS - IHES

对于年轻的头脑来说，数学逻辑和无痛学习在学校之间似乎存在着矛盾；对于精神头脑来说，物理因果关系和选择自由之间似乎存在着矛盾；对于以生产力为导向的头脑来说，理论抽象和完成任务之间似乎存在着矛盾；同样地，一个受过生物化学培训的人在工作中和一个纯粹的数学和理论物理研究所之间似乎存在着矛盾。这里有一种简单的解决方法：“物理学已经创造出了有关物体及其相互作用的强大理论；数学是描述物体及其相互作用的形式语言；生物化学是研究与生命相关的物理对象及其相互作用，因此可以/应该/确实依赖于物理理论和数学描述。”换句话说：“在无痛学习和选择自由的情况下，这个人正在（或试图）针对某个生物问题完成任务。”

尽管这种方法是我目前的官方工作，但我喜欢把其中的逻辑看作是亚历山大之剑对戈尔迪安结的作用：它是单向的（剑可以切开结，但结对剑没有任何影响），因此是公理的（剑的功能形式不能从戈尔迪安结的拓扑性质中推导出来）。

那又怎样，如果亚历山大的剑太钝无法割断这个绳结呢？如果基于公理集合论的所有描述新兴的生物功能形式并未降低描述的复杂性，因此未能抽象出所研究的对象的本质呢？如果在生物学中，对于新兴性而言等效于剑的工具仍需被创建而非仅仅应用呢？如果我们通过研究生物新兴性，实际上可以为理论物理学和数学增添贡献呢？如果研究功能性生物形式比研究无生命的物体更能激发形式主义的灵感，因为前者展现了更高层次的新兴组织和功能性（甚至可以增加美感）？

开个玩笑！在四维空间中，这个“绳结”就不存在了（假设这个神话并没有发明一个“绳结”，其并未被我们的拓扑定义所包含）。但话说回来，如果……也许我并没有开玩笑。

这个研究所简单地激发和保护了科学家所需的智力自由，以探索其思维的创造性。这就是为什么，至少在我看来，我在这里并不矛盾的原因。

注：在表达上述观点方面，有一种更加美丽和优雅的方式，例如道格拉斯·霍夫斯塔特在《哥德尔、艾舍尔、巴赫》和Rene Thom在形态动力学的作品中发现了更多的启示，我深感荣幸地继承了他的前办公室。

Arndt Benecke

关于生命尺度的对话

Annick Lesne

CNRS – IHES

**问题：将数学应用于生物学，这不是一个平凡的想法吗？**

Annick Lesne：的确，这个想法并不新鲜：许多人考虑使用数学来分析有机体的数据、构思模型、结构化推理。然而，用相反的方式，从生命出发，以全新的视角审视数学，却不太常见。

**问题：但对于数学家来说，“生命”是什么？我和一块石头有什么不同？**

A.L.：因为你可以繁殖（从而证明了你代表的“可行解决方案”胜出，因为它能够比所有可能的变体更快地复制自己）。因此，你是无数历史的产物，而石头则仅是其自身特定历史的产物，虽然随时间推移会发生形变、断裂、磨圆等。作为生物体（细胞、人类、生态系统），过去相互作用的产物，你因我们今天能够看到你而携带了大量信息！

**问题：太棒了！这是一个适用于一切的方案。拿报纸上的三行新闻作为例子，通过连续的推导，你可以追溯到整个世界的历史。任何具体事实都是一个终极产品。**

A.L.：是的，但在生物结构中，有一个额外的复杂性：生命的层次。一个生物体由几个层次组成，这些层次彼此不“知道”，彼此不直接“理解”，但必须“相处”。蛋白质的逻辑不同于细胞，后者又与组织不同，组织又不同于整个生物体。然而整体是相互协调的！

**问：那么您想找到哪些数学工具来帮助您理解这种连贯性呢？**

Annick Lesne：是的，但不仅仅如此。是的，我们正在寻找类似于自相似性在分形中的生命等效物。如果您试图通过为每个点分配一个位置来描述分形，则它会变得无限复杂。从您说“它是自相似的，如果我放大图片，我会发现同样的东西”的那一刻起，您可以在两行中编写描述分形的程序！不仅如此，由于它们的特殊性和特定性质，解决有关生命组织的多尺度一致性的数学工具将带来新的问题。这将引发新的数学。

**问：这将会使它远离生物学...**

Annick Lesne：这更好。让我们以布朗运动为例，这是数学和物理学的边界。一切都始于苏格兰植物学家罗伯特·布朗的实验观察。这些观察得到了一些物理实验的支持，然后由爱因斯坦进行了理论化，通过让让·佩兰进行的实验得到了验证，最后在数学框架中得到了形式化处理。在这个阶段，仍然存在一些交互作用，维纳过程仍然被物理学家使用，但它已经扩展到了一整个数学过程，它们完全失去了在物理学中的起源！这是一种数学理论，使温德林·沃纳赢得了菲尔兹奖。

**问：多么美妙的故事！除了你还没有做到...**

Annick Lesne：确实，我们还有很长的路要走...但我认真相信，通过仔细研究变换群，我们应该能够证明生命不变性的类型和上述不变性的失败，即使这个想法会激怒一些生物学家，因为对于他们来说，生命只是一连串的事件。事实上是一连串的奇迹，但这并不意味着其中没有一定的数学逻辑。

**问：我不知道奇迹的概念在您的学科中是可接受的吗？**

Annick Lesne：如果我说：在物理法则允许的所有事件中，一连串的具有几乎零概率的独特事件？那将为我们提供相当好的生命定义。

迷失在翻译中

Nikita Nekrasov, IHES

Hermann Weyl Prize,Jacques Herbrand Prize

对我来说，IHES代表了奇点。它结合了我从小到大梦想的一切。而且，它还结合了我成年后所保持的梦想。它位于法国。它虽然在乡村，但离巴黎很近。它容纳了物理学家和数学家，其中许多人都在我感兴趣的话题上工作。此外，这些物理学家和数学家来自那些给我教育和科学兴趣的国家。生活中不幸的事实是，这些国家在某种程度上已经不存在了。苏联已经崩溃了。美国发生了911事件。人们似乎对以前不关心的事情很在意。然而，在IHES的访客似乎生活在一个不同的世界里，只有科学值得思考。

列夫·兰道曾经说过，所有的理论物理学家都是从数学中来的。我对理论物理产生了“错误的理由”而对数学的热爱也随之而来，就像音乐或诗歌的爱好一样，或者甚至是跳舞的爱好，它们都可以来到一个人身边，这个人无耻地使用它们来追求他喜欢的女孩。十岁左右的时候，我非常喜欢动手做一些小型无线电装置和电动汽车模型（它们都没有太好的运行，我必须承认）。即使在那个时候，我也对理论性的事情很感兴趣，主要是法语和法国历史（在80年代初的苏联，法国历史确实是一个理论概念）。事实上，我和法国的联系始于我五岁的时候。我的祖母教我一些法语，她从她的革命前学校日子里记住了一些。

我在七八岁时被录取到一个教授法语的学校（在大多数俄罗斯学校中，外语是从第五年级开始教授的，即12-13岁时）。

当我11岁时，我的父母搬家了；我转学了，不再学习法语和一些法国文化，而是开始学习英语作为外语，并且我的同学是一些普通的街头混混。幸运的是，我还有一位伟大的物理老师，他认识到我对物理学的真正兴趣，并开始给我讲授高级物理课程。他还推动我走向理论物理和数学。最终，我进入了一所有数学课程的高中，所以我在学校教育的最后三年里处于“正确”的环境中。我们教育的一个方面是没有数学课程的讲座（除了初等几何学）。相反，我们通过解决老师给我们打印的数学问题来学习集合论、微积分和微分几何的基础知识。至于物理方面，我独立学习；我主要对天体物理学感兴趣，特别是恒星的演化，并尝试编写一个计算机程序，描述恒星的生死（当然，我想看到超新星变成黑洞）。由于这个问题对我来说过于复杂，我决定“研究”一些更普遍的问题，比如整个宇宙的演化。一发不可收拾，最终我读到了迈克尔·格林在《科学美国人》上的一篇文章，名为“超弦理论”，其中有美丽的黎曼曲面图片（我当然一无所知），我爱上了这个主题。从那一刻起（我14岁），我知道我想要做什么。这决定了我的大学、研究生院等选择。当然，我不知道自己会搬到另一个国家。

我大概是本科一年级的时候第一次听说IHES。我清晰地记得，我买了一本Misha Gromov的书，《带有偏导数的微分关系》，这本书被翻译成了俄语，然后和我的数学学习伙伴们一起读。我们非常喜欢“h原理”，这似乎是一种证明各种定理的非常有力的方法。实际上，我们非常喜欢它，甚至为它发明了一个特殊的名称，用一种有趣的方式发音字母“h”。我有一种感觉，这本书可能对我作为未来的弦理论家很重要，但它离我认为弦理论家必须首先需要的东西还有一些距离。由于弦理论的吸引力在于引力的量子理论，我需要一本好书来帮助量子化引力，当然，四维引力似乎是最重要的量子化事项。令人惊讶的是，当我遛狗去书店时，发现一本书的标题很有前途，《四维黎曼几何》，这是Arthur Besse的研讨会记录集。这是我第一次了解到伟大的法国微分几何学派（代数几何将会是下一个），也是我第一次“认识”我的未来院长Jean-Pierre Bourguignon。不幸的是，这本书并没有为我提供我所需要的所有关于四维流形的重要信息，我并没有立即成功量子化四维引力。但我确实了解到，Besse研讨会的参与者非常感兴趣的是一个被称为K3的流形。我肯定可以与之相关，因为我父亲年轻时是一名登山者，我们的书架上堆满了有关Annapurna、Chomolungma、K2等等的书籍。我有点困惑，为什么数学家要研究被称为康钦峰（喜马拉雅山的第三高峰，仅次于珠穆朗玛峰和K2）的东西，但当然，最终我了解到，K3既不是山峰，也不是核潜艇，而是隐藏着三个伟大K（Kahler，Kodaira和Kummer）的名字。

我第一次了解IHES物理部分时，经历比较戏剧化。作为一个对抽象和“非物理”的学科——弦理论感兴趣的本科生，我必须先证明我能够做真正的物理学，例如弱相互作用的现象学。这门课程学习的第一件事是μ子衰变。我使用的教材（由列夫·奥昆编写）给出了μ子寿命的一般公式，而不假设四费米相互作用的具体形式。进入这个公式的参数称为米歇尔参数。当然，我从童年时就记得米歇尔是一个法国名字，所以我知道它与法国物理有关。后来，我了解了路易·米歇尔及其在法国科学和社会中的作用。

几年后，我横跨大西洋开始了我的研究生学习。一天，在午餐时，我认识了一位明显是欧洲人的宇宙学家。我发现蒂博·达穆尔正在与阿列克谢·波利亚科夫合作研究一个许多人认为过于勇敢的课题——他们试图找到弦理论的可测试预测。我必须说，我在我们第一次见面时的行为并不是很自豪。我没有讨论他们“最小耦合原理”的基础，而是纯粹理论性地展开了一场政治不正确的讨论，讨论的是法国女孩。我感到不好意思，直到有一天我和我的导师列夫·鲍里索维奇·奥昆在午餐时聊起他在马赛的某个露天咖啡馆与布鲁诺·蓬泰科沃共进午餐的经历。蓬泰科沃已经七十多岁了，患有帕金森病。那天风很大，列夫·鲍里索维奇很难让他的餐巾保持在桌子上。在这个戏剧性的时刻，蓬泰科沃深思熟虑地对他说：“你有没有注意到，列夫·鲍里索维奇，马赛的女孩比巴黎的女孩漂亮得多？”

当我在研究生院学习时，Krzysztof Gawedzki邀请我参加他在维也纳Erwin Schrödinger研究所组织的项目。我去了那里，利用维也纳咖啡馆的安静氛围写我的论文。之后我得到了我的第一份访问IHES的邀请。不幸的是，那时我必须辩论我的论文，所以我不能来。

我曾经来过IHES一次，非正式地，在访问我的合作者、朋友、在很多方面都是我的老师Samson Shatashvili时。他曾经并且我希望他将继续是IHES的常客。那是在夏天，几位访客组成了一个团队，由Maxim Kontsevitch领导，在Ormaille住宅区打排球。我无法抗拒这个游戏的吸引力，当然也受到了我的合作者（一位网球冠军）的批评。

几年后，我收到了Mike Douglas组织的另一个项目的邀请。那时我有家庭紧急情况，也不能来。显然，悬念变得难以忍受，IHES向我提出了成为教授的永久职位。那个提议，我不能拒绝。

几年后，我得知雇佣我主要的原因是我打排球的事实。

有一次我读了Sasha Polyakov的一篇论文，他是每个弦理论家的英雄，被人崇拜或羡慕。他的结论是IHES是世界上最好的物理学研究地方。像往常一样，他省略了一些中间计算，所以这个无疑正确的结果很难再现。我继续努力，冒着因不再打足球而被解雇的风险。

——Nikita Nekrasov

思考的技术：对结构的追寻

Yiannis Vlassopoulos

University of Athens

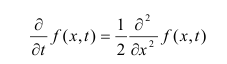
数学笼罩着一定程度的神秘感，对大多数人来说既有一定的排斥，又有一定的吸引力。然而，“做数学”毫无疑问是人类物种的基本能力之一，也是理解我们周围世界的主要方式之一。如果我们将文化和文明视为开放源代码（软件），从一代传承到另一代丰富发展，则数学可能是代码中最通用的部分之一。证明这一点的证据是，来自不同背景、文化和国籍的数学家在工作时完全没有沟通和合作的问题。

数学往往被认为是逻辑的代名词，对于任何被认为是数学的东西，必须有一个证明，例如，从某些基本定义开始，经过一系列逻辑步骤，推导出结论。尽管如此，大多数工作中的数学家会认为“洞察力”，结合实验（解决例子）和美学，是得出猜想的方法。在某种程度上，这个猜想的真相是目的地的愿景，而证明则具有双重作用：首先是验证目的地确实存在的方式，其次是作为“高速公路”（甚至是弯曲的小路）和到达目的地的基本指令集。如果我们将每个指令详细解释到最基本的形式，那么我们就有了一系列逻辑步骤，任何人都可以遵循。然而，仅仅遵循每个单独的步骤并不能保证理解整个过程或目的地。换句话说，仅仅一个接着一个地遵循指令并不意味着一个人可以在大脑中创建一个心理图像，并将其与已经使用的“软件”的其余部分融合。另一方面，对于理解的人来说，建立高速公路和/或沿着它行驶可能会提供一种观点和到达原始目的地以外的目的地的方法，这也是证明的情况。

数学的本质可以说是识别、提炼和分析结构。结构的存在通常以操作的形式被解释，这意味着我们能够构造出一些对象和一些过程，使得在给定这些对象中的一个、两个或多个的情况下，通过应用这些过程，我们可以产生更多同类的对象。每个知道如何进行加法和乘法的人都熟悉这一点，但我们应该指出，在试图对结构进行编码时会出现许多不同种类的对象。例如，我们将在稍后看到一个涉及曲面之间操作的情况。

诚然，这种呈现方式似乎更多地描述了我们所称的代数，但几何和代数之间有一个众所周知的相互作用。几何问题似乎先验地更适合于直观方法，但是当构建一个代数模型来捕捉情况时，这通常是一个巨大的进步。

然而，向非数学家介绍数学确实存在一个真正的问题。我认为这个问题类似于音乐家如果不能演奏他们的音乐，而必须从乐谱上阅读音符才能体验音乐的问题。这对于音乐家来说并不会太成问题，但对于其他人来说就会很困难。换句话说，如果我们能找到一种像演奏音乐一样“演奏数学”的方式，那么交流将会更加简单。为了“演奏数学”，可以将其应用于物理情境。例如，热传导方程的含义：



可以通过加热铁杆上的一个点并观察铁杆上的热分布f(x，t)（在距点x距离，经过时间t之后）来说明。它还可以作为Black-Scholes方程的特殊情况来演示，在该方程中，期权的价格f(x，t)在交易所到期时间t，其中x是基础股票的价格。然而，这个例子说明了数学实际上是一种思维或理解技术，并不一定是特定问题所固有的。

当然，物理学是美丽和重要的数学的重要来源。数学可以接近物理过程的最直接方式可能是通过几何学。我想通过回到来自几何和物理的操作来结束。

在弦论中，粒子由未参数化的环（称为弦）表示。当它们移动时，会擦出管道。当它们相互作用时，它们会擦出表面。例如，一对裤子对应于两个环相互作用以成为一个环。表面在末端有管道，对应于进出弦。惯性的类比是让表面具有“复杂结构”，例如，用平面的片段拼合它的方式，使得粘合保持角度的度量和方向。表面可以通过规定将一个表面的出射管与另一个的入射管相接来组成。这是一个关于弦相互作用以及空间片参数化复杂结构的操作。实际上，它还可以转化为某种图形之间的操作，这些图形可以被视为表面的“骨架”，因为当我们去掉它们时，从表面剩下的部分可以平滑地缩成一些点。这样，一个几何/物理问题可以转化为具有代数操作的组合结构。这是一种等待被思考的思考技巧。