函数项级数一致收敛性及其应用

李苓玉　　范进军*
(山东师范大学数学科学学院,250014,济南)

摘要　笔者运用数形结合的思想方法,借助 MATLAB 软件对函数项级数的一致收敛性进行了编程实现,给出了应用举例,揭示了函数序列动态收敛的过程,阐明了一致收敛的本质.

关键词　函数项级数;　一致收敛;　编程实现;　应用;　MATLAB
中图分类号　O 17; O 174　　**文献标识码**　A　　doi: 10.3969/j.issn.1001-4748.2016.04.003

1 引　　言

级数求和及其敛散性判定是分析教材[1]中非常重要的部分. 近几年,关于数学软件在函数项级数一致收敛性判定问题的研究微乎其微,如文献[2]仅对 MATLAB 判定函数列一致收敛性问题做了简单介绍. 受该文章的启发,笔者以文献[1,3]中的数学理论为依据进行推广,研究 MATLAB 在函数项级数一致收敛性判定中的编程实现及其具体应用问题. 通过直观分析图像来发现其规律,利用其数据的可视化亲身体会函数序列动态收敛的过程,进而阐明一致收敛的本质,探讨判定敛散性的新方法.

2 预备知识

为了得到 MATLAB 对函数项级数一致收敛性判定的方法步骤、实验程序和实例应用,本文事先给出以下几个引理.

引理 1[1]　函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

引理 2[1]　函数列 $\{f_n(x)\}$ 在数集 D 上一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0. \tag{1}$$

引理 3[1]　函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0, \tag{2}$$

其中 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$,即级数的和函数;$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$,即级数的前 n 项和. (下同)

引理 4[3]　函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于和函数 $S(x)$ 的几何意义是,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在自然数 $N=N(\varepsilon)$,当 $n>N(\varepsilon)$ 时,函数 $y=S_n(x)\ (x\in I)$ 的图像都落在带状区域 $\{(x,y)\mid x\in I,S(x)-\varepsilon<y<S(x)+\varepsilon\}$ 之中,而且 $y=S_n(x)$ 的图象随着 n 的增大越来越逼近曲线 $y=S(x)$.

引理 5[3]　若函数项级数在某个区间不存在引理 4 中所提到的公共的 $N=N(\varepsilon)$,就是非一致收敛.

现将一致收敛与非一致收敛进行对比. 如表 1 所示.

收稿日期:2016-06-14
* 通讯作者,男,教授,硕士生导师.

表 1　一致收敛与非一致收敛的对比表

	函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上
一致收敛于 $S(x)$	$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N_+$，对 $\forall n > N$，有 $\vert S(x) - S_n(x) \vert < \varepsilon$.
非一致收敛于 $S(x)$	$\exists \varepsilon_0 > 0$，对 $\forall N \in N_+, \exists n_0 > N, \exists x_0 \in I$，有 $\vert S(x_0) - S_{n_0}(x_0) \vert \geq \varepsilon_0$.

3　MATLAB 编程实现及应用

3.1　依必要条件编程实现　由引理 1 可得其逆否命题：若函数列 $\{u_n(x)\}$ 在数集 D 上不一致收敛于零，则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上不一致收敛. 据此，我们可对函数项级数的非一致收敛性进行判定.

3.1.1　一般步骤

1）　首先考察函数序列 $\{u_n(x)\}$ 是否收敛，若不收敛，则 $\{u_n(x)\}$ 不一致收敛，进而函数项级数 $\sum u_n(x)$ 不一致收敛.

2）　若函数序列 $\{u_n(x)\}$ 收敛，不妨设其收敛到 $f(x)$. 若 $f(x) \neq 0$，即 $\{u_n(x)\}$ 在数集 D 上不收敛于零，进而不一致收敛于零，则由引理 1 的逆否命题可知函数项级数 $\sum u_n(x)$ 不一致收敛.

3）　若 $f(x) = 0$，即 $u_n(x) \to 0$，则只需根据引理 2 判定 $\{u_n(x)\}$ 是否一致收敛于零. 若否，则函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上不一致收敛；反之，则需要借助引理 3 或引理 4 做进一步判定（具体方法见 3.2 依确界极限原理编程实现或 3.3 依几何意义编程实现）.

3.1.2　实例应用

例 1　已知函数序列 $u_n(x) = \sin \dfrac{x}{n}, x \in (-\infty, +\infty)$，问：函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否一致收敛?

分析　易知函数序列 $\{u_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛于函数 $f(x) = 0$. 若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛，由引理 1，只需对 $\{u_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛于零进行检验.

取一个具体的 $\varepsilon = 1/2$ 以及函数 $f(x) = 0$，当 $n = 1:6, n = 6:12, n = 12:18, n = 18:24$ 时，用 MATLAB 画出函数 $y = f(x), y = f(x) \pm \varepsilon$ 以及 $\{u_n(x)\}$ 的图像. 如图 1 所示.

MATLAB 实验程序：

```
x =- 10:0.01:10;
y1 = 1/2;y2 =- 1/2;
for n = 1:6
  sn = sin(x./n);
  y = max(sn);
  subplot(2,2,1)
  plot  (x,y1,'c - ',x,y2,'c - ',x,sn,'b');
  hold on
end
title('n = 1:6');
xlabel('x');
ylabel('y');
hold on
for n = 6:12
```

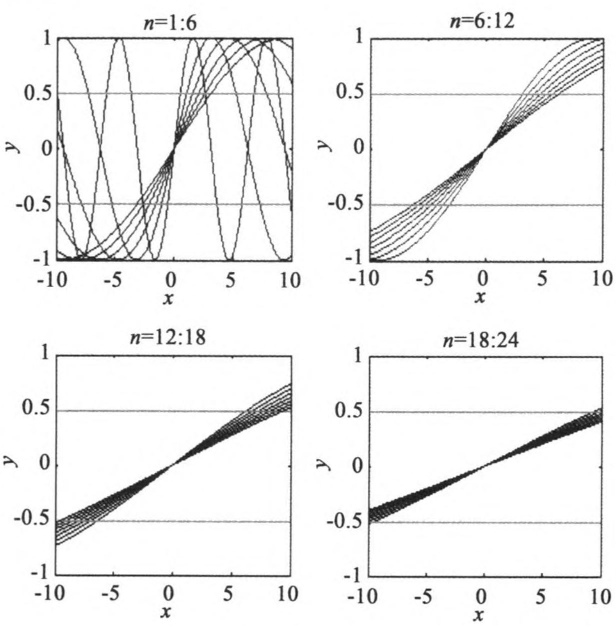

图 1　$\{u_n(x)\}$ 非一致收敛的图像

```
  sn = sin(x./n);
  y = max(sn);
  subplot(2,2,2)
  plot(x,y1,'c-',x,y2,'c-',x,sn,'m');
  hold on
end
title('n = 6:12');
xlabel('x');
ylabel('y');
hold on
for n = 12:18
  sn = sin(x./n);
  y = max(sn);
  subplot(2,2,3)
  plot(x,y1,'c-',x,y2,'c-',x,sn,'r');
  hold on
end
```

增大 n 的取值,用 MATLAB 绘出 $n = 1:9$ 和 $n = 1:30$ 时 $\{u_n(x)\}$ 的图像,如图 2 所示.

MATLAB 实验程序:

```
clear
  x =- 10:0.01:10;
  y1 = 1/2;y2 =- 1/2;
for n = 1:9
    sn = sin(x./n);
    y = max(sn);
    subplot(1,2,1)
    plot(x,y1,'r-',x,y2,'r-',x ,sn,'g');
    hold on
end
title('n = 1:9 时,{un(x)} 的图像');
xlabel('x');ylabel('y');
hold on
for n = 1:30
    sn = sin(x./n);
    y = max(sn);
    subplot(1,2,2)
```

```
title('n = 12:18');
xlabel('x');
ylabel('y');
hold on
for n = 18:24
  sn = sin(x./n);
  y = max(sn);
  subplot(2,2,4)
  plot(x,y1,'c-',x,y2,'c-',x,sn,'k');
  hold on
end
title('n = 18:24');
xlabel('x');
ylabel('y');
hold off
```

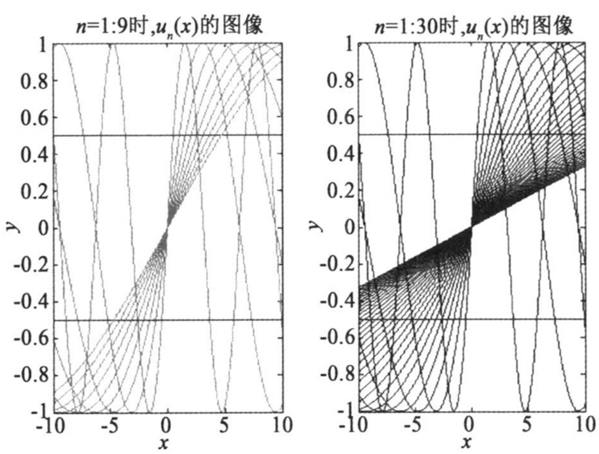

图 2 $\{u_n(x)\}$ 非一致收敛的图像

```
    plot(x,y1,'r--',x,y2,'r--',x,sn,'b');
    hold on
end
title('n = 1:30 时,{un(x)} 的图像');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

由图 2 可以看出,取 $\varepsilon = 1/2$,尽管 n 足够大,但是 $\{u_n(x)\}$ 仍有部分图像不落在曲线 $y = f(x) \pm \varepsilon$ 所围成的带状区域之中. 用 MATLAB 软件编程求解有 $\max\limits_{x \in (-\infty,+d)} |u_n(x) - f(x)| = 1$. 由此可见,不论 ε 取多么小的

正数,要使引理 2 的(1) 式成立是办不到的,故可猜测 $\{u_n(x)\}$ 在$(-\infty, +\infty)$上不一致收敛于零. 由引理 1,函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛. 下面证明这一结论.

证　取 $\varepsilon = 1/2$,无论 n 多么大,总存在 $x = \dfrac{n\pi}{2} \in (-\infty, +\infty)$,使得 $|u_n(x) - f(x)| = 1$,从而 $\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)} |u_n(x) - f(x)| = 1 > \varepsilon$,即$\{u_n(x)\}$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内不一致收敛于$f(x)$. 故函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛.

3.2　**依确界极限原理编程实现**　引理 3 给出了函数项级数一致收敛的一个充分必要条件. 因此,若(2) 式成立,则说明函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$;若(2) 式不成立,则说明不一致收敛.

3.2.1　一般步骤

1)　对任意给定的函数项级数 $\sum u_n(x)$,用 MATLAB 软件编程求出 $S(x)$ 和 $S_n(x)$.

2)　选取一个具体的充分小的正数 ε,用 MATLAB 画出 $y = S(x) + \varepsilon$ 和 $y = S(x) - \varepsilon$ 的图像.

3)　逐渐增大 n 的值,用 MATLAB 画出 $n = n_1$ 至 $n = n_1 + n_2$ 的 $S_n(x)$ 的图像.

4)　当 n 足够大时,若 $S_n(x)$ 的所有图像都落在曲线 $y = S(x) \pm \varepsilon$ 所围成的带状区域之中,则可猜测函数项级数在数集 D 上一致收敛于 $S(x)$.

5)　若否,则求出$\max\limits_{x\in I} |S(x) - S_n(x)|$,根据该结果,对函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在数集 D 上的一致收敛性进行猜测.(因为 MATLAB 软件没有 sup 函数,我们在这里用 max 函数进行代替).

3.2.2　实例应用

例 2　已知函数序列 $u_n(x) = x^n, x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$,试研究函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 内的一致收敛性.

分析　首先用 3.1.1 的方法进行判定,若$\{u_n(x)\}$ 一致收敛于零,则需借助引理 3 对函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 上的一致收敛性进行验证.

当 $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ 时,易知$\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. 下面用 MATLAB 检验$\{u_n(x)\}$ 是否一致收敛于零. 我们选取一个具体的 $\varepsilon = 1/10$ 以及函数$f(x) = 0$,用 MATLAB 分别画出 $n = 1:4$ 和 $n = 4:8$ 时,函数 $y = f(x)$, $y = f(x) \pm \varepsilon$ 以及$\{u_n(x)\}$ 的图像. 如图 3 所示.

MATLAB 实验程序:

```
clear
x =- 1/2:0.01:1/2;
y1 = 0;y2 = 1/10;y3 =- 1/10;
for t = 1:4
  sn = x.^t;
  subplot(2,1,1);
  plot(x,y1,'k',x,y2,'k - ',x,y3,'k - ',x,sn,'m')
  hold on
end
title('n = 1:4');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

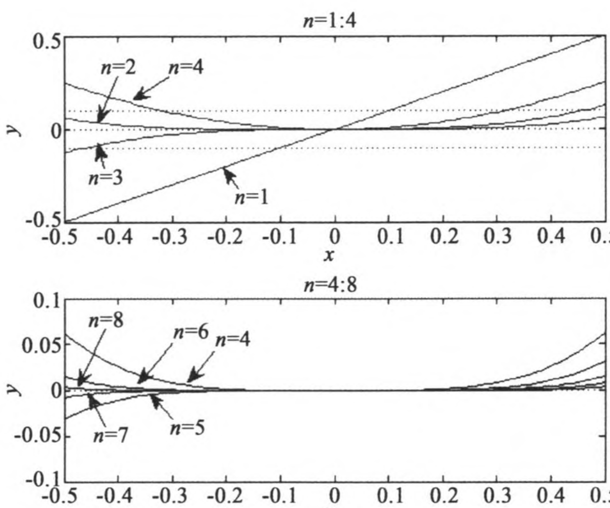

图 3　$\{u_n(x)\}$ 一致收敛的图像

```
  hold on
for t = 4:8
  sn = x.^t;
subplot(2,1,2);
plot(x,y1,'k',x,y2,'k-',x,y3,'k-',x,sn,'b')
hold on
end
title('n = 4:8');
xlabel('x');
ylabel('y');
hold off
```

从图3可以看出,取 $\varepsilon = 1/10$,当 $n > N = 4$ 时,$u_n(x)$ 的整个图像落在曲线 $y = f(x) \pm \varepsilon$ 所围成的带状区域之中,即 $|f(x) - u_n(x)| < \varepsilon$. 同理,取 $\varepsilon = 1/50$,当 $n > N = 6$ 时,结论相同. 由此可以看出 N 的取法仅与 ε 有关,而与 x 无关,故可以猜测函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上一致收敛于零.

下面,我们再借助引理3,对函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 上的一致收敛性做出判定.

当 $x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 时,对于函数项级数 $\sum x^n$,用 MATLAB 编程可得 $S_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$,并且有 $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1 - x}$. 再用 MATLAB 做出 $n = 1:3$ 时函数 $y = S(x)$,$y = S(x) \pm \varepsilon$ 以及 $\{S_n(x)\}$ 的图像. 如图4所示.

MATLAB 实验程序:

```
clear
x =- 4:0.01:4;
s = 1./(1 - x);
y1 = 1./(1 - x) + 1/2;y2 = 1./(1 - x) - 1/2;
for n = 1:3
    sn = (1 - x.^n)./(1 - x);
    y = max(s - sn);
    plot(x,y1,'r - ',x,y2,'r - ',x,sn,'b');
    hold on
end
hold on
plot([ - 1/2 - 1/2],[ - 110,110],'y - ');
hold on
plot([1/2 1/2],[ - 110,110],'y - ');
xlabel('x');
ylabel('y');
set(gca,'ylim',[ - 110,110]);
```

最后,给出当 $n = 1:2, n = 2:4, n = 4:6$ 时,函数 $y = S(x)$,$y = S(x) \pm \varepsilon$ 以及 $\{S_n(x)\}$ 的图像. 如图5所示.

MATLAB 实验程序:

```
x =- 1/2:0.01:1/2;
s = 1./(1 - x);
y1 = 1./(1 - x) + 1/2;
y2 = 1./(1 - x) - 1/2;
```

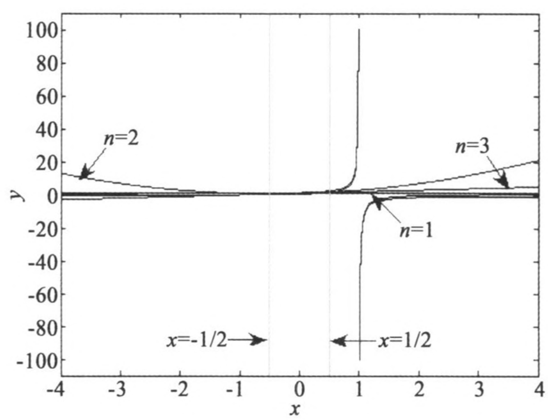

图4　$\{S_n(x)\}$ 一致收敛的图像

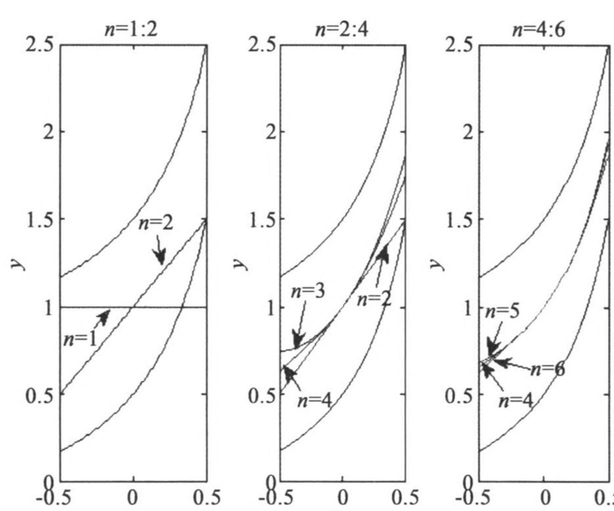

图5　$\{S_n(x)\}$ 一致收敛的图像

```
for n = 1:2
```

```
    sn = (1 - x.^n)./(1 - x);
    y = max(s - sn);
    subplot(3,1,1);
    plot(x,y1,'r - ',x,y2,'r - ',x,sn,'b');
    hold on
      end
  xlabel('x');
  ylabel('y');
  hold on
  for n = 2:4
    sn = (1 - x.^n)./(1 - x);
    y = max(s - sn);
    subplot(3,1,2);
    plot(x,y1,'r - ',x,y2,'r - ',x,sn,'m');
    hold on
  end
  xlabel('x');
  ylabel('y');
  hold on
  for n = 4:6
    sn = (1 - x.^n)./(1 - x);
    y = max(s - sn);
    subplot(3,1,3);
    plot(x,y1,'r - ',x,y2,'r - ',x,sn,'c');
    hold on
  end
  xlabel('x');
  ylabel('y');
```

从图5可以看出,取$\varepsilon = 1/2$,当$n > N = 4$时,$S_n(x)$的整个图像落在曲线$y = S(x) \pm \varepsilon$所围成的带状区域之中,即$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. 同理,取$\varepsilon = 1/10$,当$n > N = 6$时,也有类似的结论. 由此可以看出$N$的取法仅与$\varepsilon$有关,与$x$无关,故可猜测函数列$\{S_n(x)\}$在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上一致收敛于$S(x)$. 再由一致收敛的定义可知,函数项级数$\sum u_n(x)$在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上一致收敛于$S(x)$.

证 对于函数项级数$\sum x^n, x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,有$S_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$, $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{1 - x}$. 又因为

$$\sup_{x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \left|\frac{x^n}{x - 1}\right| = \left|\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2} - 1}\right| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in D} |S(x) - S_n(x)| = 0$,故由引理3可知,函数项级数$\sum u_n(x)$在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上一致收敛.

3.3 依几何意义编程实现

3.3.1 一般步骤 其中,步骤1) - 3)与3.2依确界极限原理编程实现中3.2.1的步骤1) - 3)完全相同,下面仅对步骤4)进行说明.

步骤4) 观察函数$S_n(x)$的图像是否都落在曲线$y = S(x) \pm \varepsilon$中所围成的带状区域之中,是否随n的取值的增大$S_n(x)$的图象越逼近曲线$S(x)$,然后依据引理5即可做出判定.

3.3.2 实例应用

例3 已知函数序列$u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, x \in R$,试验证函数项级数$\sum u_n(x)$在$R$内是否一致收敛?

首先,利用MATLAB软件求出$S(x)$并画出其图像. 如图6所示.

MATLAB实验程序:

```
> > syms x n;
> > symsum(x^n/sym('n! '),n,0,inf))
ans =
exp(x)
> > ezplot(symsum(x^n/sym('n! '),n,0,inf))
```

然后,我们再利用MATLAB软件求出$S_n(x)$,根据引理4来验证该函数项级数是否一致收敛.

MATLAB实验程序:

```
>> syms x k;
>> s = x^k/sym('k! ');
>> sum_s = symsum(s,k,0,n)
sum_s =
exp(x) * ((n + 1) * gamma(n + 1,x) + (n + 1)! - gamma(n +
2))/(n + 1)!
```

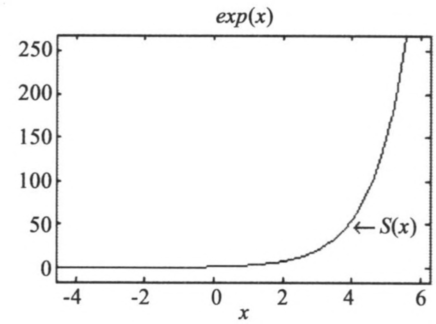

图6　和函数$S(x)$的图像

接着,我们先画出从$n = 1$到$n = 2$时$\{S_n(x)\}$的图像. 如图7所示.

MATLAB实验程序:

```
>> syms x k;
>> s = x^k/sym('k! ');
>> for n = 1:2
       sum_s = symsum(s,k,0,n);
       ezplot(sum_s);
       hold on
   end
```

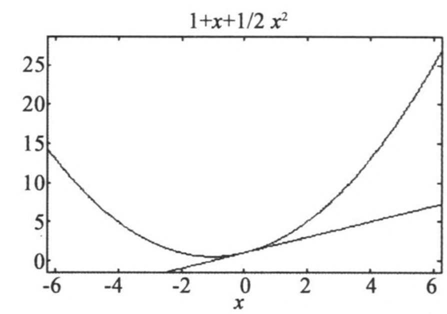

图7　当$n = 1:2$时,$\{S_n(x)\}$的图像

不妨取$\varepsilon = 1/2$,画出$y = S(x) \pm \varepsilon$的图像. 如图8所示.

MATLAB实验程序:

```
x = 0:0.01:2;
y1 = exp(x) + 1/2;
y2 = exp(x) - 1/2;
plot(x,y1,'r - ',x,y2,'b - ');
text(1,4.5,'S(x) + 1/2\rightarrow ');
text(1.2,2.5,'\leftarrowS(x) - 1/2');
```

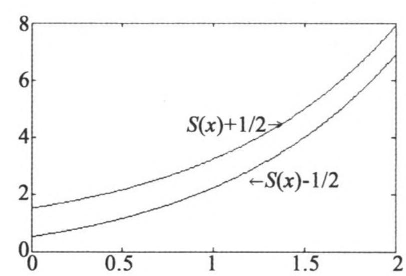

图8　当$\varepsilon = 1/2$时,$S(x) \pm \varepsilon$的图像

最后,用MATLAB软件画出$S(x)$和$\{S_n(x)\}$的图像. 在这里我们研究$x \in (0,2)$时的情况,变化n的取值,画出$n = 1:2$和$n = 1:5$时$\{S_n(x)\}$的图像. 如图9所示.(这里仅给出$n = 1:2$时的MATLAB程序,$n = 1:5$可类似写出(这里只给出图形,见图9第二个图)).

MATLAB实验程序:

```
>> x = 0:0.01:2;
>> y1 = exp(x) + 1/2;y2 = exp(x)
       - 1/2;
>> plot(x,y1,'r - ',x,y2,'c - ')
>> hold on
>> syms x k;
>> s = x^k/sym('k! ');
>> for n = 1:2
    sum_s = symsum(s,k,0,n);
    ezplot(sum_s);
```

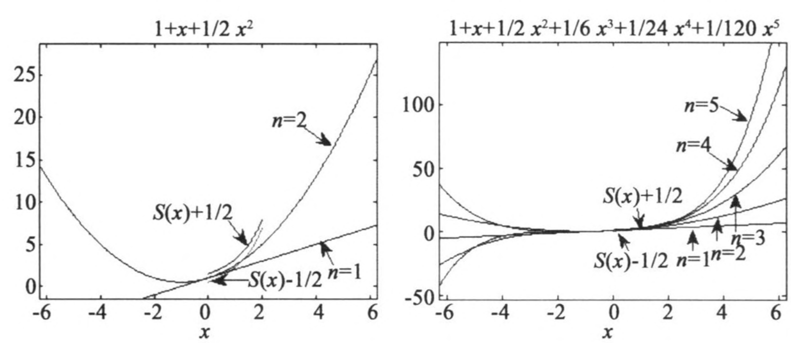

图9　n取值不同时,$\{S_n(x)\}$与$S(x) \pm \varepsilon$的图像

```
end
>> hold off
```

从图 9 中容易看出:函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的图像并非都落在曲线 $y=S(x)\pm\varepsilon$ 所围成的带状区域之中,并且随着 n 取值的增大, $\{S_n(x)\}$ 的图象与曲线 $S(x)$ 的拟合程度越来越差. 这就验证了函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛.

4 参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册) [M]. 第三版. 北京:高等教育出版社,2001:1-78.
[2] 谢宁新. MATLAB 在函数序列一致收敛性中的应用[J]. 广西民族学院学报:自然科学版, 2009,6(2):117-119.
[3] 刘玉琏,傅沛仁. 数学分析讲义(下册) [M]. 第五版. 北京:高等教育出版社,2008:46-77.
[4] 杨 杰,赵晓晖. 数学软件与数学实验[M]. 北京:清华大学出版社,2011:61-154.
[5] [美] Mount Holyoke College. Laboratories in Mathematical Experimentation[M]. 白峰杉,蔡大用 译.北京:高等教育出版社,1998:22-67.

UNIFORM CONVERGENCE AND APPLICATIONS OF FUNCTION TERM'S SERIES

Li Lingyu　　Fan Jinjun

(School of Mathematics Science, Shandong Normal University, 250014, Jinan, China)

Abstract In this paper, we make the programming realization of the uniform convergence of function term's series by MATLAB software and give the concrete applications by using the method of combination of number and shape. Thus we reveal the process of dynamic convergence of function sequences and illuminate the nature of the uniform convergence.

Key words function term's series; uniform convergence; programming realization; applications; MATLAB