CHƯƠNG IV. VECTƠ

Hình 4.1 cho thấy ga An Cựu cách Hoàng cung Huế 3,01 km về hướng đông nam. Hai thông tin khoảng cách và hướng cho phép ta xác định được vị trí của ga An Cựu theo vị trí của Hoàng cung Huế.

Hình 4.1 (Theo Google Maps)

Một số đại lượng như lực, vận tốc cũng được đặc trưng bởi hai yếu tố là độ lớn và hướng. Chương này xây dựng một đối tượng toán học, được gọi là vectơ, mà ta có thể dùng nó để biểu diễn các đại lượng nói trên.

Vectơ còn được sử dụng để xây dựng các khái niệm toán học, là công cụ để giải quyết nhiều bài toán và góp phần vào việc hình thành và phát triển năng lực tư duy tuyến tính cho người học.

Bài 7 CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

THUẬT NGỮ

- Vectơ
- Vectơ-không
- Độ dài của vectơ
- Hai vectơ cùng phương
- Hai vectơ cùng hướng
- Hai vectơ bằng nhau

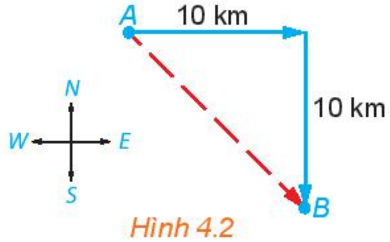
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm vectơ, hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng, hai vectơ bằng nhau, vectơ-không.
- Biểu thị một số đại lượng như lực, vận tốc bằng vectơ.

Nhiệt độ và gió là hai yếu tố luôn cùng được đề cập trong các bản tin dự báo thời tiết. Tuy nhiên, nhiệt độ là đại lượng chỉ có độ lớn, còn gió có cả hướng và độ lớn. Với một đơn vị đo, ta có thể dùng số để biểu diễn nhiệt độ. Đối với các đại lượng gồm hướng và độ lớn như vận tốc gió thì sao? Ta có thể dùng đối tượng toán học nào để biểu diễn chúng?

1. KHÁI NIỆM VECTƠ

HĐ1. Một con tàu khởi hành từ đảo A, đi thẳng về hướng đông 10 km rồi đi thẳng tiếp 10 km về hướng nam thì tới đảo B (H.4.2). Nếu từ đảo A, tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo B, thì phải đi theo hướng nào và quãng đường phải đi dài bao nhiêu kilômét?



Hình 4.2

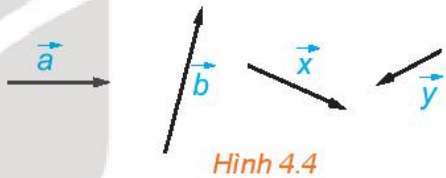
Ta có thể gắn cho quãng đường thẳng từ đảo A tới đảo B đồng thời hai yếu tố, đó là độ dài và hướng (hướng đi thẳng từ đảo A tới đảo B). Từ thực tế này, ta đi tới khái niệm toán học sau:

- **Vectơ** là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý

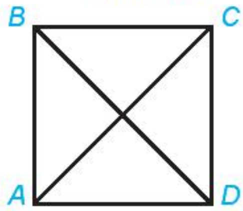
- Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là *vectơ AB* (H.4.3).
- Để vẽ một vectơ, ta vẽ đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối của nó, rồi đánh dấu mũi tên ở điểm cuối (H.4.3).
- Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$ (H.4.4).
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ tương ứng được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.

Hình 4.3



Hình 4.4

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$.

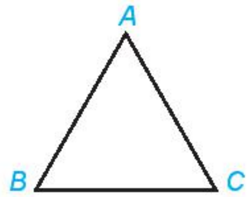


Giải

Vì cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1 nên các đường chéo của hình vuông này có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{CA}| = CA = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{2}$.

Luyện tập 1. Cho tam giác đều ABC với cạnh có độ dài bằng a. Hãy chỉ ra các vectơ có độ dài bằng a và có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC.



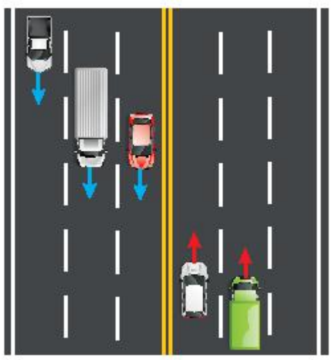
2. HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG, BẰNG NHAU

HĐ2. Quan sát các làn đường trong Hình 4.5 và cho biết những nhận xét nào sau đây là đúng.

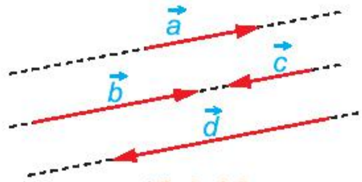
a) Các làn đường song song với nhau.

b) Các xe chạy theo cùng một hướng.

c) Hai xe bất kì đều chạy theo cùng một hướng hoặc hai hướng ngược nhau.

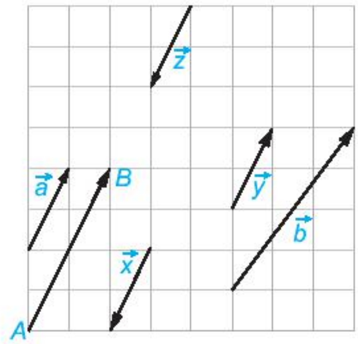

Hình 4.5

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.



Hình 4.6

Trong Hình 4.7, mỗi cặp vectơ trong các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đều cùng phương, nhưng vectơ $\vec{b}$ không cùng phương với mỗi vectơ trên.



Hình 4.7

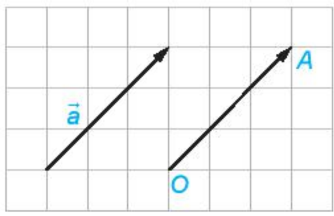
HĐ3. Xét các vectơ cùng phương trong Hình 4.7. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AB}$ được gọi là cùng hướng, còn hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{x}$ được gọi là ngược hướng. Hãy chỉ ra các vectơ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ và các vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý

- Ta cũng xét các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau (chẳng hạn $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{MM}$), gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0, cùng hướng (do đó cùng phương) với mọi vectơ.
- Các vectơ-không có cùng độ dài và cùng hướng nên bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.
- Với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (H.4.8).

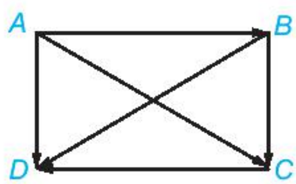


Hình 4.8

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ: $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Những cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên là bằng nhau?

Giải (H.4.9)

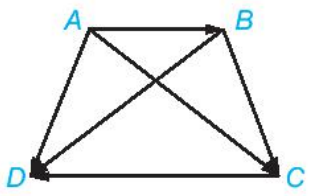
- Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ có cùng độ dài và cùng hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng nhau.
- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không bằng nhau.
- Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ có cùng độ dài nhưng không cùng phương nên không cùng hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không bằng nhau.



Hình 4.9

Vậy trong các cặp vectơ đang xét, chỉ có cặp vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là bằng nhau ($\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

Luyện tập 2. Cho hình thang cân $ABCD$ với hai đáy AB, CD, $AB < CD$ (H.4.10). Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Có cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên bằng nhau hay không?



Hình 4.10

Ví dụ 3. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Giải

- Giả sử ba điểm A, B, C thẳng hàng. Khi đó, chúng cùng thuộc một đường thẳng d. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có cùng giá là d. Suy ra chúng cùng phương.
- Giả sử hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Khi đó, chúng có cùng giá hoặc có hai giá song song với nhau. Mặt khác, giá của các vectơ trên đều đi qua A nên chúng trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.

Nhận xét. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Luyện tập 3. Trong các điều kiện dưới đây, chọn điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm giữa hai điểm phân biệt A và B.

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng.

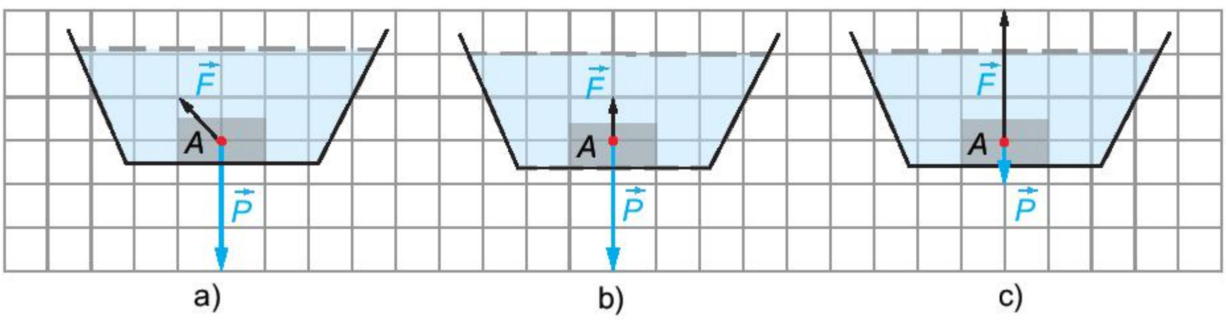
b) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng phương.

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng.

d) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng.

Chú ý. Ta có thể dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng như lực, vận tốc, gia tốc. Hướng của vectơ chỉ hướng của đại lượng, độ dài của vectơ thể hiện cho độ lớn của đại lượng và được lấy tỉ lệ với độ lớn của đại lượng.

Ví dụ 4. Một vật A được thả chìm hoàn toàn dưới đáy một cốc chất lỏng. Biết rằng trong ba cách biểu diễn lực đẩy Archimedes (Ác-si-mét) $\vec{F}$ và trọng lực $\vec{P}$ tác động lên vật A ở Hình 4.11, có một cách biểu diễn đúng.



Hình 4.11

Hãy chỉ ra mối quan hệ giữa trọng lượng riêng của vật A và trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

Giải

Lực đẩy Archimedes và trọng lực đều tác động lên vật A theo phương thẳng đứng, hai lực này cùng phương nhưng ngược hướng. Do đó, Hình 4.11a không đúng. Vật A chìm xuống đáy nên trọng lực P (có hướng từ trên xuống) lớn hơn lực đẩy Archimedes F (có hướng từ dưới lên). Do vậy, Hình 4.11c không đúng.

Vậy hình biểu diễn đúng là Hình 4.11b. Theo đó, vectơ biểu diễn lực $\vec{P}$ có độ dài gấp 3 lần độ dài của vectơ biểu diễn lực $\vec{F}$.

Độ lớn của trọng lực và lực đẩy Archimedes tác động lên A là: $\left|\vec{P}\right| = d' \cdot V$, $\left|\vec{F}\right| = d \cdot V$, trong đó V (m^3) là thể tích của vật A và d', d (N/m^3) tương ứng là trọng lượng riêng của vật A và của chất lỏng. Do $\left|\vec{P}\right| = 3\left|\vec{F}\right|$ (theo H.4.11b) nên $d' = 3d$. Vậy trọng lượng riêng của vật A gấp 3 lần trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

Vận dụng. Hai ca nô A và B chạy trên sông với các vận tốc riêng có cùng độ lớn là 15 km/h. Tuy vậy, ca nô A chạy xuôi dòng còn ca nô B chạy ngược dòng. Vận tốc của dòng nước trên sông là 3 km/h.

a) Hãy thể hiện trên hình vẽ, vectơ vận tốc $\vec{v}$ của dòng nước và các vectơ vận tốc thực tế $\overrightarrow{v_a}$, $\overrightarrow{v_b}$ của các ca nô A, B.

b) Trong các vectơ $\vec{v}$, $\overrightarrow{v_a}$, $\overrightarrow{v_b}$, những cặp vectơ nào cùng phương và những cặp vectơ nào ngược hướng?

BÀI TẬP

4.1. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

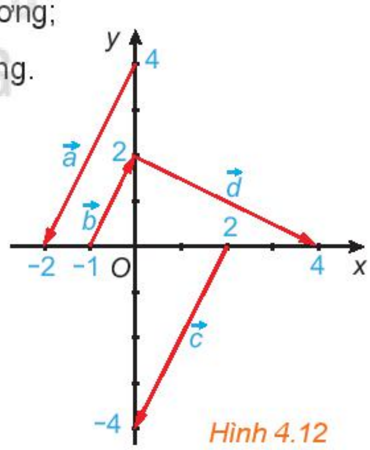
a) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều cùng hướng với $\vec{0}$;

b) Nếu $\vec{b}$ không cùng hướng với $\vec{a}$ thì $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$;

c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương;

d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

4.2. Trong Hình 4.12, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau.



Hình 4.12

4.3. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

4.4. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Hãy chỉ ra tập hợp S gồm tất cả các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp $\{A; B; C; D; O\}$. Hãy chia tập S thành các nhóm sao cho hai vectơ thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

4.5. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MN}$ với $A(1; 2)$, $M(0; -1)$, $N(3; 5)$.

a) Chỉ ra mối quan hệ giữa hai vectơ trên.

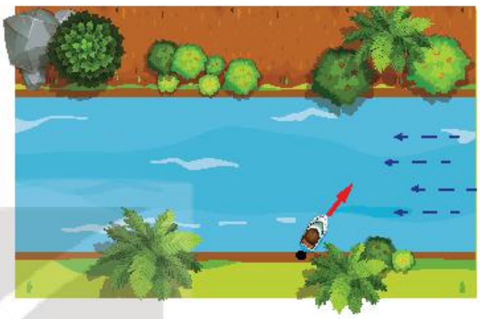
b) Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Hỏi vật thể đó có đi qua N hay không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ tới N?

Bài 8 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

THUẬT NGỮ
- Tổng của hai vectơ
- Hiệu của hai vectơ
- Vectơ đối

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Thực hiện các phép toán cộng, trừ vectơ.
- Mô tả trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác bằng vectơ.
- Vận dụng vectơ trong bài toán tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc.

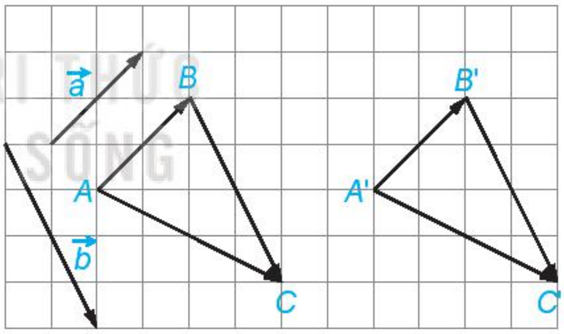
Một con tàu chuyển động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?



Vận tốc thực tế của con tàu trên sông đối với bờ phụ thuộc vào vận tốc riêng của tàu (đối với dòng nước) và vận tốc của dòng nước (đối với bờ). Tương tự, một vật thường chịu tác động của nhiều lực. Ta đã biết dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng đó; bài học này xây dựng các phép toán vectơ, tương thích với việc tổng hợp vận tốc, tổng hợp và phân tích lực.

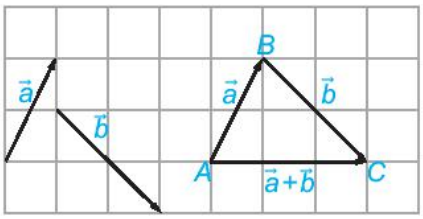
1. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

HĐ1. Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cho trước, lấy một điểm A và vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Lấy điểm A' khác A và cũng vẽ các vectơ $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B'C'} = \vec{b}$. Hỏi hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ có mối quan hệ gì?



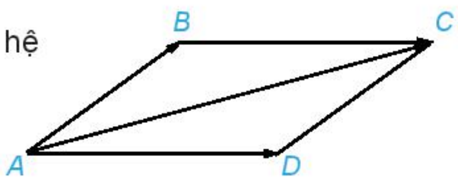
Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý và vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (H.4.13). Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Hình 4.13

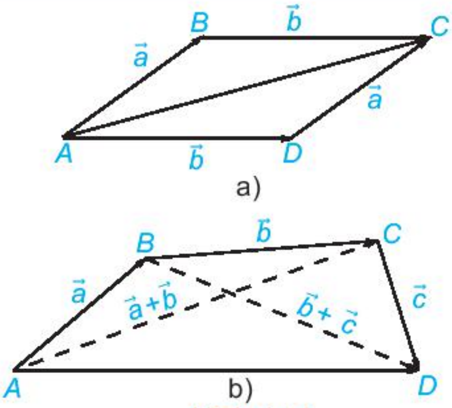
HĐ2. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Quy tắc ba điểm: Với ba điểm bất kì A, B, C, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

HĐ3. a) Trong Hình 4.14a, hãy chỉ ra vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ và vectơ $\vec{b} + \vec{a}$.

b) Trong Hình 4.14b, hãy chỉ ra vectơ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ và vectơ $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

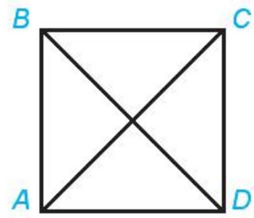


Hình 4.14

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tuỳ ý:
- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Chú ý. Do các vectơ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ và $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ bằng nhau, nên ta còn viết chúng dưới dạng $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và gọi là *tổng của ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Tương tự, ta cũng có thể viết tổng của một số vectơ mà không cần dùng các dấu ngoặc.

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$.



Giải

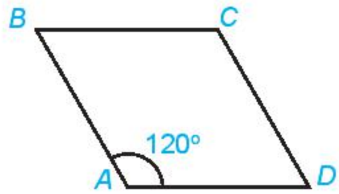
Do $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = \sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}| = AC = \sqrt{2}$.

Luyện tập 1. Cho hình thoi $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1 và $\widehat{BAD} = 120°$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}$.



2. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

Hai đội kéo co bất phân thắng bại!

HĐ4. Thế nào là hai lực cân bằng? Nếu dùng hai vectơ để biểu diễn hai lực cân bằng thì hai vectơ này có mối quan hệ gì với nhau?

- Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Chú ý. Hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Vectơ $\vec{a}+(-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$. Phép lấy hiệu hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Chú ý. Nếu $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ thì $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{c}+\vec{0}=\vec{c}$.

Với ba điểm O, M, N tuỳ ý, ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=(-\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Quy tắc hiệu: Với ba điểm O, M, N, ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm O bất kì.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

Giải

Áp dụng quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

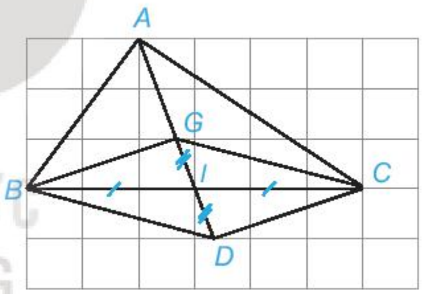
Ví dụ 3. a) Chứng minh rằng nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Giải

Hình 4.15

a) (H.4.15) Khi I là trung điểm của AB, thì hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ có cùng độ dài và ngược hướng (H.4.15). Do đó, $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ đối nhau, suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.



Hình 4.16

b) (H.4.16) Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc trung tuyến AI và $GA = 2GI$. Lấy điểm D đối xứng với G qua I. Khi đó tứ giác $GBDC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là một hình bình hành. Ta có $GA = 2GI = GD$.

Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GD}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau, do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Trong hình bình hành $GBDC$, ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.

Vậy $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

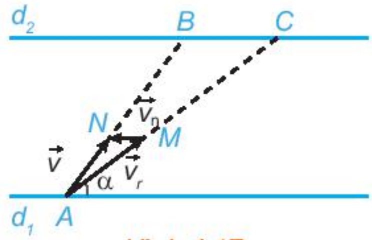
Luyện tập 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Chú ý. Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1+\vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_n$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r+\vec{v}_n$.

Trong Vật lí, trọng tâm của một vật là điểm đặt của trọng lực tác dụng lên vật đó. Đối với một vật mỏng hình đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ thì trọng tâm của nó là điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.

Ví dụ 4. Hãy giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.



Hình 4.17

Giải

Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2 (H.4.17). Giả sử tàu xuất phát từ $A \in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ góc α. Gọi $\vec{v_r}$ và $\vec{v_n}$ lần lượt là vectơ vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi M, N là các điểm sao cho $\vec{v_r} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{v_n} = \overrightarrow{MN}$.

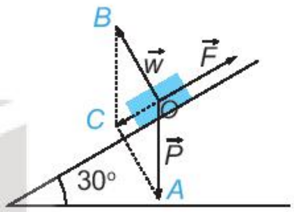
Khi đó tàu chuyển động với vectơ vận tốc thực tế là $\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_n} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$.

Gọi B, C tương ứng là giao điểm của AN, AM với d_2. Tàu chuyển động thẳng từ A đến B với vectơ vận tốc thực tế $\overrightarrow{AN}$, do đó thời gian cần thiết để tàu sang được bờ d_2 là $\dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AC}{AM}$.

Mặt khác, $AM = \left|\vec{v_r}\right|$ không đổi nên $\dfrac{AC}{AM}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC \perp d_2 \Leftrightarrow AM \perp d_2$.

Vậy để tàu sang được bờ bên kia nhanh nhất, ta cần giữ bánh lái để tàu luôn vuông góc với bờ.

Vận dụng. Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (ứng với khối lượng xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (H.4.18). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N, thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo?



Hình 4.18

Chú ý. Ta coi khẩu pháo chịu tác động của ba lực: trọng lực $\vec{P}$ (có độ lớn $\left|\vec{P}\right| = 22\,148$ N, có phương vuông góc với phương nằm ngang và hướng xuống dưới), phản lực $\vec{w}$ (có độ lớn $\left|\vec{w}\right| = \left|\vec{P}\right|\cos 30°$, có phương vuông góc với mặt dốc và hướng lên trên) và lực kéo $\vec{F}$ (theo phương dốc, hướng từ chân dốc lên đỉnh dốc).

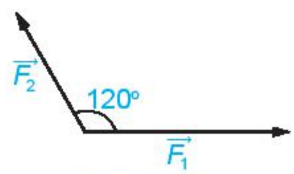
BÀI TẬP

4.6. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$; b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.

4.7. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CM}$.

4.8. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



Hình 4.19

4.9. Hình 4.19 biểu diễn hai lực $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ cùng tác động lên một vật, cho $\left|\vec{F_1}\right| = 3$ N, $\left|\vec{F_2}\right| = 2$ N. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F_1} + \vec{F_2}$.

4.10. Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?

Bài 9 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

THUẬT NGỮ
- Tích của vectơ với một số
- Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Thực hiện phép nhân vectơ với một số.
- Mô tả các mối quan hệ cùng phương, cùng hướng bằng vectơ.

Với mỗi cặp vật đặt trên hai đầu của một cánh tay đòn AB, luôn có duy nhất một điểm M thuộc AB để nếu đặt trụ đỡ tại M thì cánh tay đòn ở trạng thái cân bằng (H.4.20). Điều trên còn đúng trong những trường hợp tổng quát hơn, chẳng hạn, cánh tay đòn được thay bởi một tấm ván hình đa giác n đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tại mỗi đỉnh A_i có đặt một vật nặng m_i (kg). Ở đây, ta coi cánh tay đòn, tấm ván là không có trọng lượng. Trong Vật lí, điểm M như trên được gọi là điểm khối tâm của hệ chất điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ứng với các khối lượng $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (kg).

Qua bài học này, ta sẽ thấy Hình học cho phép xác định vị trí khối tâm của một hệ chất điểm.

Hình 4.20

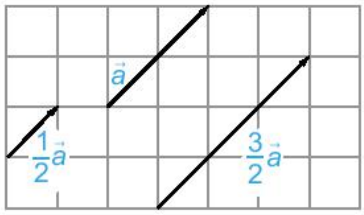
1. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

HĐ1. Cho vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Hãy xác định điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

a) Tìm mối quan hệ giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{a} + \vec{a}$.

b) Vectơ $\vec{a} + \vec{a}$ có mối quan hệ như thế nào về hướng và độ dài đối với vectơ $\vec{a}$?

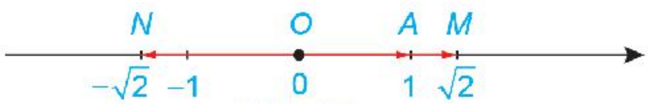
> Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k > 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.



Hình 4.21

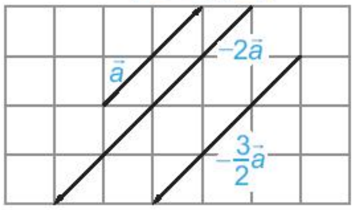
? $1\vec{a}$ và $\vec{a}$ có bằng nhau hay không?

HĐ2. Trên một trục số, gọi O, A, M, N tương ứng biểu thị các số 0; 1; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$. Hãy nêu mối quan hệ về hướng và độ dài của mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ với vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Viết đẳng thức thể hiện mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$.



Hình 4.22

Mối quan hệ giữa $\overrightarrow{ON}$ và $\overrightarrow{OA}$ được thể hiện bởi đẳng thức nào?



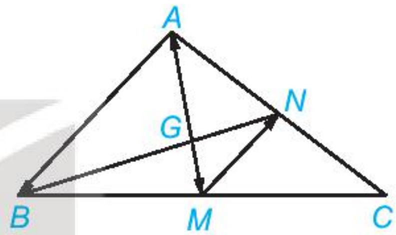
Hình 4.23

Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k < 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.

Chú ý. Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

Trong Hình 4.24, hai trung tuyến AM và BN của tam giác ABC cắt nhau tại G.

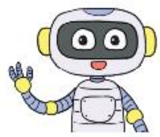
Ta có $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Hình 4.24

Nhận xét. Vectơ $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.

Phép lấy tích của vectơ với một số gọi là *phép nhân vectơ với một số* (hay *phép nhân một số với vectơ*).



? $-\vec{a}$ và $(-1)\vec{a}$ có mối quan hệ gì?

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

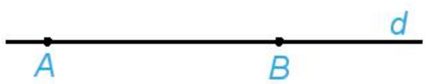
Giải

Thật vậy, nếu $\vec{a} = k\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Ta lấy $k = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng và lấy $k = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Khi đó $\vec{a} = k\vec{b}$.

Luyện tập 1. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A và B (H.4.25). Những khẳng định nào sau đây là đúng?



Hình 4.25

a) Điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi tồn tại số t để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

b) Với điểm M bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AB}\overrightarrow{AB}$.

c) Điểm M thuộc tia đối của tia AB khi và chỉ khi tồn tại số $t \leq 0$ để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ

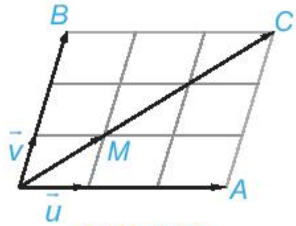
HĐ3. Với $\vec{u} \neq \vec{0}$ và hai số thực k, t, những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Hai vectơ $k(t\vec{u})$ và $(kt)\vec{u}$ có cùng độ dài bằng $|kt||\vec{u}|$.

b) Nếu $kt \geq 0$ thì cả hai vectơ $k(t\vec{u})$, $(kt)\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{u}$.

c) Nếu $kt < 0$ thì cả hai vectơ $k(t\vec{u})$, $(kt)\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{u}$.

d) Hai vectơ $k(t\vec{u})$ và $(kt)\vec{u}$ bằng nhau.



Hình 4.26

HĐ4. Hãy chỉ ra trên Hình 4.26 hai vectơ $3\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ và $3\vec{u}+3\vec{v}$.
Từ đó, nêu mối quan hệ giữa $3\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ và $3\vec{u}+3\vec{v}$.

> Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực k, t, ta luôn có:
> - $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
> - $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
> - $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a}-\vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;
> - $1\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}.$$

Giải

Vì I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (Ví dụ 3a, Bài 8).

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{OI} + \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{OI}$.

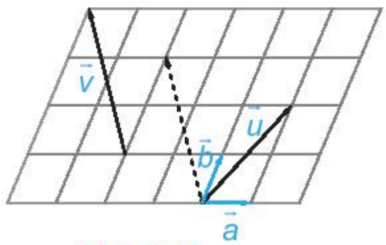
Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Nhận xét

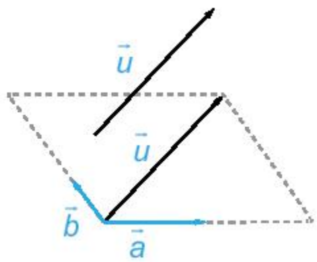
- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Luyện tập 3. Trong Hình 4.27, hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, tức là tìm các số x, y, z, t để $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $\vec{v} = t\vec{a} + z\vec{b}$.



Hình 4.27

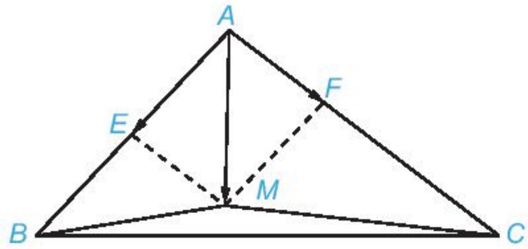
Chú ý. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ (H.4.28). Khi đó, mọi vectơ $\vec{u}$ đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $(x; y)$ sao cho $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



Hình 4.28

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Giải (H.4.29)



Hình 4.29

Để xác định vị trí của M, trước hết ta biểu thị $\overrightarrow{AM}$ (với gốc A đã biết) theo hai vectơ đã biết $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Đẳng thức vectơ đã cho tương đương với: $\overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) + 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lấy điểm E là trung điểm của AB và điểm F thuộc cạnh AC sao cho $AF = \dfrac{1}{3}AC$.

Khi đó $\overrightarrow{AE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Vì vậy $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

Suy ra M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $EAFM$.

Ta trở lại vấn đề đã được nêu trong phần đầu bài học. Điểm khối tâm M của hệ các chất điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ với các khối lượng tương ứng $m_1, m_2, ..., m_n$ được xác định bởi đẳng thức vectơ

$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}.$$

Vì vậy, việc xác định điểm khối tâm được quy về việc xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ tương ứng.

BÀI TẬP

4.11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

4.12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

4.13. Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

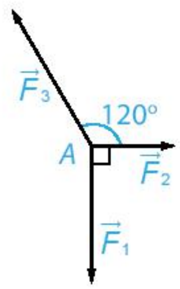
b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

4.14. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$.

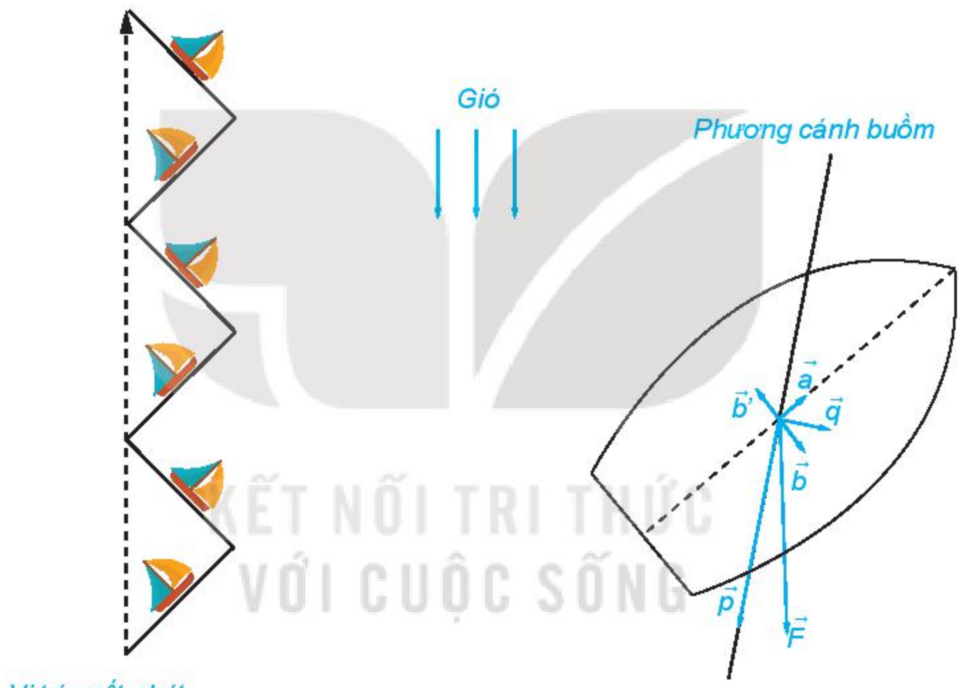
4.15. Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\vec{F_2}, \vec{F_3}$, biết $\vec{F_1}$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

Em có biết?

Mặc dù dựa vào lực đẩy của gió, bằng cách đi theo đường dích dắc, thuyền buồm vẫn có thể di chuyển tới một vị trí ở ngược hướng gió so với vị trí xuất phát.

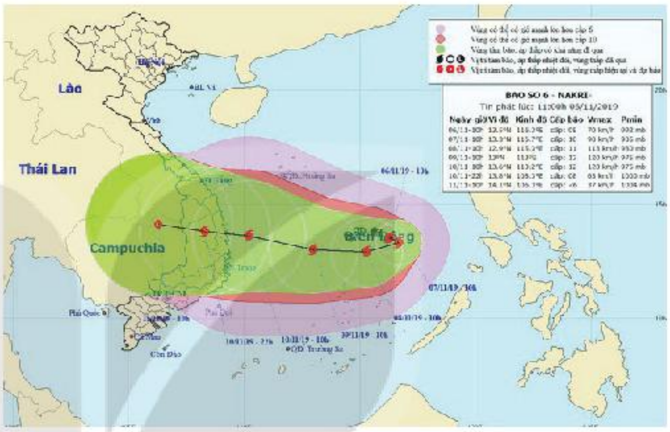


Ta hãy dùng kiến thức về vectơ để phân tích các lực chính tác động tới sự chuyển động của thuyền buồm trong trường hợp này. Lực $\vec{F}$ do gió tác động vào cánh buồm được phân tích thành lực $\vec{p}$ cùng phương với cánh buồm và lực $\vec{q}$ vuông góc với cánh buồm. Do cánh buồm mỏng nên lực $\vec{p}$ chỉ trượt đi mà không tác động lên cánh buồm. Ta lại phân tích lực $\vec{q}$ thành lực $\vec{a}$ cùng phương với sống thuyền và lực $\vec{b}$ có phương vuông góc với sống thuyền. Thuyền buồm có sống thuyền sâu (mũi nhọn) nên nó chịu một lực cản $\vec{b'}$ đáng kể của nước, vuông góc với sống thuyền. Người ta điều chỉnh hướng thuyền (hướng sống thuyền), phương của cánh buồm để lực cản $\vec{b'}$ của nước (lực này không phụ thuộc vào sự điều chỉnh) thắng lực $\vec{b}$ (có thể điều chỉnh độ lớn). Cuối cùng, dưới tác động của lực $\vec{a}$ thuyền di chuyển và sau một khoảng thời gian, nó lại được điều chỉnh hướng, để đi đến đích theo đường dích dắc.

Bài 10 VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

THUẬT NGỮ	KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
• Mặt phẳng toạ độ • Toạ độ của vectơ	• Nhận biết toạ độ của vectơ và thể hiện các phép toán vectơ theo toạ độ. • Thể hiện mối quan hệ giữa các vectơ thông qua toạ độ của chúng. • Ứng dụng của toạ độ vectơ trong bài toán xác định vị trí của vật trên mặt phẳng toạ độ.

Một bản tin dự báo thời tiết thể hiện đường đi trong 12 giờ của một cơn bão trên một mặt phẳng toạ độ. Trong khoảng thời gian đó, tâm bão di chuyển thẳng đều từ vị trí có toạ độ (13,8; 108,3) đến vị trí có toạ độ (14,1; 106,3). Dựa vào thông tin trên, liệu ta có thể dự đoán được vị trí của tâm bão tại thời điểm bất kì trong khoảng thời gian 12 giờ đó hay không?

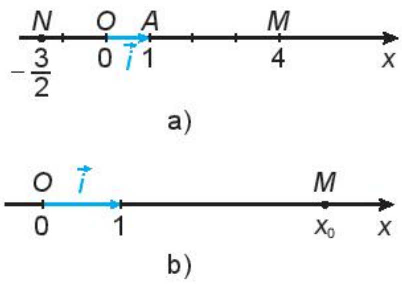


Hình 4.31. Ta có thể dùng một phần mặt phẳng toạ độ để mô tả một phạm vi nhất định trên Trái Đất mà vị trí x^o vĩ bắc, y^o kinh đông của tâm áp thấp được thể hiện bởi điểm có toạ độ (x; y).

Trong bài học này, ta gắn cho mỗi vectơ trên mặt phẳng toạ độ một cặp số để có thể làm việc với vectơ thông qua cặp số đó.

1. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

HĐ1. Trên trục số Ox, gọi A là điểm biểu diễn số 1 và đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ (H.4.32a). Gọi M là điểm biểu diễn số 4, N là điểm biểu diễn số $-\frac{3}{2}$. Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ theo vectơ $\vec{i}$.



Hình 4.32

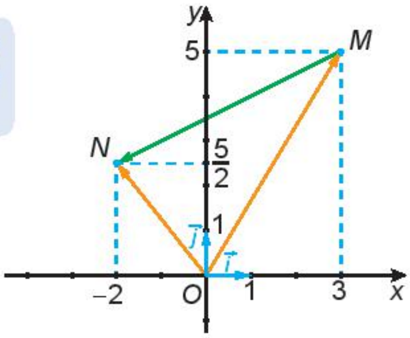
Dùng vectơ, ta có thể diễn đạt lại trục số như sau:

Trục toạ độ (còn gọi là *trục*, hay *trục số*) là một đường thẳng mà trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là *gốc toạ độ*, vectơ $\vec{i}$ gọi là *vectơ đơn vị* của trục. Điểm M trên trục biểu diễn số x_0 nếu $\overrightarrow{OM} = x_0\vec{i}$ (H.4.32b).

HĐ2. Trong Hình 4.33:

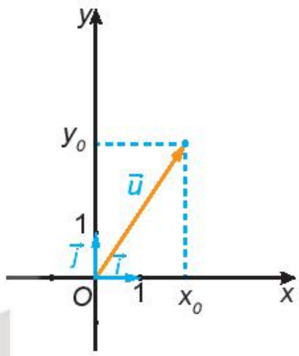
a) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$.

b) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, từ đó biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$.



Hình 4.33

Trên mặt phẳng, xét hai trục Ox, Oy có chung gốc O và vuông góc với nhau. Vectơ đơn vị của trục Ox là $\vec{i}$, vectơ đơn vị của trục Oy là $\vec{j}$. Hệ gồm hai trục Ox, Oy như vậy được gọi là *hệ trục toạ độ Oxy*. Điểm O gọi là *gốc toạ độ*, trục Ox gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*. Mặt phẳng chứa hệ trục toạ độ Oxy gọi là mặt phẳng toạ độ Oxy hay mặt phẳng Oxy (H.4.34).



Hình 4.34

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trên mặt phẳng Oxy, có duy nhất cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Ta nói vectơ $\vec{u}$ có toạ độ $(x_0; y_0)$ và viết $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$. Các số x_0, y_0 tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của $\vec{u}$.

Nhận xét. Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng toạ độ.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm toạ độ của các vectơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy.

Giải

Vì $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}$ nên $\vec{i}$ có toạ độ là (1; 0).

Vì $\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$ nên $\vec{j}$ có toạ độ là (0; 1).

Luyện tập 1. Tìm toạ độ của $\vec{0}$.

2. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

HĐ3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{u} = (2; -3)$, $\vec{v} = (4; 1)$, $\vec{a} = (8; -12)$.

a) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$.

b) Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $4\vec{u}$.

c) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{a}$.

Cho hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$. Khi đó:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$;
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$;
- $k\vec{u} = (kx; ky)$, với $k \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Cho $\vec{a}=(1;2), \vec{b}=\left(\frac{3}{2};3\right)$.

a) Tìm toạ độ của $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-2\vec{b}$.

b) Hỏi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng phương hay không?

Giải

a) Vì $\vec{a}=(1;\ 2), \vec{b}=\left(\frac{3}{2};\ 3\right)$ nên $\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{5}{2};\ 5\right)$.

Ta có $2\vec{b}=(3;6)$ nên $\vec{a}-2\vec{b}=(-2;-4)$.

b) Do $\frac{3}{2}\vec{a}=\left(\frac{3}{2};3\right)=\vec{b}$ nên hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Nhận xét. Vectơ $\vec{v}(x';\ y')$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(x;\ y)\neq\vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $x'=kx, y'=ky$ (hay là $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}$ nếu $xy\neq 0$).

HĐ4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(x_0;\ y_0)$.

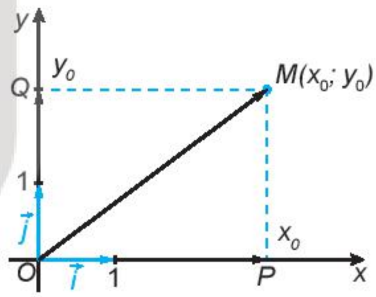
Gọi P, Q tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành Ox và trục tung Oy (H.4.35).

a) Trên trục Ox, điểm P biểu diễn số nào? Biểu thị $\overrightarrow{OP}$ theo $\vec{i}$ và tính độ dài của $\overrightarrow{OP}$ theo x_0.

b) Trên trục Oy, điểm Q biểu diễn số nào? Biểu thị $\overrightarrow{OQ}$ theo $\vec{j}$ và tính độ dài của $\overrightarrow{OQ}$ theo y_0.

c) Dựa vào hình chữ nhật $OPMQ$, tính độ dài của $\overrightarrow{OM}$ theo x_0, y_0.

d) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.



Hình 4.35

Nếu điểm M có toạ độ $(x;\ y)$ thì vectơ $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(x;\ y)$ và độ dài $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Nhận xét. Với vectơ $\vec{u}=(x;y)$, ta lấy điểm $M(x;y)$ thì $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Do đó, $|\vec{u}|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Chẳng hạn, vectơ $\vec{u}=(2;\ -1)$ có độ dài là $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

HĐ5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $M(x;\ y)$ và $N(x';\ y')$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ và tìm toạ độ của $\overrightarrow{MN}$.

c) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

Với hai điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$ thì $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$ và khoảng cách giữa hai điểm M, N là $MN = \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(3; 2)$, $C(7; 4)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$. So sánh các khoảng cách từ B tới A và C.

b) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $D(x; y)$ để $ABCD$ là một hình thoi.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 2 - (-2)) = (2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (7 - 3; 4 - 2) = (4; 2)$.

Các khoảng cách từ B tới A và C lần lượt là:

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5};\ BC = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Do đó các khoảng cách này bằng nhau.

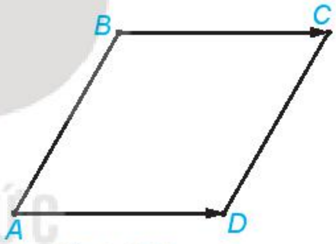
b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} = (2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 2)$ không cùng phương (vì $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$). Do đó các điểm A, B, C không cùng nằm trên một đường thẳng. Vậy chúng không thẳng hàng.

c) Các điểm A, B, C không thẳng hàng và $BA = BC$ nên $ABCD$ là một hình thoi khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Do $\overrightarrow{AD} = (x - 1; y + 2)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 2)$ nên

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 \\ y + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $D(5; 0)$.



Hình 4.36

Luyện tập 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2; 1)$, $B(3; 3)$.

a) Các điểm O, A, B có thẳng hàng hay không?

b) Tìm điểm $M(x; y)$ để $OABM$ là một hình bình hành.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng:

$$A(1; 3),\ B(-2; 6),\ C(5; 1).$$

a) Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

a) (H.4.37) Điểm $I(x;\, y)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (*).

Hình 4.37

Mặt khác $\overrightarrow{IA}=(1-x;3-y)$, $\overrightarrow{IB}=(-2-x;6-y)$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=(-1-2x;9-2y)$.

Do đó, (*) tương đương với $\begin{cases}-1-2x=0\\ 9-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{9}{2}.\end{cases}$

Vậy $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

b) Điểm $G(x;\, y)$ là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (**)

Mặt khác

$\overrightarrow{GA}=(1-x;3-y)$, $\overrightarrow{GB}=(-2-x;6-y)$, $\overrightarrow{GC}=(5-x;1-y)$,

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(4-3x;10-3y)$.

Do đó, (**) tương đương với $\begin{cases}4-3x=0\\ 10-3y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\ y=\dfrac{10}{3}.\end{cases}$

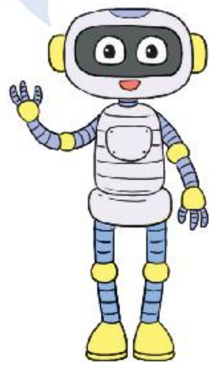
Vậy $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{10}{3}\right)$.

Chú ý

- Trung điểm M của đoạn thẳng AB có toạ độ là $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ là $\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

Vận dụng. Từ thông tin dự báo bão được đưa ra ở đầu bài học, hãy xác định toạ độ vị trí M của tâm bão tại thời điểm 9 giờ trong khoảng thời gian 12 giờ của dự báo.

Trong 12 giờ, tâm bão được dự báo di chuyển thẳng đều từ $A(13{,}8;\, 108{,}3)$ tới vị trí có toạ độ $B(14{,}1;\, 106{,}3)$. Gọi toạ độ của M là $(x;\, y)$. Bạn hãy tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ rồi thể hiện mối quan hệ đó theo toạ độ để tìm $x;\, y$.



Chú ý. Để thể hiện một phần Trái Đất trên một bản đồ phẳng người ta dùng một phép chiếu bản đồ, với độ sai khác nhất định giữa bản vẽ và thực địa (thường được quy định với từng loại bản đồ). Về nguyên tắc, phạm vi thể hiện càng hẹp thì càng chính xác. Trong vận dụng này, ta chỉ tính toán trong phạm vi một đoạn đường đi ngắn của tâm bão.

BÀI TẬP

4.16. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $M(1; 3)$, $N(4; 2)$.

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng OM, ON, MN.

b) Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.

4.17. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các vectơ $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = (4; -1)$ và các điểm $M(-3; 6)$, $N(3; -3)$.

a) Tìm mối liên hệ giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$.

b) Các điểm O, M, N có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $P(x; y)$ để $OMNP$ là một hình bình hành.

4.18. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(-3; 2)$.

a) Hãy giải thích vì sao các điểm A, B, C không thẳng hàng.

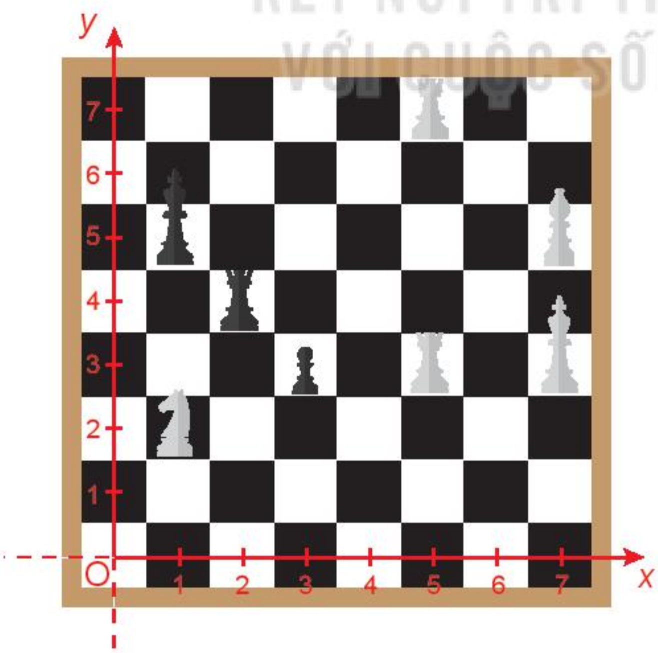
b) Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm điểm $D(x; y)$ để $O(0; 0)$ là trọng tâm của tam giác ABD.

4.19. Sự chuyển động của một tàu thuỷ được thể hiện trên một mặt phẳng toạ độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí $A(1; 2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v} = (3; 4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng toạ độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

4.20. Trong Hình 4.38, quân mã đang ở vị trí có toạ độ $(1; 2)$. Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



Hình 4.38

Bài 11

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

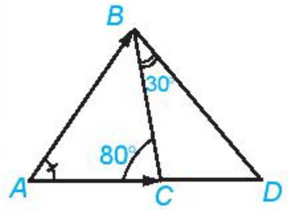
THUẬT NGỮ
- Góc giữa hai vectơ
- Tích vô hướng của hai vectơ

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Tính góc, tích vô hướng của hai vectơ trong những trường hợp cụ thể.
- Công thức toạ độ của tích vô hướng, tính chất của tích vô hướng.
- Liên hệ khái niệm tích vô hướng với khái niệm công trong Vật lí.

Toán học cung cấp ngôn ngữ và công cụ cho nhiều ngành khoa học. Trong các bài học trước, ta đã dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng lực, vận tốc và dùng phép toán vectơ để tính hợp lực và tổng hợp vận tốc. Bài học này tiếp tục xây dựng khái niệm tích vô hướng giữa hai vectơ - đối tượng toán học còn được dùng để định nghĩa khái niệm công sinh bởi một lực trong Vật lí.

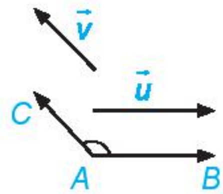
1. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

HĐ1. Trong Hình 4.39, số đo góc BAC cũng được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Hãy tìm số đo các góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DB}$.



Hình 4.39

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm A tuỳ ý, vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ và $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ (H.4.40). Khi đó, số đo của góc BAC được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



Hình 4.40

Chú ý
- Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ $0°$ đến $180°$.
- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{u} \perp \vec{v}$ hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$. Đặc biệt $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi vectơ.

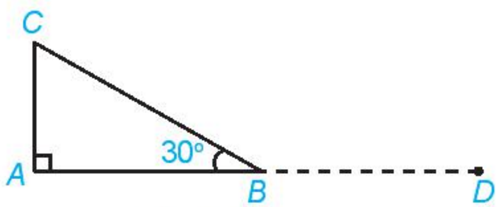
? Khi nào thì góc giữa hai vectơ bằng $0°$, bằng $180°$?

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 30°$.

Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Giải (H.4.41)

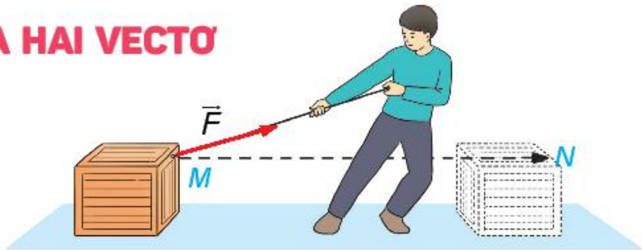
Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 90°$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ACB} = 60°$,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{DBC} = 150°$.



Hình 4.41

Luyện tập 1. Cho tam giác đều ABC. Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ



Hình 4.42

Trong Vật lí, nếu lực $\vec{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ M tới N, thì công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức:

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{MN}),$$

trong đó $|\vec{F}|$ là độ lớn của lực $\vec{F}$ (theo đơn vị Newton);

$|\overrightarrow{MN}|$ là độ dài của vectơ MN (theo đơn vị mét);

$(\vec{F}, \overrightarrow{MN})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{MN}$.

Toán học gọi giá trị A (không kể đơn vị đo) trong biểu thức nói trên là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{MN}$.

> Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:
>
> $$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

? Khi nào thì tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ là một số dương? Là một số âm?

Chú ý

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{u}$. Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$.

? Khi nào thì $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2$?

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a.

Tính các tích vô hướng sau: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

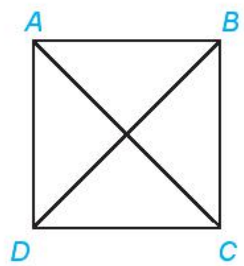
Giải. Vì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 90^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Hình vuông có cạnh bằng a nên có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45^\circ$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 135^\circ$, do đó

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2.$$



Hình 4.43

Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Hãy tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

HĐ2. Cho hai vectơ cùng phương $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (kx; ky)$. Hãy kiểm tra công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = k(x^2 + y^2)$ theo từng trường hợp sau:

a) $\vec{u} = \vec{0}$;

b) $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $k \geq 0$;

c) $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.

HĐ3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$.

a) Xác định toạ độ của các điểm A và B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

b) Tính AB^2, OA^2, OB^2 theo toạ độ của A và B.

c) Tính $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ theo toạ độ của A, B.

Để ý rằng, theo Định lí côsin, ta có:
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}$.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$ được tính theo công thức:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx' + yy' = 0$.
- Bình phương vô hướng của $\vec{u}(x; y)$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.
- Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

a) $\vec{u} = (2; -3)$ và $\vec{v} = (5; 3)$;

b) Hai vectơ đơn vị $\vec{i}$ và $\vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy.

Giải

a) Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 = 10 - 9 = 1$.

b) Vì $\vec{i} = (1; 0)$ và $\vec{j} = (0; 1)$ nên $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Luyện tập 3. Tính tích vô hướng và góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0; -5)$, $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1)$.

HĐ4. Cho ba vectơ $\vec{u} = (x_1; y_1)$, $\vec{v} = (x_2; y_2)$, $\vec{w} = (x_3; y_3)$.

a) Tính $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$, $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ theo toạ độ của các vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

b) So sánh $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ và $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

c) So sánh $\vec{u} \cdot \vec{v}$ và $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ bất kì và mọi số thực k, ta có:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (*tính chất giao hoán*);
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (*tính chất phân phối đối với phép cộng*);
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$.

Chú ý. Từ các tính chất trên, ta có thể chứng minh được:

$\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$ (*tính chất phân phối đối với phép trừ*);

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$;

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.

Ví dụ 4. *(Ứng dụng của vectơ trong bài toán hình học)*

Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh rằng $MA^2+MB^2+MC^2$ không đổi.

Giải

Cách 1 (*Dùng toạ độ*). Xét hệ trục toạ độ có gốc trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi toạ độ của các điểm là $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$, $M(x;y)$. Vì tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp $O(0;0)$ đồng thời là trọng tâm của tam giác. Do đó $x_A+x_B+x_C=0$ và $y_A+y_B+y_C=0$.

Vì $OM^2=OA^2=R^2$ nên $x^2+y^2=x_A^2+y_A^2=R^2$.

Vậy $MA^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x^2+y^2)+(x_A^2+y_A^2)-2xx_A-2yy_A=2R^2-2xx_A-2yy_A$.

Tương tự $MB^2=2R^2-2xx_B-2yy_B$ và $MC^2=2R^2-2xx_C-2yy_C$.

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2-2x(x_A+x_B+x_C)-2y(y_A+y_B+y_C)=6R^2$ (không đổi).

Cách 2 (*Dùng tích vô hướng*). (H.4.44)

Vì tam giác ABC đều nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp đồng thời là trọng tâm của tam giác. Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

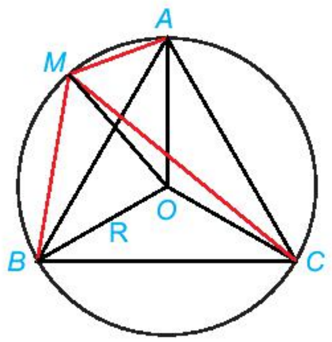
Giả sử (O) có bán kính R. Ta có:

$$MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$$

$$=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$$

$$=3\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2$$

$$=3MO^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+3R^2=3R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\vec{0}+3R^2=6R^2.$$



Hình 4.44

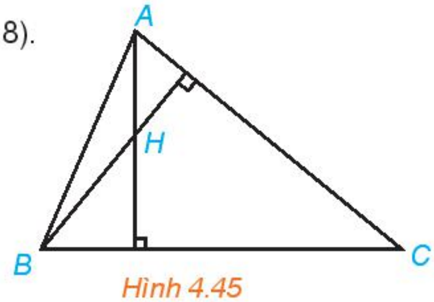
Vậy $MA^2+MB^2+MC^2$ không đổi khi M thay đổi trên (O).

Luyện tập 4. Cho tam giác ABC với $A(-1; 2)$, $B(8; -1)$, $C(8; 8)$. Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

b) Tìm toạ độ của H.

c) Giải tam giác ABC.

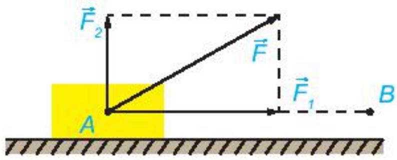


Hình 4.45

Vận dụng. Một lực $\vec{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ A đến B. Lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực thành phần là $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ ($\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$).

a) Dựa vào tính chất của tích vô hướng, hãy giải thích vì sao công sinh bởi lực $\vec{F}$ (đã được đề cập ở trên) bằng tổng của các công sinh bởi các lực $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$.

b) Giả sử các lực thành phần $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ tương ứng cùng phương, vuông góc với phương chuyển động của vật. Hãy tìm mối quan hệ giữa các công sinh bởi lực $\vec{F}$ và lực $\vec{F_1}$.



Hình 4.46

BÀI TẬP

4.21. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (-3;1)$, $\vec{b} = (2;6)$; b) $\vec{a} = (3;1)$, $\vec{b} = (2;4)$; c) $\vec{a} = (-\sqrt{2};1)$, $\vec{b} = (2;-\sqrt{2})$.

4.22. Tìm điều kiện của $\vec{u}$, $\vec{v}$ để:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$; b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

4.23. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-4;3)$. Gọi $M(t;0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t.

b) Tìm t để $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

4.24. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$.

a) Giải tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ trực tâm H của tam giác ABC.

4.25. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

4.26. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A – TRẮC NGHIỆM

4.27. Trong mặt phẳng toạ độ, cặp vectơ nào sau đây có cùng phương?

A. $\vec{u} = (2;3)$ và $\vec{v} = \left(\frac{1}{2};6\right)$.   B. $\vec{a} = \left(\sqrt{2};6\right)$ và $\vec{b} = \left(1;3\sqrt{2}\right)$.

C. $\vec{i} = (0;1)$ và $\vec{j} = (1;0)$.   D. $\vec{c} = (1;3)$ và $\vec{d} = (2;-6)$.

4.28. Trong mặt phẳng toạ độ, cặp vectơ nào sau đây vuông góc với nhau?

A. $\vec{u} = (2;3)$ và $\vec{v} = (4;6)$.   B. $\vec{a} = (1;-1)$ và $\vec{b} = (-1;1)$.

C. $\vec{z} = (a;b)$ và $\vec{t} = (-b;a)$.   D. $\vec{n} = (1;1)$ và $\vec{k} = (2;0)$.

4.29. Trong mặt phẳng toạ độ, vectơ nào sau đây có độ dài bằng 1?

A. $\vec{a} = (1;1)$.   B. $\vec{b} = (1;-1)$.

C. $\vec{c} = \left(2;\frac{1}{2}\right)$.   D. $\vec{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

4.30. Góc giữa vectơ $\vec{a} = (1;-1)$ và vectơ $\vec{b} = (-2;0)$ có số đo bằng:

A. 90°.   B. 0°.   C. 135°.   D. 45°.

4.31. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$.   B. $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

C. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.   D. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$.

4.32. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right) = 45°$.   B. $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right) = 45°$ và $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = a^2$.

C. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = a^2\sqrt{2}$.   D. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD} = -a^2$.

B – TỰ LUẬN

4.33. Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M sao cho $MB = 3MC$.

a) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

4.34. Cho hình bình hành *ABCD*. Chứng minh rằng với mọi điểm *M*, ta có:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}.$$

4.35. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho $A(2;1), B(-2;5)$ và $C(-5;2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.

c) Tìm toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

d) Tìm toạ độ của điểm *D* sao cho tứ giác *BCAD* là một hình bình hành.

4.36. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho $A(1;2), B(3;4), C(-1;-2)$ và $D(6;5)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

b) Hãy giải thích tại sao các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

c) Giả sử *E* là điểm có toạ độ $(a;1)$. Tìm *a* để các vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng phương.

d) Với *a* tìm được, hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

4.37. Cho vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ (hay còn được viết là $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một vectơ đơn vị, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

4.38. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}$ với $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a}\perp\vec{b}$. Xét một hệ trục *Oxy* với các vectơ đơn vị $\vec{i}=\vec{a}, \vec{j}=\vec{b}$. Chứng minh rằng:

a) Vectơ $\vec{u}$ có toạ độ là $(\vec{u}\cdot\vec{a};\vec{u}\cdot\vec{b})$.

b) $\vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{u}\cdot\vec{b})\vec{b}$.

4.39. Trên sông, một ca nô chuyển động thẳng đều theo hướng S15°E với vận tốc có độ lớn bằng 20 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng, nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng 3 km/h.