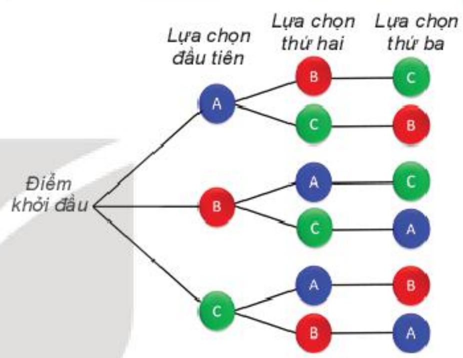
CHƯƠNG VIII
ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản về Đại số tổ hợp, bao gồm hai quy tắc đếm thường dùng là quy tắc cộng và quy tắc nhân; các khái niệm và công thức về hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp; công thức khai triển nhị thức Newton trong trường hợp số mũ thấp.



Bài 23 QUY TẮC ĐẾM

THUẬT NGỮ
- Quy tắc cộng
- Quy tắc nhân
- Sơ đồ hình cây

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Vận dụng quy tắc cộng, quy tắc nhân để tính toán số cách thực hiện một công việc hoặc đếm số phần tử của một tập hợp.
- Vận dụng sơ đồ hình cây trong các bài toán đếm đơn giản.

Đếm là một bài toán cổ xưa nhất của nhân loại. Trong khoa học và trong cuộc sống, người ta cần đếm các đối tượng để giải quyết các vấn đề khác nhau. Chẳng hạn như bài toán sau:

Mỗi mật khẩu của một trang web là một dãy có từ 2 tới 3 kí tự, trong đó kí tự đầu tiên là một trong 26 chữ cái in thường trong bảng chữ cái tiếng Anh (từ a đến z), mỗi kí tự còn lại là một chữ số từ 0 đến 9. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

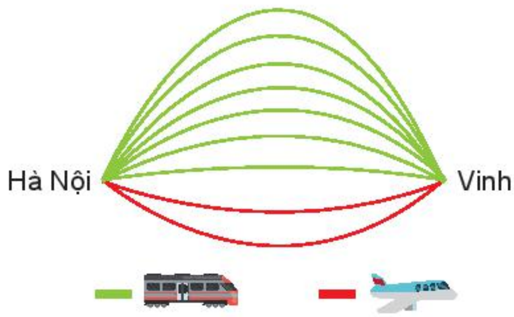
Bài học này sẽ giúp em hiểu và áp dụng hai quy tắc đếm cơ bản để giải quyết bài toán trên.

1. QUY TẮC CỘNG VÀ SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

HĐ1. *Chọn chuyến đi* (H.8.1)

Từ Hà Nội vào Vinh mỗi ngày có 7 chuyến tàu hoả và 2 chuyến máy bay. Bạn An muốn ngày Chủ nhật này đi từ Hà Nội vào Vinh bằng tàu hoả hoặc máy bay.

Hỏi bạn An có bao nhiêu cách chọn chuyến đi?



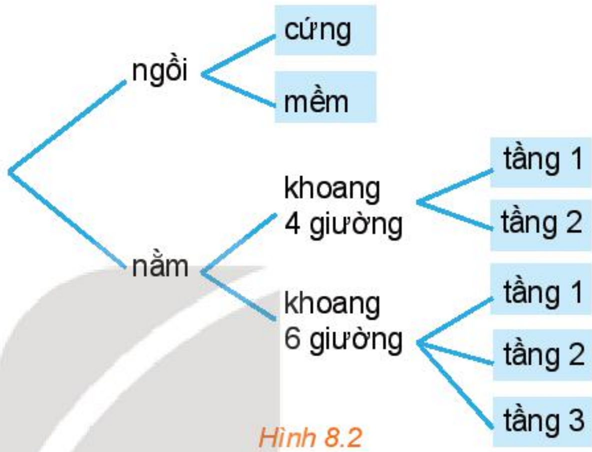
Hình 8.1

HĐ2. *Chọn vé tàu* (H.8.2)

Bạn An đã quyết định mua vé tàu đi từ Hà Nội vào Vinh trên chuyến tàu SE7. Trên tàu có các toa ghế ngồi và các toa giường nằm. Toa ngồi có hai loại vé: ngồi cứng và ngồi mềm. Toa nằm có loại khoang 4 giường và khoang 6 giường. Khoang 4 giường có hai loại vé: tầng 1 và tầng 2, khoang 6 giường có ba loại vé: tầng 1, tầng 2 và tầng 3. Hỏi:

a) Có bao nhiêu loại vé ghế ngồi và bao nhiêu loại vé giường nằm?

b) Có bao nhiêu loại vé để bạn An lựa chọn?



Hình 8.2

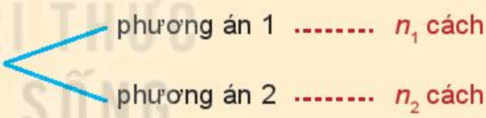
Quy tắc cộng

Giả sử một công việc nào đó có thể thực hiện theo một trong hai phương án khác nhau:

– Phương án một có n_1 cách thực hiện,

– Phương án hai có n_2 cách thực hiện.

Khi đó số cách thực hiện công việc sẽ là: $n_1 + n_2$ cách.



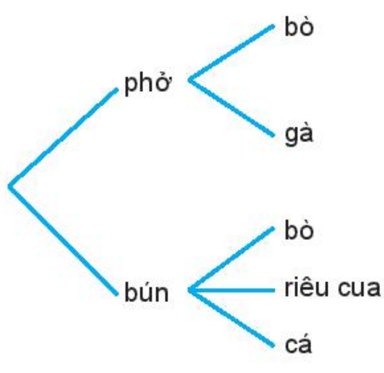
Chú ý. *Sơ đồ minh hoạ cách phân chia trường hợp như trong Hình 8.2 được gọi là* sơ đồ hình cây. Trong các bài toán đếm, người ta thường dùng sơ đồ hình cây để minh hoạ, giúp cho việc đếm thuận tiện và không bỏ sót trường hợp.

Ví dụ 1. Một quán phục vụ ăn sáng có bán phở và bún. Phở có 2 loại là phở bò và phở gà. Bún có 3 loại là bún bò, bún riêu cua và bún cá. Một khách hàng muốn chọn một món để ăn sáng. Vẽ sơ đồ hình cây minh hoạ và cho biết khách hàng đó có bao nhiêu cách lựa chọn một món ăn sáng.

Giải. Ta có sơ đồ hình cây như Hình 8.3.

Theo quy tắc cộng, số cách chọn một món ăn sáng là:

$$2 + 3 = 5 \text{ (cách)}.$$



Hình 8.3

Chú ý. Ta áp dụng quy tắc cộng cho một công việc có nhiều phương án khi các phương án đó phải rời nhau, không phụ thuộc vào nhau (độc lập với nhau).

Ví dụ 2. Một bộ cờ vua có 32 quân cờ như Hình 8.4.

a) Bạn Nam lấy ra tất cả các quân tốt. Hãy đếm xem Nam lấy ra bao nhiêu quân cờ.

b) Bạn Nam lấy ra tất cả các quân cờ trắng và tất cả các quân tốt. Hãy đếm số quân cờ Nam lấy ra.

Hình 8.4

Giải

a) Quân cờ bạn Nam lấy ra có thể thuộc hai loại: màu trắng hoặc màu đen.

– Số quân tốt trắng: 8 quân;

– Số quân tốt đen: 8 quân.

Nam lấy ra: 8 + 8 = 16 (quân cờ).

b) Nam lấy tất cả các quân trắng và tất cả các quân tốt.

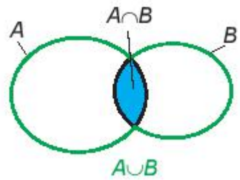
– Đầu tiên ta đếm tất cả các quân cờ trắng, có 16 quân;

– Tiếp theo ta đếm tất cả các quân tốt, có 16 quân tốt.

Vì trong 16 quân tốt có 8 quân tốt trắng đã được đếm nên số quân cờ Nam lấy ra là:

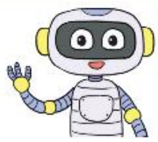
$$16 + 16 - 8 = 24 \text{ (quân cờ)}.$$

Nhận xét. Ở câu b), nếu gọi A là tập hợp gồm tất cả các quân cờ trắng, B là tập hợp gồm tất cả các quân tốt thì các quân cờ Nam lấy ra chính là các phần tử của tập hợp $A \cup B$. Nếu ta áp dụng quy tắc cộng: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 32$ (quân cờ), suy ra Nam lấy ra 32 quân cờ. Kết luận khi đó là sai, vì $A \cap B \neq \varnothing$ nên ta không thể áp dụng quy tắc cộng để tính trong trường hợp này.



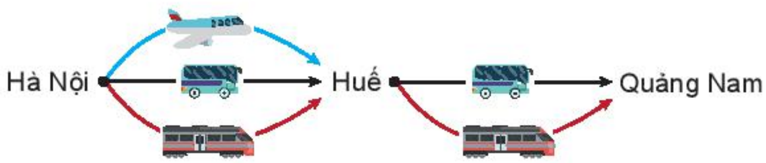
Luyện tập 1. Có bao nhiêu số tự nhiên từ 1 đến 30 mà không nguyên tố cùng nhau với 35?

Hai số tự nhiên a và b gọi là nguyên tố cùng nhau nếu chúng có ước chung lớn nhất là 1.



2. QUY TẮC NHÂN

HĐ3. Thầy Trung muốn đi từ Hà Nội vào Huế, rồi từ Huế vào Quảng Nam. Biết rằng từ Hà Nội vào Huế có thể đi bằng 3 cách: ô tô, tàu hoả hoặc máy bay. Còn từ Huế vào Quảng Nam có thể đi bằng 2 cách: ô tô hoặc tàu hoả (H.8.5).

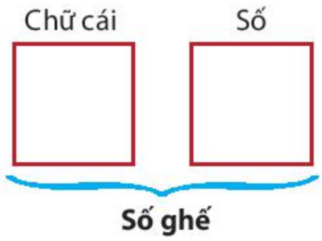


Hình 8.5

Hỏi thầy Trung có bao nhiêu cách chọn các phương tiện để đi từ Hà Nội vào Quảng Nam?

HĐ4. Để lắp ghế vào một phòng chiếu phim, các ghế được gắn nhãn bằng một chữ cái in hoa (trong bảng 26 chữ cái tiếng Anh từ *A* đến *Z*) đứng trước và một số nguyên từ 1 đến 20, chẳng hạn *X*15, *Z*2, ...

Hỏi có thể gắn nhãn tối đa được cho bao nhiêu ghế?



Ta nhận thấy muốn làm một việc có hai công đoạn lần lượt thì trước hết ta xét xem công đoạn một có bao nhiêu cách, sau đó với mỗi cách của công đoạn một, ta tính xem công đoạn hai có bao nhiêu cách. Khi đó số cách thực hiện công việc tính theo quy tắc sau:

Quy tắc nhân

Giả sử một công việc nào đó phải hoàn thành qua hai công đoạn liên tiếp nhau:

– Công đoạn một có m_1 cách thực hiện,

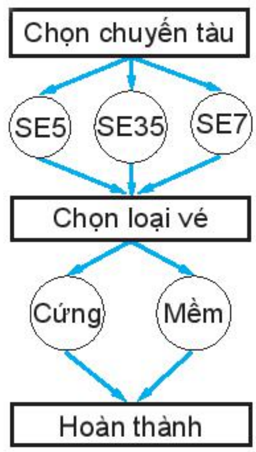
– Với mỗi cách thực hiện công đoạn một, có m_2 cách thực hiện công đoạn hai.

Khi đó số cách thực hiện công việc là: $m_1 \cdot m_2$ cách.

Chú ý

Quy tắc nhân áp dụng để tính số cách thực hiện một công việc có nhiều công đoạn, các công đoạn nối tiếp nhau và những công đoạn này độc lập với nhau.

Ví dụ 3. Một người muốn mua vé tàu ngồi đi từ Hà Nội vào Vinh. Có ba chuyến tàu là SE5, SE7 và SE35. Trên mỗi tàu có 2 loại vé ngồi khác nhau: ngồi cứng hoặc ngồi mềm. Hỏi có bao nhiêu loại vé ngồi khác nhau để người đó lựa chọn?



Giải

Để mua được vé tàu, người đó phải thực hiện hai công đoạn:

Chọn chuyến tàu → Chọn loại vé

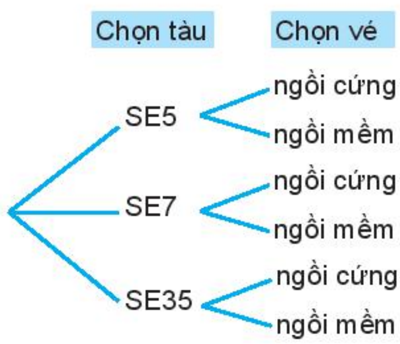
Có 3 cách chọn chuyến tàu, với mỗi chuyến tàu có 2 cách chọn loại vé ngồi. Áp dụng quy tắc nhân, ta có số cách chọn loại vé là: $3 \cdot 2 = 6$ (cách).

Chú ý. Ta cũng có thể dùng quy tắc cộng. Người mua vé có thể lựa chọn một trong ba trường hợp: SE5, SE7 hoặc SE35.

Nếu lựa chọn SE5, có hai loại vé: loại vé SE5 ngồi cứng và SE5 ngồi mềm. Tương tự cho trường hợp SE7 và trường hợp SE35.

Mỗi trường hợp có hai loại vé. Tổng cộng có:

$$2 + 2 + 2 = 6 \text{ (cách chọn loại vé).}$$



Luyện tập 2. Tại kì World Cup năm 2018, vòng bảng gồm có 32 đội tham gia, được chia vào 8 bảng, mỗi bảng 4 đội thi đấu vòng tròn (mỗi đội chơi một trận với từng đội khác trong cùng bảng). Hỏi tổng cộng vòng bảng có bao nhiêu trận đấu?

3. KẾT HỢP QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

Trong các ví dụ trước, chúng ta chỉ cần áp dụng một quy tắc đếm. Tuy nhiên, hầu hết các bài toán đếm trong thực tế sẽ phức tạp hơn và thường phải áp dụng cả hai quy tắc.

Ví dụ 4. Để tổ chức bữa tiệc, người ta chọn thực đơn gồm một món khai vị, một món chính và một món tráng miệng. Nhà hàng đưa ra danh sách: khai vị có 2 loại súp và 3 loại sa lát; món chính có 4 loại thịt, 3 loại cá và 3 loại tôm; tráng miệng có 5 loại kem và 3 loại bánh. Hỏi có thể thiết kế bao nhiêu thực đơn khác nhau?

Giải

Chọn món khai vị
↓
Chọn món chính
↓
Chọn món tráng miệng

Để chọn thực đơn, ta chia thành 3 công đoạn chọn món.

Công đoạn 1, chọn món khai vị: vì có hai phương án là súp hoặc sa lát nên ta áp dụng quy tắc cộng. Số cách chọn là: $2 + 3 = 5$ (cách).

Công đoạn 2, chọn món chính: tương tự, ta có số cách chọn là: $4 + 3 + 3 = 10$ (cách).

Công đoạn 3, chọn món tráng miệng: tương tự, ta có số cách chọn là: $5 + 3 = 8$ (cách).

Tổng kết, theo quy tắc nhân, số cách chọn thực đơn là: $5 \cdot 10 \cdot 8 = 400$ (cách).

Chú ý. Quy tắc cộng được áp dụng khi công việc được chia thành các phương án phân biệt (thực hiện một trong các phương án để hoàn thành công việc).

Quy tắc nhân được áp dụng khi công việc có nhiều công đoạn nối tiếp nhau (phải thực hiện tất cả các công đoạn để hoàn thành công việc).

Luyện tập 3. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3 có thể lập được bao nhiêu số thoả mãn:

a) Là số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

b) Là số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau?

Ví dụ 5. Trở lại *tình huống mở đầu*, ta thấy có hai trường hợp: độ dài của mật khẩu là 2 hoặc 3 kí tự.

- Trường hợp 1: độ dài mật khẩu là 2 kí tự. Chọn từng kí tự và áp dụng quy tắc nhân.

  Kí tự đầu tiên có 26 cách chọn trong các chữ cái in thường tiếng Anh.

  Kí tự thứ hai có 10 cách chọn trong các chữ số từ 0 đến 9.

  Vậy, theo quy tắc nhân, ta có $26 \cdot 10 = 260$ cách chọn mật khẩu trong trường hợp 1.
- Trường hợp 2: độ dài mật khẩu là 3 kí tự.

  Tương tự như trường hợp 1, ta có $26 \cdot 10^2 = 2\,600$ cách chọn mật khẩu.

Vì có hai trường hợp rời nhau, mật khẩu có thể rơi vào một trong hai trường hợp, nên ta áp dụng quy tắc cộng. Tổng số mật khẩu có thể là 260 + 2 600 = 2 860.

Vận dụng. Khối lớp 10 của một trường trung học phổ thông có ba lớp 10A, 10B, 10C. Lớp 10A có 30 bạn, lớp 10B có 35 bạn, lớp 10C có 32 bạn. Nhà trường muốn chọn 4 bạn để thành lập đội cờ đỏ của khối sao cho có đủ đại diện của các lớp. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn?

BÀI TẬP

8.1. Trên giá sách có 8 cuốn truyện ngắn, 7 cuốn tiểu thuyết và 5 tập thơ (tất cả đều khác nhau). Vẽ sơ đồ hình cây minh hoạ và cho biết bạn Phong có bao nhiêu cách chọn một cuốn để đọc vào ngày cuối tuần.

8.2. Một người gieo đồng xu hai mặt, sau mỗi lần gieo thì ghi lại kết quả là sấp hay ngửa. Hỏi nếu người đó gieo 3 lần thì có thể có bao nhiêu khả năng xảy ra?

8.3. Ở một loài thực vật, A là gen trội quy định tính trạng hoa kép, a là gen lặn quy định tính trạng hoa đơn.

a) Sự tổ hợp giữa hai gen trên tạo ra mấy kiểu gen? Viết các kiểu gen đó.

b) Khi giao phối ngẫu nhiên, có bao nhiêu kiểu giao phối khác nhau từ các kiểu gen đó?

8.4. Có bao nhiêu số tự nhiên

a) có 3 chữ số khác nhau?

b) là số lẻ có 3 chữ số khác nhau?

c) là số có 3 chữ số và chia hết cho 5?

d) là số có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

8.5. a) Mật khẩu của chương trình máy tính quy định gồm 3 kí tự, mỗi kí tự là một chữ số. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

b) Nếu chương trình máy tính quy định mới mật khẩu vẫn gồm 3 kí tự, nhưng kí tự đầu tiên phải là một chữ cái in hoa trong bảng chữ cái tiếng Anh gồm 26 chữ (từ A đến Z) và 2 kí tự sau là các chữ số (từ 0 đến 9). Hỏi quy định mới có thể tạo được nhiều hơn quy định cũ bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

Bài 24 HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

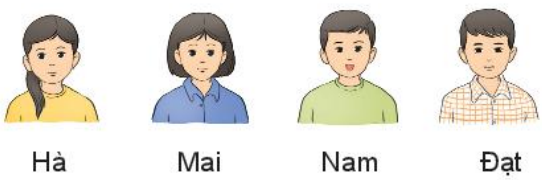
THUẬT NGỮ
- Hoán vị
- Chỉnh hợp
- Tổ hợp

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.
- Tính số hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp bằng máy tính cầm tay.

Danh sách các cầu thủ của Đội tuyển bóng đá quốc gia tham dự một trận đấu quốc tế có 23 cầu thủ gồm 3 thủ môn, 7 hậu vệ, 8 tiền vệ và 5 tiền đạo. Huấn luyện viên rất bí mật, không cho ai biết đội hình (danh sách 11 cầu thủ) sẽ ra sân. Trong cuộc họp báo, ông chỉ tiết lộ đội sẽ đá theo sơ đồ 3 – 4 – 3 (nghĩa là 3 hậu vệ, 4 tiền vệ, 3 tiền đạo và 1 thủ môn). Đối thủ đã có danh sách 23 cầu thủ (tên và vị trí của từng cầu thủ) và rất muốn dự đoán đội hình, họ xét hết các khả năng có thể xảy ra. Hỏi nếu đối thủ đã dự đoán được trước vị trí thủ môn thì họ sẽ phải xét bao nhiêu đội hình có thể?

1. HOÁN VỊ

HĐ1. Một nhóm gồm bốn bạn Hà, Mai, Nam, Đạt xếp thành một hàng, từ trái sang phải, để tham gia một cuộc phỏng vấn.



a) Hãy liệt kê ba cách sắp xếp bốn bạn trên theo thứ tự.

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp thứ tự bốn bạn trên để tham gia phỏng vấn?

Nhận xét. Mỗi cách sắp xếp thứ tự của bốn bạn tham gia phỏng vấn ở HĐ1 được gọi là một *hoán vị* của tập hợp gồm bốn bạn này. Số các hoán vị của bốn bạn ở HĐ1 là $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Tổng quát ta có

> Một **hoán vị** của một tập hợp có n phần tử là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử đó (với n là một số tự nhiên, $n \geq 1$).
>
> Số các hoán vị của tập hợp có n phần tử, kí hiệu là P_n, được tính bằng công thức
>
> $$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Chú ý. Kí hiệu $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ là $n!$ (đọc là n giai thừa), ta có: $P_n = n!$. Chẳng hạn $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Quy ước $0! = 1$.

Ví dụ 1. Từ các chữ số 6, 7, 8 và 9 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau?

Giải

Mỗi cách sắp xếp bốn chữ số đã cho để lập thành một số có bốn chữ số khác nhau là một hoán vị của bốn chữ số đó.

Vậy số các số có bốn chữ số khác nhau có thể lập được là $P_4 = 4! = 24$.

Luyện tập 1. Trong một cuộc thi điền kinh gồm 6 vận động viên chạy trên 6 đường chạy. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các vận động viên vào các đường chạy đó?

2. CHỈNH HỢP

HĐ2. Trong lớp 10T có bốn bạn Tuấn, Hương, Việt, Dung đủ tiêu chuẩn tham gia cuộc thi hùng biện của trường.

a) Giáo viên cần chọn ra hai bạn phụ trách nhóm trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai bạn từ bốn bạn nêu trên?

b) Có bao nhiêu cách chọn hai bạn, trong đó một bạn làm nhóm trưởng, một bạn làm nhóm phó?

Nhận xét. Trong HĐ2b, mỗi cách sắp xếp hai bạn từ bốn bạn làm nhóm trưởng, nhóm phó được gọi là một *chỉnh hợp* chập 2 của 4. Để tính số các chỉnh hợp ta dùng quy tắc nhân. Tổng quát ta có:

> Một **chỉnh hợp chập k của n** là một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k, n là các số tự nhiên, $1 \leq k \leq n$).
>
> Số các chỉnh hợp chập k của n, kí hiệu là A_n^k, được tính bằng công thức
>
> $$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \text{ hay } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Ví dụ 2. Một lớp có 30 học sinh, giáo viên cần chọn lần lượt 4 học sinh trồng bốn cây khác nhau để tham gia lễ phát động Tết trồng cây của trường. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách chọn?

Giải

Mỗi cách chọn lần lượt 4 trong 30 học sinh để trồng bốn cây khác nhau là một chỉnh hợp chập 4 của 30.

Vậy số cách chọn là $A_{30}^{4} = 657\,720$.

Chú ý

- Hoán vị sắp xếp tất cả các phần tử của tập hợp, còn chỉnh hợp chọn ra một số phần tử và sắp xếp chúng.
- Mỗi hoán vị của n phần tử cũng chính là một chỉnh hợp chập n của n phần tử đó. Vì vậy $P_n = A_n^n$.

Luyện tập 2. Trong một giải đua ngựa gồm 12 con ngựa, người ta chỉ quan tâm đến 3 con ngựa: con nhanh nhất, nhanh nhì và nhanh thứ ba. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

3. TỔ HỢP

HĐ3. Trở lại HĐ2.

a) Hãy cho biết sự khác biệt khi chọn ra hai bạn ở câu HĐ2a và HĐ2b.

b) Từ kết quả tính được ở câu HĐ2b (áp dụng chỉnh hợp), hãy chỉ ra cách tính kết quả ở câu HĐ2a.

Nhận xét

Mỗi cách chọn ra 2 bạn từ 4 bạn ở HĐ2a được gọi là một *tổ hợp* chập 2 của 4. Vì không cần sắp xếp thứ tự hai bạn được chọn nên số cách chọn sẽ giảm đi 2! lần so với việc chọn ra hai bạn có sắp xếp thứ tự (ở câu HĐ2b).

Tổng quát ta có:

> Một tổ hợp chập k của n là một cách chọn k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k, n là các số tự nhiên, $0 \le k \le n$).
>
> Số các tổ hợp chập k của n, kí hiệu là C_n^k, được tính bằng công thức
>
> $$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (0 \le k \le n).$$

Chú ý

- $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!}$.
- Chỉnh hợp và tổ hợp có điểm giống nhau là đều chọn một số phần tử trong một tập hợp, nhưng khác nhau ở chỗ, chỉnh hợp là chọn có xếp thứ tự, còn tổ hợp là chọn không xếp thứ tự.

Ví dụ 3. Có 7 bạn học sinh muốn chơi cờ cá ngựa, nhưng mỗi ván chỉ có 4 người chơi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 bạn chơi cờ cá ngựa?

Giải

Mỗi cách chọn 4 bạn trong 7 bạn học sinh là một tổ hợp chập 4 của 7.

Vậy số cách chọn 4 bạn chơi cờ cá ngựa là $C_7^4 = \dfrac{7!}{4!3!} = 35$.

Luyện tập 3. Trong ngân hàng đề kiểm tra cuối học kì II môn Vật lí có 20 câu lí thuyết và 40 câu bài tập. Người ta chọn ra 2 câu lí thuyết và 3 câu bài tập trong ngân hàng đề để tạo thành một đề thi. Hỏi có bao nhiêu cách lập đề thi gồm 5 câu hỏi theo cách chọn như trên?

4. ỨNG DỤNG HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP VÀO CÁC BÀI TOÁN ĐẾM

Các khái niệm hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp liên quan mật thiết với nhau và là những khái niệm cốt lõi của các phép đếm. Rất nhiều bài toán đếm liên quan đến việc lựa chọn, việc sắp xếp, vì vậy các công thức tính P_n, A_n^k, C_n^k sẽ được dùng rất nhiều.

Dưới đây ta xét một số ví dụ về các bài toán đếm.

Ví dụ 4. Một lần anh Hưng đến Hà Nội và dự định từ Hà Nội tham quan Đền Hùng, Ninh Bình, Hạ Long, Đường Lâm và Bát Tràng, mỗi ngày đi tham quan một địa điểm rồi lại về Hà Nội.

a) Hỏi anh Hưng có thể xếp được bao nhiêu lịch trình đi tham quan tất cả các địa điểm (ở đây lịch trình tính cả thứ tự tham quan).

b) Anh Hưng có việc đột xuất phải về sớm, nên anh chỉ có 3 ngày để đi tham quan 3 địa điểm. Hỏi anh Hưng có bao nhiêu cách xếp lịch trình đi tham quan?

Giải

a) Anh Hưng đi tham quan 5 địa điểm, mỗi cách xếp lịch trình là một cách chọn có thứ tự của 5 địa điểm trên. Vậy số cách xếp lịch trình chính bằng số các hoán vị của 5 địa điểm, và bằng

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ (cách)}.$$

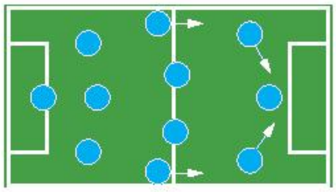
b) Nếu anh Hưng chỉ có 3 ngày để đi tham quan 3 nơi, thì mỗi cách xếp lịch trình của anh chính là một cách chọn có thứ tự 3 địa điểm từ 5 địa điểm, tức là một chỉnh hợp chập 3 của 5.

Vậy số cách xếp lịch trình đi tham quan trong trường hợp này là

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ (cách)}.$$

Ví dụ 5. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu* về đội hình của Đội tuyển bóng đá quốc gia.

Giải



Vì mỗi đội hình gồm có 1 thủ môn, 3 hậu vệ, 4 tiền vệ và 3 tiền đạo và đã biết trước vị trí thủ môn, nên để chọn đội hình ta cần thực hiện 3 công đoạn:

1. Chọn hậu vệ là chọn 3 trong số 7 hậu vệ: có $C_7^3 = 35$ (cách).
2. Chọn tiền vệ là chọn 4 trong số 8 tiền vệ: có $C_8^4 = 70$ (cách).
3. Chọn tiền đạo là chọn 3 trong số 5 tiền đạo: có $C_5^3 = 10$ (cách).

Vậy, theo quy tắc nhân, số các đội hình có thể có (khi đã biết vị trí thủ môn) là $35 \cdot 70 \cdot 10 = 24\,500$.

Vận dụng. Một câu lạc bộ có 20 học sinh.

a) Có bao nhiêu cách chọn 6 thành viên vào Ban quản lí?

b) Có bao nhiêu cách chọn Trưởng ban, 1 Phó ban, 4 thành viên khác vào Ban quản lí?

5. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Ta có thể dùng máy tính cầm tay để tính số các hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

Hoán vị

Để tính $n!$, ta ấn phím theo trình tự sau:

Ấn số n, ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^{-1}}$, sau đó ấn phím $\boxed{=}$. Khi đó, kết quả sẽ hiển thị ở dòng kết quả.

Ví dụ. Tính 9!.

Ta ấn liên tiếp các phím như sau: $\boxed{9}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

Dòng kết quả hiện ra 362 880.

Chỉnh hợp

Để tính A_n^k ta ấn phím theo trình tự sau:

Ấn số n, ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\times}$, ấn số k, sau đó ấn phím $\boxed{=}$. Khi đó, kết quả sẽ hiển thị ở dòng kết quả.

Ví dụ. Tính A_{15}^2.

Ta ấn các phím theo trình tự sau: $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$

Dòng kết quả hiện ra 210.

Tổ hợp

Để tính C_n^k ta ấn phím theo trình tự sau:

Ấn số n, ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\div}$, ấn số k, sau đó ấn phím $\boxed{=}$. Khi đó, kết quả sẽ hiển thị ở dòng kết quả.

Ví dụ. Tính C_{20}^5.

Ta ấn các phím theo trình tự sau: $\boxed{2}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

Dòng kết quả hiện ra 15 504.

BÀI TẬP

8.6. Một hoạ sĩ cần trưng bày 10 bức tranh nghệ thuật khác nhau thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách để hoạ sĩ sắp xếp các bức tranh?

8.7. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có ba chữ số khác nhau?

8.8. Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp gồm hai số nguyên dương nhỏ hơn 100? Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp gồm ba số nguyên dương nhỏ hơn 100?

8.9. Bạn Hà có 5 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ. Có bao nhiêu cách để Hà chọn ra đúng 2 viên bi khác màu?

8.10. Một câu lạc bộ cờ vua có 10 bạn nam và 7 bạn nữ. Huấn luyện viên muốn chọn 4 bạn đi thi đấu cờ vua.

a) Có bao nhiêu cách chọn 4 bạn nam?

b) Có bao nhiêu cách chọn 4 bạn không phân biệt nam, nữ?

c) Có bao nhiêu cách chọn 4 bạn, trong đó có 2 bạn nam và 2 bạn nữ?

8.11. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5 mà mỗi số có bốn chữ số khác nhau?

Em có biết?

- Có thể coi người đầu tiên đưa các bài toán tổ hợp vào châu Âu là Leonardo Fibonacci ở thành Pisa (thuộc nước Italia ngày nay) vào thế kỉ XIII. Trong cuốn sách *Liber Abaci (Sách tính)*, ông đã giới thiệu dãy số Fibonacci: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \ldots$ Trong dãy số này, kể từ số hạng thứ ba trở đi, mỗi số hạng bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó, tức là $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Bằng các lập luận tổ hợp, có thể chứng minh được rằng tổng số các cách khác nhau để xếp được một hình chữ nhật có kích thước $1 \times n$ từ hai loại gạch có kích thước 1×1 và 1×2 chính là F_{n+1}. Sử dụng tính chất này, ta có hằng đẳng thức

Fibonacci (1170 - 1250)

$$F_{n+1} = \sum_{k+m=n} C_m^k,$$

trong đó vế phải là tổng của tất cả các số C_m^k với $k + m = n$.

- Câu hỏi một ván cờ vua có thể có nhiều nhất bao nhiêu nước đi có vẻ rất phức tạp vì mỗi ván một vẻ. Vậy mà bằng các tính toán tổ hợp, người ta đã chứng minh rằng về lí thuyết, một ván cờ có tối đa 5 950 nước đi.

Bài 25 NHỊ THỨC NEWTON

THUẬT NGỮ	KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
• Khai triển • Nhị thức	• Khai triển nhị thức Newton $(a+b)^n$ bằng vận dụng tổ hợp với số mũ thấp ($n = 4$ hoặc $n = 5$).

Ở lớp 8, khi học về hằng đẳng thức, ta đã biết khai triển:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

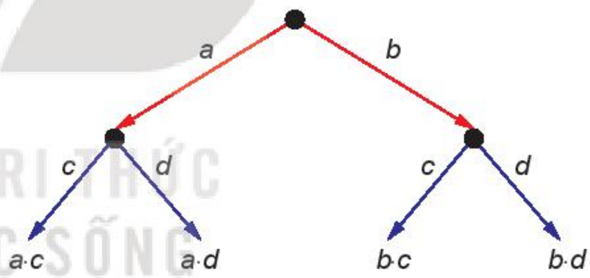
Quan sát các đơn thức ở vế phải của các đẳng thức trên, hãy nhận xét về quy luật số mũ của a và b. Có thể tìm được cách tính các hệ số của đơn thức trong khai triển $(a+b)^n$ khi $n \in \{4; 5\}$ không?

HĐ1. Hãy xây dựng sơ đồ hình cây của tích hai nhị thức $(a+b)\cdot(c+d)$ như sau:

- Từ một điểm gốc, kẻ các mũi tên, mỗi mũi tên tương ứng với một đơn thức (gọi là nhãn của mũi tên) của nhị thức thứ nhất (H.8.6);
- Từ ngọn của mỗi mũi tên đã xây dựng, kẻ các mũi tên, mỗi mũi tên tương ứng với một đơn thức của nhị thức thứ hai;
- Tại ngọn của các mũi tên xây dựng tại bước sau cùng, ghi lại tích của các nhãn của các mũi tên đi từ điểm gốc đến đầu mút đó.

Hãy lấy tổng của các tích nhận được và so sánh kết quả với khai triển của tích $(a+b)\cdot(c+d)$.

Sơ đồ hình cây của $(a+b)\cdot(c+d)$



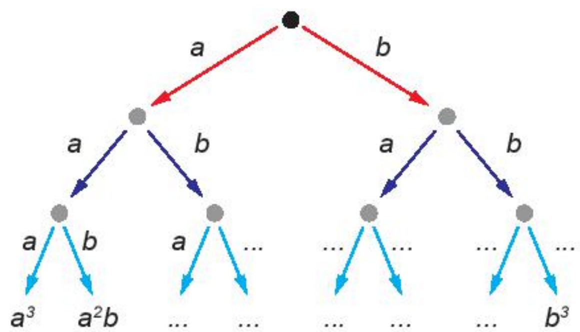
Hình 8.6

HĐ2. Hãy cho biết các đơn thức còn thiếu (...) trong sơ đồ hình cây (H.8.7) của tích $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$.

Có bao nhiêu tích nhận được lần lượt bằng a^3, a^2b, ab^2, b^3?

Hãy so sánh chúng với các hệ số nhận được khi khai triển $(a+b)^3$.

Sơ đồ hình cây của $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$.

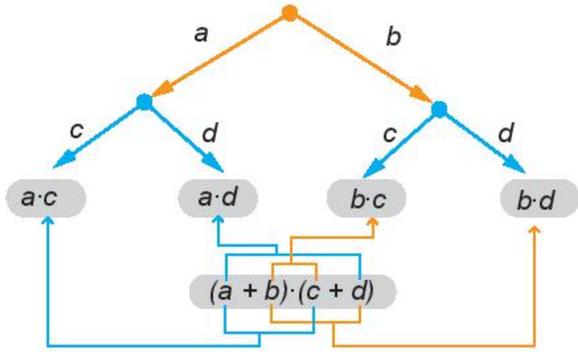


Hình 8.7

Nhận xét. Các tích nhận được từ sơ đồ hình cây của một tích các đa thức giống như cách lấy ra một đơn thức từ mỗi đa thức rồi nhân lại với nhau. Hơn nữa, tổng của chúng cho ta khai triển của tích các đa thức đã cho.

Chẳng hạn, trong sơ đồ hình cây (H.8.8) của $(a + b)\cdot(c + d)$ thì các tích nhận được là $a\cdot c$, $a\cdot d$, $b\cdot c$, $b\cdot d$ cũng chính là các tích nhận được khi ta lấy một hạng tử của nhị thức thứ nhất (là a hoặc b) nhân với một hạng tử của nhị thức thứ hai (là c hoặc d). Ta có

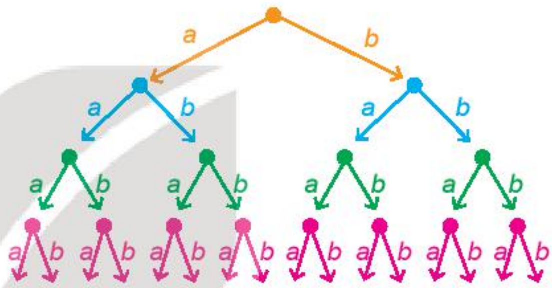
$$(a + b)\cdot(c + d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$



Hình 8.8

HĐ3. Hãy vẽ sơ đồ hình cây của khai triển $(a + b)^4$ được mô tả như Hình 8.9. Sau khi khai triển, ta thu được một tổng gồm 2^4 (theo quy tắc nhân) đơn thức có dạng $x\cdot y\cdot z\cdot t$, trong đó mỗi x, y, z, t là a hoặc b. Chẳng hạn, nếu x, y, t là a, còn z là b thì ta có đơn thức $a\cdot a\cdot b\cdot a$, thu gọn là a^3b. Để có đơn thức này, thì trong 4 nhân tử x, y, z, t có 1 nhân tử là b, 3 nhân tử còn lại là a. Khi đó số đơn thức đồng dạng với a^3b trong tổng là C_4^1.

Sơ đồ hình cây của $(a + b)^4$



Hình 8.9

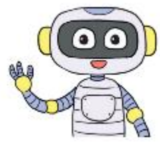
Lập luận tương tự trên, dùng kiến thức về tổ hợp, hãy cho biết trong tổng nêu trên, có bao nhiêu đơn thức đồng dạng với mỗi đơn thức thu gọn sau:

• a^4; • a^3b; • a^2b^2; • ab^3; • b^4 ?

Từ HĐ3, sau khi rút gọn các đơn thức đồng dạng ta thu được:

$$(a + b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Trong khai triển nhị thức Newton $(a + b)^4$, các đơn thức có bậc là 4.



Ví dụ 1. Khai triển $(2x + 1)^4$.

Giải

Thay $a = 2x$ và $b = 1$ trong công thức khai triển của $(a + b)^4$, ta được:

$$(2x + 1)^4 = (2x)^4 + 4\cdot(2x)^3\cdot 1 + 6\cdot(2x)^2\cdot 1^2 + 4\cdot(2x)\cdot 1^3 + 1^4$$
$$= 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1.$$

Luyện tập 1. Khai triển $(x - 2)^4$.

HĐ4. Tương tự như HĐ3, sau khi khai triển $(a+b)^5$, ta thu được một tổng gồm 2^5 đơn thức có dạng $x \cdot y \cdot z \cdot t \cdot u$, trong đó mỗi kí hiệu x, y, z, t, u là a hoặc b. Chẳng hạn, nếu x, z là a, còn y, t, u là b thì ta có đơn thức $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b$, thu gọn là a^2b^3. Để có đơn thức này, thì trong 5 nhân tử x, y, z, t, u có 3 nhân tử là b, 2 nhân tử còn lại là a. Khi đó số đơn thức đồng dạng với a^2b^3 trong tổng là C_5^3.

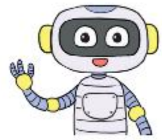
Lập luận tương tự như trên, dùng kiến thức về tổ hợp, hãy cho biết, trong tổng nhận được nêu trên có bao nhiêu đơn thức đồng dạng với mỗi đơn thức thu gọn sau:

• a^5; • a^4b; • a^3b^2; • a^2b^3; • ab^4; • b^5?

Từ HĐ4, sau khi rút gọn các đơn thức đồng dạng ta thu được:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= C_5^0a^5 + C_5^1a^4b + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4ab^4 + C_5^5b^5\\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.\end{aligned}$$

Trong khai triển nhị thức Newton $(a+b)^5$, các đơn thức có bậc là 5.



Ví dụ 2. Khai triển $(x+3)^5$.

Giải

Thay $a = x$ và $b = 3$ trong công thức khai triển của $(a+b)^5$, ta được:

$$\begin{aligned}(x+3)^5 &= x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot 3 + 10 \cdot x^3 \cdot 3^2 + 10 \cdot x^2 \cdot 3^3 + 5 \cdot x \cdot 3^4 + 3^5\\ &= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243.\end{aligned}$$

Luyện tập 2. Khai triển $(3x-2)^5$.

Nhận xét. Các công thức khai triển $(a+b)^n$ với $n \in \{4; 5\}$, là một công cụ hiệu quả để tính chính xác hoặc xấp xỉ một số đại lượng mà không cần dùng máy tính.

Vận dụng

a) Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của $(1+0,05)^4$ để tính giá trị gần đúng của $1,05^4$.

b) Dùng máy tính cầm tay tính giá trị của $1,05^4$ và tính sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng nhận được ở câu a.

BÀI TẬP

8.12. Khai triển các đa thức:

a) $(x-3)^4$; b) $(3x-2y)^4$;

c) $(x+5)^4 + (x-5)^4$; d) $(x-2y)^5$.

8.13. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển của $(3x-1)^5$.

8.14. Biểu diễn $(3+\sqrt{2})^5 - (3-\sqrt{2})^5$ dưới dạng $a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số nguyên.

8.15. a) Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của $(1+0,02)^5$ để tính giá trị gần đúng của $1,02^5$.

b) Dùng máy tính cầm tay tính giá trị của $1,02^5$ và tính sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng nhận được ở câu a.

8.16. Số dân của một tỉnh ở thời điểm hiện tại là khoảng 800 nghìn người. Giả sử rằng tỉ lệ tăng dân số hằng năm của tỉnh đó là $r\%$.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau 1 năm, sau 2 năm. Từ đó suy ra công thức tính số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa là $P = 800\left(1+\frac{r}{100}\right)^5$ (nghìn người).

b) Với $r = 1,5\%$, dùng hai số hạng đầu trong khai triển của $(1+0,015)^5$, hãy ước tính số dân của tỉnh đó sau 5 năm nữa (theo đơn vị nghìn người).

Em có biết?

Trong di truyền học quần thể, nguyên lí Hardy – Weinberg đưa ra công thức toán học tính tần số của các kiểu gen trong một quần thể (thoả mãn một số điều kiện) ở các thế hệ.
Trong trường hợp ở mỗi vị trí trên nhiễm sắc thể chỉ có hai alen (là một trạng thái cụ thể của một gen) A và B với các tần số khởi đầu lần lượt là p và q ($p+q=1$, tức là 100%), công thức của Hardy – Weinberg là tương ứng với khai triển nhị thức Newton.
Chẳng hạn:

- Tần số các kiểu gen AA, AB, BB tương ứng là p^2, $2pq$, q^2

(ứng với quy tắc kết hợp $(pA+qB)\times(pA+qB)=(pA+qB)^2=p^2AA+2pqAB+q^2BB$);

- Tần số các kiểu gen AAA, AAB, ABB, BBB tương ứng là p^3, $3p^2q$, $3pq^2$, q^3

(ứng với $(pA+qB)^3=p^3AAA+3p^2qAAB+3pq^2ABB+q^3BBB$);

- Tần số các kiểu gen $AAAA$, $AAAB$, $ABBB$, $BBBB$ tương ứng là

$$p^4,\ 4p^3q,\ 6p^2q^2,\ 4pq^3,\ q^4$$

(ứng với $(pA+qB)^4=C_4^0p^4AAAA+C_4^1p^3qAAAB+C_4^2p^2q^2AABB+C_4^3pq^3ABBB+C_4^4q^4BBBB$);

- Tổng quát, ta có tần số kiểu gen gồm i alen A và j alen B là $C_{i+j}^{j}p^iq^j$.

(Theo *Sinh học 12, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2017*)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A – TRẮC NGHIỆM

8.17. Số cách cắm 4 bông hoa khác nhau vào 4 bình hoa khác nhau (mỗi bông hoa cắm vào một bình) là

A. 16. **B.** 24. **C.** 8. **D.** 4.

8.18. Số các số có ba chữ số khác nhau, trong đó các chữ số đều lớn hơn 0 và nhỏ hơn hoặc bằng 5 là

A. 120. **B.** 60. **C.** 720. **D.** 2.

8.19. Số cách chọn 3 bạn học sinh đi học bơi từ một nhóm 10 bạn học sinh là

A. 3 628 800. **B.** 604 800. **C.** 120. **D.** 720.

8.20. Bạn An gieo một con xúc xắc hai lần. Số các trường hợp để tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bằng 8 qua hai lần gieo là

A. 36. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

8.21. Hệ số của x^4 trong khai triển nhị thức $(3x - 4)^5$ là

A. 1 620. **B.** 60. **C.** -60. **D.** $-1\,620$.

B – TỰ LUẬN

8.22. a) Có bao nhiêu cách viết một dãy 5 chữ cái in hoa từ bảng chữ cái tiếng Anh (gồm 26 chữ cái)?

b) Có bao nhiêu cách viết một dãy 5 chữ cái in hoa khác nhau từ bảng chữ cái tiếng Anh (gồm 26 chữ cái)?

8.23. Từ các chữ số: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

a) Có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau?

b) Có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 3?

8.24. Tế bào A có $2n = 8$ nhiễm sắc thể (NST), và nguyên phân 5 lần liên tiếp. Tế bào B có $2n = 14$ NST và nguyên phân 4 lần liên tiếp. Tính và so sánh tổng số NST trong tế bào A và trong tế bào B được tạo ra.

8.25. Lớp 10B có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 bạn tham gia vào đội thiện nguyện của trường trong mỗi trường hợp sau?

a) Ba học sinh được chọn là bất kì.

b) Ba học sinh được chọn gồm 1 nam và 2 nữ.

c) Có ít nhất một nam trong ba học sinh được chọn.

8.26. Trong khai triển nhị thức Newton của $(2x + 3)^5$, hệ số của x^4 hay hệ số của x^3 lớn hơn?