CHƯƠNG VII
PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Sau điểm và vectơ, những đối tượng khác của hình học phẳng như đường thẳng, đường tròn, ... sẽ lần lượt được đại số hoá ở chương này. Đối với mỗi đối tượng hình học đó, trước hết ta đưa ra đối tượng đại số tương ứng, được gọi là phương trình của nó. Các mối quan hệ, công thức tính toán hình học sẽ được thể hiện theo các yếu tố của phương trình tương ứng.

Nhờ đại số hoá hình học, ta có thể dùng ngôn ngữ và phương pháp của đại số để diễn đạt và học tập hình học. Ngoài ra, đại số hoá hình học là bước quan trọng cho phép ta dùng ngôn ngữ của máy tính để diễn đạt hình học. Nhờ đó, ta có thể sử dụng công nghệ thông tin trong học tập và áp dụng hình học, chẳng hạn, các phần mềm vẽ hình như GeoGebra (dùng trong học tập), Autocad (dùng trong vẽ thiết kế) đều sử dụng các kiến thức hình học.

Bài 19 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

THUẬT NGỮ

- Vectơ chỉ phương
- Vectơ pháp tuyến
- Phương trình tổng quát
- Phương trình tham số

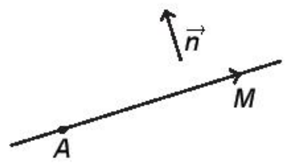
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Mô tả phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng.
- Lập phương trình của đường thẳng khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến hoặc một điểm và một vectơ chỉ phương hoặc hai điểm.
- Giải thích mối liên hệ giữa đồ thị hàm bậc nhất và đường thẳng.
- Vận dụng kiến thức về phương trình đường thẳng để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Đường thẳng là một tập hợp điểm, được xác định bởi tính chất đặc trưng của các điểm thuộc đường thẳng đó. Do vậy, ta có thể đại số hoá đường thẳng bằng cách thể hiện tính chất đặc trưng đó bởi điều kiện đại số đối với toạ độ của các điểm tương ứng.

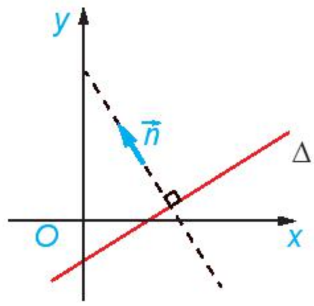
1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

HĐ1. Cho vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và điểm A. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}$ vuông góc với $\vec{n}$.



Hình 7.1a

Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ.



Hình 7.1b

Nhận xét

- Nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của Δ.
- Đường thẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác có ba đỉnh là $A(3; 1)$, $B(4; 0)$, $C(5; 3)$. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của đường trung trực của đoạn thẳng AB và một vectơ pháp tuyến của đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Giải

Đường trung trực của đoạn thẳng AB vuông góc với AB nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}(1; -1)$.

Đường cao kẻ từ A của tam giác ABC vuông góc với BC nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{BC}(1; 3)$.

HĐ2. Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a; b)$. Chứng minh rằng điểm $M(x; y)$ thuộc Δ khi và chỉ khi

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \qquad (1)$$

Nhận xét

Trong HĐ2, nếu đặt $c = -ax_0 - by_0$ thì (1) còn được viết dưới dạng $ax + by + c = 0$ và được gọi là *phương trình tổng quát* của Δ. Như vậy, điểm $M(x; y)$ thuộc đường thẳng Δ khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn phương trình tổng quát của Δ.

Trong mặt phẳng toạ độ, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0. Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0, đều là phương trình của một đường thẳng, nhận $\vec{n}(a; b)$ là một vectơ pháp tuyến.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ, lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2; 1)$ và nhận $\vec{n}(3; 4)$ là một vectơ pháp tuyến.

Giải

Đường thẳng Δ có phương trình là $3(x - 2) + 4(y - 1) = 0$ hay $3x + 4y - 10 = 0$.

Luyện tập 1. Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác có ba đỉnh $A(-1;\,5)$, $B(2;\,3)$, $C(6;\,1)$. Lập phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ, lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;\,b)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a;-1)$, với a, b là các số cho trước. Đường thẳng Δ có mối liên hệ gì với đồ thị của hàm số $y = ax + b$.

Giải

Đường thẳng Δ có phương trình là $a(x-0) - 1(y-b) = 0$ hay $ax - y + b = 0$.

Đường thẳng Δ là tập hợp những điểm $M(x;\,y)$ thoả mãn $ax - y + b = 0$ (hay là, $y = ax + b$).

Do đó, đồ thị của hàm số $y = ax + b$ chính là đường thẳng Δ: $ax - y + b = 0$.

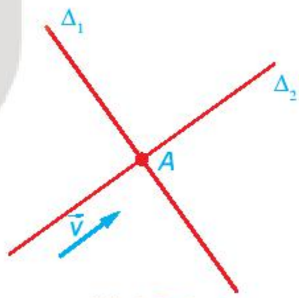
Luyện tập 2. Hãy chỉ ra một vec tơ pháp tuyến của đường thẳng $\Delta: y = 3x + 4$.

Nhận xét. Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$.

- Nếu $b = 0$ thì phương trình Δ có thể đưa về dạng $x = m$ (với $m = -\dfrac{c}{a}$) và Δ vuông góc với Ox.
- Nếu $b \neq 0$ thì phương trình Δ có thể đưa về dạng $y = nx + p$ (với $n = -\dfrac{a}{b}, p = -\dfrac{c}{b}$).

2. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

HĐ3. Trong Hình 7.2a, nếu một vật thể chuyển động với vectơ vận tốc bằng $\vec{v}$ và đi qua A thì nó di chuyển trên đường nào?

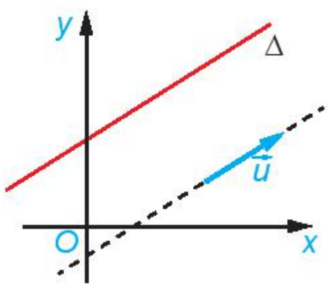


Hình 7.2a

> Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

Nhận xét

- Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ.
- Đường thẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một vectơ chỉ phương của nó.
- Hai vectơ $\vec{n}(a;\,b)$ và $\vec{u}(-b;a)$ vuông góc với nhau nên nếu $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng đó và ngược lại.



Hình 7.2b

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ, cho $A(3;\,2)$, $B(1;-4)$. Hãy chỉ ra hai vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Giải

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}(-2;-6)$ là một vectơ chỉ phương.

Lấy $\vec{u} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;\,3)$, khi đó $\vec{u}$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Luyện tập 3. Hãy chỉ ra một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta: 2x - y + 1 = 0$.

HĐ4. Chuyển động của một vật thể được thể hiện trên mặt phẳng Oxy. Vật thể khởi hành từ $A(2;\ 1)$ và chuyển động thẳng đều với vectơ vận tốc là $\vec{v}(3;\ 4)$.

a) Hỏi vật thể chuyển động trên đường thẳng nào (chỉ ra điểm đi qua và vectơ chỉ phương của đường thẳng đó)?

b) Chứng minh rằng, tại thời điểm t ($t > 0$) tính từ khi khởi hành, vật thể ở vị trí có toạ độ là $(2 + 3t; 1 + 4t)$.

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;\ y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;\ b)$. Khi đó điểm $M(x;\ y)$ thuộc đường thẳng Δ khi và chỉ khi tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, hay

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (2) được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số).

Ví dụ 5. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;\ -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(4; -1)$.

Giải

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 - t. \end{cases}$$

Luyện tập 4. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 2)$ và song song với đường thẳng d: $3x - 4y - 1 = 0$.

Ví dụ 6. Lập phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;\ 3)$ và $B(1;\ 5)$.

Giải

Đường thẳng AB đi qua $A(2;\ 3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (-1;\ 2)$, do đó có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$

Luyện tập 5. Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ cho trước.

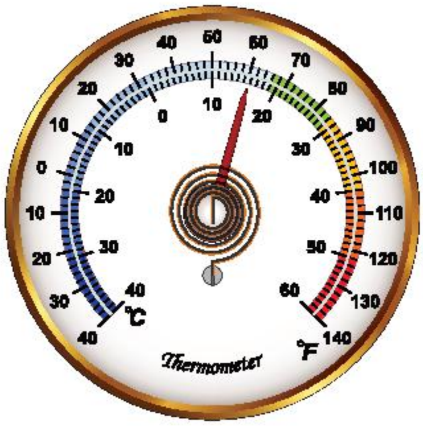
Vận dụng. Việc quy đổi nhiệt độ giữa đơn vị độ C (Anders Celsius, 1 701 – 1 744) và đơn vị độ F (Daniel Fahrenheit, 1 686 – 1 736) được xác định bởi hai mốc sau:

Nước đóng băng ở 0°C, 32°F;

Nước sôi ở 100°C, 212°F.

Trong quy đổi đó, nếu a°C tương ứng với b°F thì trên mặt phẳng toạ độ *Oxy*, điểm $M(a;\, b)$ thuộc đường thẳng đi qua $A(0;\, 32)$ và $B(100;\, 212)$.

Hỏi 0°F, 100°F tương ứng với bao nhiêu độ C?



Nhiệt kế dùng hai đơn vị đo là độ F và độ C

BÀI TẬP

7.1. Trong mặt phẳng toạ độ, cho $\vec{n} = (2;\, 1)$, $\vec{v} = (3;\, 2)$, $A(1;\, 3)$, $B(-2;\, 1)$.

a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_1 đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

b) Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ_2 đi qua B và có vectơ chỉ phương $\vec{v}$.

c) Lập phương trình tham số của đường thẳng AB.

7.2. Lập phương trình tổng quát của các trục toạ độ.

7.3. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$ và $\Delta_2 :\ 2x + 3y - 5 = 0$.

a) Lập phương trình tổng quát của Δ_1.

b) Lập phương trình tham số của Δ_2.

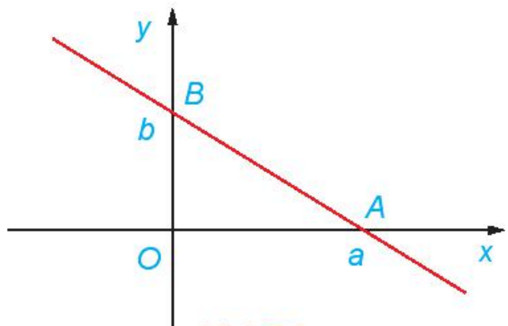
7.4. Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác ABC có $A(1;\, 2)$, $B(3;\, 0)$ và $C(-2;\, -1)$.

a) Lập phương trình đường cao kẻ từ A.

b) Lập phương trình đường trung tuyến kẻ từ B.

7.5. (Phương trình đoạn chắn của đường thẳng) Chứng minh rằng, đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;\, 0)$, $B(0;\, b)$ với $ab \neq 0$ (H.7.3) có phương trình là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$



Hình 7.3

7.6. Theo Google Maps, sân bay Nội Bài có vĩ độ 21,2° Bắc, kinh độ 105,8° Đông, sân bay Đà Nẵng có vĩ độ 16,1° Bắc, kinh độ 108,2° Đông. Một máy bay, bay từ Nội Bài đến sân bay Đà Nẵng. Tại thời điểm t giờ, tính từ lúc xuất phát, máy bay ở vị trí có vĩ độ x° Bắc, kinh độ y° Đông được tính theo công thức

$$\begin{cases} x = 21,2 - \dfrac{153}{40}t \\ y = 105,8 + \dfrac{9}{5}t. \end{cases}$$

a) Hỏi chuyến bay từ Hà Nội đến Đà Nẵng mất mấy giờ?

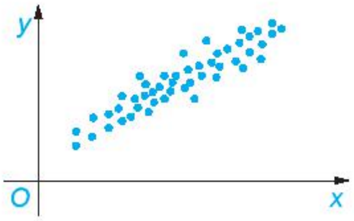
b) Tại thời điểm 1 giờ kể từ lúc cất cánh, máy bay đã bay qua vĩ tuyến 17 (17^o Bắc) chưa?

Em có biết?

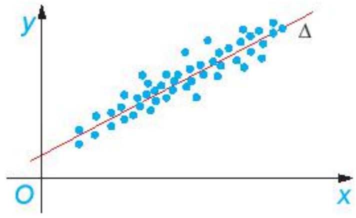
Hồi quy tuyến tính là một phương pháp được sử dụng trong thống kê để dự báo về mối quan hệ giữa các đại lượng dựa trên kết quả thống kê mẫu. Chẳng hạn, để dự báo về mối quan hệ giữa hai đại lượng x và y (y phụ thuộc vào x như thế nào), từ kết quả thống kê được thể hiện ở Hình 7.4a, phương pháp hồi quy tuyến tính đưa ra đường thẳng Δ (H.7.4b) thể hiện gần đúng nhất mối quan hệ giữa các đại lượng x và y đã được thống kê. Về mặt hình ảnh, các chấm xanh trên hình vẽ (có toạ độ là các cặp giá trị (x; y) trong kết quả thống kê, tập trung dọc theo Δ.

Để xác định Δ (phương trình $y = ax + b$), người ta thường dùng tiêu chuẩn gọi là bình phương nhỏ nhất như sau: Với mỗi cặp $(x_0; y_0)$ trong kết quả thống kê, xét bình phương khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến $M'(x_0; ax_0 + b)$. Khi đó, a, b được chọn sao cho tổng các bình phương này là nhỏ nhất.

Nhờ đưa ra được đường thẳng biểu thị (gần đúng) sự phụ thuộc giữa đại lượng y theo đại lượng x, người ta có thể đưa ra các dự báo nằm ngoài kết quả thống kê. Tất nhiên, không phải mô hình nào cũng phù hợp với phương pháp này, ngay cả khi kết quả thống kê tập trung dọc một đường thẳng. Chẳng hạn, để xác định đường đi của một quả tên lửa, nếu dựa vào một số quan sát ban đầu để dự đoán, ta có thể nghĩ rằng nó chuyển động thẳng, nhưng trên thực tế, nhìn chung nó đi theo đường parabol. Sai lầm trong những dự báo như vậy thật là tai hại!



a)



b)

Hình 7.4

Bài 20 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

THUẬT NGỮ

- Góc, khoảng cách
- Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết hai đường thẳng cắt nhau, song song, trùng nhau, vuông góc.
- Thiết lập công thức tính góc giữa hai đường thẳng.
- Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.
- Vận dụng các công thức tính góc và khoảng cách để giải một số bài toán có liên quan đến thực tiễn.

Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi đường thẳng đều có đối tượng đại số tương ứng, gọi là phương trình của nó. Vậy các yếu tố liên quan tới đường thẳng được thể hiện như thế nào qua phương trình tương ứng?

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

HĐ1. Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \ x - 2y + 3 = 0,$$
$$\Delta_2 : \ 3x - y - 1 = 0.$$

a) Điểm $M(1; 2)$ có thuộc cả hai đường thẳng nói trên hay không?

b) Giải hệ $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0. \end{cases}$

c) Chỉ ra mối quan hệ giữa toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 với nghiệm của hệ phương trình trên.

Nhận xét . Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ là tập hợp những điểm có toạ độ thoả mãn phương trình của đường thẳng đó. Vì vậy, bài toán tìm giao điểm của hai đường thẳng được quy về bài toán giải hệ gồm hai phương trình tương ứng.

Trên mặt phẳng toạ độ, xét hai đường thẳng

$$\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Khi đó, toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình:

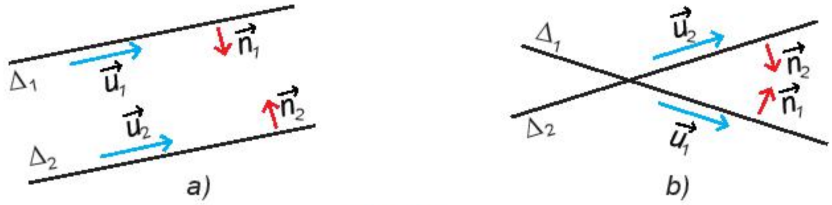
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Δ_1 cắt Δ_2 tại $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow$ hệ (*) có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$.

Δ_1 song song với $\Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (*) vô nghiệm.

Δ_1 trùng $\Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (*) có vô số nghiệm.

Chú ý



Hình 7.5

Dựa vào các vectơ chỉ phương $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ hoặc các vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}, \vec{n_2}$ của Δ_1, Δ_2, ta có:

- Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$ cùng phương.
- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$ không cùng phương $\Leftrightarrow$ $\vec{n_1}$ và $\vec{n_2}$ không cùng phương.

Ví dụ 1. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng $\Delta: \ x - \sqrt{2}y + 4\sqrt{3} = 0$ và mỗi đường thẳng sau:

$$\Delta_1: \ \sqrt{3}x - \sqrt{6}y + 12 = 0;$$
$$\Delta_2: \ \sqrt{2}x - 2y = 0.$$

Giải

Vì $x - \sqrt{2}y + 4\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(x - \sqrt{2}y + 4\sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{6}y + 12 = 0.$

Vậy Δ và Δ_1 là một, tức là chúng trùng nhau.

Hai đường thẳng Δ và Δ_2 có hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1; -\sqrt{2})$ và $\vec{n_2}(\sqrt{2}; -2)$ cùng phương. Do đó, chúng song song hoặc trùng nhau. Mặt khác, điểm $O(0; 0)$ thuộc đường thẳng Δ_2 nhưng không thuộc đường thẳng Δ, nên hai đường thẳng này không trùng nhau.

Vậy Δ và Δ_2 song song với nhau.

Nhận xét. Giả sử hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có hai vectơ chỉ phương $\vec{u_1}, \vec{u_2}$ (hay hai vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}, \vec{n_2}$) cùng phương. Khi đó:

- Nếu Δ_1 và Δ_2 có điểm chung thì Δ_1 trùng Δ_2.
- Nếu tồn tại điểm thuộc Δ_1 nhưng không thuộc Δ_2 thì Δ_1 song song với Δ_2.

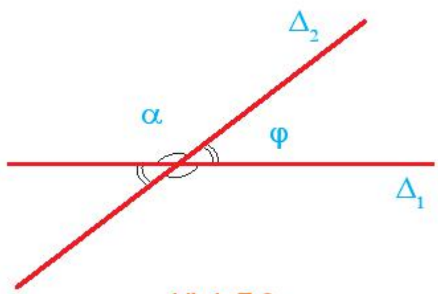
Luyện tập 1. Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $\Delta_1: x + 4y - 3 = 0$ và $\Delta_2: x - 4y - 3 = 0$;

b) $\Delta_1: x + 2y - \sqrt{5} = 0$ và $\Delta_2: \ 2x + 4y - 3\sqrt{5} = 0$.

2. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

HĐ2. Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc (H.7.6). Các số đo của bốn góc đó có mối quan hệ gì với nhau?



Hình 7.6

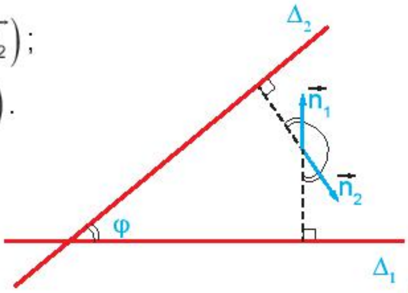
Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn góc, số đo của góc không tù được gọi là số đo góc (hay đơn giản là góc) giữa hai đường thẳng.

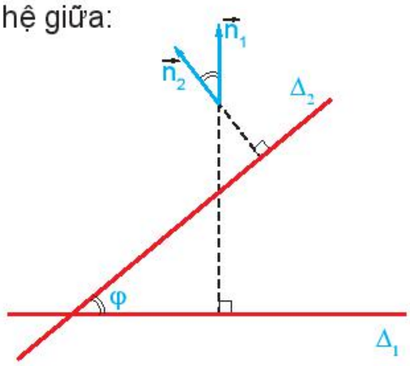
Góc giữa hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau được quy ước bằng 0°.

HĐ3. Cho hai đường thẳng cắt nhau Δ_1, Δ_2 tương ứng có các vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng đó (H.7.7). Nêu mối quan hệ giữa:

a) góc φ và góc $\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)$;

b) $\cos\varphi$ và $\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)$.





Hình 7.7

Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

với các vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(a_1; b_1)$ và $\overrightarrow{n_2}(a_2; b_2)$ tương ứng. Khi đó, góc φ giữa hai đường thẳng đó được xác định thông qua công thức

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Chú ý

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
- Nếu Δ_1, Δ_2 có các vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ thì góc φ giữa Δ_1 và Δ_2 cũng được xác định thông qua công thức $\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)\right|$.

Ví dụ 2. Tính góc giữa hai đường thẳng

$$\Delta_1: \sqrt{3}x - y + 2 = 0 \text{ và } \Delta_2: x - \sqrt{3}y - 2 = 0.$$

Giải

Vectơ pháp tuyến của Δ_1 là $\overrightarrow{n_1} = \left(\sqrt{3}; -1\right)$, của Δ_2 là $\overrightarrow{n_2} = \left(1; -\sqrt{3}\right)$.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Ta có

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|\sqrt{3} \cdot 1 + (-1) \cdot (-\sqrt{3})\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó, góc giữa Δ_1 và Δ_2 là $\varphi = 30°$.

Luyện tập 2. Tính góc giữa hai đường thẳng

$$\Delta_1:\ x+3y+2=0 \text{ và } \Delta_2:\ y=3x+1.$$

Ví dụ 3. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1:\ x=3$ và $\Delta_2:\begin{cases} x=2-t \\ y=3+t. \end{cases}$

Giải

Đường thẳng Δ_1 có phương trình $x-3=0$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(1;\ 0)$. Đường thẳng Δ_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}(-1;\ 1)$ nên có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2}(1;\ 1)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Ta có

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|1\cdot1+0\cdot1|}{\sqrt{1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Do đó, góc giữa Δ_1 và Δ_2 là $\varphi=45^\circ$.

Luyện tập 3. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases} x=2+t \\ y=1-2t \end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases} x=1+t \\ y=5+3t. \end{cases}$

Xét đường thẳng Δ bất kì cắt trục hoành Ox tại một điểm A. Điểm A chia đường thẳng Δ thành hai tia, trong đó, gọi Az là tia nằm phía trên trục hoành. Kí hiệu α_Δ là số đo của góc $\widehat{xAz}$ (H.7.8). Thực hành luyện tập sau đây, ta sẽ thấy ý nghĩa hình học của hệ số góc.

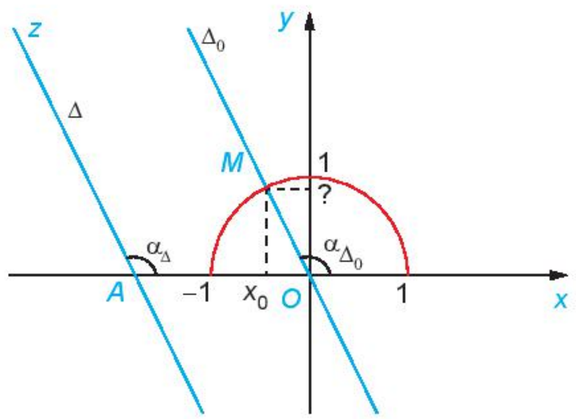
Luyện tập 4. Cho đường thẳng Δ: $y=ax+b$, với $a\neq0$.

a) Chứng minh rằng Δ cắt trục hoành.

b) Lập phương trình đường thẳng Δ_0 đi qua $O(0;\ 0)$ và song song (hoặc trùng) với Δ.

c) Hãy chỉ ra mối quan hệ giữa α_Δ và α_{Δ_0}.

d) Gọi M là giao điểm của Δ_0 với nửa đường tròn đơn vị và x_0 là hoành độ của M. Tính tung độ của M theo x_0 và a. Từ đó, chứng minh rằng $\tan\alpha_\Delta=a$.



Hình 7.8

3. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

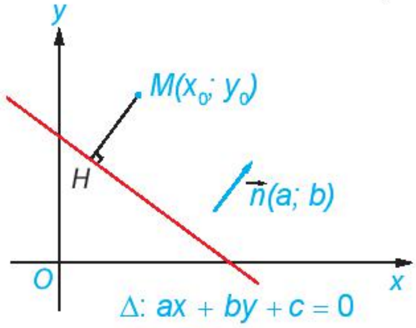
HĐ4. Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a; b)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên Δ (H 7.9).

a) Chứng minh rằng $\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot HM$.

b) Giả sử H có toạ độ $(x_1; y_1)$. Chứng minh rằng:

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{HM} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = ax_0 + by_0 + c$.

c) Chứng minh rằng $HM = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



Hình 7.9

> Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta:\ ax + by + c = 0$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $d(M, \Delta)$, được tính bởi công thức
>
> $$d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ví dụ 4. Tính khoảng cách từ điểm $M(2; 4)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 12 = 0$.

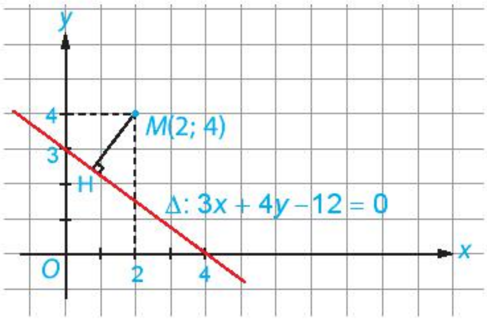
Giải

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, ta có

$$d(M, \Delta) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Vậy khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là 2.

Trải nghiệm. Đo trực tiếp khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ (H 7.10) và giải thích vì sao kết quả đo đạc đó phù hợp với kết quả tính toán trong lời giải của Ví dụ 4.



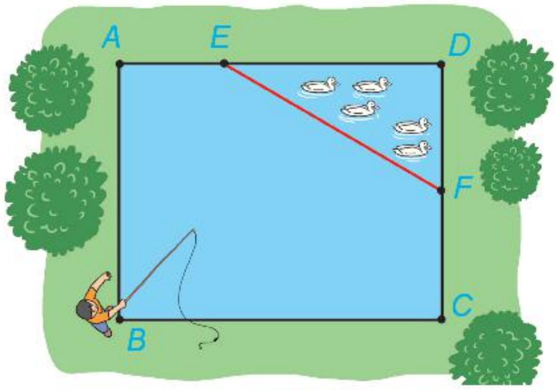
Hình 7.10

Luyện tập 5. Tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2)$ đến đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -5 - 4t. \end{cases}$$

Vận dụng. Nhân dịp nghỉ hè, Nam về quê ở với ông bà nội. Nhà ông bà nội có một ao cá có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài $AD = 15$ m, chiều rộng $AB = 12$ m. Phần tam giác DEF là nơi ông bà nuôi vịt, $AE = 5$ m, $CF = 6$ m (H.7.11).

a) Chọn hệ trục toạ độ Oxy, có điểm O trùng với điểm B, các tia Ox, Oy tương ứng trùng với các tia BC, BA. Chọn 1 đơn vị độ dài trên mặt phẳng toạ độ tương ứng với 1 m trong thực tế. Hãy xác định toạ độ của các điểm A, B, C, D, E, F và viết phương trình đường thẳng EF.



Hình 7.11

b) Nam đứng ở vị trí B câu cá và có thể quăng lưỡi câu xa 10,7 m. Hỏi lưỡi câu có thể rơi vào nơi nuôi vịt hay không?

BÀI TẬP

7.7. Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $\Delta_1 : 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{3} = 0$ và $\Delta_2 : 6x + 2y - \sqrt{6} = 0$.

b) $d_1 : x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ và $d_2 : \sqrt{3}x - 3y + 2 = 0$.

c) $m_1 : x - 2y + 1 = 0$ và $m_2 : 3x + y - 2 = 0$.

7.8. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $\Delta_1 : \sqrt{3}x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2 : x + \sqrt{3}y + 3 = 0$;

b) $d_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 - 3s \end{cases}$ (t, s là các tham số).

7.9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(0; -2)$ và đường thẳng $\Delta: x + y - 4 = 0$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ.

b) Viết phương trình đường thẳng a đi qua điểm $M(-1; 0)$ và song song với Δ.

c) Viết phương trình đường thẳng b đi qua điểm $N(0; 3)$ và vuông góc với Δ.

7.10. Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác ABC có $A(1; 0)$, $B(3; 2)$ và $C(-2; -1)$.

a) Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

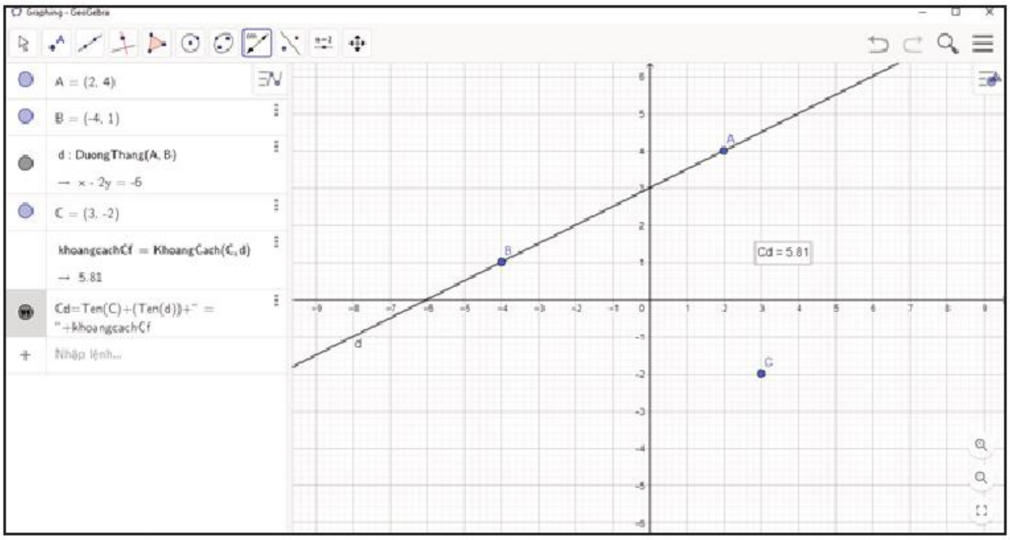
b) Tính diện tích tam giác ABC.

7.11. Chứng minh rằng hai đường thẳng $d : y = ax + b$ $(a \neq 0)$ và $d' : y = a'x + b'$ $(a' \neq 0)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $aa' = -1$.

7.12. Trong mặt phẳng toạ độ, một tín hiệu âm thanh phát đi từ một vị trí và được ba thiết bị ghi tín hiệu đặt tại ba vị trí $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, $B(1; 3)$ nhận được cùng một thời điểm. Hãy xác định vị trí phát tín hiệu âm thanh.

Em có biết?

Cơ sở toán học cho các tính toán trong phần mềm GeoGebra.



Hình 7.12

Hình 7.12 được chụp lại từ một màn hình máy tính đang sử dụng phần mềm vẽ hình GeoGebra:

- Chọn chức năng vẽ điểm, sau đó, nháy chuột vào ba điểm A, B, C trên cửa sổ màn hình, phần mềm tự động xác định toạ độ của ba điểm đó là $A(2; 4)$, $B(-4; 1)$, $C(3; -2)$.
- Chọn chức năng vẽ đường thẳng Δ đi qua hai điểm, sau đó, nháy vào hai điểm A, B ta được đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B; phần mềm tự động xác định được phương trình của đường thẳng là $x - 2y + 6 = 0$.
- Chọn chức năng tính khoảng cách, sau đó, nháy vào điểm C và đường thẳng Δ, phần mềm sẽ tự động cho ta khoảng cách từ C tới đường thẳng Δ là 5,81.

Cơ sở toán học để phần mềm có được tính toán nói trên là các công thức đã được nêu ra trong bài học này.

Bài 21

ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

THUẬT NGỮ

- Đường tròn
- Tâm
- Bán kính
- Phương trình đường tròn
- Phương trình tiếp tuyến

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Lập phương trình đường tròn khi biết toạ độ tâm và bán kính hoặc biết toạ độ ba điểm thuộc đường tròn.
- Xác định tâm và bán kính của đường tròn khi biết phương trình của nó.
- Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn khi biết toạ độ của tiếp điểm.
- Vận dụng kiến thức về phương trình đường tròn để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

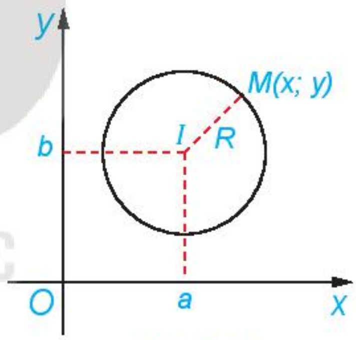
Cũng như đối với đường thẳng, việc đại số hoá đường tròn gồm hai bước:

- Thiết lập đối tượng đại số tương ứng với đường tròn, gọi là phương trình của đường tròn.
- Chuyển các yếu tố liên quan tới đường tròn từ hình học sang đại số.

1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Đường tròn tâm I, bán kính R là tập hợp những điểm M thoả mãn điều kiện $IM = R$. Do đó, để lập phương trình đường tròn đó, ta cần chuyển điều kiện hình học $IM = R$ thành một điều kiện đại số.

HĐ1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C), tâm $I(a; b)$, bán kính R (H.7.13). Khi đó, một điểm $M(x; y)$ thuộc đường tròn (C) khi và chỉ khi toạ độ của nó thoả mãn điều kiện đại số nào?



Hình 7.13

> Điểm $M(x; y)$ thuộc đường tròn (C), tâm $I(a; b)$, bán kính R khi và chỉ khi
> $$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \quad (1)$$
> Ta gọi (1) là phương trình của đường tròn (C).

Ví dụ 1. Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C) có phương trình: $(x-2)^2+(y+3)^2=16$.
Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $J(2;-1)$ và có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C).

Giải

Ta viết phương trình của (C) ở dạng $(x-2)^2+(y-(-3))^2=4^2$.

Vậy (C) có tâm $I=(2;-3)$ và bán kính $R=4$.

Đường tròn (C') có tâm $J(2;-1)$ và có bán kính $R'=2R=8$, nên có phương trình
$$(x-2)^2+(y+1)^2=64.$$

Luyện tập 1. Tìm tâm và bán kính của đường tròn (*C*): $(x+2)^2+(y-4)^2=7$.

Nhận xét. Phương trình (1) tương đương với

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0.$$

Ví dụ 2. Cho *a*, *b*, *c* là các hằng số. Tìm tập hợp những điểm *M*(*x*; *y*) thoả mãn phương trình

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0. \quad (2)$$

Giải

Phương trình (2) tương đương với

$$(x-a)^2+(y-b)^2+c-a^2-b^2=0 \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c.$$

Xét *I*(*a*; *b*), khi đó, $IM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ và phương trình trên trở thành

$$IM^2=a^2+b^2-c. \quad (3)$$

Từ đó, ta xét các trường hợp sau:

– Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì tập hợp những điểm *M* thoả mãn (2) là đường tròn tâm *I*(*a*; *b*), bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

– Nếu $a^2+b^2-c=0$ thì (3) $\Leftrightarrow IM=0$. Do đó, tập hợp những điểm *M* thoả mãn (2) chỉ gồm một điểm là *I*(*a*; *b*).

– Nếu $a^2+b^2-c<0$ thì tập hợp những điểm *M* là tập rỗng.

Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của một đường tròn (*C*) khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$. Khi đó, (*C*) có tâm *I*(*a*; *b*) và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Luyện tập 2. Hãy cho biết phương trình nào dưới đây là phương trình của một đường tròn và tìm tâm, bán kính của đường tròn tương ứng.

a) $x^2-y^2-2x+4y-1=0$;

b) $x^2+y^2-2x+4y+6=0$;

c) $x^2+y^2+6x-4y+2=0$.

Ví dụ 3. Viết phương trình đường tròn (*C*) đi qua ba điểm *A*(2; 0), *B*(0; 4), *C*(−7; 3).

Giải

Các đoạn thẳng *AB*, *AC* tương ứng có trung điểm là $M(1;2)$, $N\left(-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)$. Đường thẳng trung trực Δ_1 của đoạn thẳng *AB* đi qua $M(1;2)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}(-2;4)$.

Vì $\overrightarrow{AB}(-2;4)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_1}(1;-2)$ nên Δ_1 cũng nhận $\overrightarrow{n_1}(1;-2)$ là vectơ pháp tuyến.

Do đó, phương trình của Δ_1 là

$$1(x-1)-2(y-2)=0 \text{ hay } x-2y+3=0.$$

Đường thẳng trung trực Δ_2 của đoạn thẳng AC đi qua $N\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AC}(-9; 3)$.

Vì $\overrightarrow{AC}(-9; 3)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_2}(3; -1)$ nên Δ_2 cũng nhận $\overrightarrow{n_2}(3; -1)$ là vectơ pháp tuyến. Do đó, phương trình của Δ_2 là

$$3\left(x+\frac{5}{2}\right)-1\left(y-\frac{3}{2}\right)=0 \text{ hay } 3x-y+9=0.$$

Tâm I của đường tròn (C) cách đều ba điểm A, B, C nên I là giao điểm của Δ_1 và Δ_2.

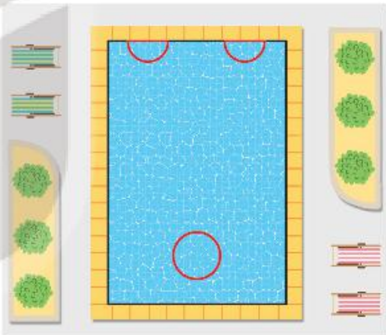
Vậy toạ độ của I là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 3x-y+9=0. \end{cases}$

Suy ra $I(-3; 0)$. Đường tròn (C) có bán kính là $IA = 5$. Vậy phương trình của (C) là

$$(x+3)^2+y^2=25.$$

Luyện tập 3. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $M(4; -5)$, $N(2; -1)$, $P(3; -8)$.

Vận dụng. Bên trong một hồ bơi, người ta dự định thiết kế hai bể sục nửa hình tròn bằng nhau và một bể sục hình tròn (H.7.14) để người bơi có thể ngồi tựa lưng vào thành các bể sục thư giãn. Hãy tìm bán kính của các bể sục để tổng chu vi của ba bể là 32 m mà tổng diện tích (chiếm hồ bơi) là nhỏ nhất. Trong tính toán, lấy $\pi = 3{,}14$, độ dài tính theo mét và làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai.



Hình 7.14

Hướng dẫn

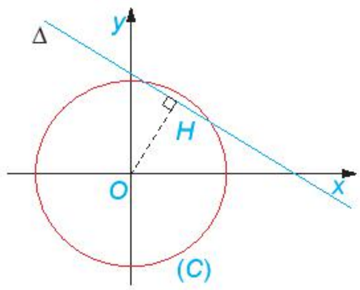
– Gọi bán kính bể hình tròn và bể nửa hình tròn tương ứng là x, y (m). Khi đó, tổng chu vi ba bể là 32 m khi và chỉ khi

$$1{,}57x+2{,}57y-8=0.$$

– Gọi tổng diện tích của ba bể sục là S (m^2). Khi đó

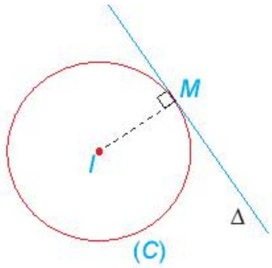
$$x^2+y^2=\frac{S}{3{,}14}.$$

– Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét đường tròn (C): $x^2+y^2=\frac{S}{3{,}14}$ có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R=\sqrt{\frac{S}{3{,}14}}$ và đường thẳng Δ: $1{,}57x+2{,}57y-8=0$. Khi đó bài toán được chuyển thành: Tìm R nhỏ nhất để (C) và Δ có ít nhất một điểm chung, với hoành độ và tung độ đều là các số dương (H.7.15).



Hình 7.15

2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN



Hình 7.16

HĐ2. Cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ và điểm $M(4;-2)$.

a) Chứng minh điểm $M(4;-2)$ thuộc đường tròn (C).

b) Xác định tâm và bán kính của (C).

c) Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại M. Hãy chỉ ra một vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ (H.7.16). Từ đó, viết phương trình đường thẳng Δ.

> Cho điểm $M(x_0;\ y_0)$ thuộc đường tròn (C): $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (tâm $I(a;\ b)$, bán kính R). Khi đó, tiếp tuyến Δ của (C) tại $M(x_0;y_0)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{MI}=(a-x_0;\ b-y_0)$ và phương trình
>
> $$(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=0.$$

Ví dụ 4. Cho đường tròn (C) có phương trình $(x+1)^2+(y-3)^2=5$. Điểm $M(0;\ 1)$ có thuộc đường tròn (C) hay không? Nếu có, hãy viết phương trình tiếp tuyến tại M của (C).

Giải

Do $(0+1)^2+(1-3)^2=5$, nên điểm M thuộc (C).

Đường tròn (C) có tâm là $I(-1;\ 3)$. Tiếp tuyến của (C) tại $M(0;\ 1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{MI}=(-1;\ 2)$, nên có phương trình

$$-1(x-0)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x-2y+2=0.$$

Luyện tập 4. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+1=0$. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm $N(1;\ 0)$.

BÀI TẬP

7.13. Tìm tâm và tính bán kính của đường tròn

$$(x+3)^2+(y-3)^2=36.$$

7.14. Hãy cho biết phương trình nào dưới đây là phương trình của một đường tròn và tìm tâm, bán kính của đường tròn tương ứng.

a) $x^2+y^2+xy+4x-2=0$;

b) $x^2+y^2-2x-4y+5=0$;

c) $x^2+y^2+6x-8y+1=0$.

7.15. Viết phương trình của đường tròn (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(-2; 5)$ và bán kính $R = 7$;

b) Có tâm $I(1; -2)$ và đi qua điểm $A(-2; 2)$;

c) Có đường kính AB, với $A(-1; -3)$, $B(-3; 5)$;

d) Có tâm $I(1; 3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x + 2y + 3 = 0$.

7.16. Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác ABC, với $A(6; -2)$, $B(4; 2)$, $C(5; -5)$.
Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

7.17. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M(0; 2)$.

7.18. Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng toạ độ. Theo đó, tại thời điểm t $(0 \leq t \leq 180)$ vật thể ở vị trí có toạ độ $(2 + \sin t^{\circ};\ 4 + \cos t^{\circ})$.

a) Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.

b) Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

Bài 22 BA ĐƯỜNG CONIC

THUẬT NGỮ

- Conic, Elip, Hypebol, Parabol
- Tiêu điểm
- Tiêu cự
- Phương trình chính tắc
- Đường chuẩn, tham số tiêu

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết ba đường conic bằng hình học.
- Nhận biết phương trình chính tắc của ba đường conic.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với ba đường conic.

a) b) c)

Hình 7.17

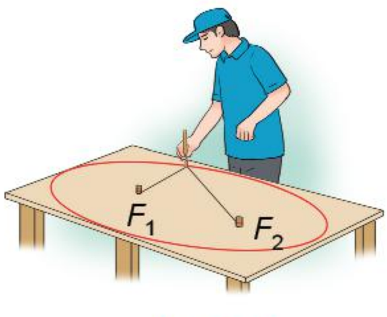
Trong thực tế, em có thể bắt gặp nhiều hình ảnh ứng với các đường elip (ellipse), hypebol (hyperbola), parabol (parabola), gọi chung là ba đường conic. Được phát hiện và nghiên cứu từ thời Hy Lạp cổ đại, nhưng các ứng dụng phong phú và quan trọng của các đường conic chỉ được phát hiện trong những thế kỉ gần đây, khởi đầu là định luật nổi tiếng của Kepler (Johannes Kepler, 1571–1630) về quỹ đạo của các hành tinh trong hệ Mặt Trời. Để có thể tiếp tục câu chuyện thú vị này, ta cần tìm hiểu kĩ hơn, đặc biệt là tìm phương trình đại số mô tả các đường conic.

1. ELIP

HĐ1. Đính hai đầu của một sợi dây không đàn hồi vào hai vị trí cố định F_1, F_2 trên một mặt bàn (độ dài sợi dây lớn hơn khoảng cách giữa hai điểm F_1, F_2). Kéo căng sợi dây tại một điểm M bởi một đầu bút dạ (hoặc phấn). Di chuyển đầu bút dạ để nó vẽ trên mặt bàn một đường khép kín (H.7.18).

a) Đường vừa nhận được có liên hệ với hình ảnh nào ở Hình 7.17?

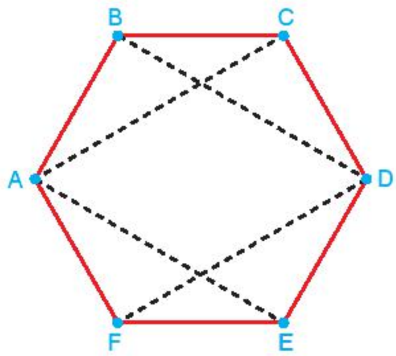
b) Trong quá trình đầu bút di chuyển để vẽ nên đường nói trên, tổng các khoảng cách từ nó tới các vị trí F_1, F_2 có thay đổi không? Vì sao?



Hình 7.18

Cho hai điểm cố định và phân biệt F_1, F_2. Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho số thực a lớn hơn c. Tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ được gọi là đường elip (hay elip). Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của elip đó.

Tại sao trong định nghĩa elip cần điều kiện $a > c$?

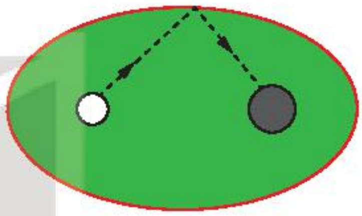


Hình 7.19

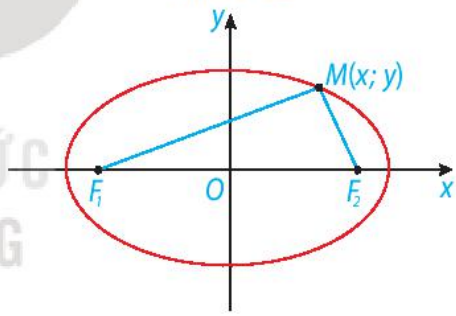
Ví dụ 1. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một elip có hai tiêu điểm là A và D.

Giải

Lục giác đều $ABCDEF$ có các cạnh bằng nhau và các góc đều có số đo là 120° (H.7.19). Do đó, các tam giác ABC, BCD, DEF, EFA bằng nhau (c.g.c). Suy ra $AC = BD = DF = AE$. Từ đó, ta có $BA + BD = CA + CD = EA + ED = FA + FD > AD$. Vậy B, C, E, F cùng thuộc một elip có hai tiêu điểm là A và D.


Hình 7.20

Luyện tập 1. Trên bàn bida hình elip có một lỗ thu bi tại một tiêu điểm (H.7.20). Nếu gậy chơi tác động đủ mạnh vào một bi đặt tại tiêu điểm còn lại của bàn, thì sau khi va vào thành bàn, bi sẽ bật lại và chạy về lỗ thu (bỏ qua các tác động phụ). Hỏi độ dài quãng đường bi lăn từ điểm xuất phát tới lỗ thu có phụ thuộc vào đường đi của bi hay không? Vì sao?



Hình 7.21

HĐ2. Xét một elip (E) với các kí hiệu như trong định nghĩa. Chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc O là trung điểm của F_1F_2, tia Ox trùng tia OF_2 (H.7.21).

a) Nêu toạ độ của các tiêu điểm F_1, F_2.

b) Giải thích vì sao điểm $M(x; y)$ thuộc elip khi và chỉ khi

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (1)$$

Chú ý. Người ta có thể biến đổi (1) về dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, với $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, elip có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đoạn nối hai tiêu điểm đó, thì có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b > 0. \qquad (2)$$

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng (2), với $a > b > 0$, đều là phương trình của elip có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$, $F_2(\sqrt{a^2 - b^2}; 0)$, tiêu cự $\mathbf{2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}}$ và tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip đó tới hai tiêu điểm bằng $2a$.

Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của elip tương ứng.

Ví dụ 2. Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Tìm các tiêu điểm và tiêu cự của elip. Tính tổng các khoảng cách từ mỗi điểm trên elip tới hai tiêu điểm.

Giải

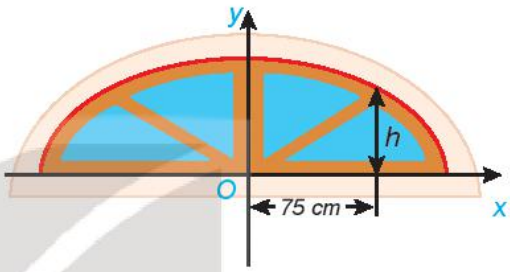
Ta có: $a^2=25, b^2=16$. Do đó $c=\sqrt{a^2-b^2}=3$. Vậy elip có hai tiêu điểm là $F_1(-3;0)$; $F_2(3;0)$ và tiêu cự là $F_1F_2=2c=6$. Ta có $a=\sqrt{25}=5$, nên tổng các khoảng cách từ mỗi điểm trên elip tới hai tiêu điểm bằng $2a=10$.

Luyện tập 2. Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. Tìm các tiêu điểm và tiêu cự của elip.

Vận dụng 1. Trong bản vẽ thiết kế, vòm của ô thoáng trong Hình 7.22 là nửa nằm phía trên trục hoành của elip có phương trình

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1.$$

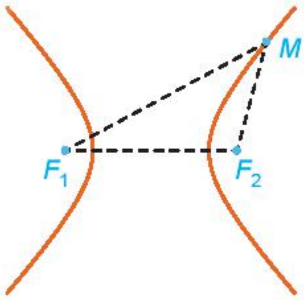
Biết rằng 1 đơn vị trên mặt phẳng toạ độ của bản vẽ thiết kế ứng với 30 cm trên thực tế. Tính chiều cao h của ô thoáng tại điểm cách điểm chính giữa của đế ô thoáng 75 cm.



Hình 7.22

2. HYPEBOL

Trên mặt phẳng, nếu hai thiết bị đặt tại các vị trí F_1, F_2 nhận được một tín hiệu âm thanh cùng lúc thì vị trí phát ra tín hiệu cách đều F_1 và F_2, do đó, nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng F_1F_2. Nếu hai thiết bị nhận được tín hiệu không cùng lúc thì để giới hạn khu vực tìm kiếm nơi phát ra tín hiệu, ta cần biết một đối tượng toán học, gọi là hypebol.



Hình 7.23

Cho hai điểm phân biệt cố định F_1 và F_2. Đặt $F_1F_2=2c$. Cho số thực dương a nhỏ hơn c. Tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1-MF_2|=2a$ được gọi là đường hypebol (hay hypebol). Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai *tiêu điểm* và $F_1F_2=2c$ được gọi là *tiêu cự* của hypebol đó.

Tại sao trong định nghĩa hypebol cần điều kiện $a<c$?

Chú ý. Hypebol có hai nhánh (H.7.23), một nhánh gồm những điểm M thoả mãn $MF_1-MF_2=2a$ và nhánh còn lại gồm những điểm M thoả mãn $MF_1-MF_2=-2a$ (hay $MF_2-MF_1=2a$).

Ví dụ 3. Trên biển có hai đảo hình tròn với bán kính khác nhau. Tại vùng biển giữa hai đảo đó, người ta xác định một đường ranh giới cách đều hai đảo, tức là, đường mà khoảng cách từ mỗi vị trí trên đó đến hai đảo là bằng nhau. Hỏi đường ranh giới đó có thuộc một nhánh của một hypebol hay không?

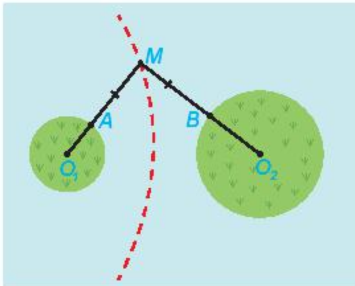
Chú ý. Khoảng cách từ một vị trí trên biển đến đảo hình tròn bằng hiệu của khoảng cách từ vị trí đó đến tâm đảo và bán kính của đảo.

Giải. Giả sử đảo thứ nhất có tâm O_1 và bán kính R_1, đảo thứ hai có tâm O_2 và bán kính R_2 (H.7.24). Do hai đường tròn (O_1, R_1), (O_2, R_2) nằm ngoài nhau nên $O_1O_2 > R_1 + R_2$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc đường ranh giới.

Vì M cách đều hai đảo nên

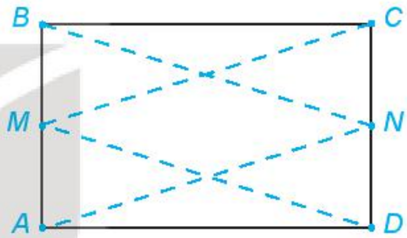
$$MO_1 - R_1 = MO_2 - R_2 \Leftrightarrow MO_1 - MO_2 = R_1 - R_2.$$

Vậy đường ranh giới thuộc một nhánh của hypebol với tiêu điểm F_1 trùng O_1, F_2 trùng O_2, $2c = O_1O_2$, $2a = |R_1 - R_2|$.



Hình 7.24

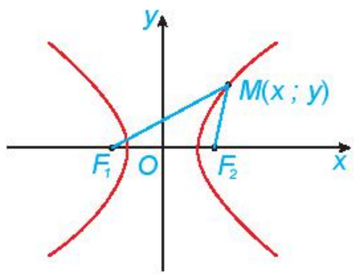
Luyện tập 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD (H.7.25). Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một hypebol có hai tiêu điểm là M và N.



Hình 7.25

HĐ3. Xét một hypebol (H) với các kí hiệu như trong định nghĩa. Chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc O là trung điểm của F_1F_2, tia Ox trùng tia OF_2 (H.7.26). Nêu toạ độ của các tiêu điểm F_1, F_2. Giải thích vì sao điểm $M(x; y)$ thuộc (H) khi và chỉ khi

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a. \qquad (3)$$



Hình 7.26

Chú ý. Người ta có thể biến đổi (3) về dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hypebol có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đoạn nối hai tiêu điểm đó, thì có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a, b > 0. \qquad (4)$$

Ngược lại, mỗi phương trình có dạng (4), với $a, b > 0$, đều là phương trình của hypebol có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{a^2+b^2}; 0)$, $F_2(\sqrt{a^2+b^2}; 0)$, tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2+b^2}$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc hypebol đến hai tiêu điểm bằng $2a$.

Phương trình (4) được gọi là phương trình chính tắc của hypebol tương ứng.

Ví dụ 4. Cho hypebol có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. Tìm các tiêu điểm và tiêu cự của hypebol. Hiệu các khoảng cách từ một điểm nằm trên hypebol tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng bao nhiêu?

Giải

Ta có $a^2=9, b^2=16$, nên $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$. Vậy hypebol có hai tiêu điểm là $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$ và có tiêu cự $2c=10$. Hiệu các khoảng cách từ một điểm nằm trên hypebol tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng $2a=2\sqrt{9}=6$.

Luyện tập 4. Cho (H): $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$. Tìm các tiêu điểm và tiêu cự của (H).

3. PARABOL

HĐ4. Cho parabol (P): $y=\frac{1}{4}x^2$. Xét $F(0;\ 1)$ và đường thẳng Δ: $y+1=0$. Với điểm $M(x;y)$ bất kì, chứng minh rằng $MF=d(M,\Delta) \Leftrightarrow M(x;y)$ thuộc (P).

Để ý rằng: $MF=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$, $d(M,\Delta)=|y+1|$

Như vậy, parabol (P): $y=\frac{1}{4}x^2$ là tập hợp những điểm cách đều điểm $F(0;\ 1)$ và đường thẳng Δ: $y+1=0$.

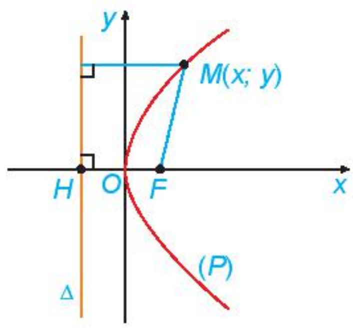
> Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ được gọi là **đường parabol** (hay parabol). Điểm F được gọi là *tiêu điểm*, Δ được gọi là *đường chuẩn*, khoảng cách từ F đến Δ được gọi là **tham số tiêu** của parabol đó.

HĐ5. Xét (P) là một parabol với tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Gọi p là tham số tiêu của (P) và H là hình chiếu vuông góc của F trên Δ. Chọn hệ trục toạ độ Oxy có gốc O là trung điểm của HF, tia Ox trùng tia OF (H.7.27).

a) Nêu toạ độ của F và phương trình của Δ.

b) Giải thích vì sao điểm $M(x;\ y)$ thuộc (P) khi và chỉ khi

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$



Hình 7.27

Chú ý. Bình phương hai vế của phương trình cuối cùng trong HĐ5 rồi rút gọn, ta dễ dàng nhận được phương trình $y^2=2px$.

Xét (P) là một parabol với tiêu điểm F, đường chuẩn Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên Δ. Khi đó, trong hệ trục toạ độ Oxy với gốc O là trung điểm của HF, tia Ox trùng tia OF, parabol (P) có phương trình

$$y^2 = 2px \text{ (với } p > 0). \quad (5)$$

Phương trình (5) được gọi là phương trình chính tắc của parabol (P).

Ngược lại, mỗi phương trình dạng (5), với $p > 0$, là phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$ và đường chuẩn $\Delta:\ x = -\frac{p}{2}$.

Ví dụ 5. Cho parabol (P): $y^2 = x$.

a) Tìm tiêu điểm F, đường chuẩn Δ của (P).

b) Tìm những điểm trên (P) có khoảng cách tới F bằng 3.

Giải

a) Ta có $2p = 1$ nên $p = \frac{1}{2}$.

Parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{4};\ 0\right)$ và đường chuẩn $\Delta:\ x = -\frac{1}{4}$.

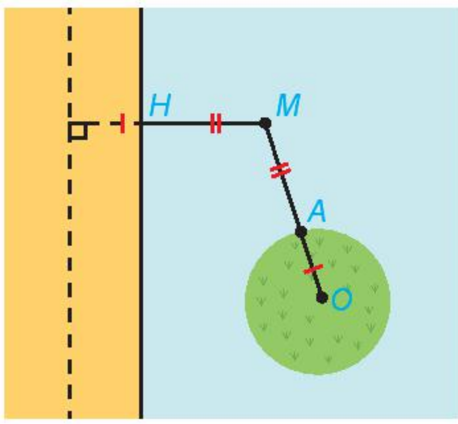
b) Điểm $M(x_0;\ y_0)$ thuộc (P) có khoảng cách tới F bằng 3 khi và chỉ khi $y_0^2 = x_0$ và $MF = 3$. Do $MF = d(M,\Delta)$ nên $d(M,\Delta) = 3$.

Mặt khác $\Delta:\ x + \frac{1}{4} = 0$ và $x_0 = y_0^2 \geq 0$ nên $3 = d(M,\Delta) = \left|x_0 + \frac{1}{4}\right| = x_0 + \frac{1}{4}$.

Vậy $x_0 = \frac{11}{4}$ và $y_0 = \frac{\sqrt{11}}{2}$ hoặc $y_0 = -\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Vậy có hai điểm M thoả mãn bài toán với toạ độ là $\left(\frac{11}{4};\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ và $\left(\frac{11}{4};-\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$.

Vận dụng 2. Tại một vùng biển giữa đất liền và một đảo, người ta phân định một đường ranh giới cách đều đất liền và đảo (H.7.28). Coi bờ biển vùng đất liền đó là một đường thẳng và đảo là hình tròn. Hỏi đường ranh giới nói trên có hình gì? Vì sao?



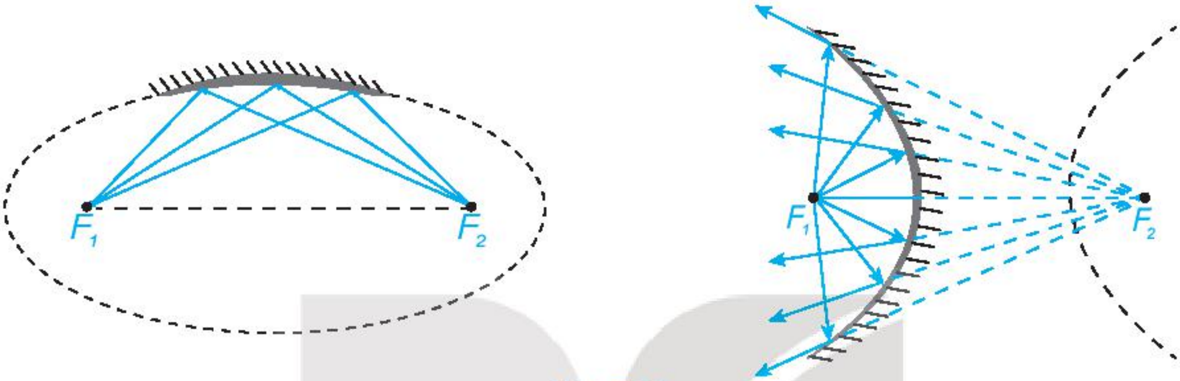
Hình 7.28

4. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA BA ĐƯỜNG CONIC

TÍNH CHẤT QUANG HỌC

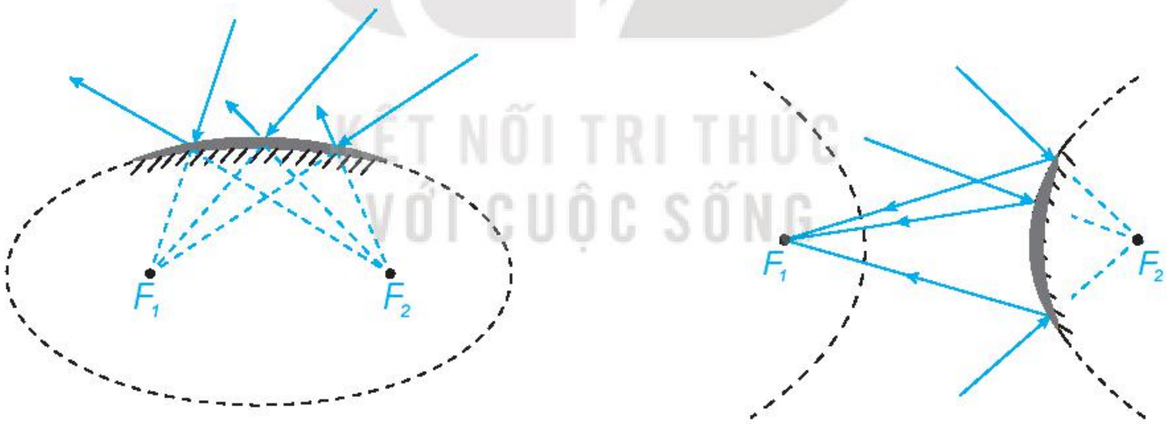
Tương tự gương cầu lồi thường đặt ở những khúc đường cua, người ta cũng có những gương (lồi, lõm) elip, hypebol, parabol. Tia sáng gặp các gương này, đều được phản xạ theo một quy tắc được xác định rõ bằng hình học, chẳng hạn:

- Tia sáng phát ra từ một tiêu điểm của elip, hypebol (đối với các gương lõm elip, hypebol) sau khi gặp elip, hypebol sẽ bị hắt lại theo một tia (tia phản xạ) nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm còn lại (H.7.29).



Hình 7.29

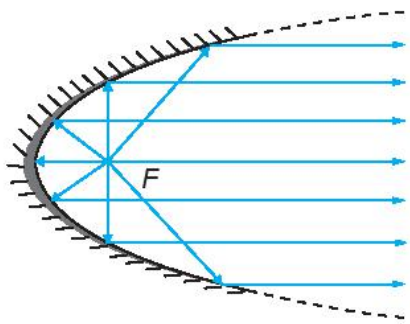
- Tia sáng hướng tới một tiêu điểm của elip, hypebol (đối với các gương elip, hypebol lồi), khi gặp elip, hypebol sẽ bị hắt lại theo một tia nằm trên đường thẳng đi qua tiêu điểm còn lại (H.7.30).



Hình 7.30

- Với gương parabol lõm, tia sáng phát ra từ tiêu điểm khi gặp parabol sẽ bị hắt lại theo một tia vuông góc với đường chuẩn của parabol (H.7.31). Ngược lại, nếu tia tới vuông góc với đường chuẩn của parabol thì tia phản xạ sẽ đi qua tiêu điểm của parabol.

  Tính chất quang học được đề cập ở trên giúp ta nhận được ánh sáng mạnh hơn khi các tia sáng hội tụ và giúp ta đổi hướng ánh sáng khi cần. Ta cũng có điều tương tự đối với tín hiệu âm thanh, tín hiệu truyền từ vệ tinh.



Hình 7.31

MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Nhà vòm hoa (Flower Dome) trong Khu vườn bên vịnh (Gardens by the Bay), Singapore

Công viên với hình elip ở phía nam Nhà Trắng, Hoa Kỳ

Ba đường conic xuất hiện và có nhiều ứng dụng trong khoa học và trong cuộc sống, chẳng hạn:

- Tia nước bắn ra từ đài phun nước, đường đi bổng của quả bóng là những hình ảnh về đường parabol;
- Khi nghiêng cốc tròn, mặt nước trong cốc có hình elip. Tương tự, dưới ánh sáng mặt trời, bóng của một quả bóng, nhìn chung, là một elip;
- Ánh sáng phát ra từ một bóng đèn Led trên trần nhà có thể tạo nên trên tường các nhánh hypebol;
- Nhiều công trình kiến trúc có hình elip, parabol hay hypebol.

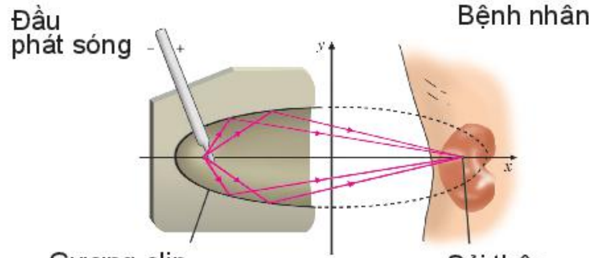
a) b) c)

Hình 7.32

- Trong vũ trụ bao la, ánh sáng đóng vai trò sứ giả truyền tin. Ánh sáng phát ra từ một thiên thể sẽ mang những thông tin về nơi nó xuất phát. Khi nhận được ánh sáng, các nhà khoa học sẽ dựa vào đó để nghiên cứu, khám phá thiên thể. Trong thiên văn học, các gương trong kính thiên văn (H.7.32a) giúp nhà khoa học nhận được hình ảnh quan sát rõ nét hơn, ánh sáng thu được có các chỉ số phân tích rõ hơn.
- Anten vệ tinh parabol (H.7.32b) là thiết bị thu tín hiệu truyền về từ vệ tinh. Tín hiệu sau khi gặp parabol bị hắt lại và hội tụ về điểm thu được đặt tại tiêu điểm của parabol.
- Đèn pha đáy parabol (H.7.32c) giúp ánh sáng có thể phát xa (chẳng hạn, giúp đèn ô tô có thể chiếu xa). Ánh sáng xuất phát từ vị trí tiêu điểm của parabol, chiếu vào đáy đèn, các tia sáng bị hắt lại thành các tia sáng nằm trên các đường thẳng song song.
- Trong y học, để tán sỏi thận, người ta có thể dùng chùm tia laser phát ra từ một tiêu điểm của gương elip để sau khi phản xạ sẽ hội tụ tại tiêu điểm còn lại cũng chính là vị trí sỏi.
- Tháp giải nhiệt hình hypebol trong lò phản ứng hạt nhân (H.7.17c) hay trong nhà máy nhiệt điện có kiến trúc đảm bảo độ vững chãi, tiết kiệm nguyên vật liệu và giúp quá trình toả nhiệt được thuận lợi.

- Bằng các quan sát và phân tích thiên văn, Johannes Kepler (1571 – 1630) đã đưa ra định luật nói rằng, các hành tinh trong hệ Mặt Trời chuyển động theo các quỹ đạo là các đường elip nhận tâm Mặt Trời là một tiêu điểm.

Vận dụng 3. Gương elip trong một máy tán sỏi thận (H.7.33) ứng với elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{76}=1$ (theo đơn vị cm). Tính khoảng cách từ vị trí đầu phát sóng của máy đến vị trí của sỏi thận cần tán.



Hình 7.33

BÀI TẬP

7.19. Cho elip có phương trình: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của elip.

7.20. Cho hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của hypebol.

7.21. Cho parabol có phương trình: $y^2=8x$. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.

7.22. Lập phương trình chính tắc của elip đi qua điểm A(5; 0) và có một tiêu điểm là $F_2(3; 0)$.

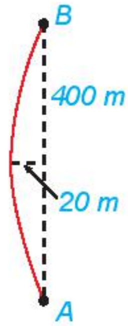
7.23. Lập phương trình chính tắc của parabol đi qua điểm $M(2; 4)$.

7.24. Có hai trạm phát tín hiệu vô tuyến đặt tại hai vị trí A, B cách nhau 300 km. Tại cùng một thời điểm, hai trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc 292 000 km/s để một tàu thuỷ thu và đo độ lệch thời gian. Tín hiệu từ A đến sớm hơn tín hiệu từ B là 0,0005 s. Từ thông tin trên, ta có thể xác định được tàu thuỷ thuộc đường hypebol nào? Viết phương trình chính tắc của hypebol đó theo đơn vị kilômét.

7.25. Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A, điểm cuối là B, khoảng cách AB = 400 m. Đỉnh parabol (P) của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A, B (H.7.34).

a) Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 m trên thực tế.

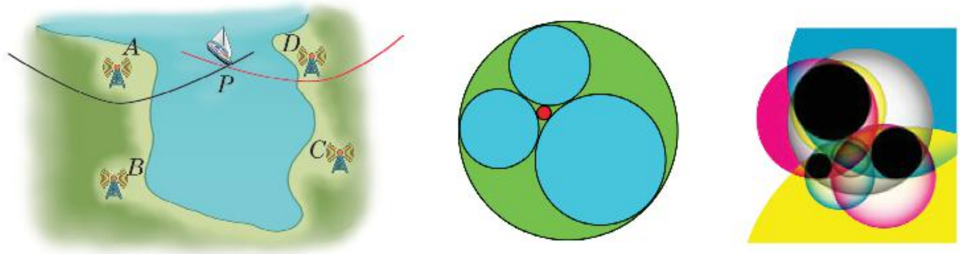
b) Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 km trên thực tế.



Hình 7.34

Em có biết?

Hệ thống định vị trên mặt đất LORAN (Long Range Navigation) được hoạt động dựa trên nguyên lí đo sự chênh lệch thời gian tiếp nhận tín hiệu và sử dụng tính chất của hypebol để xác định vị trí của nơi nhận tín hiệu. Ta có thể hình dung một tình huống đơn giản như sau: Hai trạm phát sóng radio đặt tại hai vị trí xác định A, B, cùng lúc phát tín hiệu và được một tàu thuỷ thu và đo độ lệch về thời gian tiếp nhận. Từ vận tốc truyền sóng, có thể xác định được hiệu khoảng cách từ tàu thuỷ đến các vị trí A, B. Như vậy, tàu thuỷ nằm trên một nhánh hypebol hoàn toàn xác định. Tương tự, nếu có trạm phát sóng thứ ba *C* (hoặc một cặp trạm *C*, *D*), thì cặp trạm phát sóng *A*, *C* (hay *C*, *D*), cũng cho phép ta xác định một nhánh hypebol đi qua vị trí tàu thuỷ. Do đó, vị trí tàu thuỷ được xác định như là giao điểm của hai nhánh hypebol (H.7.35a).



a) b) c)

Hình 7.35

Nền tảng toán học cho ứng dụng trên đã được biết đến từ hơn 2 000 năm trước. Bài toán xác định đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cho trước đã được đặt ra và nghiên cứu bởi Apollonius (khoảng 262 – 190, TCN). Trong Hình 7.35c, với ba đường tròn màu đen cho trước, đôi một ngoài nhau, có tám đường tròn tiếp xúc với cả ba đường tròn đó mà ta có thể đếm được trên hình vẽ. Nói chung, bài toán Apollonius có tám nghiệm hình, tuy vậy, trong một số trường hợp đặc biệt, số nghiệm có thể khác. Trong Hình 7.35b, với ba đường tròn đôi một tiếp xúc ngoài với nhau cho trước (ba hình tròn được tô cùng màu), có hai đường tròn tiếp xúc với chúng. Gọi r_1, r_2, r_3 là bán kính của ba đường tròn cho trước trong Hình 7.35b và r, R ($r < R$) là bán kính của hai đường tròn nghiệm. Năm 1643, trong một bức thư gửi công chúa Elisabeth (1618 – 1680), Descartes (1596 – 1650) đã đưa ra các công thức sau, cho phép tính bán kính của các đường tròn nghiệm theo các đường tròn đã cho

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r^2}\right) \text{ và } \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{R}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{R^2}\right).$$

Định lí của Descartes còn được phát hiện một cách độc lập bởi Steiner năm 1826, Beecroft năm 1842, Soddy năm 1936. Soddy đã công bố phát hiện của mình trên tạp chí Nature dưới dạng một bài thơ với tên "The Kiss Precise".

Các thông tin trên cũng được đề cập trong bài báo của Coxter trên tạp chí American Mathematical Monthly, số 75, năm 1968.

Bài toán Apollonius còn được hiểu theo nghĩa rộng hơn, ở đó, ba đường cho trước có thể là đường tròn, đường thẳng, hay điểm. Để một đường tròn tiếp xúc ngoài (tiếp xúc trong) với hai đường tròn cho trước, thì tâm của nó phải thuộc một nhánh hypebol (hoặc elip). Do đó việc xác định tâm của đường tròn nghiệm của bài toán Apollonius có thể chuyển thành bài toán xác định giao của hai đường conic. Ta hoàn toàn có thể nhìn ra mối liên hệ giữa bài toán Apollonius với Ví dụ 3, Vận dụng 2 trong Bài 22, cũng như bài toán định vị trong hệ thống LORAN.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A - TRẮC NGHIỆM

7.26. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của đường thẳng?

A. $2x - y + 1 = 0$. B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$. C. $x^2 + y^2 = 1$. D. $y = 2x + 3$.

7.27. Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của đường thẳng?

A. $-x - 2y + 3 = 0$. B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \end{cases}$. C. $y^2 = 2x$. D. $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$.

7.28. Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $x^2 - y^2 = 1$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = -4$.

C. $x^2 + y^2 = 2$. D. $y^2 = 8x$.

7.29. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường elip?

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$. B. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} = 1$. C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$. D. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$.

7.30. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường hypebol?

A. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = -1$. B. $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{6} = 1$. C. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{1} = 1$. D. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = -1$.

7.31. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường parabol?

A. $x^2 = 4y$. B. $x^2 = -6y$. C. $y^2 = 4x$. D. $y^2 = -4x$.

B - TỰ LUẬN

7.32. Trong mặt phẳng toạ độ, cho $A(1; -1)$, $B(3; 5)$, $C(-2; 4)$. Tính diện tích tam giác ABC.

7.33. Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai điểm $A(-1; 0)$ và $B(3; 1)$.

a) Viết phương trình đường tròn tâm A và đi qua B.

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB.

c) Viết phương trình đường tròn tâm O và tiếp xúc với đường thẳng AB.

7.34. Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

a) Tìm toạ độ tâm I và bán kính R của (C).

b) Chứng minh rằng điểm $M(5; 1)$ thuộc (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M.

7.35. Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$.

a) Tìm các giao điểm A_1, A_2 của (E) với trục hoành và các giao điểm B_1, B_2 của (E) với trục tung. Tính A_1A_2, B_1B_2.

b) Xét một điểm bất kì $M(x_0, y_0)$ thuộc (E).

Chứng minh rằng, $b^2 \le x_0^2 + y_0^2 \le a^2$ và $b \le OM \le a$.

Chú ý. A_1A_2, B_1B_2 tương ứng được gọi là trục lớn, trục nhỏ của elip (E) và tương ứng có độ dài là $2a$, $2b$.

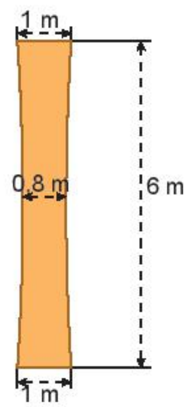
7.36. Cho hypebol có phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

a) Tìm các giao điểm A_1, A_2 của hypebol với trục hoành (hoành độ của A_1 nhỏ hơn của A_2).

b) Chứng minh rằng, nếu điểm $M(x; y)$ thuộc nhánh nằm bên trái trục tung của hypebol thì $x \le -a$, nếu điểm $M(x; y)$ thuộc nhánh nằm bên phải trục tung của hypebol thì $x \ge a$.

c) Tìm các điểm M_1, M_2 tương ứng thuộc các nhánh bên trái, bên phải trục tung của hypebol để M_1M_2 nhỏ nhất.

7.37. Một cột trụ hình hypebol (H.7.36), có chiều cao 6 m, chỗ nhỏ nhất ở chính giữa và rộng 0,8 m, đỉnh cột và đáy cột đều rộng 1m. Tính độ rộng của cột ở độ cao 5 m (tính theo đơn vị mét và làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy).



Hình 7.36