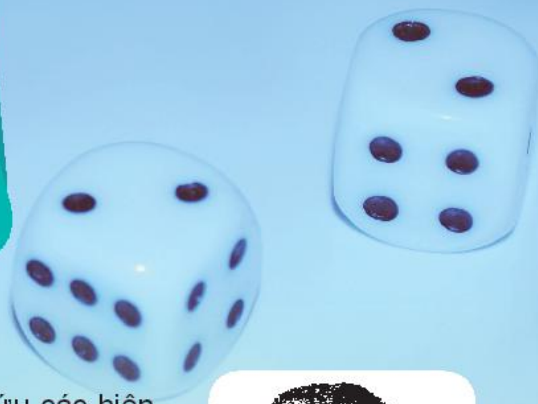
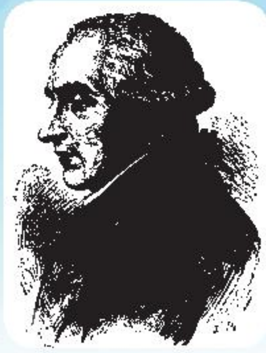
CHƯƠNG IX

TÍNH XÁC SUẤT THEO ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN



Lí thuyết Xác suất là một ngành toán học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên. Nhà toán học Pháp P. S. Laplace đã viết "*Lí thuyết Xác suất ra đời từ việc nghiên cứu các trò chơi may rủi, đã và đang trở thành một trong những đối tượng quan trọng nhất của tri thức nhân loại. Phần lớn những vấn đề quan trọng nhất của cuộc sống là những bài toán của Lí thuyết Xác suất*".

Chương này giới thiệu định nghĩa cổ điển của xác suất, phương pháp tổ hợp và sơ đồ hình cây để tính xác suất theo định nghĩa cổ điển.



P. S. Laplace (1749 - 1827)

Bài 26 BIẾN CỐ VÀ ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

THUẬT NGỮ

- Biến cố đối
- Định nghĩa cổ điển của xác suất
- Nguyên lí xác suất bé

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

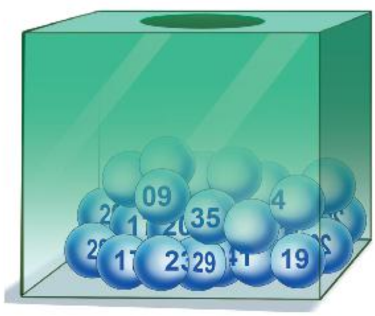
- Nhận biết một số khái niệm: Phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu, biến cố là tập con của không gian mẫu, biến cố đối, định nghĩa cổ điển của xác suất, nguyên lí xác suất bé.
- Mô tả không gian mẫu, biến cố trong một số phép thử đơn giản.
- Mô tả tính chất cơ bản của xác suất.

Khi tham gia một trò chơi bốc thăm trúng thưởng, mỗi người chơi chọn một bộ 6 số đôi một khác nhau từ 45 số: 1; 2; ...; 45, chẳng hạn bạn An chọn bộ số {5; 13; 20; 31; 32; 35}.

Sau đó, người quản trò bốc ngẫu nhiên 6 quả bóng (không hoàn lại) từ một thùng kín đựng 45 quả bóng như nhau ghi các số 1; 2;... ; 45. Bộ 6 số ghi trên 6 quả bóng đó được gọi là *bộ số trúng thưởng*.

Nếu bộ số của người chơi trùng với bộ số trúng thưởng thì người chơi trúng giải độc đắc; nếu trùng với 5 số của bộ số trúng thưởng thì người chơi trúng giải nhất.

Tính xác suất bạn An trúng giải độc đắc, giải nhất khi chơi.



Trong bài học này, ta sẽ tìm hiểu một số khái niệm cơ bản và định nghĩa cổ điển của xác suất, từ đó giúp ta có cơ sở trả lời câu hỏi nêu trên.

1. BIẾN CỐ

Ở lớp 9 ta đã biết những khái niệm quan trọng sau:

- **Phép thử ngẫu nhiên** (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà kết quả của nó không thể biết được trước khi phép thử được thực hiện.
- **Không gian mẫu** của phép thử là tập hợp tất cả các kết quả có thể khi thực hiện phép thử. Không gian mẫu của phép thử được kí hiệu là Ω.
- **Kết quả thuận lợi** cho một biến cố E liên quan tới phép thử T là kết quả của phép thử T làm cho biến cố đó xảy ra.

Chú ý. Ta chỉ xét các phép thử mà không gian mẫu gồm hữu hạn kết quả.

Ví dụ 1. Một tổ trong lớp 10A có ba học sinh nữ là Hương, Hồng, Dung và bốn học sinh nam là Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến. Giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ đó để kiểm tra vở bài tập. Phép thử ngẫu nhiên là gì? Mô tả không gian mẫu.

Giải

Phép thử ngẫu nhiên là chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ để kiểm tra vở bài tập.

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các học sinh trong tổ.

Ta có Ω = {Hương; Hồng; Dung; Sơn; Tùng; Hoàng; Tiến}.

HĐ1. Trở lại Ví dụ 1, xét hai biến cố sau:

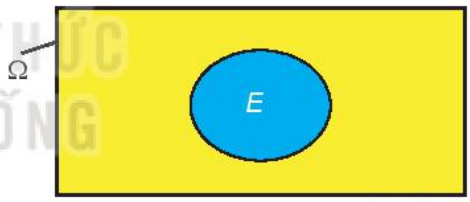
A: "Học sinh được gọi là một bạn nữ";

B: "Học sinh được gọi có tên bắt đầu bằng chữ H".

Hãy liệt kê các kết quả thuận lợi cho biến cố A, B.

Theo định nghĩa, ta thấy mỗi kết quả thuận lợi cho biến cố E chính là một phần tử thuộc không gian mẫu Ω. Do đó về mặt toán học, ta có:

> Mỗi biến cố là một tập con của không gian mẫu Ω. Tập con này là tập tất cả các kết quả thuận lợi cho biến cố đó.



Không gian mẫu Ω và biến cố E

Nhận xét. Biến cố chắc chắn là tập Ω, biến cố không thể là tập $\varnothing$.

Ví dụ 2. Trở lại *tình huống mở đầu* về trò chơi bốc thăm trúng thưởng.

a) Phép thử là gì? Mô tả không gian mẫu Ω.

b) Gọi F là biến cố: "Bạn An trúng giải độc đắc". Hỏi F là tập con nào của không gian mẫu?

c) Gọi G là biến cố: "Bạn An trúng giải nhất". Hãy chỉ ra ba phần tử của tập G. Từ đó, hãy mô tả tập hợp G bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập G.

Giải

a) Phép thử là chọn ngẫu nhiên 6 số trong 45 số: 1; 2;... ; 45. Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các tập con có sáu phần tử của tập {1; 2;...; 44; 45}.

b) F = {5; 13; 20; 31; 32; 35}.

c) Ba phần tử thuộc G chẳng hạn là:

$$\{6; 13; 20; 31; 32; 35\}; \{5; 7; 20; 31; 32; 35\}; \{5; 13; 8; 31; 32; 35\}.$$

G là tập hợp tất cả các tập con gồm sáu phần tử của tập $\{1; 2; 3;...; 45\}$ có tính chất: năm phần tử của nó thuộc tập $\{5; 13; 20; 31; 32; 35\}$ và một phần tử còn lại không thuộc tập $\{5; 13; 20; 31; 32; 35\}$.

Luyện tập 1. Phần thưởng trong một chương trình khuyến mãi của một siêu thị là: ti vi, bàn ghế, tủ lạnh, máy tính, bếp từ, bộ bát đĩa. Ông Dũng tham gia chương trình được chọn ngẫu nhiên một mặt hàng.

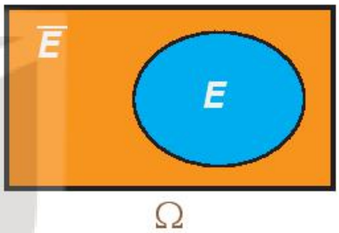
a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi D là biến cố: "Ông Dũng chọn được mặt hàng là đồ điện". Hỏi D là tập con nào của không gian mẫu?

HĐ2. Trở lại Ví dụ 1, hãy cho biết khi nào biến cố C: "Học sinh được gọi là một bạn nam" xảy ra?

Ta thấy biến cố C xảy ra khi và chỉ khi biến cố A không xảy ra.

Ta nói biến cố C là *biến cố đối* của A.



Biến cố đối của biến cố E là biến cố "E không xảy ra".

Biến cố đối của E được kí hiệu là $\overline{E}$.

Nhận xét. Nếu biến cố E là tập con của không gian mẫu Ω thì biến cố đối $\overline{E}$ là tập tất cả các phần tử của Ω mà không là phần tử của E. Vậy biến cố $\overline{E}$ là phần bù của E trong Ω: $\overline{E} = C_{\Omega}E$.

Ví dụ 3. Gieo một con xúc xắc 6 mặt và quan sát số chấm xuất hiện trên con xúc xắc.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi M là biến cố: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là một số chẵn". Nội dung biến cố đối $\overline{M}$ của M là gì?

c) Biến cố M và $\overline{M}$ là tập con nào của không gian mẫu?

Giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

b) Biến cố đối $\overline{M}$ của M là biến cố: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là một số lẻ".

c) Ta có $M = \{2; 4; 6\} \subset \Omega$; $\overline{M} = C_{\Omega}M = \{1; 3; 5\} \subset \Omega$.

Luyện tập 2. Gieo một con xúc xắc. Gọi K là biến cố: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là một số nguyên tố".

a) Biến cố: "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là một hợp số" có là biến cố $\overline{K}$ không?

b) Biến cố K và $\overline{K}$ là tập con nào của không gian mẫu?

2. ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

Ở lớp 9 ta đã học những kiến thức cơ bản sau:

- Các kết quả có thể của phép thử T gọi là đồng khả năng nếu chúng có khả năng xuất hiện như nhau.
- Giả sử các kết quả có thể của phép thử T là đồng khả năng. Khi đó xác suất của biến cố E bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi của E và số kết quả có thể.

HĐ3. Một hộp chứa 12 tấm thẻ được đánh số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12. Rút ngẫu nhiên từ hộp đó một tấm thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu Ω. Các kết quả có thể có đồng khả năng không?

b) Xét biến cố E: "Rút được thẻ ghi số nguyên tố". Biến cố E là tập con nào của không gian mẫu?

c) Phép thử có bao nhiêu kết quả có thể? Biến cố E có bao nhiêu kết quả thuận lợi? Từ đó, hãy tính xác suất của biến cố E.

Ta đã biết không gian mẫu Ω của phép thử T là tập hợp tất cả các kết quả có thể của T; biến cố E liên quan đến phép thử T là tập con của Ω. Vì thế số kết quả có thể của phép thử T chính là số phần tử tập Ω; số kết quả thuận lợi của biến cố E chính là số phần tử của tập E. Do đó, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau:

Cho phép thử T có không gian mẫu là Ω. Giả thiết rằng các kết quả có thể của T là đồng khả năng. Khi đó nếu E là một biến cố liên quan đến phép thử T thì xác suất của E được cho bởi công thức

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(\Omega)},$$

trong đó $n(\Omega)$ và $n(E)$ tương ứng là số phần tử của tập Ω và tập E.

Nhận xét

- Với mỗi biến cố E, ta có $0 \le P(E) \le 1$.
- Với biến cố chắc chắn (là tập Ω), ta có $P(\Omega)=1$.
- Với biến cố không thể (là tập $\varnothing$), ta có $P(\varnothing)=0$.

? Từ định nghĩa cổ điển của xác suất, hãy chứng minh các nhận xét trên.

Ví dụ 4. Gieo một đồng xu cân đối liên tiếp ba lần. Gọi E là biến cố: "Có hai lần xuất hiện mặt sấp và một lần xuất hiện mặt ngửa". Tính xác suất của biến cố E.

Giải

Kí hiệu S và N tương ứng là đồng xu ra mặt sấp và đồng xu ra mặt ngửa.

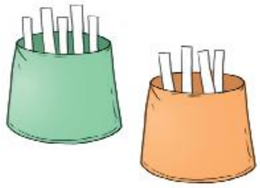
Không gian mẫu Ω = {SSN; SNS; SNN; SSS; NSN; NNS; NNN; NSS}.

E = {SSN; SNS; NSS}.

Ta có $n(\Omega)=8$; $n(E)=3$. Do đồng xu cân đối nên các kết quả có thể là đồng khả năng.

Vậy $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{8}$.

Ví dụ 5. Hai túi I và II chứa các tấm thẻ được đánh số. Túi I: {1; 2; 3; 4; 5}, túi II: {1; 2; 3; 4}. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ mỗi túi I và II. Tính xác suất để tổng hai số trên hai tấm thẻ lớn hơn 6.



Giải

Mô tả không gian mẫu Ω bằng cách lập bảng như sau.

Túi II / Túi I	1	2	3	4
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)

Mỗi ô là một kết quả có thể. Có 20 ô, vậy $n(\Omega) = 20$.

Biến cố E: "Tổng hai số trên hai tấm thẻ lớn hơn 6" xảy ra khi tổng là một trong ba trường hợp:

Tổng bằng 7 gồm các kết quả: (3, 4); (4, 3); (5, 2).

Tổng bằng 8 gồm các kết quả: (4, 4); (5, 3).

Tổng bằng 9 có một kết quả: (5, 4).

Vậy biến cố $E = \{(3, 4); (4, 3); (5, 2); (4, 4); (5, 3); (5, 4)\}$. Từ đó $n(E) = 6$ và $P(E) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

Chú ý. Trong những phép thử đơn giản, ta đếm số phần tử của tập Ω và số phần tử của biến cố E bằng cách liệt kê ra tất cả các phần tử của hai tập hợp này.

Luyện tập 3. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 4 hoặc bằng 6.

3. NGUYÊN LÍ XÁC SUẤT BÉ

Qua thực tế người ta thấy rằng một biến cố có xác suất rất bé thì sẽ không xảy ra khi ta thực hiện một phép thử hay một vài phép thử. Từ đó người ta đã thừa nhận nguyên lí sau đây gọi là *nguyên lí xác suất bé*:

> Nếu một biến cố có xác suất rất bé thì trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.

Chẳng hạn, xác suất một chiếc máy bay rơi là rất bé, khoảng 0,00000027. Mỗi hành khách khi đi máy bay đều tin rằng biến cố: "Máy bay rơi" sẽ không xảy ra trong chuyến bay của mình, do đó người ta vẫn không ngần ngại đi máy bay.

Chú ý. Trong thực tế, xác suất của một biến cố được coi là bé phụ thuộc vào từng trường hợp cụ thể. Chẳng hạn, xác suất một chiếc điện thoại bị lỗi kĩ thuật là 0,001 được coi là rất bé, nhưng nếu xác suất cháy nổ động cơ của một máy bay là 0,001 thì xác suất này không được coi là rất bé.

Vận dụng. Xác suất của biến cố có ý nghĩa thực tế như sau:

Giả sử biến cố A có xác suất P(A). Khi thực hiện phép thử n lần ($n \geq 30$) thì số lần xuất hiện biến cố A sẽ xấp xỉ bằng $n \cdot P(A)$ (nói chung khi n càng lớn thì sai số tương đối càng bé).

Giả thiết rằng xác suất sinh con trai là 0,512 và xác suất sinh con gái là 0,488. Vận dụng ý nghĩa thực tế của xác suất, hãy ước tính trong số trẻ mới sinh với 10 000 bé gái thì có bao nhiêu bé trai.

Hướng dẫn. Gọi n là số trẻ mới sinh. Ta coi mỗi lần sinh là một phép thử và biến cố liên quan đến phép thử là biến cố: "Sinh con gái". Như vậy ta có n phép thử. Ước tính n, từ đó ước tính số bé trai.

BÀI TẬP

9.1. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 30.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi A là biến cố: "Số được chọn là số nguyên tố". Các biến cố A và $\overline{A}$ là tập con nào của không gian mẫu?

9.2. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 22.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Gọi B là biến cố: "Số được chọn chia hết cho 3". Các biến cố B và $\overline{B}$ là các tập con nào của không gian mẫu?

9.3. Gieo đồng thời một con xúc xắc và một đồng xu.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xét các biến cố sau:

C: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp";

D: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa hoặc số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 5".

Các biến cố C, $\overline{C}$, D và $\overline{D}$ là các tập con nào của không gian mẫu?

9.4. Một túi có chứa một số bi xanh, bi đỏ, bi đen và bi trắng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi từ trong túi.

a) Gọi H là biến cố: "Bi lấy ra có màu đỏ". Biến cố: "Bi lấy ra có màu xanh hoặc màu đen hoặc trắng" có phải là biến cố $\overline{H}$ hay không?

b) Gọi K là biến cố: "Bi lấy ra có màu xanh hoặc màu trắng". Biến cố: "Bi lấy ra màu đen" có phải là biến cố $\overline{K}$ hay không?

9.5. Hai bạn An và Bình mỗi người gieo một con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để:

a) Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bé hơn 3;

b) Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc mà An gieo lớn hơn hoặc bằng 5;

c) Tích hai số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bé hơn 6;

d) Tổng hai số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là một số nguyên tố.

Bài 27 THỰC HÀNH TÍNH XÁC SUẤT THEO ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN

THUẬT NGỮ

Xác suất của biến cố đối.

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Tính xác suất trong một số bài toán đơn giản bằng phương pháp tổ hợp.
- Tính xác suất trong một số bài toán đơn giản bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây.
- Nắm và vận dụng quy tắc tính xác suất của biến cố đối.

Trở lại *tình huống mở đầu* trong Bài 26. Hãy tính xác suất trúng giải độc đắc, trúng giải nhất của bạn An khi chọn bộ số {5; 13; 20; 31; 32; 35}.

1. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỔ HỢP

HĐ1. Theo định nghĩa cổ điển của xác suất, để tính xác suất của biến cố F: "Bạn An trúng giải độc đắc" và biến cố G: "Bạn An trúng giải nhất" ta cần xác định $n(\Omega)$, $n(F)$ và $n(G)$. Liệu có thể tính $n(\Omega)$, $n(F)$ và $n(G)$ bằng cách liệt kê ra hết các phần tử của Ω, F và G rồi kiểm đếm được không?

> Trong nhiều bài toán, để tính số phần tử của không gian mẫu, của các biến cố, ta thường sử dụng các quy tắc đếm, các công thức tính số hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

Đôi khi người ta gọi Đại số tổ hợp là "sự kiểm đếm không cần phải liệt kê".

Ví dụ 1. Một tổ trong lớp 10A có 10 học sinh trong đó có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 6 học sinh trong tổ đó để tham gia đội tình nguyện Mùa hè xanh. Tính xác suất của hai biến cố sau:

C: "6 học sinh được chọn đều là nam";

D: "Trong 6 học sinh được chọn có 4 nam và 2 nữ".

Giải

Không gian mẫu là tập tất cả các tập con gồm 6 học sinh trong 10 học sinh. Vậy

$$n(\Omega) = C_{10}^{6} = 210.$$

a) Tập C chỉ có một phần tử là tập 6 học sinh nam. Vậy $n(C) = 1$, do đó $P(C) = \frac{1}{210}$.

b) Mỗi phần tử của D được hình thành từ hai công đoạn.

Công đoạn 1. Chọn 4 học sinh nam từ 6 học sinh nam, có $C_6^4 = 15$ (cách chọn).

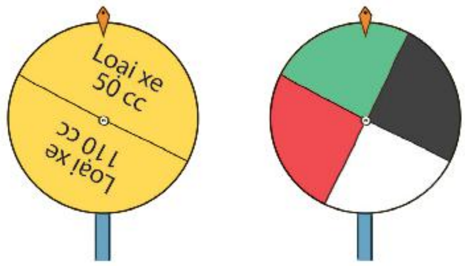
Công đoạn 2. Chọn 2 học sinh nữ từ 4 học sinh nữ, có $C_4^2 = 6$ (cách chọn).

Theo quy tắc nhân, tập D có $15 \cdot 6 = 90$ (phần tử). Vậy $n(D) = 90$. Từ đó $P(D) = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$.

Luyện tập 1. Một tổ trong lớp 10B có 12 học sinh, trong đó có 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 6 học sinh trong tổ để kiểm tra vở bài tập Toán. Tính xác suất để trong 6 học sinh được chọn số học sinh nữ bằng số học sinh nam.

2. SỬ DỤNG SƠ ĐỒ HÌNH CÂY

HĐ2. Trong trò chơi "Vòng quay may mắn", người chơi sẽ quay hai bánh xe. Mũi tên ở bánh xe thứ nhất có thể dừng ở một trong hai vị trí: Loại xe 50 cc và Loại xe 110 cc. Mũi tên ở bánh xe thứ hai có thể dừng ở một trong bốn vị trí: màu đen, màu trắng, màu đỏ và màu xanh. Vị trí của mũi tên trên hai bánh xe sẽ xác định người chơi nhận được loại xe nào, màu gì.



Phép thử T là quay hai bánh xe. Hãy vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

> Trong một số bài toán, phép thử T được hình thành từ một vài phép thử, chẳng hạn: gieo xúc xắc liên tiếp bốn lần; lấy ba viên bi, mỗi viên từ một hộp;... Khi đó ta sử dụng sơ đồ hình cây để có thể mô tả đầy đủ, trực quan không gian mẫu và biến cố cần tính xác suất.

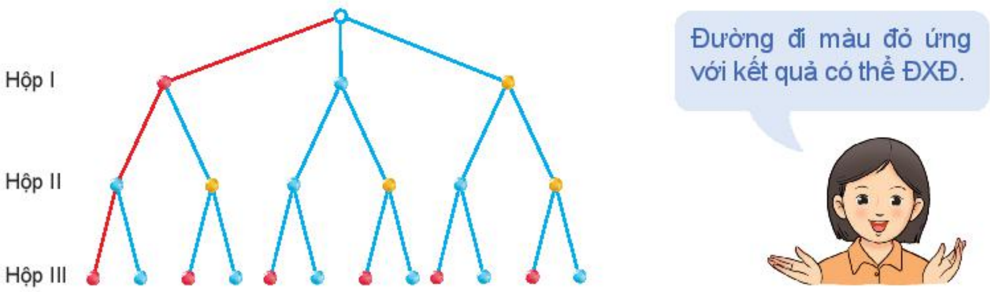
Ví dụ 2. Có ba chiếc hộp. Hộp I có chứa ba viên bi: 1 viên màu đỏ, 1 viên màu xanh và 1 viên màu vàng. Hộp II chứa hai viên bi: 1 viên màu xanh và 1 viên màu vàng. Hộp III chứa hai viên bi: 1 viên màu đỏ và 1 viên màu xanh. Từ mỗi hộp ta lấy ngẫu nhiên một viên bi.

a) Vẽ sơ đồ hình cây để mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất để trong ba viên bi lấy ra có đúng một viên bi màu xanh.

Giải

a) Kí hiệu Đ, X, V tương ứng là viên bi màu đỏ, màu xanh và màu vàng.



Các kết quả có thể là: ĐXĐ, ĐXX, ĐVĐ, ĐVX, XXĐ, XXX, XVĐ, XVX, VXĐ, VXX, VVĐ, VVX.

Do đó Ω = {ĐXĐ; ĐXX; ĐVĐ; ĐVX; XXĐ; XXX; XVĐ; XVX; VXĐ; VXX; VVĐ; VVX}.

Vậy $n(\Omega) = 12$.

b) Gọi K là biến cố: "Trong ba viên bi lấy ra có đúng một viên bi màu xanh". Ta có

$K = \{ĐXĐ; ĐVX; XVĐ; VXĐ; VVX\}$. Vậy $n(K) = 5$. Từ đó

$$P(K) = \frac{n(K)}{n(\Omega)} = \frac{5}{12}.$$

Luyện tập 2. Trở lại trò chơi "Vòng quay may mắn" ở HĐ2. Tính xác suất để người chơi nhận được loại xe 110 cc có màu trắng hoặc màu xanh.

Luyện tập 3. Trong một cuộc tổng điều tra dân số, điều tra viên chọn ngẫu nhiên một gia đình có ba người con và quan tâm giới tính của ba người con này.

a) Vẽ sơ đồ hình cây để mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Giả thiết rằng khả năng sinh con trai và khả năng sinh con gái là như nhau. Tính xác suất để gia đình đó có một con trai và hai con gái.

3. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ ĐỐI

HĐ3. Cho E là một biến cố và Ω là không gian mẫu. Tính $n(\overline{E})$ theo $n(\Omega)$ và $n(E)$.

Ta có công thức sau đây liên hệ giữa xác suất của một biến cố với xác suất của biến cố đối.

Cho E là một biến cố. Xác suất của biến cố $\overline{E}$ liên hệ với xác suất của E bởi công thức sau:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

Ví dụ 3. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập $\{1; 2; ...; 9\}$. Gọi H là biến cố: "Trong hai số được chọn có ít nhất một số chẵn".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Biến cố $\overline{H}$ là tập con nào của không gian mẫu?

c) Tính $P(\overline{H})$ và $P(H)$.

Giải

a) Không gian mẫu là tập tất cả các tập con có 2 phần tử của tập $\{1; 2; ...; 8; 9\}$.

b) Biến cố $\overline{H}$: "Cả hai số được chọn đều là số lẻ". Khi đó $\overline{H}$ là tập tất cả các tập con có 2 phần tử của tập số lẻ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$.

c) Ta có $n(\Omega) = C_9^2 = 36$, $n(\overline{H}) = C_5^2 = 10$. Vậy $P(\overline{H}) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

Từ đó $P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$.

Chú ý. Trong một số bài toán, nếu tính trực tiếp xác suất của biến cố gặp khó khăn, ta có thể tính gián tiếp bằng cách tính xác suất của biến cố đối của nó.

Luyện tập 4. Có ba hộp A, B, C. Hộp A có chứa ba thẻ mang số 1, số 2 và số 3. Hộp B chứa hai thẻ mang số 2 và số 3. Hộp C chứa hai thẻ mang số 1 và số 2. Từ mỗi hộp ta rút ra ngẫu nhiên một thẻ.

a) Vẽ sơ đồ hình cây để mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Gọi M là biến cố: "Trong ba thẻ rút ra có ít nhất một thẻ số 1". Biến cố $\overline{M}$ là tập con nào của không gian mẫu?

c) Tính $P(M)$ và $P\left(\overline{M}\right)$.

Vận dụng. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Hướng dẫn. Vì Ω là tập tất cả các tập con có 6 phần tử của tập {1; 2;...; 44; 45} nên

$$n\left(\Omega\right) = C_{45}^{6}.$$

Gọi F là biến cố: "Bạn An trúng giải độc đắc". F là tập hợp có duy nhất một phần tử là tập {5; 13; 20; 31; 32; 35}. Vậy $n(F) = 1$. Từ đó tính được $P(F)$.

Gọi G là biến cố: "Bạn An trúng giải nhất". G là tập hợp tấp cả các tập con gồm sáu phần tử của tập {1; 2; 3;...; 45} có tính chất:

1. Năm phần tử của G thuộc tập {5; 13; 20; 31; 32; 35}.
2. Một phần tử còn lại của G không thuộc tập {5; 13; 20; 31; 32; 35}.

Mỗi phần tử của G được hình thành từ hai công đoạn.

Công đoạn 1. Chọn năm phần tử trong tập {5; 13; 20; 31; 32; 35}, có $C_6^5 = 6$ (cách chọn).

Công đoạn 2. Chọn một phần tử còn lại trong 39 phần tử không thuộc tập {5; 13; 20; 31; 32; 35}, có $C_{39}^1 = 39$ (cách chọn).

Theo quy tắc nhân, tập G có $6 \cdot 39 = 234$ (phần tử). Vậy $n(G) = 234$. Từ đó tính được $P(G)$.

BÀI TẬP

9.6. Chọn ngẫu nhiên một gia đình có ba con và quan sát giới tính của ba người con này. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: "Con đầu là gái";

b) B: "Có ít nhất một người con trai".

9.7. Một hộp đựng các tấm thẻ đánh số 10; 11;...; 20. Rút ngẫu nhiên từ hộp hai tấm thẻ. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) C: "Cả hai thẻ rút được đều mang số lẻ";

b) D: "Cả hai thẻ rút được đều mang số chẵn".

9.8. Một chiếc hộp đựng 6 viên bi trắng, 4 viên bi đỏ và 2 viên bi đen. Chọn ngẫu nhiên ra 6 viên bi. Tính xác suất để trong 6 viên bi đó có 3 viên bi trắng, 2 viên bi đỏ và 1 viên bi đen.

9.9. Gieo liên tiếp một con xúc xắc và một đồng xu.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất của các biến cố sau:

F: "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa";

G: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp hoặc số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 5".

9.10. Trên một phố có hai quán ăn *X*, *Y*. Ba bạn Sơn, Hải, Văn mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán ăn.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phần tử của không gian mẫu.

b) Tính xác suất của biến cố "Hai bạn vào quán *X*, bạn còn lại vào quán *Y*".

9.11. Gieo lần lượt hai con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 6 chấm.

9.12. Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là màu vàng và màu xanh tương ứng với hai loại gen là gen trội *A* và gen lặn *a*. Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là hạt trơn và hạt nhăn tương ứng với hai loại gen là gen trội *B* và gen lặn *b*. Biết rằng, cây con lấy ngẫu nhiên một gen từ cây bố và một gen từ cây mẹ.

Phép thử là cho lai hai loại đậu Hà Lan, trong đó cả cây bố và cây mẹ đều có kiểu gen là (Aa, Bb) và kiểu hình là hạt màu vàng và trơn. Giả sử các kết quả có thể là đồng khả năng. Tính xác suất để cây con cũng có kiểu hình là hạt màu vàng và trơn.

Em có biết?

Năm 1652, nhà toán học Pascal nhận được một bức thư từ một nhà quý tộc nhờ ông giải đáp câu hỏi sau:

"Khi tham gia một trò chơi, người chơi được chọn một trong ba phương án sau:

- Phương án 1: Được gieo con xúc xắc cân đối liên tiếp 6 lần. Người chơi thắng nếu có ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm.
- Phương án 2: Được gieo con xúc xắc cân đối liên tiếp 12 lần. Người chơi thắng nếu có ít nhất hai lần xuất hiện mặt 6 chấm.
- Phương án 3: Được gieo con xúc xắc cân đối liên tiếp 18 lần. Người chơi thắng nếu có ít nhất ba lần xuất hiện mặt 6 chấm.

Người chơi nên chọn phương án nào?"

Pascal đã tính ra xác suất thắng của Phương án 1 là 0,665; của Phương án 2 là 0,619 và của Phương án 3 là 0,597. Do đó, ông khuyên nhà quý tộc nên chọn Phương án 1.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IX

A - TRẮC NGHIỆM

9.13. Một hộp có bốn loại bi: bi xanh, bi đỏ, bi trắng và bi vàng. Lấy ngẫu nhiên ra một viên bi. Gọi E là biến cố: "Lấy được viên bi đỏ". Biến cố đối của E là biến cố

A. Lấy được viên bi xanh.

B. Lấy được viên bi vàng hoặc bi trắng.

C. Lấy được viên bi trắng.

D. Lấy được viên bi vàng hoặc bi trắng hoặc bi xanh.

9.14. Rút ngẫu nhiên ra một thẻ từ một hộp có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Xác suất để số trên tấm thẻ được rút ra chia hết cho 5 là

A. $\frac{1}{30}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

9.15. Gieo hai con xúc xắc cân đối. Xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc không lớn hơn 4 là

A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{2}{9}$.

9.16. Một tổ trong lớp 10T có 4 bạn nữ và 3 bạn nam. Giáo viên chọn ngẫu nhiên hai bạn trong tổ đó tham gia đội làm báo của lớp. Xác suất để hai bạn được chọn có một bạn nam và một bạn nữ là

A. $\frac{4}{7}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{2}{21}$.

B - TỰ LUẬN

9.17. Một hộp đựng bảy thẻ màu xanh đánh số từ 1 đến 7; năm thẻ màu đỏ đánh số từ 1 đến 5 và hai thẻ màu vàng đánh số từ 1 đến 2. Rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Mỗi biến cố sau là tập con nào của không gian mẫu?

A: "Rút ra được thẻ màu đỏ hoặc màu vàng";

B: "Rút ra được thẻ mang số hoặc là 2 hoặc là 3".

9.18. Có hộp I và hộp II, mỗi hộp chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Từ mỗi hộp, rút ngẫu nhiên ra một tấm thẻ. Tính xác suất để thẻ rút ra từ hộp II mang số lớn hơn số trên thẻ rút ra từ hộp I.

9.19. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để:

a) Tổng số chấm trên hai con xúc xắc bằng 8;

b) Tổng số chấm trên hai con xúc xắc nhỏ hơn 8.

9.20. Dự báo thời tiết trong ba ngày thứ Hai, thứ Ba, thứ Tư của tuần sau cho biết, trong mỗi ngày này, khả năng có mưa và không mưa như nhau.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả không gian mẫu.

b) Tính xác suất của các biến cố:

F: "Trong ba ngày, có đúng một ngày có mưa";

G: "Trong ba ngày, có ít nhất hai ngày không mưa".

9.21. Gieo một đồng xu cân đối liên tiếp bốn lần.

a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả không gian mẫu.

b) Tính xác suất để trong bốn lần gieo đó có hai lần xuất hiện mặt sấp và hai lần xuất hiện mặt ngửa.

9.22. Chọn ngẫu nhiên 4 viên bi từ một túi đựng 4 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh đôi một khác nhau. Gọi A là biến cố: "Trong bốn viên bi đó có cả bi đỏ và cả bi xanh". Tính $P(A)$ và $P(\overline{A})$.

Em có biết?

Về một số thành tựu của nhà toán học Pascal

Năm 16 tuổi, Pascal công bố một công trình toán học có nhan đề "Về thiết diện của đường conic", trong đó ông đã chứng minh một định lí, sau này được gọi là "Định lí Pascal về lục giác thần kì". Từ định lí này, người ta đã rút ra 400 hệ quả thú vị về hình học. Năm 17 tuổi Pascal đã chế tạo ra chiếc máy tính đầu tiên trong lịch sử nhân loại làm được bốn phép tính cộng, trừ, nhân, chia.

Năm 28 tuổi, Pascal đã toán học hoá các trò chơi may rủi để khai sinh ra lí thuyết Xác suất. Không chỉ là một nhà toán học lớn, Pascal còn là một nhà triết học, nhà vật lí và nhà văn lớn. Một số câu nói nổi tiếng của Pascal:

Blaise Pascal (1623 – 1662)

"Con người chỉ là một cây sậy, một vật rất yếu đuối của tự nhiên nhưng là một cây sậy biết suy nghĩ"; "Trái tim có những lí lẽ mà lí trí không giải thích được".

(Theo *review.siu.edu.vn/nhan-vat-su-kien/* và *www.tudiendanhngon.vn/*).