CHƯƠNG VI
HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

Chương này hệ thống hoá các khái niệm cơ bản về hàm số và đồ thị của hàm số đã được học ở các lớp dưới; cách vẽ đồ thị của hàm số bậc hai; xét dấu của tam thức bậc hai và vận dụng để giải bất phương trình bậc hai, bài toán thực tiễn. Ta cũng xét các phương trình chứa căn thức đơn giản có thể quy về phương trình bậc hai.

Bài 15 HÀM SỐ

THUẬT NGỮ

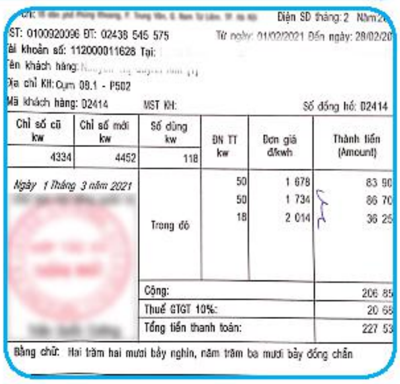
- Tập xác định
- Tập giá trị
- Đồ thị của hàm số
- Hàm số đồng biến
- Hàm số nghịch biến

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết những mô hình dẫn đến khái niệm hàm số.
- Mô tả các khái niệm cơ bản về hàm số: định nghĩa hàm số, tập xác định, tập giá trị, hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến, đồ thị của hàm số.
- Mô tả dạng đồ thị của hàm số đồng biến, nghịch biến.
- Vận dụng kiến thức của hàm số vào giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Quan sát hoá đơn tiền điện ở hình bên. Hãy cho biết tổng lượng điện tiêu thụ trong tháng và số tiền phải trả (chưa tính thuế giá trị gia tăng).

Có cách nào mô tả sự phụ thuộc của số tiền phải trả vào tổng lượng điện tiêu thụ hay không?



Điện SD tháng: 2 Năm:2
ST: 0100920096 ĐT: 02438 545 575
Từ ngày: 01/02/2021 Đến ngày: 28/02/20
ài khoản số: 112000011628 Tại:
ên khách hàng:
ịa chỉ KH: Cụm 09.1 - P502
Mã khách hàng: 02414 MST KH: Số đồng hồ: 02414

Chỉ số cũ kw	Chỉ số mới kw	Số dùng kw	ĐN TT kw	Đơn giá đ/kwh	Thành tiền (Amount)
4334	4452	118			
Ngày 1 Tháng 3 năm 2021		Trong đó	50	1 678	83 90
			50	1 734	86 70
			18	2 014	36 25
		Cộng:			206 85
		Thuế GTGT 10%:			20 68
		Tổng tiền thanh toán:			227 53

Bằng chữ: Hai trăm hai mươi bảy nghìn, năm trăm ba mươi bảy đồng chẵn

1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ

HĐ1. Bảng 6.1 cho biết nồng độ bụi PM 2.5 trong không khí theo thời gian trong ngày 25-3-2021 tại một trạm quan trắc ở Thủ đô Hà Nội:

Thời điểm (giờ)	0	4	8	12	16
Nồng độ bụi PM 2.5 ($\mu g/m^3$)	74,27	64,58	57,9	69,07	81,78

Bảng 6.1 (Theo *moitruongthudo.vn*)

Bụi PM 2.5 là hạt bụi mịn có đường kính nhỏ hơn 2,5 micrômét, gây tác hại cho sức khoẻ.

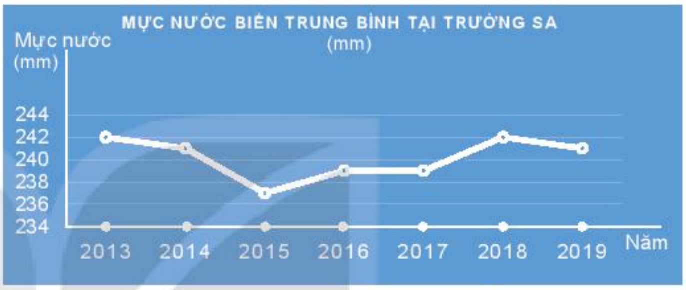
a) Hãy cho biết nồng độ bụi PM 2.5 tại mỗi thời điểm 8 giờ, 12 giờ, 16 giờ.

b) Trong Bảng 6.1, mỗi thời điểm tương ứng với bao nhiêu giá trị của nồng độ bụi PM 2.5?

HĐ2. Quan sát Hình 6.1.

a) Thời gian theo dõi mực nước biển ở Trường Sa được thể hiện trong hình từ năm nào đến năm nào?

b) Trong khoảng thời gian đó, năm nào mực nước biển trung bình tại Trường Sa cao nhất, thấp nhất?



Hình 6.1 (Theo *Tổng cục Thống kê*)

HĐ3. Tính tiền điện

a) Dựa vào Bảng 6.2 về giá bán lẻ điện sinh hoạt, hãy tính số tiền phải trả ứng với mỗi lượng điện tiêu thụ ở Bảng 6.3:

Lượng điện tiêu thụ (kWh)	50	100	200
Số tiền (nghìn đồng)	?	?	?

Bảng 6.3

Mức điện tiêu thụ	Giá bán điện (đồng/kWh)
Bậc 1 (từ 0 đến 50 kWh)	1 678
Bậc 2 (từ trên 50 đến 100 kWh)	1 734
Bậc 3 (từ trên 100 đến 200 kWh)	2 014
Bậc 4 (từ trên 200 đến 300 kWh)	2 536
Bậc 5 (từ trên 300 đến 400 kWh)	2 834
Bậc 6 (từ trên 400 kWh trở lên)	2 927

Bảng 6.2
(Theo *Tập đoàn Điện lực Việt Nam ngày 20-3-2019*)

b) Gọi x là lượng điện tiêu thụ (đơn vị kWh) và y là số tiền phải trả tương ứng (đơn vị nghìn đồng). Hãy viết công thức mô tả sự phụ thuộc của y vào x khi $0 \le x \le 50$.

kWh hay kW.h (kilôoát giờ, còn gọi là số điện) là đơn vị để đo lượng điện tiêu thụ. Ví dụ, một chiếc bàn là công suất 2 kW, nếu sử dụng liên tục trong 1 giờ sẽ tiêu thụ lượng điện là 2 kWh.

Trong HĐ1, nếu gọi x là thời điểm và y là nồng độ bụi PM 2.5 thì với mỗi giá trị của x, xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y. Ta tìm thấy mối quan hệ phụ thuộc tương tự giữa các đại lượng trong HĐ2, HĐ3.

Giả sử có đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x, trong đó x nhận giá trị thuộc tập hợp số D.

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số D *có một và chỉ một* giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x.

Tập hợp D gọi là tập xác định của hàm số.

Tập tất cả các giá trị y nhận được, gọi là tập giá trị của hàm số.

Khi y là hàm số của x, ta có thể viết $y = f(x)$, $y = g(x)$, ...

Ví dụ 1. Trong HĐ1, nếu gọi x là thời điểm, y là nồng độ bụi PM 2.5 thì x là biến số và y là hàm số của x. Đó là *hàm số được cho bằng bảng*.

Tập xác định của hàm số là $D = \{0; 4; 8; 12; 16\}$.

Tập giá trị của hàm số là $\{74,27; 64,58; 57,9; 69,07; 81,78\}$.

Ví dụ 2. Viết hàm số mô tả sự phụ thuộc của quãng đường đi được vào thời gian của một vật chuyển động thẳng đều với vận tốc 2 m/s. Tìm tập xác định của hàm số đó. Tính quãng đường vật đi được sau 5 s, 10 s.

Giải

Một vật chuyển động thẳng đều với vận tốc $v = 2$ m/s thì quãng đường đi được S (mét) phụ thuộc vào thời gian t (giây) theo công thức $S = 2t$, trong đó t là biến số, $S = S(t)$ là hàm số của t.

Tập xác định của hàm số là $D = [0; +\infty)$.

Quãng đường vật đi được sau 5 s là: $S_1 = S(5) = 2 \cdot 5 = 10$ (m).

Quãng đường vật đi được sau 10 s là: $S_2 = S(10) = 2 \cdot 10 = 20$ (m).

Chú ý. Khi cho *hàm số bằng công thức* $y = f(x)$ mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta quy ước tập xác định của hàm số là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x - 4}$; b) $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

Giải

a) Biểu thức $\sqrt{2x - 4}$ có nghĩa khi $2x - 4 \geq 0$, tức là khi $x \geq 2$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = [2; +\infty)$.

b) Biểu thức $\dfrac{1}{x - 1}$ có nghĩa khi $x - 1 \neq 0$, tức là khi $x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Luyện tập 1. a) Hãy cho biết Bảng 6.4 có cho ta một hàm số hay không. Nếu có, tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.

Thời điểm (năm)	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Tuổi thọ trung bình của người Việt Nam (tuổi)	73,1	73,2	73,3	73,4	73,5	73,5

Bảng 6.4 (Theo *Tổng cục Thống kê*)

b) Trở lại HĐ2, ta có *hàm số cho bằng biểu đồ*. Hãy cho biết giá trị của hàm số tại $x = 2018$. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số đó.

c) Cho hàm số $y = f(x) = -2x^2$. Tính $f(1)$; $f(2)$ và tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số này.

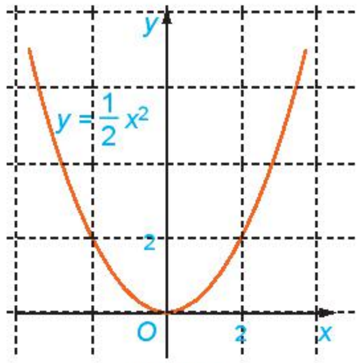
Nhận xét. Một hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng biểu đồ, bằng công thức hoặc bằng mô tả.

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

HĐ4. Quan sát Hình 6.2 và cho biết những điểm nào sau đây nằm trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$:

$$(0; 0), (2; 2), (-2; 2), (1; 2), (-1; 2).$$

Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa hoành độ và tung độ của những điểm nằm trên đồ thị.



Hình 6.2

> Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi x thuộc D.

Ví dụ 4. Viết công thức của hàm số cho ở HĐ3b. Tìm tập xác định, tập giá trị và vẽ đồ thị của hàm số này.

Giải

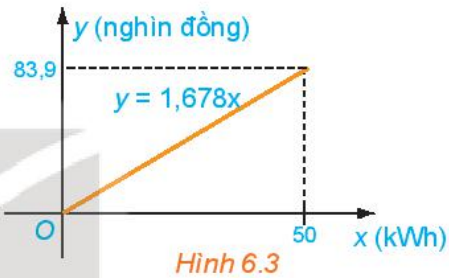
Công thức của hàm số cho ở HĐ3b là $y = 1{,}678x$ với $0 \le x \le 50$.

Tập xác định của hàm số này là D = [0; 50].

Vì $0 \le x \le 50$ nên $0 \le y \le 1{,}678 \cdot 50 = 83{,}9$.

Vậy tập giá trị của hàm số là [0; 83,9].

Đồ thị của hàm số $y = 1{,}678x$ trên [0; 50] là một đoạn thẳng (H.6.3).



Hình 6.3

Luyện tập 2

a) Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ (H.6.2), tìm x sao cho $y = 8$.

b) Vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2x + 1$ và $y = 2x^2$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

Vận dụng 1. Nếu lượng điện tiêu thụ từ trên 50 đến 100 kWh ($50 < x \le 100$) thì công thức liên hệ giữa y và x đã thiết lập ở HĐ3 không còn đúng nữa.

Theo bảng giá bán lẻ điện sinh hoạt (Bảng 6.2) thì số tiền phải trả là:

$$y = 1{,}678 \cdot 50 + 1{,}734(x - 50) = 83{,}9 + 1{,}734(x - 50), \text{ hay } y = 1{,}734x - 2{,}8 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Vậy trên tập xác định $D = (50; 100]$, hàm số y mô tả số tiền phải thanh toán có công thức là $y = 1{,}734x - 2{,}8$; tập giá trị của nó là $(83{,}9; 170{,}6]$.

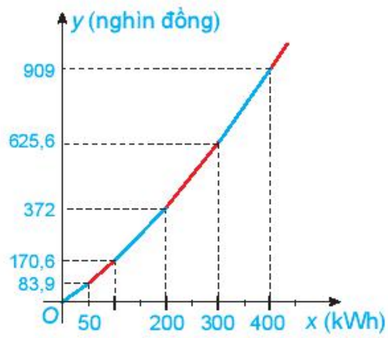
Hãy vẽ đồ thị ở Hình 6.3 vào vở rồi vẽ tiếp đồ thị của hàm số $y = 1{,}734x - 2{,}8$ trên tập $D = (50; 100]$.

Tìm hiểu thêm

Hàm số mô tả sự phụ thuộc của y (số tiền phải trả) vào x (lượng điện tiêu thụ) trên từng khoảng giá trị x được cho bằng công thức như sau:

$$y = \begin{cases} 1{,}678x & \text{nếu } 0 \le x \le 50 \\ 1{,}734x - 2{,}8 & \text{nếu } 50 < x \le 100 \\ 2{,}014x - 30{,}8 & \text{nếu } 100 < x \le 200 \\ 2{,}536x - 135{,}2 & \text{nếu } 200 < x \le 300 \\ 2{,}834x - 224{,}6 & \text{nếu } 300 < x \le 400 \\ 2{,}927x - 261{,}8 & \text{nếu } x > 400. \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số trên được vẽ như Hình 6.4.



Hình 6.4

3. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

HĐ5. Cho hàm số $y = -x + 1$ và $y = x$. Tính giá trị y theo giá trị x để hoàn thành bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x + 1$	?	?	?	?	?
$y = x$	?	?	?	?	?

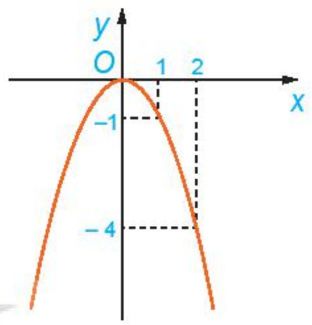
Khi giá trị x tăng, giá trị y tương ứng của mỗi hàm số $y = -x + 1$ và $y = x$ tăng hay giảm?

HĐ6. Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x) = -x^2$ trên $\mathbb{R}$ (H.6.5).

Hỏi:

a) Giá trị của $f(x)$ tăng hay giảm khi x tăng trên khoảng $(-\infty; 0)$?

b) Giá trị của $f(x)$ tăng hay giảm khi x tăng trên khoảng $(0; +\infty)$?



Hình 6.5

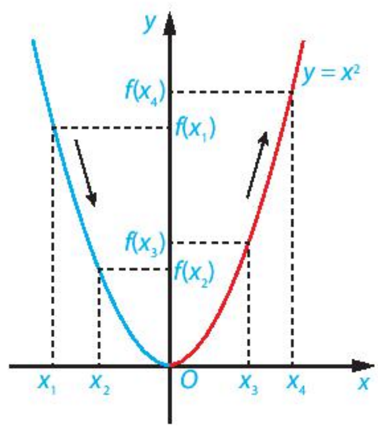
> Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến (tăng) trên khoảng $(a; b)$, nếu
>
> $$\forall x_1, x_2 \in (a; b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$
>
> Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến (giảm) trên khoảng $(a; b)$, nếu
>
> $$\forall x_1, x_2 \in (a; b),\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Ví dụ 5. Hàm số $y = x^2$ đồng biến hay nghịch biến trên mỗi khoảng: $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$?

Giải

Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$ như Hình 6.6.

- Trên khoảng $(-\infty; 0)$, đồ thị "đi xuống" từ trái sang phải và với $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$, $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$. Như vậy, hàm số $y = x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- Trên khoảng $(0; +\infty)$, đồ thị "đi lên" từ trái sang phải và với $x_3, x_4 \in (0; +\infty)$, $x_3 < x_4$ thì $f(x_3) < f(x_4)$. Như vậy, hàm số $y = x^2$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.



Hình 6.6

Chú ý

- Đồ thị của một hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ là đường "đi lên" từ trái sang phải;
- Đồ thị của một hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ là đường "đi xuống" từ trái sang phải.

Luyện tập 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x + 1$ và $y = -2x^2$. Hãy cho biết:

a) Hàm số $y = 3x + 1$ đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = -2x^2$ đồng biến hay nghịch biến trên mỗi khoảng: $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Vận dụng 2. Quan sát bảng giá cước taxi bốn chỗ trong Hình 6.7.

a) Tính số tiền phải trả khi di chuyển 25 km.

b) Lập công thức tính số tiền cước taxi phải trả theo số kilômét di chuyển.

c) Vẽ đồ thị và cho biết hàm số đồng biến trên khoảng nào, nghịch biến trên khoảng nào.

Hình 6.7

BÀI TẬP

6.1. Xét hai đại lượng x, y phụ thuộc vào nhau theo các hệ thức dưới đây. Những trường hợp nào thì y là hàm số của x?

a) $x + y = 1$; b) $y = x^2$; c) $y^2 = x$; d) $x^2 - y^2 = 0$.

6.2. Hãy cho một ví dụ về hàm số được cho bằng bảng hoặc biểu đồ. Hãy chỉ ra tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.

6.3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x + 1$; b) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$; c) $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x}$.

6.4. Tìm tập xác định và tập giá trị của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x + 3$; b) $y = 2x^2$.

6.5. Vẽ đồ thị các hàm số sau và chỉ ra các khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng.

a) $y = -2x + 1$; b) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

6.6. Giá thuê xe ô tô tự lái là 1,2 triệu đồng một ngày cho hai ngày đầu tiên và 900 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo. Tổng số tiền T phải trả là một hàm số của số ngày x mà khách thuê xe.

a) Viết công thức của hàm số $T = T(x)$.

b) Tính $T(2)$, $T(3)$, $T(5)$ và cho biết ý nghĩa của mỗi giá trị này.

Em có biết?

HÀM SỐ VÀ MÔ HÌNH HOÁ

Nhiều tình huống trong thực tiễn đời sống hoặc trong khoa học liên quan đến việc tìm hiểu một đại lượng thay đổi phụ thuộc vào một đại lượng khác như thế nào. Việc tìm hàm số mô tả sự phụ thuộc của đại lượng này vào đại lượng kia được gọi là *mô hình hoá*. Ta thường sử dụng những tính chất hình học hoặc tính chất đại số của đối tượng cần nghiên cứu để thiết lập mô hình. Dựa vào mô hình đã được thiết lập, ta có thể phân tích và dự đoán các tính chất của đối tượng hoặc của tình huống cần nghiên cứu.

Quá trình mô hình hoá bằng cách dùng hàm số thường bao gồm các bước sau:

Bước 1: Diễn tả mô hình bằng lời

Xác định đại lượng cần mô hình hoá và diễn tả bằng lời sự phụ thuộc của nó vào những đại lượng khác trong bài toán.

Bước 2: Chọn biến số

Xác định tất cả các đại lượng được dùng để diễn tả sự phụ thuộc bằng lời ở Bước 1. Dùng kí hiệu, chẳng hạn x, để chỉ một đại lượng thích hợp nào đó và biểu diễn các đại lượng khác theo x.

Bước 3: Thiết lập mô hình

Biểu diễn sự phụ thuộc ở Bước 1 như là một hàm số của biến số x đã được chọn ở Bước 2.

Bước 4: Sử dụng mô hình

Sử dụng hàm số đã thiết lập ở Bước 3 để trả lời các câu hỏi của bài toán.

Kiểm tra sự phù hợp của mô hình.

Dưới đây ta xét một ví dụ đơn giản minh hoạ cho quá trình mô hình hoá này.

Ví dụ. Bác An dùng 20 m lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.

a) Thiết lập hàm số mô tả diện tích của mảnh vườn.

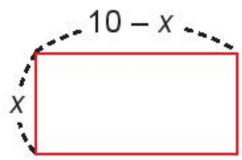
b) Bác An có thể rào thành mảnh vườn có diện tích bằng 21 m^2 được không?

c) Chiều rộng của mảnh vườn phải như thế nào để diện tích của mảnh vườn lớn hơn 24 m^2?

d) Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác An có thể rào được.

Giải

Bước 1. Diễn tả mô hình bằng lời



Ta biết rằng

Diện tích mảnh vườn hình chữ nhật = chiều rộng × chiều dài.

Bước 2. Chọn biến số

Có hai đại lượng thay đổi là chiều rộng và chiều dài. Vì ta muốn lập hàm số chỉ phụ thuộc vào một biến số ta chọn, chẳng hạn

$$x = \text{chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật}.$$

Ta cần tính chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật theo x. Do chu vi của mảnh vườn hình chữ nhật không đổi bằng 20 m và nửa chu vi bằng tổng của chiều rộng và chiều dài nên chiều dài của mảnh vườn sẽ là $10 - x$ (m).

Bước 3. Thiết lập mô hình

Diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là

$$S(x) = \text{chiều rộng x chiều dài} = x(10 - x) = -x^2 + 10x \text{ (m)}.$$

Như vậy, ở đây diện tích $S(x)$ của mảnh vườn là hàm số của chiều rộng x.

Bước 4. Sử dụng mô hình

Ta có thể sử dụng mô hình đã thiết lập để trả lời các câu hỏi ở phần b, c, d. Chẳng hạn, với câu hỏi ở phần b, ta cần tìm chiều rộng x của mảnh vườn sao cho

$$S(x) = 21 \text{ hay } -x^2 + 10x = 21, \text{ hay } x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này ta được hai nghiệm $x = 3$ và $x = 7$.

Vì chiều rộng phải nhỏ hơn hoặc bằng chiều dài nên chỉ có nghiệm $x = 3$ là thoả mãn. Khi đó mảnh vườn hình chữ nhật có chiều rộng là 3 m và chiều dài là $10 - 3 = 7$ (m).

Vậy bác An có thể dùng 20 m hàng rào dây thép gai để rào thành mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 21 m^2.

Trong các bài sau, các em sẽ được học những kiến thức toán học cần thiết để sử dụng hàm số $S(x)$ trả lời cho các câu hỏi ở phần c và phần d.

Bài 16 HÀM SỐ BẬC HAI

THUẬT NGỮ

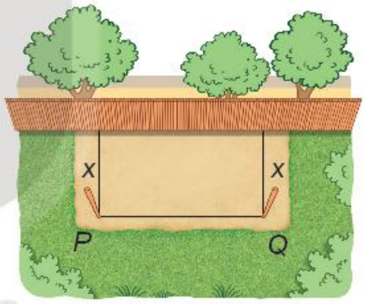
- Hàm số bậc hai
- Bảng giá trị
- Parabol
- Đỉnh
- Trục đối xứng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết hàm số bậc hai.
- Thiết lập bảng giá trị của hàm số bậc hai.
- Vẽ parabol (parabola) là đồ thị của hàm số bậc hai.
- Nhận biết các yếu tố cơ bản của đường parabol như đỉnh, trục đối xứng.
- Nhận biết và giải thích các tính chất của hàm số bậc hai thông qua đồ thị.
- Vận dụng kiến thức về hàm số bậc hai và đồ thị vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Bác Việt có một tấm lưới hình chữ nhật dài 20 m. Bác muốn dùng tấm lưới này rào chắn ba mặt áp bên bờ tường của khu vườn nhà mình thành một mảnh đất hình chữ nhật để trồng rau.

Hỏi hai cột góc hàng rào cần phải cắm cách bờ tường bao xa để mảnh đất được rào chắn của bác có diện tích lớn nhất?



Hình 6.8

1. KHÁI NIỆM HÀM SỐ BẬC HAI

HĐ1. Xét bài toán rào vườn ở tình huống mở đầu. Gọi x mét ($0 < x < 10$) là khoảng cách từ điểm cắm cọc đến bờ tường (H.6.8). Hãy tính theo x:

a) Độ dài cạnh PQ của mảnh đất.

b) Diện tích $S(x)$ của mảnh đất được rào chắn.

Ở đây ta tính được $S(x) = -2x^2 + 20x$.

Đây là một hàm số cho bởi công thức và gọi là một hàm số bậc hai của biến số x.

Tổng quát, ta có

> Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức
>
> $$y = ax^2 + bx + c,$$
>
> trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.
>
> Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

❓ Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc hai?

A. $y = x^4 + 3x^2 + 2$. **B.** $y = \frac{1}{x^2}$. **C.** $y = -3x^2 + 1$. **D.** $y = 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 3\frac{1}{x} - 1$.

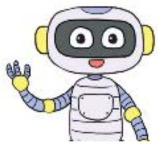
Nhận xét.

Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đã học ở lớp 9 là một trường hợp đặc biệt của hàm số bậc hai với $b = c = 0$.

Ví dụ 1. Xét hàm số bậc hai $y = -2x^2 + 20x$. Thay dấu "?" bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số.

x	0	2	4	5	6	8	10
y	?	?	?	?	?	?	?

Bảng giá trị của hàm số $y = -2x^2 + 20x$ tại một số điểm.



Giải

Thay các giá trị của x vào công thức hàm số, ta được:

x	0	2	4	5	6	8	10
y	0	32	48	50	48	32	0

Luyện tập 1. Cho hàm số $y = (x - 1)(2 - 3x)$.

a) Hàm số đã cho có phải là hàm số bậc hai không? Nếu có, hãy xác định các hệ số a, b, c của nó.

b) Thay dấu "?" bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số đã cho.

x	–2	–1	0	1
y	?	?	?	?

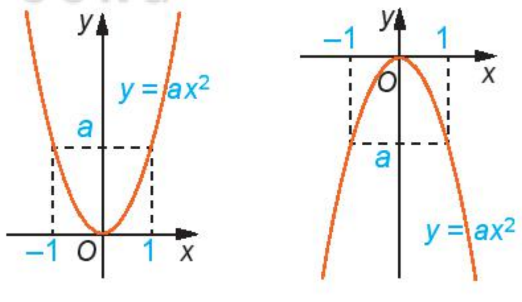
Vận dụng 1. Một viên bi rơi tự do từ độ cao 19,6 m xuống mặt đất. Độ cao h (mét) so với mặt đất của viên bi trong khi rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) theo công thức: $h = 19{,}6 - 4{,}9t^2$; $h, t \geq 0$.

a) Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ khi rơi viên bi chạm đất?

b) Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số h.

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Ở lớp 9, ta đã biết dạng đồ thị của hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) (H.6.9). Trong mục này ta sẽ tìm hiểu đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).



$a > 0$ $a < 0$

Hình 6.9

HĐ2. Xét hàm số $y = S(x) = -2x^2 + 20x$ ($0 < x < 10$).

a) Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn toạ độ các điểm trong bảng giá trị của hàm số lập được ở Ví dụ 1. Nối các điểm đã vẽ lại ta được dạng đồ thị hàm số $y = -2x^2 + 20x$ trên khoảng (0; 10) như trong Hình 6.10. Dạng đồ thị của hàm số $y = -2x^2 + 20x$ có giống với đồ thị của hàm số $y = -2x^2$ hay không?

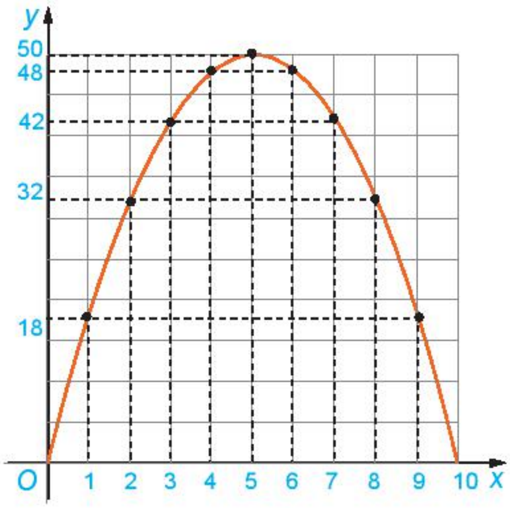
b) Quan sát dạng đồ thị của hàm số $y = -2x^2 + 20x$ trong Hình 6.10, tìm toạ độ điểm cao nhất của đồ thị.

c) Thực hiện phép biến đổi

$$y = -2x^2 + 20x = -2\left(x^2 - 10x\right)$$

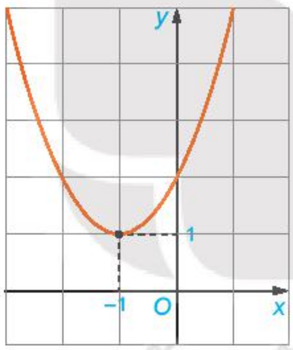
$$= -2\left(x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 25\right) + 50 = -2(x-5)^2 + 50.$$

Hãy cho biết giá trị lớn nhất của diện tích mảnh đất được rào chắn. Từ đó suy ra lời giải của bài toán ở phần mở đầu.

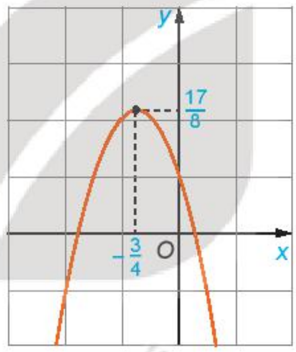


Hình 6.10. Dạng đồ thị của hàm số $y = -2x^2 + 20x$

HĐ3. Tương tự HĐ2, ta có dạng đồ thị của một số hàm số bậc hai sau.



$y = x^2 + 2x + 2$



$y = -2x^2 - 3x + 1$

Từ các đồ thị hàm số trên, hãy hoàn thành bảng sau đây.

Hàm số	Hệ số a	Tính chất của đồ thị		
		Bề lõm của đồ thị (Quay lên/Quay xuống)	Toạ độ điểm cao nhất/điểm thấp nhất	Trục đối xứng
$y = x^2 + 2x + 2$	1	Quay lên	$(-1; 1)$	$x = -1$
$y = -2x^2 - 3x + 1$	?	?	?	?

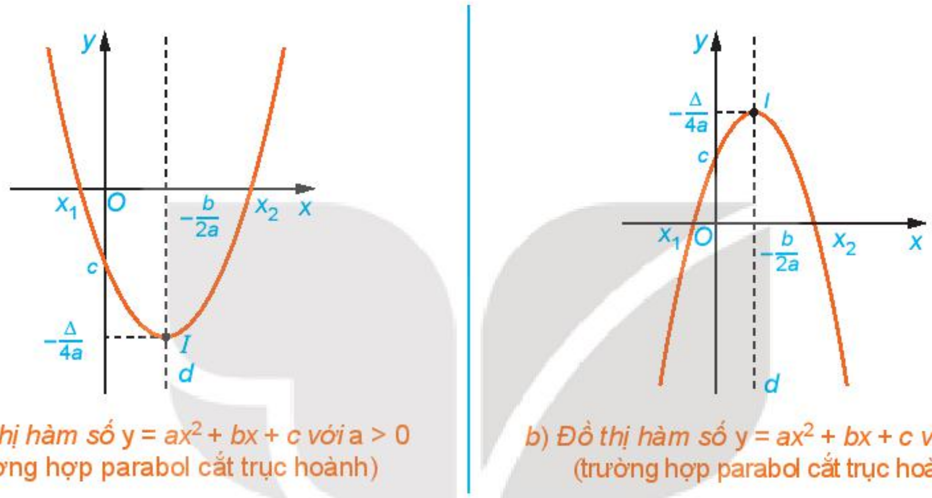
Tổng quát, ta có thể viết hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ dưới dạng

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Ta thấy điểm $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ thuộc đồ thị hàm số bậc hai và là một điểm đặc biệt, nó đóng vai trò như điểm $O(0;0)$ của đồ thị hàm số $y=ax^2$. Cụ thể:

- Nếu $a>0$ thì $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\geq-\frac{\Delta}{4a}$ với mọi x. Như vậy điểm I là điểm thấp nhất trên đồ thị.
- Nếu $a<0$ thì $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}\leq-\frac{\Delta}{4a}$ với mọi x. Như vậy điểm I là điểm cao nhất trên đồ thị.

Gọi (P_0) là parabol $y=ax^2$. Nếu ta "dịch chuyển" (P_0) theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ thì ta sẽ thu được đồ thị (P) của hàm số $y=ax^2+bx+c$ có dạng như Hình 6.11.



a) Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ với $a>0$ (trường hợp parabol cắt trục hoành)

b) Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ với $a<0$ (trường hợp parabol cắt trục hoành)

Hình 6.11

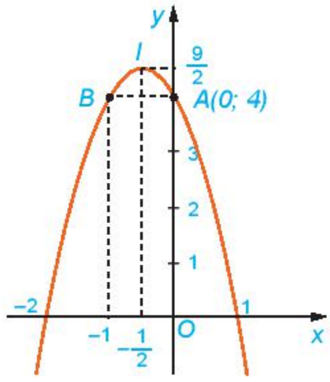
Nhận xét. Đồ thị hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ là một parabol.

- Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a>0$, xuống dưới nếu $a<0$.
- Để vẽ đường parabol $y=ax^2+bx+c$ ta tiến hành theo các bước sau:

1. Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$;
2. Vẽ trục đối xứng $x=-\frac{b}{2a}$;
3. Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;
4. Vẽ parabol.

Ví dụ 2. a) Vẽ parabol $y = -2x^2 - 2x + 4$.

b) Từ đồ thị, hãy tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị lớn nhất của hàm số $y = -2x^2 - 2x + 4$.



Hình 6.12

Giải

a) Ta có $a = -2 < 0$ nên parabol quay bề lõm xuống dưới. Đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$. Trục đối xứng $x = -\frac{1}{2}$. Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $A(0; 4)$. Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $-2x^2 - 2x + 4 = 0$, tức là $x = 1$ và $x = -2$ (H.6.12).

Để vẽ đồ thị chính xác hơn, ta có thể lấy thêm điểm đối xứng với A qua trục đối xứng $x = -\frac{1}{2}$ là $B(-1; 4)$.

b) Từ đồ thị ta thấy:

- Hàm số $y = -2x^2 - 2x + 4$ đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$;
- Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = \frac{9}{2}$, khi $x = -\frac{1}{2}$.

Luyện tập 2. Vẽ parabol $y = 3x^2 - 10x + 7$. Từ đó tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x^2 - 10x + 7$.

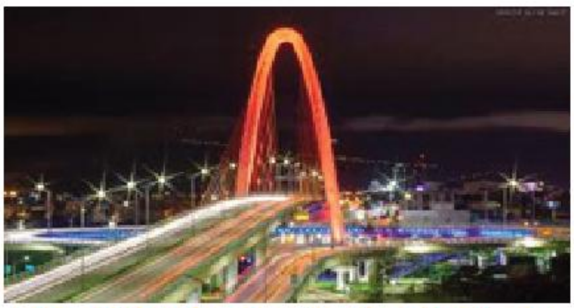
Nhận xét. Từ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, ta suy ra tính chất của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$:

Với $a > 0$	Với $a < 0$
Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số.	Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$; Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$; $-\frac{\Delta}{4a}$ là giá trị lớn nhất của hàm số.

Vận dụng 2. Bạn Nam đứng dưới chân cầu vượt ba tầng ở nút giao ngã ba Huế, thuộc thành phố Đà Nẵng để ngắm cầu vượt (H.6.13). Biết rằng trụ tháp cầu có dạng đường parabol, khoảng cách giữa hai chân trụ tháp khoảng 27 m, chiều cao của trụ tháp tính từ điểm trên mặt đất cách chân trụ tháp 2,26 m là 20 m. Hãy giúp bạn Nam ước lượng độ cao của đỉnh trụ tháp cầu (so với mặt đất).

Hướng dẫn

Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho một chân trụ tháp đặt tại gốc toạ độ, chân còn lại đặt trên tia Ox. Khi đó trụ tháp là một phần của đồ thị hàm số dạng $y = ax^2 + bx$.


Hình 6.13. Cầu vượt ba tầng ở nút giao ngã ba Huế thuộc thành phố Đà Nẵng.

BÀI TẬP

6.7. Vẽ các đường parabol sau:

a) $y = x^2 - 3x + 2$;

b) $y = -2x^2 + 2x + 3$;

c) $y = x^2 + 2x + 1$;

d) $y = -x^2 + x - 1$.

6.8. Từ các parabol đã vẽ ở Bài tập 6.7, hãy cho biết khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của mỗi hàm số bậc hai tương ứng.

6.9. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 1$, trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua hai điểm $A(1; 0)$ và $B(2; 4)$;

b) Đi qua điểm $A(1; 0)$ và có trục đối xứng $x = 1$;

c) Có đỉnh $I(1; 2)$;

d) Đi qua điểm $A(-1; 6)$ và có tung độ đỉnh $-0{,}25$.

6.10. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó đi qua điểm $A(8; 0)$ và có đỉnh là $I(6; -12)$.

6.11. Gọi (P) là đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$. Hãy xác định dấu của hệ số a và biệt thức Δ, trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) nằm hoàn toàn phía trên trục hoành;

b) (P) nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành;

c) (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía dưới trục hoành;

d) (P) tiếp xúc với trục hoành và nằm phía trên trục hoành.

6.12. Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau.

An nói: *Tớ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội* (H.6.14) *có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là* 8 m *và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng* 0,5 m *là* 2,93 m. *Từ đó tớ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là* 12 m.

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: *Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.*

Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé!

Hình 6.14. Cổng parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội

6.13. Bác Hùng dùng 40 m lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.

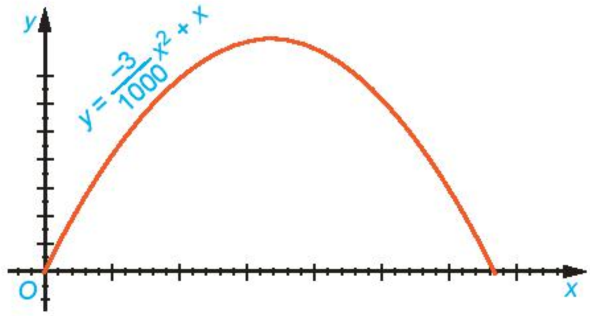
a) Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (mét) của nó.

b) Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được.

6.14. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng toạ độ Oxy là một parabol có phương trình $y = \frac{-3}{1000}x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O, y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất (H.6.15).

a) Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.

b) Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O. Khoảng cách này gọi là *tầm xa* của quỹ đạo.



Hình 6.15

Em có biết?

Một số mô hình toán học sử dụng hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai được sử dụng trong nhiều mô hình thực tế. Dưới đây ta xét một số mô hình đơn giản thường gặp.

– Phương trình chuyển động của vật chuyển động thẳng biến đổi đều

$$y = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

trong đó x_0 là toạ độ ban đầu của vật, v_0 là vận tốc ban đầu của vật và a là gia tốc của vật (a cùng dấu với v_0 nếu vật chuyển động nhanh dần đều và ngược dấu với v_0 nếu vật chuyển động chậm dần đều). Như vậy toạ độ $x(t)$ của vật là một hàm số bậc hai của thời gian t.

Nói riêng, khi bỏ qua sức cản của không khí, nếu ném một vật lên trên theo phương thẳng đứng thì chuyển động của vật sẽ chỉ chịu ảnh hưởng của trọng lực và vật sẽ có gia tốc bằng gia tốc trọng trường. Khi đó độ cao (so với mặt đất) của vật tại thời điểm t cho bởi phương trình

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

trong đó y_0 (mét) là độ cao ban đầu của vật khi ném lên, v_0(m/s) là vận tốc ban đầu của vật và g là gia tốc trọng trường ($g \approx 9{,}8$ m/s^2).

Đặc biệt, khi bỏ qua sức cản không khí, nếu một vật rơi tự do từ độ cao y_0 (mét) so với mặt đất thì độ cao y (mét) của nó tại thời điểm t (giây) cho bởi công thức

$$y(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2.$$

– Phương trình chuyển động của vật ném xiên

Một vật được ném từ độ cao h (mét) so với mặt đất, với vận tốc ban đầu v_0(m/s) hợp với phương ngang một góc α. Khi đó quỹ đạo chuyển động của vật tuân theo phương trình

$$y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha + h,$$

ở đó x (mét) là khoảng cách vật bay được theo phương ngang tính từ mặt đất tại điểm ném, y (mét) là độ cao so với mặt đất của vật trong quá trình bay, g là gia tốc trọng trường. Như vậy quỹ đạo chuyển động của một vật ném xiên là một parabol.

Tương tự, đường đi của quả bóng khi được cầu thủ đá lên không trung, quỹ đạo của viên đạn pháo khi bắn ra khỏi nòng pháo, tia lửa hàn, hạt nước bắn lên từ đài phun nước,... đều có dạng đường parabol (H.6.16).

Cầu thủ sút quả bóng

Đài phun nước ở Hồ Gươm

Tia lửa hàn

Hình 6.16

– Doanh thu bán hàng

Trong kinh tế, doanh thu bán hàng là số tiền nhận được khi bán một mặt hàng. Doanh thu R bằng đơn giá x của mặt hàng (tức là giá bán của một sản phẩm) nhân với số lượng n sản phẩm đã bán được, tức là

$$R = x \cdot n.$$

Định luật nhu cầu khẳng định rằng giữa x và n có mối liên hệ với nhau: Khi cái này tăng thì cái kia sẽ giảm. Phương trình liên hệ giữa x và n gọi là phương trình nhu cầu. Nếu phương trình nhu cầu là liên hệ bậc nhất, tức là $n = a - bx$ (a, b là những hằng số dương) thì doanh thu bán hàng sẽ là hàm số bậc hai của đơn giá

$$R(x) = xn = x(a - bx) = ax - bx^2.$$

Khi đó người ta thường quan tâm đến việc tìm giá bán x để doanh thu đạt cực đại, hoặc tìm giá bán x để doanh thu vượt một mức nào đó.

Bài 17 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

THUẬT NGỮ

- Tam thức bậc hai
- Dấu của tam thức bậc hai
- Bất phương trình bậc hai

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Giải thích Định lí về dấu của tam thức bậc hai từ việc quan sát đồ thị của hàm bậc hai.
- Giải bất phương trình bậc hai.
- Vận dụng bất phương trình bậc hai vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Xét bài toán rào vườn ở Bài 16, nhưng ta trả lời câu hỏi: Hai cột góc hàng rào (H.6.8) cần phải cắm cách bờ tường bao nhiêu mét để mảnh đất được rào chắn có diện tích không nhỏ hơn 48 m^2?

1. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

HĐ1. Hãy chỉ ra một đặc điểm chung của các biểu thức dưới đây:

$A = 0,5x^2$; $\quad B = 1 - x^2$; $\quad C = x^2 + x + 1$; $\quad D = (1 - x)(2x + 1)$.

> Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức có dạng $ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những số thực cho trước (với $a \neq 0$), được gọi là các hệ số của tam thức bậc hai.

Người ta thường viết $f(x) = ax^2 + bx + c$. Các đa thức đã cho trong HĐ1 là những tam thức bậc hai. Ở đa thức A, ta có $a = 0,5$; $b = 0$; $c = 0$.

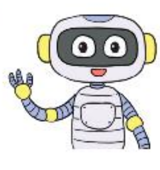
Luyện tập 1. Hãy cho biết biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai.

$A = 3x + 2\sqrt{x} + 1$; $\quad B = -5x^4 + 3x^2 + 4$; $\quad C = -\dfrac{2}{3}x^2 + 7x - 4$; $\quad D = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 2\dfrac{1}{x} + 3$.

Chú ý

Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ cũng được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ và $\Delta' = b'^2 - ac$, với $b = 2b'$ tương ứng được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$.

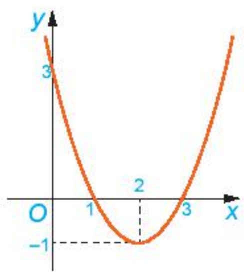


HĐ2. Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Xác định hệ số a. Tính $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ và nhận xét về dấu của chúng so với dấu của hệ số a.

b) Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ (H.6.17). Xét trên từng khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$, $(3; +\infty)$, đồ thị nằm phía trên hay nằm phía dưới trục Ox?

c) Nhận xét về dấu của $f(x)$ và dấu của hệ số a trên từng khoảng đó.

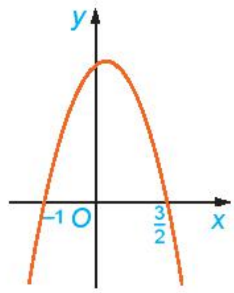


Hình 6.17

HĐ3. Cho đồ thị hàm số $y = g(x) = -2x^2 + x + 3$ như Hình 6.18.

a) Xét trên từng khoảng $(-\infty; -1)$, $\left(-1; \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$, đồ thị nằm phía trên trục Ox hay nằm phía dưới trục Ox?

b) Nhận xét về dấu của $g(x)$ và dấu của hệ số a trên từng khoảng đó.



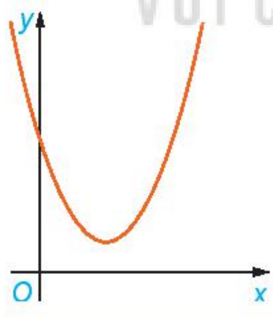
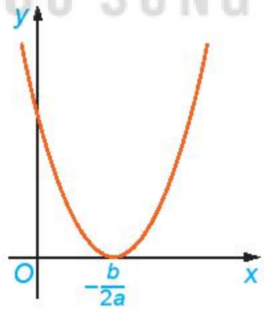
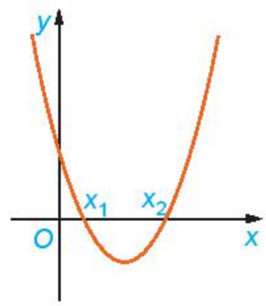
Hình 6.18

Nhận xét

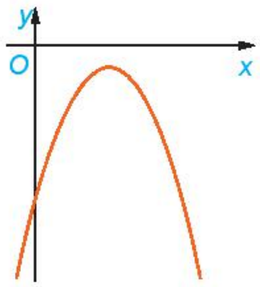
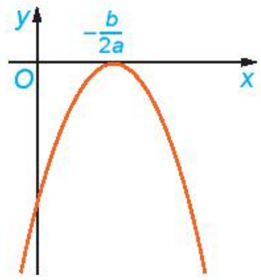
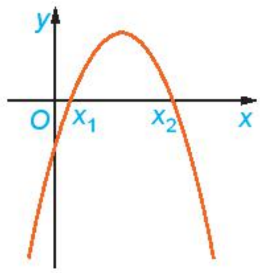
Từ HĐ2 và HĐ3 ta thấy, nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi giá trị $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (ở ngoài đoạn hai nghiệm) và trái dấu với a với mọi giá trị $x \in (x_1; x_2)$ (ở trong khoảng hai nghiệm).

HĐ4. Nêu nội dung thay vào ô có dấu "?" trong bảng sau cho thích hợp.

- Trường hợp $a > 0$

Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Dạng đồ thị			
Vị trí của đồ thị so với trục Ox	Đồ thị nằm hoàn toàn phía trên trục Ox.	Đồ thị nằm phía trên trục Ox và tiếp xúc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\dfrac{b}{2a}$.	– Đồ thị nằm phía trên trục Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$. – Đồ thị nằm phía dưới trục Ox khi $x_1 < x < x_2$.

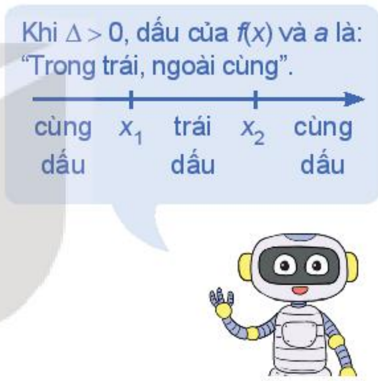
• Trường hợp $a < 0$

Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Dạng đồ thị			
Vị trí của đồ thị so với trục Ox	?	?	?

Mối quan hệ giữa dấu của tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ với dấu của hệ số a trong từng trường hợp của Δ được phát biểu trong Định lí về dấu tam thức bậc hai sau đây.

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ và $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì tam thức $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 $(x_1 < x_2)$. Khi đó, $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi $x \in (x_1; x_2)$.



Chú ý. Trong Định lí về dấu tam thức bậc hai có thể thay Δ bởi Δ'.

Ví dụ 1. Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $x^2 + x + 1$; b) $-\dfrac{3}{2}x^2 + 9x - \dfrac{27}{2}$; c) $2x^2 + 6x - 8$.

Giải

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ có $\Delta = -3 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 9x - \dfrac{27}{2}$ có $\Delta = 0$ và $a = -\dfrac{3}{2} < 0$ nên $g(x)$ có nghiệm kép $x = 3$ và $g(x) < 0$ với mọi $x \neq 3$.

c) Dễ thấy $h(x) = 2x^2 + 6x - 8$ có $\Delta' = 25 > 0$, $a = 2 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -4$; $x_2 = 1$.
Do đó ta có bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $h(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ và $h(x) < 0$ với mọi $x \in (-4; 1)$.

Luyện tập 2. Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $-3x^2 + x - \sqrt{2}$; b) $x^2 + 8x + 16$; c) $-2x^2 + 7x - 3$.

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

HĐ5. Trở lại *tình huống mở đầu*. Với yêu cầu mảnh đất được rào chắn có diện tích không nhỏ hơn 48 m^2, hãy viết bất đẳng thức thể hiện sự so sánh biểu thức tính diện tích $S(x) = -2x^2 + 20x$ với 48.

Từ HĐ5, ta có $2x^2 - 20x + 48 \leq 0$. (1)

Đây là một bất phương trình bậc hai.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

- Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho và $a \neq 0$.
- Số thực x_0 gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$, nếu $ax_0^2 + bx_0 + c > 0$. Tập hợp gồm tất cả các nghiệm của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ gọi là ***tập nghiệm*** của bất phương trình này.
- Giải bất phương trình bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ là tìm tập nghiệm của nó, tức là tìm các khoảng mà trong đó $f(x)$ cùng dấu với hệ số a (nếu $a > 0$) hay trái dấu với hệ số a (nếu $a < 0$).

Nhận xét. Để giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$) ta cần xét dấu tam thức $ax^2 + bx + c$, từ đó suy ra tập nghiệm.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2 + x + 5 \leq 0$; b) $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 \geq 0$; c) $-x^2 + 2x + 1 > 0$.

Giải

a) Tam thức $f(x) = 3x^2 + x + 5$ có $\Delta = -59 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x)$ luôn dương (cùng dấu với a) với mọi x, tức là $3x^2 + 5x + 5 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

b) Tam thức $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$ có $\Delta' = 0$, hệ số $a = -3 < 0$ nên $f(x)$ luôn âm (cùng dấu với a) với mọi $x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$, tức là $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 < 0$ với mọi $x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Tam thức $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ có $\Delta' = 2 > 0$ nên $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ và $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Mặt khác $a = -1 < 0$, do đó ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình (1), từ đó suy ra lời giải cho bài toán rào vườn ở *tình huống mở đầu*.

Giải

Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 20x + 48$ có hai nghiệm $x_1 = 4$; $x_2 = 6$ và hệ số $a = 2 > 0$. Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình (1) là đoạn $[4; 6]$. Như vậy khoảng cách từ điểm cắm cột đến bờ tường phải lớn hơn hoặc bằng 4 m và nhỏ hơn hoặc bằng 6 m thì mảnh đất rào chắn của bác Việt sẽ có diện tích không nhỏ hơn 48 m^2.

Luyện tập 3. Giải các bất phương trình bậc hai sau:

a) $-5x^2 + x - 1 \le 0$;   b) $x^2 - 8x + 16 \le 0$;   c) $x^2 - x + 6 > 0$.

Vận dụng. Độ cao so với mặt đất của một quả bóng được ném lên theo phương thẳng đứng được mô tả bởi hàm số bậc hai $h(t) = -4{,}9t^2 + 20t + 1$, ở đó độ cao $h(t)$ tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Trong khoảng thời điểm nào trong quá trình bay của nó, quả bóng sẽ ở độ cao trên 5 m so với mặt đất?

Tìm hiểu thêm

Ta có thể dùng máy tính cầm tay để giải bất phương trình bậc hai. Sau khi mở máy, ta bấm liên tiếp các phím sau đây:

Mode	↓	1	1

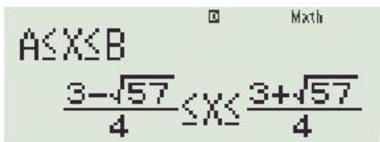
Sau đó chọn một trong bốn dạng bất phương trình bậc hai rồi nhập các hệ số *a*, *b*, *c*, từ đó nhận được nghiệm.

Ví dụ để giải bất phương trình: $2x^2 - 3x - 6 \le 0$ ta bấm tổ hợp phím

Mode	↓	1	1	4	2	=	−3	=	−6	=	=

Màn hình máy tính hiển thị: $\frac{3-\sqrt{57}}{4} \le x \le \frac{3+\sqrt{57}}{4}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\frac{3-\sqrt{57}}{4}; \frac{3+\sqrt{57}}{4}\right]$.



BÀI TẬP

6.15. Xét dấu các tam thức bậc hai sau:

a) $3x^2 - 4x + 1$; b) $x^2 + 2x + 1$;

c) $-x^2 + 3x - 2$; d) $-x^2 + x - 1$.

6.16. Giải các bất phương trình bậc hai:

a) $x^2 - 1 \geq 0$; b) $x^2 - 2x - 1 < 0$;

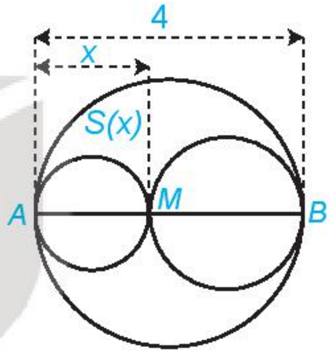
c) $-3x^2 + 12x + 1 \leq 0$; d) $5x^2 + x + 1 \geq 0$.

6.17. Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai sau dương với mọi $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + (m+1)x + 2m + 3.$$

6.18. Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao 320 m với vận tốc ban đầu $v_0 = 20$ m/s. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá 100 m? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

6.19. Xét đường tròn đường kính $AB = 4$ và một điểm M di chuyển trên đoạn AB, đặt $AM = x$ (H.6.19). Xét hai đường tròn đường kính AM và MB. Kí hiệu $S(x)$ là diện tích phần hình phẳng nằm trong hình tròn lớn và nằm ngoài hai hình tròn nhỏ. Xác định các giá trị của x để diện tích $S(x)$ không vượt quá một nửa tổng diện tích hai hình tròn nhỏ.



Hình 6.19

Bài 18 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

THUẬT NGỮ

Phương trình chứa căn thức

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

Giải một số phương trình chứa căn bậc hai đơn giản có thể quy về phương trình bậc hai.

Trong bài này chúng ta sẽ giải các phương trình chứa căn thức thường gặp có dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$ và $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$.

1. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

HĐ1. Cho phương trình $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{-x^2-2x+2}$.

a) Bình phương hai vế phương trình để khử căn và giải phương trình bậc hai nhận được.

b) Thử lại các giá trị x tìm được ở câu a có thoả mãn phương trình đã cho hay không.

> Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$, ta thực hiện như sau:
> – Bình phương hai vế và giải phương trình nhận được;
> – Thử lại các giá trị x tìm được ở trên có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-4x-2}=\sqrt{x^2-x-2}$.

Giải

Bình phương hai vế của phương trình, ta được

$$2x^2-4x-2=x^2-x-2.$$

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x=0$. Từ đó $x=0$ hoặc $x=3$.

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 3$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$.

Luyện tập 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2-6x+1}=\sqrt{-2x^2-9x+1}$;

b) $\sqrt{2x^2-3x-5}=\sqrt{x^2-7}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$.

HĐ2. Cho phương trình $\sqrt{26x^2-63x+38}=5x-6$.

a) Bình phương hai vế và giải phương trình nhận được.

b) Thử lại các giá trị x tìm được ở câu a có thoả mãn phương trình đã cho hay không.

Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$, ta thực hiện như sau:

– Bình phương hai vế và giải phương trình nhận được;

– Thử lại các giá trị x tìm được ở trên có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-5x-9}=x-1$.

Giải

Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$2x^2-5x-9=x^2-2x+1.$$

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x-10=0$. Từ đó $x=-2$ hoặc $x = 5$.

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 5$ thoả mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=5$.

Với $x=-2$ thì vế phải âm, vế trái không âm. Do đó, ta có thể kết luận $x=-2$ không là nghiệm của phương trình đã cho mà không cần thử lại.

Luyện tập 2. Giải các phương trình sau:

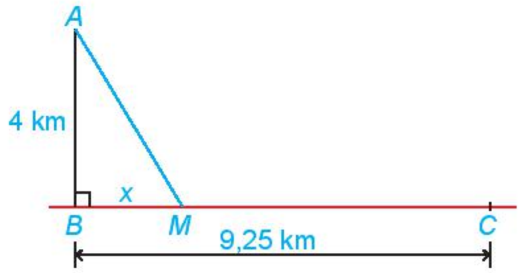
a) $\sqrt{2x^2+x+3}=1-x$;

b) $\sqrt{3x^2-13x+14}=x-3$.

Vận dụng. Bác Việt sống và làm việc tại trạm hải đăng cách bờ biển 4 km. Hằng tuần bác chèo thuyền vào vị trí gần nhất trên bờ biển là bến Bính để nhận hàng hoá do cơ quan cung cấp. Tuần này, do trục trặc về vận chuyển nên toàn bộ số hàng vẫn đang nằm ở thôn Hoành, bên bờ biển cách bến Bính 9,25 km và sẽ được anh Nam vận chuyển trên con đường dọc bờ biển tới bến Bính bằng xe kéo. Bác Việt đã gọi điện thống nhất với anh Nam là họ sẽ gặp nhau ở vị trí nào đó giữa bến Bính và thôn Hoành để hai người có mặt tại đó cùng lúc, không mất thời gian chờ nhau. Tìm vị trí hai người dự định gặp nhau, biết rằng vận tốc kéo xe của anh Nam là 5 km/h và thuyền của bác Việt di chuyển với vận tốc 4 km/h. Ngoài ra giả thiết rằng đường bờ biển từ thôn Hoành đến bến Bính là đường thẳng và bác Việt cũng luôn chèo thuyền tới một điểm trên bờ biển theo một đường thẳng.

Hướng dẫn

Ta mô hình hoá bài toán như trong Hình 6.20: Trạm hải đăng ở vị trí A; bến Bính ở B và thôn Hoành ở C. Giả sử bác Việt chèo thuyền cập bến ở vị trí M và ta đặt $BM=x$ $(x>0)$. Để hai người không phải chờ nhau thì thời gian chèo thuyền bằng thời gian kéo xe nên ta có phương trình:



Hình 6.20

$$\frac{\sqrt{x^2+16}}{4}=\frac{9,25-x}{5}.$$

Giải phương trình này sẽ tìm được vị trí hai người dự định gặp nhau.

BÀI TẬP

6.20. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2-4x-1}=\sqrt{2x^2-4x+3}$; b) $\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{-2x^2+5}$;

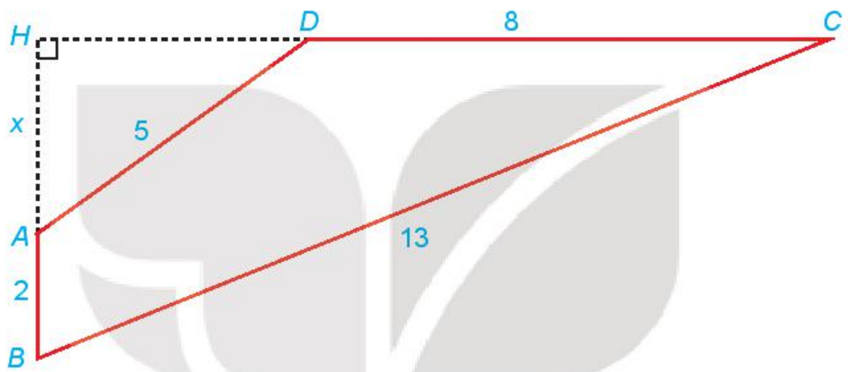
c) $\sqrt{2x^2+3x-3}=\sqrt{-x^2-x+1}$; d) $\sqrt{-x^2+5x-4}=\sqrt{-2x^2+4x+2}$.

6.21. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{6x^2+13x+13}=2x+4$; b) $\sqrt{2x^2+5x+3}=-3-x$;

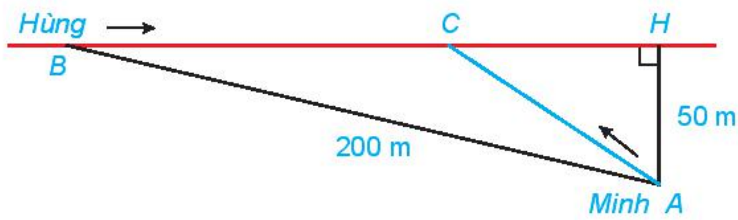
c) $\sqrt{3x^2-17x+23}=x-3$; d) $\sqrt{-x^2+2x+4}=x-2$.

6.22. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB\perp CD$; $AB=2$; $BC=13$; $CD=8$; $DA=5$ (H.6.21). Gọi H là giao điểm của AB và CD và đặt $x = AH$. Hãy thiết lập một phương trình để tính độ dài x, từ đó tính diện tích tứ giác $ABCD$.



Hình 6.21

6.23. Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng 50 m để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B, cách mình một đoạn 200 m thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là 5 km/h, vận tốc xe đạp của Hùng là 15 km/h. Hãy xác định vị trí C trên lề đường (H.6.22) để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 6.22

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A – TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

6.24. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ là

A. $D = [2; +\infty)$. B. $D = (2; +\infty)$. C. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $D = \mathbb{R}$.

6.25. Parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có đỉnh là

A. $I(-1; 0)$. B. $I(3; 0)$. C. $I(0; 3)$. D. $I(1; 4)$.

6.26. Hàm số $y = x^2 - 5x + 4$

A. Đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.

C. Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

D. Nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.

6.27. Bất phương trình $x^2 - 2mx + 4 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi

A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m > 2$.

6.28. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 3} = x - 1$ là

A. $\left\{-1-\sqrt{5}; -1+\sqrt{5}\right\}$. B. $\left\{-1-\sqrt{5}\right\}$. C. $\left\{-1+\sqrt{5}\right\}$. D. $\varnothing$.

B – TỰ LUẬN

6.29. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$; b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

6.30. Với mỗi hàm số dưới đây, hãy vẽ đồ thị, tìm tập giá trị, khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của nó:

a) $y = -x^2 + 6x - 9$; b) $y = -x^2 - 4x + 1$;

c) $y = x^2 + 4x$; d) $y = 2x^2 + 2x + 1$.

6.31. Xác định parabol (P): $y = ax^2 + bx + 3$ trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) đi qua hai điểm $A(1; 1)$ và $B(-1; 0)$;

b) (P) đi qua điểm $M(1; 2)$ và nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng;

c) (P) có đỉnh là $I(1; 4)$.

6.32. Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 - 3x + 1 > 0$;

b) $x^2 + 5x + 4 < 0$;

c) $-3x^2 + 12x - 12 \geq 0$;

d) $2x^2 + 2x + 1 < 0$.

6.33. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 - 14} = x - 1$;

b) $\sqrt{-x^2 - 5x + 2} = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

6.34. Một công ty bắt đầu sản xuất và bán một loại máy tính xách tay từ năm 2018. Số lượng loại máy tính đó bán được trong hai năm liên tiếp 2018 và 2019 lần lượt là 3,2 nghìn và 4 nghìn chiếc. Theo nghiên cứu dự báo thị trường của công ty, trong khoảng 10 năm kể từ năm 2018, số lượng máy tính loại đó bán được mỗi năm có thể được xấp xỉ bởi một hàm số bậc hai.

Giả sử t là thời gian (theo đơn vị năm) tính từ năm 2018. Số lượng loại máy tính đó bán được trong năm 2018 và năm 2019 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm (0; 3,2) và (1; 4). Giả sử điểm (0; 3,2) là đỉnh đồ thị của hàm số bậc hai này.

a) Lập công thức của hàm số mô tả số lượng máy tính xách tay bán được qua từng năm.

b) Tính số lượng máy tính xách tay đó bán được trong năm 2024.

c) Đến năm bao nhiêu thì số lượng máy tính xách tay đó bán được trong năm sẽ vượt mức 52 nghìn chiếc?