CHƯƠNG III
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Lượng giác được phát triển từ nhu cầu tính toán góc và khoảng cách trong rất nhiều lĩnh vực như thiên văn học, lập bản đồ, bản vẽ thiết kế, khảo sát và tìm tầm bắn của pháo binh.

Ở lớp 9, em đã biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn. Chương này mở rộng khái niệm đó cho một góc bất kì từ 0° đến 180°.

Bài 5 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

THUẬT NGỮ

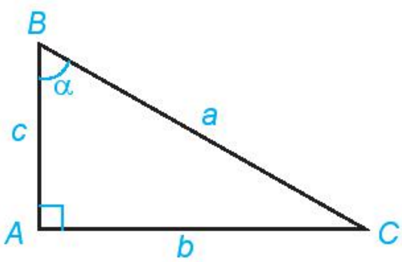
- Giá trị lượng giác của một góc
- Hai góc bù nhau

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.
- Giải thích hệ thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau, bù nhau.
- Sử dụng máy tính cầm tay để tính các giá trị lượng giác của một góc.
- Vận dụng giải một số bài toán có nội dung thực tiễn.

$\sin\alpha = \dfrac{b}{a}$ $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$

$\tan\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\cot\alpha = \dfrac{c}{b}$

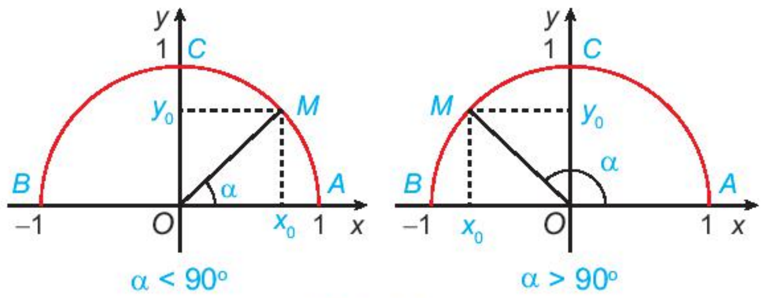


Hình 3.1

1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành (H.3.2) được gọi là nửa đường tròn đơn vị.

Cho trước một góc α, $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$. Khi đó, có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\widehat{xOM} = \alpha$.



Hình 3.2

HĐ1. a) Nêu nhận xét về vị trí của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị trong mỗi trường hợp sau:

- $\alpha = 90^\circ$;
- $\alpha < 90^\circ$;
- $\alpha > 90^\circ$.

b) Khi $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, nêu mối quan hệ giữa $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ với hoành độ và tung độ của điểm M.

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho một góc bất kì từ 0° đến 180°, ta có định nghĩa sau:

Với mỗi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó:

- sin của góc α là tung độ y_0 của điểm M, được kí hiệu là $\sin\alpha$;
- côsin của góc α là hoành độ x_0 của điểm M, được kí hiệu là $\cos\alpha$;
- Khi $\alpha \ne 90^\circ$ (hay là $x_0 \ne 0$), tang của α là $\dfrac{y_0}{x_0}$, được kí hiệu là $\tan\alpha$;
- Khi $\alpha \ne 0^\circ$ và $\alpha \ne 180^\circ$ (hay là $y_0 \ne 0$), côtang của α là $\dfrac{x_0}{y_0}$, được kí hiệu là $\cot\alpha$.

Từ định nghĩa trên, ta có:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\alpha \ne 90^\circ);\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\alpha \ne 0^\circ \text{ và } \alpha \ne 180^\circ);\ \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}\ (\alpha \notin \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\}).$$

Sau đây là bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt mà em nên nhớ.

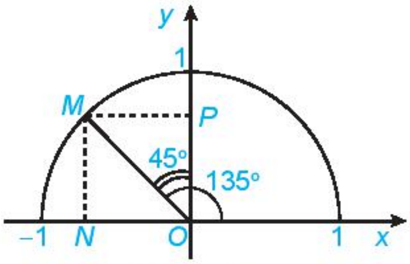
GTLG \ α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||	0
$\cot\alpha$	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	||

Bảng 3.1

Ví dụ 1. Tìm các giá trị lượng giác của góc 135°.

Giải (H.3.3)

Gọi M là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy.



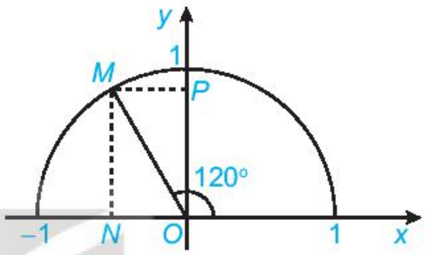
Hình 3.3

Vì $\widehat{xOM} = 135^\circ$ nên $\widehat{MON} = 45^\circ$, $\widehat{MOP} = 45^\circ$. Vậy các tam giác MON, MOP là vuông cân với cạnh huyền $OM = 1$. Từ đó, ta có $ON = OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mặt khác, điểm M nằm bên trái trục tung nên có toạ độ là $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Theo định nghĩa, ta có:

$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan 135^\circ = -1$; $\quad \cot 135^\circ = -1$.



Hình 3.4

Luyện tập 1. Tìm các giá trị lượng giác của góc 120° (H.3.4).

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính (đúng hoặc gần đúng) các giá trị lượng giác của một góc và tính góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.

Chẳng hạn, với một loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím [SHIFT] [MODE] (SETUP) rồi bấm phím [3] để chọn đơn vị đo góc là "độ". Sau đó tính giá trị lượng giác của góc hoặc tính góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.

- Tính giá trị lượng giác của một số góc:

Tính	Bấm phím	Kết quả
$\sin 48^\circ 50' 40''$	[sin] [4] [8] [°'"] [5] [0] [°'"] [4] [0] [°'"] [=]	$\sin 48^\circ 50' 40'' \approx 0,7529256291$
$\cos 112^\circ 12' 45''$	[cos] [1] [1] [2] [°'"] [1] [2] [°'"] [4] [5] [°'"] [=]	$\cos 112^\circ 12' 45'' \approx -0,3780427715$
$\tan 15^\circ$	[tan] [1] [5] [=]	$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

- Tìm góc khi biết một giá trị lượng giác của góc đó:

Tìm x, biết	Bấm phím	Kết quả
$\sin x = 0,3456$	[SHIFT] [sin] ($\sin^{-1}$) [0] [•] [3] [4] [5] [6] [=] [°'"]	$x \approx 20^\circ 13' 7''$

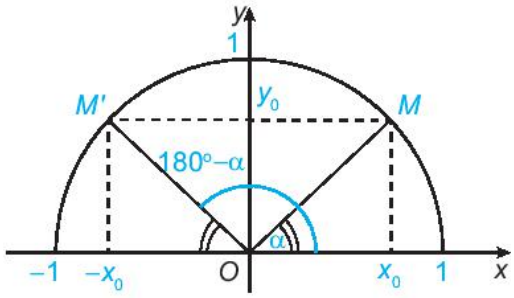
Chú ý

- Khi tìm x biết $\sin x$, máy tính chỉ đưa ra giá trị $x \le 90^\circ$.
- Muốn tìm x khi biết $\cos x$, $\tan x$, ta cũng làm tương tự như trên, chỉ thay phím [sin] tương ứng bởi phím [cos], [tan].

2. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

Ở lớp 9, em đã biết mối quan hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau. Trong mục này, em hãy tìm mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau.

Đối với một góc α tuỳ ý ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), gọi M, M' là hai điểm trên nửa đường tròn đơn vị tương ứng với hai góc bù nhau α và $180^\circ - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha$, $\widehat{xOM'} = 180^\circ - \alpha$) (H.3.5).



Hình 3.5

HĐ2. Nêu nhận xét về vị trí của hai điểm M, M' đối với trục Oy. Từ đó, nêu các mối quan hệ giữa $\sin\alpha$ và $\sin(180^\circ - \alpha)$, giữa $\cos\alpha$ và $\cos(180^\circ - \alpha)$.

> Đối với hai góc bù nhau, α và $180^\circ - \alpha$, ta có:
> - $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
> - $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$;
> - $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ $(\alpha \ne 90^\circ)$;
> - $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.

Ví dụ 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$.

Giải

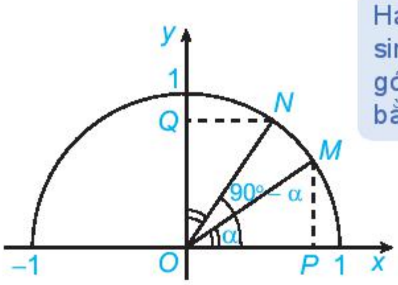
Do các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ tương ứng bù với các góc $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ nên từ Bảng 3.1, ta cũng có bảng các giá trị lượng giác sau:

GTLG \ α	120°	135°	150°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Bảng 3.2

Hai góc bù nhau có sin bằng nhau; có côsin, tang, côtang đối nhau.

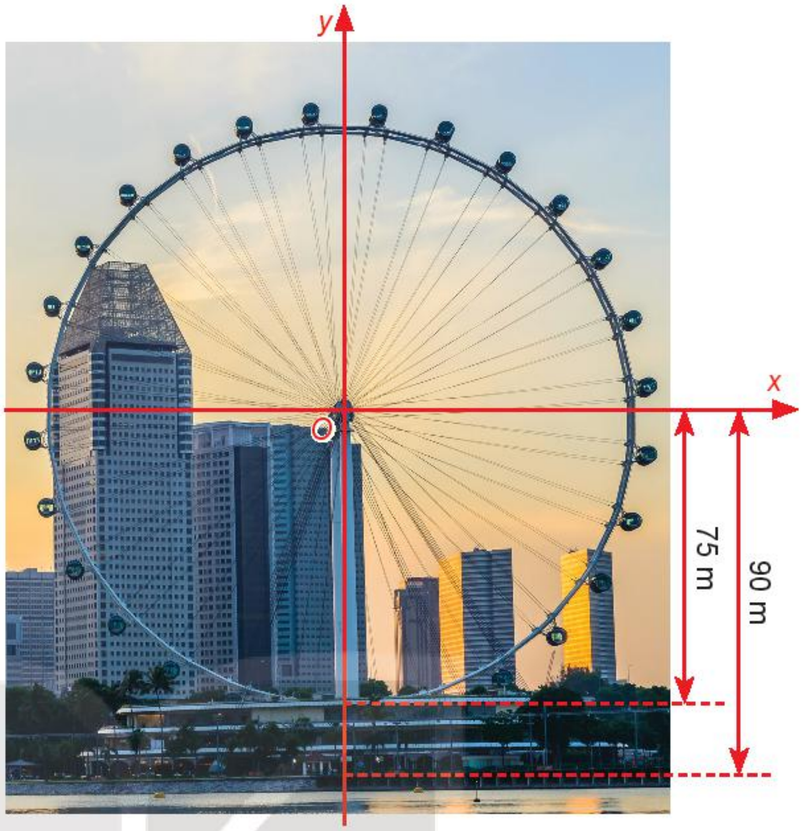
Luyện tập 2. Trong Hình 3.6, hai điểm M, N ứng với hai góc phụ nhau α và $90^\circ - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha$, $\widehat{xON} = 90^\circ - \alpha$). Chứng minh rằng $\Delta MOP = \Delta NOQ$. Từ đó nêu mối quan hệ giữa $\cos\alpha$ và $\sin(90^\circ - \alpha)$.



Hình 3.6

Hai góc phụ nhau có sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.

Vận dụng. Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m (H.3.7), thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Hình 3.7

BÀI TẬP

3.1. Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ)\cdot(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$;

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$;

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$.

Chú ý. $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2$, $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2$, $\tan^2\alpha = (\tan\alpha)^2$, $\cot^2\alpha = (\cot\alpha)^2$.

3.2. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$;

b) $2\sin(180^\circ - \alpha)\cdot\cot\alpha - \cos(180^\circ - \alpha)\cdot\tan\alpha\cdot\cot(180^\circ - \alpha)$, với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

3.3. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

b) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq 90^\circ)$;

c) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.

3.4. Cho góc α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ thoả mãn $\tan\alpha = 3$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$.

Bài 6

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

THUẬT NGỮ

- Định lí côsin
- Định lí sin
- Công thức tính diện tích
- Giải tam giác

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Hiểu Định lí côsin, Định lí sin, công thức tính diện tích tam giác.
- Giải tam giác và giải quyết một số bài toán trong đo đạc.

Ngắm Tháp Rùa từ bờ, chỉ với những dụng cụ đơn giản, dễ chuẩn bị, ta cũng có thể xác định được khoảng cách từ vị trí ta đứng tới Tháp Rùa. Em có biết vì sao?

Tháp Rùa nằm trong lòng hồ Hoàn Kiếm ở Thủ đô Hà Nội

1. ĐỊNH LÍ CÔSIN

HĐ1. Một tàu biển xuất phát từ cảng Vân Phong (Khánh Hoà) theo hướng đông với vận tốc 20 km/h. Sau khi đi được 1 giờ, tàu chuyển sang hướng đông nam rồi giữ nguyên vận tốc và đi tiếp.

a) Hãy vẽ sơ đồ đường đi của tàu trong 1,5 giờ kể từ khi xuất phát (1 km trên thực tế ứng với 1 cm trên bản vẽ).

b) Hãy đo trực tiếp trên bản vẽ và cho biết sau 1,5 giờ kể từ khi xuất phát, tàu cách cảng Vân Phong bao nhiêu kilômét (số đo gần đúng).

c) Nếu sau khi đi được 2 giờ, tàu chuyển sang hướng nam (thay vì hướng đông nam) thì có thể dùng Định lí Pythagore (Pi-ta-go) để tính chính xác các số đo trong câu b hay không?

Có hay không, một kiểu định lí Pythagore cho tam giác tuỳ ý?

Đối với tam giác ABC, ta thường kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C; p là nửa chu vi; S là diện tích; R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.

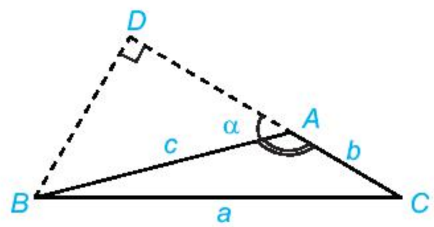
HĐ2. Trong Hình 3.8, hãy thực hiện các bước sau để thiết lập công thức tính a theo b, c và giá trị lượng giác của góc A.

a) Tính a^2 theo BD^2 và CD^2.

b) Tính a^2 theo b, c và DA.

c) Tính DA theo c và $\cos A$.

d) Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.



Hình 3.8

Chú ý. Người ta chứng minh được kết quả trong HĐ2d đối với cả các trường hợp góc A là góc vuông hoặc nhọn.

Định lí côsin. Trong tam giác ABC:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

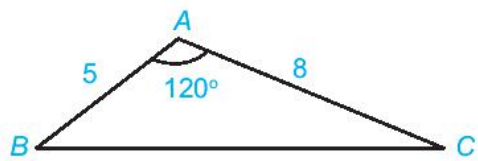
❓ Định lí Pythagore có phải là một trường hợp đặc biệt của Định lí côsin hay không?

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120°$ và $AB = 5$, $AC = 8$. Tính độ dài cạnh BC.

Giải (H.3.9)

Áp dụng Định lí côsin cho tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120°$$
$$= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 129. \text{ Vậy } BC = \sqrt{129}.$$



Hình 3.9

Khám phá. Từ Định lí côsin, hãy viết các công thức tính cos A, cos B, cos C theo độ dài các cạnh a, b, c của tam giác ABC.

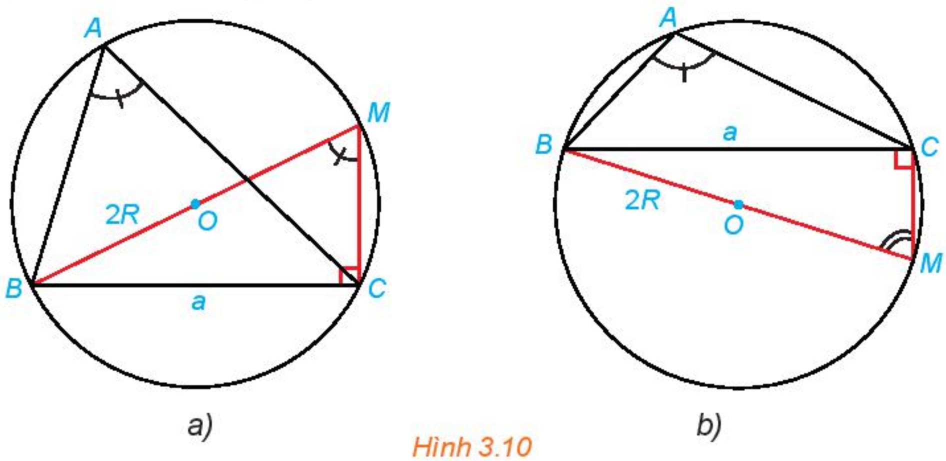
Luyện tập 1. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{A} = 45°$. Tính độ dài các cạnh và độ lớn các góc còn lại của tam giác.

Trải nghiệm. Vẽ một tam giác ABC, sau đó đo độ dài các cạnh, số đo góc A và kiểm tra tính đúng đắn của Định lí côsin tại đỉnh A đối với tam giác đó.

Vận dụng 1. Dùng Định lí côsin, tính khoảng cách được đề cập trong HĐ1b.

2. ĐỊNH LÍ SIN

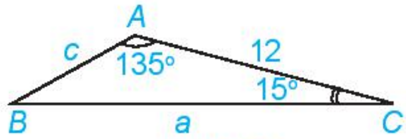
HĐ3. Trong mỗi hình dưới đây, hãy tính R theo a và sin$A$.



Hình 3.10

Định lí sin. Trong tam giác ABC: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 135^\circ$, $\widehat{C} = 15^\circ$ và $b = 12$. Tính a, c, R và số đo góc B.



Hình 3.11

Giải (H.3.11)

Ta có: $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180^\circ - (135^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$.

Áp dụng Định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin 135^\circ} = \dfrac{12}{\sin 30^\circ} = \dfrac{c}{\sin 15^\circ} = 2R$.

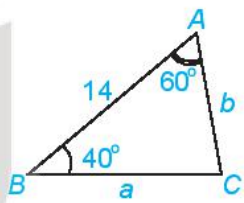
Suy ra $a = \dfrac{12}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 135^\circ = 12\sqrt{2}$; $c = \dfrac{12}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 15^\circ = 24 \sin 15^\circ \,(\approx 6{,}21)$; $R = \dfrac{12}{2\sin 30^\circ} = 12$.

Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có $b = 8$, $c = 5$ và $\widehat{B} = 80^\circ$. Tính số đo các góc, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài cạnh còn lại của tam giác.

3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Việc tính độ dài các cạnh và số đo các góc của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó được gọi là giải tam giác.

Ví dụ 3. Giải tam giác ABC, biết $c = 14, \widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 40^\circ$.



Giải

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 80^\circ$.

Áp dụng Định lí sin ta có: $\dfrac{a}{\sin 60^\circ} = \dfrac{b}{\sin 40^\circ} = \dfrac{14}{\sin 80^\circ}$

Suy ra $a = \dfrac{14 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 12{,}31$; $b = \dfrac{14 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9{,}14$.

Luyện tập 3. Giải tam giác ABC, biết $b = 32, c = 45, \widehat{A} = 87^\circ$.

Chú ý. Áp dụng các Định lí côsin, sin và sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính (gần đúng) các cạnh và các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

- Biết hai cạnh và góc xen giữa;
- Biết ba cạnh;
- Biết một cạnh và hai góc kề.

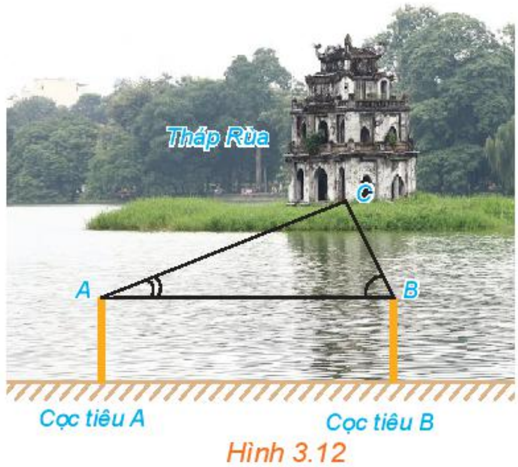
Ví dụ 4. Trở lại *tình huống mở đầu,* theo các bước sau, ta có thể tiến hành đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ hồ Hoàn Kiếm đến Tháp Rùa (H.3.12):

Bước 1. Trên bờ, đặt một cọc tiêu tại vị trí A và một cọc tiêu tại vị trí B nào đó. Đo khoảng cách AB.

Bước 2. Đứng tại A, ngắm Tháp Rùa và cọc tiêu B để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó.

Bước 3. Đứng tại B, ngắm cọc tiêu A và Tháp Rùa để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó.

Bước 4. Gọi C là vị trí của Tháp Rùa. Áp dụng Định lí sin cho tam giác ABC để tính độ dài cạnh AC.



Hình 3.12

Vận dụng 2. Từ một khu vực có thể quan sát được hai đỉnh núi, ta có thể ngắm và đo để xác định khoảng cách giữa hai đỉnh núi đó. Hãy thảo luận để đưa ra các bước cho một cách đo.

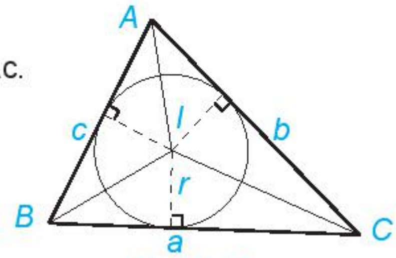
4. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Ta đã biết tính diện tích một tam giác theo chiều cao và độ dài cạnh đáy tương ứng. Liệu còn công thức nào khác để tính diện tích tam giác hay không?

HĐ4. Cho tam giác *ABC* với *I* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Nêu mối liên hệ giữa diện tích tam giác *ABC* và diện tích các tam giác *IBC*, *ICA*, *IAB*.

b) Tính diện tích tam giác *ABC* theo *r*, *a*, *b*, *c*.



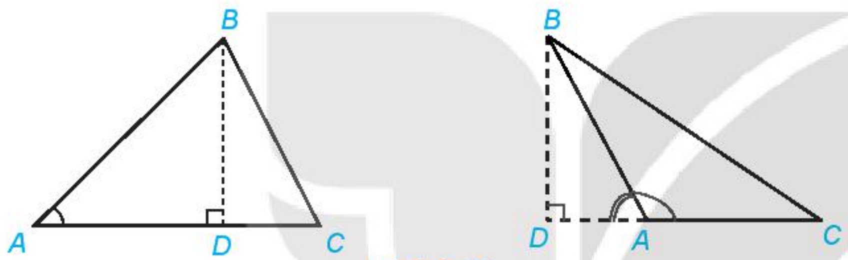
Hình 3.13

> Công thức tính diện tích tam giác *ABC*: $S = pr = \dfrac{(a+b+c)r}{2}$.

HĐ5. Cho tam giác *ABC* với đường cao *BD*.

a) Biểu thị *BD* theo *AB* và sin *A*.

b) Viết công thức tính diện tích *S* của tam giác *ABC* theo *b*, *c*, sin *A*.



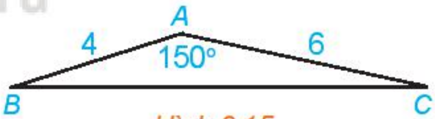
Hình 3.14

> Công thức tính diện tích tam giác *ABC*: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$.

Ví dụ 5. Tính diện tích *S* của tam giác *ABC* có $c = 4$, $b = 6$, $\widehat{A} = 150^\circ$.

Giải (H.3.15)

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot \sin 150^\circ = 6$.



Hình 3.15

Luyện tập 4. Tính diện tích của tam giác *ABC* có $b = 2$, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$.

Chú ý. Do $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ nên từ công thức $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, ta có:

> Công thức tính diện tích tam giác *ABC*: $S = \dfrac{abc}{4R}$.

Thảo luận. Ta đã biết tính cos *A* theo độ dài các cạnh của tam giác *ABC*. Liệu sin *A* và diện tích *S* có tính được theo độ dài các cạnh của tam giác *ABC* hay không?

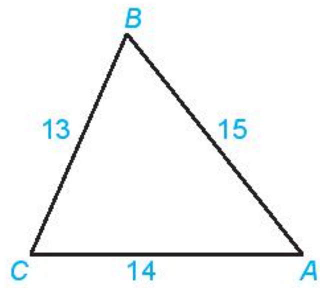
> **Công thức Heron.** Trong tam giác *ABC*: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Ví dụ 6. Cho tam giác *ABC* có $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

a) Tính $\sin A$.

b) Tính diện tích *S* bằng hai cách khác nhau.

Giải (H.3.16)



Hình 3.16

a) Áp dụng Định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{14^2+15^2-13^2}{420} = 0,6.$$

Do đó $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = 0,8$.

b) Ta có $S = \frac{1}{2}bc\sin A = 84$.

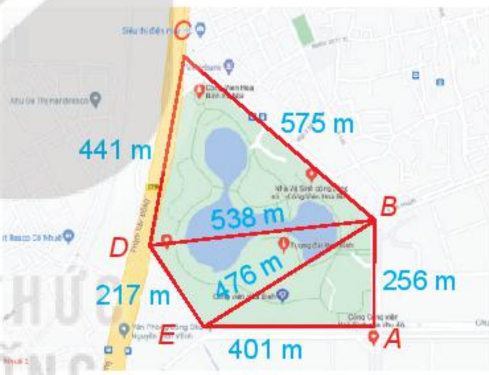
Áp dụng Công thức Heron, ta cũng có thể tính *S* theo cách thứ hai sau:

Tam giác ABC có nửa chu vi là: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$.

Khi đó

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84.$$

Vận dụng 3. Công viên Hoà Bình (Hà Nội) có dạng hình ngũ giác *ABCDE* như Hình 3.17. Dùng chế độ tính khoảng cách giữa hai điểm của Google Maps, một người xác định được các khoảng cách như trong hình vẽ. Theo số liệu đó, em hãy tính diện tích của công viên Hoà Bình.



Hình 3.17

BÀI TẬP

3.5. Cho tam giác *ABC* có $a = 6$, $b = 5$, $c = 8$. Tính $\cos A$, S, r.

3.6. Cho tam giác *ABC* có $a = 10$, $\widehat{A} = 45^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$. Tính R, b, c.

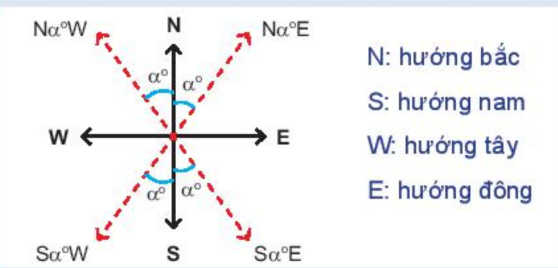
3.7. Giải tam giác *ABC* và tính diện tích của tam giác đó, biết $\widehat{A} = 15^\circ$, $\widehat{B} = 130^\circ$, $c = 6$.

3.8. Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng *A*, đi theo hướng *S*70°E với vận tốc 70 km/h. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

a) Tính khoảng cách từ cảng *A* tới đảo nơi tàu neo đậu.

b) Xác định hướng từ cảng *A* tới đảo nơi tàu neo đậu.

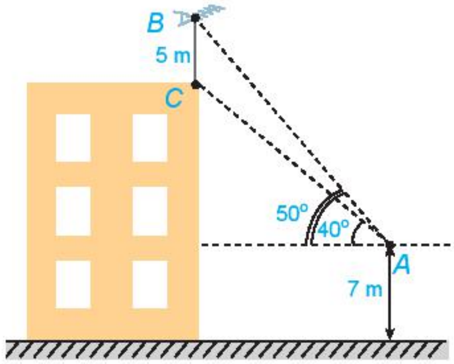
Hướng Sα°E là hướng tạo với hướng nam góc α° và tạo với hướng đông góc 90° – α°. Các hướng Sα°W, Nα°E, Nα°W cũng được định nghĩa một cách tương tự.



3.9. Trên nóc một toà nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang (H.3.18).

a) Tính các góc của tam giác ABC.

b) Tính chiều cao của toà nhà.

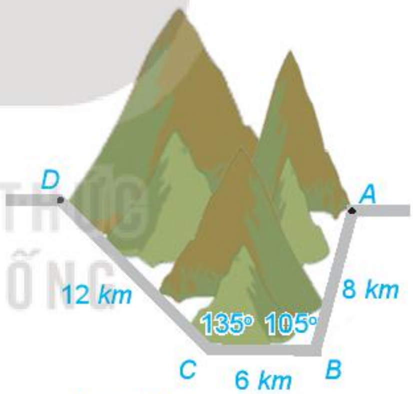


Hình 3.18

3.10. Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được).

Đảo Yến, nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình

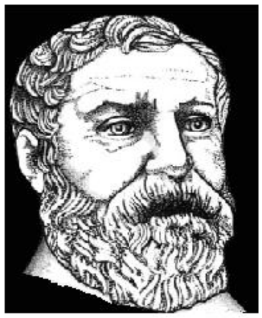
3.11. Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D. Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



Hình 3.19

Em có biết?

Heron (Heron of Alexandria) là một nhà phát minh, nhà toán học Hy Lạp, sống vào khoảng thế kỉ I. Mặc dù cỗ máy với động cơ hơi nước đầu tiên trên thế giới ra đời ở thế kỉ XVIII – một sự kiện quan trọng góp phần tạo nên cuộc cách mạng công nghiệp lần thứ nhất, nhưng chính Heron là người đầu tiên mô tả một mô hình đơn giản cho phép biến hơi nước thành chuyển động quay. Trong toán học, Heron mô tả cách tính diện tích của các đa giác đều từ 3 tới 12 cạnh, diện tích một số mặt và thể tích một số hình trong không gian.



Heron of Alexandria

(Theo *https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Heron/*)

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A – TRẮC NGHIỆM

3.12. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) A. $S = \frac{1}{2}ca$. B. $S = \frac{-\sqrt{2}}{4}ac$. C. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}bc$. D. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}ca$.

b) A. $R = \frac{a}{\sin A}$. B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}b$. C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}c$. D. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

c) A. $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab$. B. $\frac{b}{\sin A} = \frac{a}{\sin B}$.

C. $\sin B = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. D. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos 135^\circ$.

3.13. Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) A. $S = \frac{abc}{4r}$. B. $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$. D. $S = r(a+b+c)$.

b) A. $\sin A = \sin(B+C)$. B. $\cos A = \cos(B+C)$.

C. $\cos A > 0$. D. $\sin A \le 0$.

B – TỰ LUẬN

3.14. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $M = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$; b) $N = \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{2}\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$;

c) $P = 1 + \tan^2 60^\circ$; d) $Q = \frac{1}{\sin^2 120^\circ} - \cot^2 120^\circ$.

3.15. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$, $AC = 10$. Tính a, R, S, r.

3.16. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Chứng minh rằng:

a) $\cos\widehat{AMB} + \cos\widehat{AMC} = 0$;

b) $MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2MA\cdot MB\cdot\cos\widehat{AMB}$ và $MA^2 + MC^2 - AC^2 = 2MA\cdot MC\cdot\cos\widehat{AMC}$;

c) $MA^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$ (công thức đường trung tuyến).

3.17. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) Nếu góc A nhọn thì $b^2 + c^2 > a^2$;

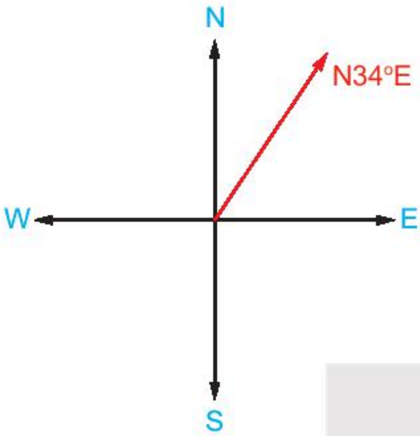
b) Nếu góc A tù thì $b^2 + c^2 < a^2$;

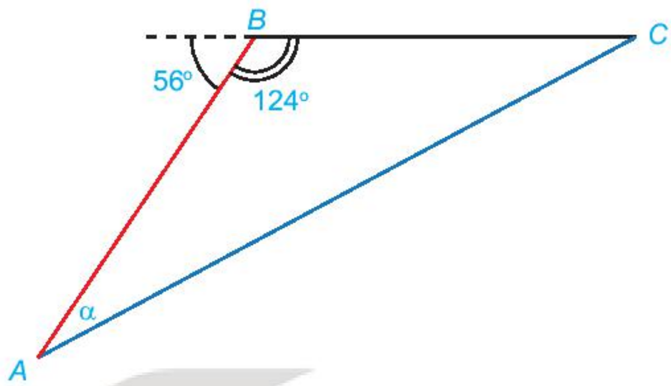
c) Nếu góc A vuông thì $b^2 + c^2 = a^2$.

3.18. Trên biển, tàu *B* ở vị trí cách tàu *A* 53 km về hướng N34°E. Sau đó, tàu *B* chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 30 km/h về hướng đông và tàu *A* chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 50 km/h để đuổi kịp tàu *B*.

a) Hỏi tàu A cần phải chuyển động theo hướng nào?

b) Với hướng chuyển động đó thì sau bao lâu tàu *A* đuổi kịp tàu *B*?





Hình 3.20

3.19. Trên sân bóng chày dành cho nam, các vị trí gôn Nhà (Home plate), gôn 1 (First base), gôn 2 (Second base), gôn 3 (Third base) là bốn đỉnh của một hình vuông có cạnh dài 27,4 m. Vị trí đứng ném bóng (Pitcher's mound) nằm trên đường nối gôn Nhà với gôn 2, và cách gôn Nhà 18,44 m. Tính các khoảng cách từ vị trí đứng ném bóng tới các gôn 1 và gôn 3.

Hình 3.21