Homework 1

Hoang Dieu Linh

ID: 11202127

August 2022

Exercise 1:

a)

Marginal distribution $P(x)$

X	X1	X2	X3	X4	X5
$P(X = X_i)$	0.16	0.17	0.11	0.22	0.34

Marginal distribution $P(y)$

Y	Y1	Y2	Y3
P(Y)	0.26	0.47	0.27

b)

Conditional distribution $P(X|Y = y_1)$

X	X1	X2	X3	X4	X5
$P(X|Y = y_1)$	0.01	0.02	0.03	0.1	0.1

Conditional distribution $P(X|Y = y_3)$

X	X1	X2	X3	X4	X5
$P(X|Y = y_3)$	0.1	0.05	0.03	0.05	0.04

Exercise 2:

$$E_Y\left[E_X[x|y]\right] = \sum_{x \in x} P(y) * E_X[x|y]$$

$$= \sum_{x \in x} P(y) * \sum_{x \in x} P(x|y) * x$$

$$= \sum_{y \in y} * \sum_{x \in x} x * P(x, y)$$

$$= \sum_{x \in x} x * P(x) = E[x]$$

So that $E[x] = E_Y\left[E_X[x|y]\right]$

Exercise 3:

Gọi X là "Người được phỏng vấn dùng sản phẩm X", Y là "Người được phỏng vấn dùng sản phẩm Y

Theo đề bài ta có: $P(X) = 0.207; P(Y) = 0.5; P(X|Y) = 0.365$

a)

$$P(XY) = P(Y) * P(X|Y) = 0.5 * 0.365 = 0.1825$$

b) Biến cố "Dùng Y biết rằng người ấy không dùng X" là $Y|\bar{X}$

$$P(\bar{X}|Y) = \frac{P(\bar{X}Y)}{P(Y)} = \frac{P(Y) - P(XY)}{P(Y)} = 1 - P(X|Y) = 1 - 0.365 = 0.635$$

$$P(Y|\bar{X}) = \frac{P(Y\bar{X})}{P(\bar{X})} = \frac{P(Y) * P(\bar{X}|Y)}{1 - P(X)} = \frac{0.5 * 0.635}{1 - 0.207} = 0.4004$$

Exercise 4:

We have

$$V(x) = \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \to 1$$

$$E(x) = \sum xf(x)$$

$$E(x^2) = \sum x^2 f(x)$$

From 1 we have:

$$V_X[x] = E_X(x - \mu)^2 = E_X(x^2 - 2x\mu + \mu^2) = E_X(x^2) - 2\mu E_X(x) + \mu^2$$

By definition: Mean (μ) is Expected value $(E(x))$

$$V_X[x] = E_X(x^2) - 2E_X(x)E_X(x) + [E_X(x)]^2 = E_X(x^2) - [E_X(x)]^2$$

Hence it is proved

Exercise 5:

Với bài toán trên, coi như ban đầu ta chọn ô cửa 1. Nếu ta lấy A là biến cố chiếc xe ở ô cửa 1 (ô cửa được chọn ban đầu), B là biến cố Monty mở cửa số 2. Khi đó:

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

Lại có $P(B|A)$ là xác suất Monty mở cửa số 2 (biến cố B) khi chiếc xe ở ô cửa số 1 (biến cố A xảy ra). Xác suất này bằng $\frac{1}{2}$. do khi đó ông ta sẽ chỉ mở cửa số 2 hoặc số 3.

Xác suất để Monty mở cửa số 2 là $P(B) = \frac{1}{2}$. (theo luật ông ta phải mở một trong hai cửa còn lại, khác cửa ta đã chọn).

Thế thì, $P(A|B) = \frac{1}{3}$ tức xác suất chiếc xe nằm ở ô cửa 1 (biến cố A) khi Monty đã mở ô cửa 2 (biến cố B xảy ra) chỉ là $\frac{1}{3}$

Đặt C là biến cố xe nằm ở ô cửa số 3. Ta sẽ tính $P(C)$. Ta thấy và là hai biến cố xung khắc (do xe chỉ ở ô cửa 1 hoặc ô cửa 3) nên $P(C) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$

Vậy thực hiện thay đổi ô cửa đã chọn sẽ tăng xác suất trúng xe