

数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $\theta=2025^\circ$ ，则 θ 的终边在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2. 已知集合 $M=\{x|-3 < x < 5\}$, $N=\{x|x=2k, k \in \mathbb{N}\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{2, 4\}$ B. $\{0, 2, 4\}$ C. $\{-2, 0, 2, 4\}$ D. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

3. 已知命题 $p: \exists x \geq 0, x^2 = -x$, 命题 $q: \forall x < 0, x^3 + 1 < 0$, 则

- A. p 和 q 均为真命题
 B. p 和 $\neg q$ 均为真命题
 C. $\neg p$ 和 q 均为真命题
 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 均为真命题

4. 已知 $f(x)=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} [x], & x \in \mathbb{Q}, \\ [x]-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如

$[-3.5]=-4$, 则 $f(g(e))=$

- A. e B. 1 C. 0 D. -1

5. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+4}+\ln(1-x)$, 则 $f(2x)$ 的定义域为

- A. $[-4, 1)$ B. $[-4, 1]$
 C. $\left[-2, \frac{1}{2}\right)$ D. $[-8, 2)$

6. 已知点 $(3, \frac{1}{9})$ 在幂函数 $f(x) = x^a$ 的图象上, 设 $a = f(\log_2 3)$, $b = f(\ln 2)$, $c = f(\sqrt{5})$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $b > a > c$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$

7. 已知某种蔬菜的保鲜时间 y (单位: 小时) 与储藏温度 x (单位: $^{\circ}\text{C}$) 近似满足函数关系 $y = e^{kx+b}$ (k, b 为常数, e 为自然对数底数), 若该品种蔬菜在 5°C 时的保鲜时间为 216 小时, 在 25°C 时的保鲜时间为 24 小时, 则在 15°C 时, 该品种蔬菜的保鲜时间大约为

- A. 120 小时 B. 96 小时 C. 72 小时 D. 64 小时

8. 已知函数 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^x - 2$, 则不等式 $x[f(x) - 4f(-x)] < 0$ 的解集是

- A. $(-1, 1)$
B. $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$
C. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
D. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 已知角 α 和 β 的终边关于 x 轴对称, 则

- A. $\sin \alpha = -\sin \beta$
B. $\tan \alpha = \tan \beta$
C. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \beta$
D. $\cos(\pi - \alpha) = \cos \beta$

10. 已知 $a > 0, b > 0, a + b^2 = 1$, 则

- A. $\sqrt{a} + b < \sqrt{2}$
B. $a + 2b > 1$
C. $b\sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{a} + \frac{4}{b^2} \geqslant 9$

11. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的值域为 $[a, b]$, 则称 $[a, b]$ 为函数 $f(x)$ 的“保值区间”, 下列说法正确的是

- A. 函数 $y = x^2$ 存在保值区间
B. 函数 $y = -\frac{1}{x}$ 存在保值区间
C. 若一次函数 $y = kx + m (k \neq 0)$ 存在保值区间, 则 $k = -1$ 或 $k = 1$
D. 若函数 $y = \sqrt{x-1} + t$ 存在保值区间, 则实数 t 的取值范围为 $\left(\frac{3}{4}, 1\right]$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分。

12. 已知某扇形所在圆的半径为 3, 扇形的面积为 3π , 则该扇形的圆心角(正角)的弧度数为 _____.

13. 已知 $7^a = 3, \log_7 2 = b$, 则 $\log_{49} 48 =$ _____. (用 a, b 表示)

14. 已知函数 $f(x) = x^2 - 4x + 5$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) + 4 = 0$ 有四个不相等的实数根, 则 m 的取值范围是 _____.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.(本小题满分 13 分)

已知角 α 的终边经过点 $P(\sin 30^\circ, 1)$.

(1)求 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 的值;

(2)求 $\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos \alpha}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}$ 的值.

16.(本小题满分 15 分)

已知集合 $A = \{x | 2x^2 - 2 < 3x\}, B = \{x | 2a - 3 < x < a + 1\}$.

(1)若 $a = \frac{1}{2}$, 求 $A \cup B$;

(2)若“ $x \in B$ ”是“ $x \in A$ ”的必要不充分条件,求 a 的取值范围.

17.(本小题满分 15 分)

已知二次函数 $f(x) = ax^2 - 2x - 1$.

(1)当 a 取何值时,不等式 $f(x) < 0$ 对一切实数 x 都成立?

(2)若 $f(x)$ 在区间 $(-2, 1)$ 内恰有一个零点,求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

- (1) 若 $f(x_0)=\sqrt{19}$, 求 $x_0-\frac{4}{x_0}$ 的值;
- (2) 判断 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性并利用定义法证明;
- (3) 求 $f(x)$ 在 $[1, t]$ 上的最大值.

19. (本小题满分 17 分)

现定义了一种新运算“ \oplus ”: 对于任意实数 x, y , 都有 $x \oplus y = \log_a(a^x + a^y)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

- (1) 当 $a=2$ 时, 计算 $4 \oplus 4$;
- (2) 证明: $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$, 都有 $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$;
- (3) 设 $m = \log_a(x^2 - 3ax + 2a^2)$, 若 $f(x) = m \oplus m - \log_a 2$ 在区间 $[s, t]$ ($0 < s < t < a$) 上的值域为 $[\log_a t, \log_a s]$, 求实数 a 的取值范围.