

高中数学必修4 知识点

第一章 三角函数

- 1、任意角
- 正角:按逆时针方向旋转形成的角
 - 负角:按顺时针方向旋转形成的角
 - 零角:不作任何旋转形成的角

- 2、象限的角:在直角坐标系内,顶点与原点重合,始边与x轴的非负半轴重合,角的终边落在第几象限,就是第几象限的角;角的终边落在坐标轴上,这个角不属于任何象限,叫做**轴线角**。

第一象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第二象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第三象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第四象限角的集合为 $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在x轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在y轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在坐标轴上的角的集合为 $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

- 3、与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,都可以表示为集合 $\{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

- 4、弧度制:

(1) 定义:等于半径的弧所对的圆心角叫做1弧度的角,用弧度做单位叫弧度制。

半径为 r 的圆的圆心角 α 所对弧的长为 l ,则角 α 的弧度数的绝对值是 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 。

(2) **度数与弧度数的换算:** $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi \text{ rad}$, $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$

注:角度与弧度的相互转化:设一个角的角度为 n° ,弧度为 α ;

①角度化为弧度: $n^\circ = n^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{n\pi}{180}$, ②弧度化为角度: $\alpha = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$

(3) 若扇形的圆心角为 α (α 是角的弧度数),半径为 r ,则:

弧长公式: ① $l = \frac{n\pi}{180}$ (用度表示的), ② $l = |\alpha| r$ (用弧度表示的);

扇形面积: ① $S_{\text{扇}} = \frac{n\pi r^2}{360}$ (用度表示的) ② $S_{\text{扇}} = \frac{1}{2} |\alpha| r^2 = \frac{1}{2} l r$ (用弧度表示的)

5、三角函数：

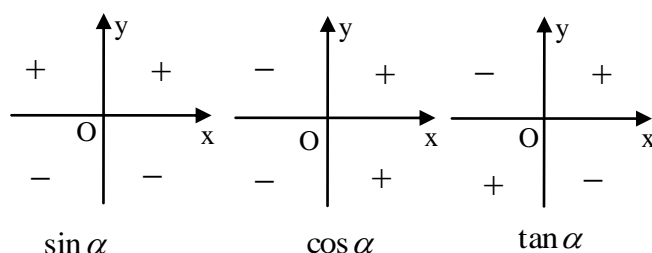
(1) **定义①**：设 α 是一个任意大小的角， α 的终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y) ，它与原点的距离是 $r(|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0)$ ，

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0)$$

定义②：设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ ，那么 y 叫做 α 的正弦，记作 $\sin \alpha$ ，即 $\sin \alpha = y$ ； x 叫做 α 的余弦，记作 $\cos \alpha$ ，即 $\cos \alpha = x$ ；当 α 的终边不在 y 轴上时，

$$\frac{y}{x} \text{ 叫做 } \alpha \text{ 的正切，记作 } \tan \alpha, \text{ 即 } \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

(2) 三角函数值在各象限的符号：**口诀：全正，S 正，T 正，C 正。**

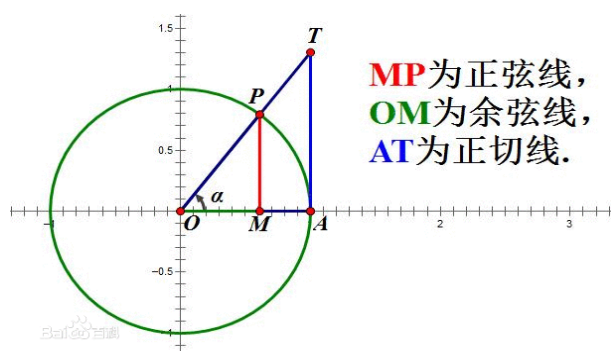


口诀：第一象限全为正；
二正三切四余弦。

(3) 特殊角的三角函数值

α 的角度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
α 的弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
α 的角度	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
α 的弧度	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

(4) 三角函数线：如下图



(5) 同角三角函数基本关系式

(1) 平方关系： $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (2) 商数关系： $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

6、三角函数的诱导公式：

(1) $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$, $\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$) .

口诀：终边相同的角的同一三角函数值相等.

(2) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$.

(3) $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$.

(4) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$, $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

(5) $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$, $\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$.

口诀：函数名称不变，正负看象限.

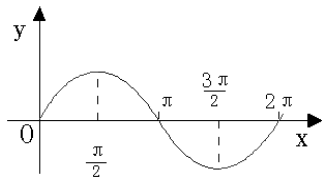
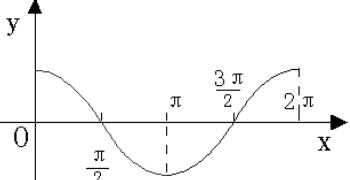
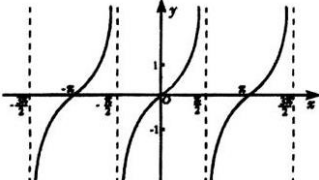
(6) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$.

(7) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$.

口诀：正弦与余弦互换，正负看象限.

诱导公式记忆口诀：“奇变偶不变，符号看象限”。即将括号里面的角拆成 $\beta = k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha$ 的形式。

7、正弦函数、余弦函数和正切函数的图象与性质：

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域	R	R	$\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$
值域	值域： $[-1, 1]$ 当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$ 时， $y_{\max} = 1$ ；当 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in Z)$ 时， $y_{\min} = -1$ 。	值域： $[-1, 1]$ 当 $x = 2k\pi (k \in Z)$ 时， $y_{\max} = 1$ ；当 $x = 2k\pi + \pi (k \in Z)$ 时， $y_{\min} = -1$ 。	值域： R 既无最大值也无最小值
周期性	$y = \sin x$ 是周期函数；周期为 $T = 2k\pi, k \in Z$ 且 $k \neq 0$ ； 最小正周期为 2π	$y = \cos x$ 是周期函数；周期为 $T = 2k\pi, k \in Z$ 且 $k \neq 0$ ； 最小正周期为 2π	$y = \tan x$ 是周期函数；周期为 $T = k\pi, k \in Z$ 且 $k \neq 0$ ； 最小正周期为 π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in Z)$ 上是增函数；在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right] (k \in Z)$ 上是减函数。	在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi] (k \in Z)$ 上是增函数；在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in Z)$ 上是减函数。	在 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in Z)$ 上是增函数。
对称性	对称中心 $(k\pi, 0) (k \in Z)$ 对称轴 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$	对称中心 $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right) (k \in Z)$ 对称轴 $x = k\pi (k \in Z)$	对称中心 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right) (k \in Z)$ 无对称轴

8、(1) $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 的图象与 $y = \sin x$ 图象的关系：

①振幅变换： $y = \sin x \xrightarrow{\text{图象上每个点的横坐标不变，纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} y = A \sin x$

②周期变换： $y = \sin x \xrightarrow{\text{图象上每个点的横坐标变为原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍，纵坐标不变}} y = \sin \omega x$

③相位变换： $y = \sin x \xrightarrow{\text{图象整体向左 } (\varphi > 0) \text{ 或向右 } (\varphi < 0) \text{ 平移 } |\varphi| \text{ 个单位}} y = \sin(x + \varphi)$

④平移变换： $y = A \sin(\omega x + \varphi) \xrightarrow[\text{平移 } |b| \text{ 个单位}]{\text{图象整体向上 } (b > 0) \text{ 或向下 } (b < 0)}$

$$y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$$

注：函数 $y = \sin x$ 的图象怎样变换得到函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 的图象：(两种方法)

① 先平移后伸缩：

$$\begin{aligned} y = \sin x &\xrightarrow[\text{(左加右减)}]{\text{平移 } |\varphi| \text{ 个单位}} y = \sin(x + \varphi) \\ &\xrightarrow{\text{纵坐标不变}} y = \sin \omega(x + \varphi) \\ &\xrightarrow[\text{横坐标变为原来的 } |\frac{1}{\omega}| \text{ 倍}]{\text{横坐标不变}} y = A \sin(\omega x + \varphi) \\ &\xrightarrow[\text{(上加下减)}]{\text{纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} y = A \sin(\omega x + \varphi) + B \end{aligned}$$

② 先伸缩后平移：

$$\begin{aligned} y = \sin x &\xrightarrow{\text{纵坐标不变}} y = \sin \omega x \\ &\xrightarrow[\text{横坐标变为原来的 } |\frac{1}{\omega}| \text{ 倍}]{\text{横坐标不变}} y = \sin(\omega x + \varphi) \\ &\xrightarrow[\text{(左加右减)}]{\text{平移 } \frac{\varphi}{\omega} \text{ 个单位}} y = \sin(\omega x + \varphi) \\ &\xrightarrow{\text{纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} y = A \sin(\omega x + \varphi) \\ &\xrightarrow{\text{平移 } |B| \text{ 个单位}} y = A \sin(\omega x + \varphi) + B \end{aligned}$$

(上加下减)

(2) 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0$) 的性质:

①振幅: A ; ②周期: $T = \frac{2\pi}{\omega}$; ③频率: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$; ④相位: $\omega x + \varphi$; ⑤初相: φ .

定义域: R

值域: $[-A+b, A+b]$

当 $\omega x + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in Z$) 时, $y_{\max} = A+b$;

当 $\omega x + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ($k \in Z$) 时, $y_{\min} = -A+b$.

周期性: 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ ($A > 0, \omega > 0$) 是周期函数; 周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$

单调性: $\omega x + \varphi$ 在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ ($k \in Z$) 上时是增函数;

$\omega x + \varphi$ 在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ ($k \in Z$) 上时是减函数.

对称性: 对称中心为 $\left(\frac{k\pi - \varphi}{\omega}, 0\right)$ ($k \in Z$); 对称轴为 $\omega x + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in Z$)

第二章 平面向量

1、向量定义: 既有大小又有方向的量叫做向量, 向量都可用同一平面内的有向线段表示.

2、零向量: 长度为 0 的向量叫零向量, 记作 $\vec{0}$; 零向量的方向是任意的.

3、单位向量: 长度等于 1 个单位长度的向量叫单位向量; 与向量 \vec{a} 平行的单位向量: $\vec{e} = \pm \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

4、平行向量 (共线向量): 方向相同或相反的非零向量叫平行向量也叫共线向量, 记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

规定 $\vec{0}$ 与任何向量平行.

5、相等向量: 长度相同且方向相同的向量叫相等向量, 零向量与零向量相等.

注意: 任意两个相等的非零向量, 都可以用同一条有向线段来表示, 并且与有向线段的起点无关.

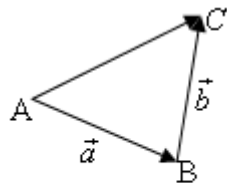
6、向量加法运算:

(1) 三角形法则的特点:

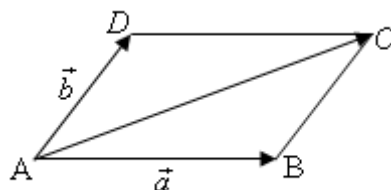
首尾相接

(2) 平行四边形法则的特点:

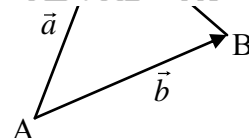
起点相同



$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$

(3)运算性质:

①交换律: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

②结合律: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$; ③ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

(4)坐标运算: 设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

7、向量减法运算:

(1)三角形法则的特点: 共起点, 连终点, 方向指向被减向量.

(2)坐标运算: 设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

设 A、B 两点的坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

8、向量数乘运算:

(1)实数 λ 与向量 \vec{a} 的积是一个向量的运算叫做向量的数乘, 记作 $\lambda\vec{a}$.

① $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$;

②当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 的方向与 \vec{a} 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\vec{a}$ 的方向与 \vec{a} 的方向相反;

当 $\lambda = 0$ 时, $\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

(2)运算律: ① $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$; ② $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$; ③ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

(3)坐标运算: 设 $\vec{a} = (x, y)$, 则 $\lambda\vec{a} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

9、向量共线定理: 向量 $\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$ 与 \vec{b} 共线, 当且仅当有唯一的一个实数 λ , 使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 其中 $\vec{b} \neq \vec{0}$, 则当且仅当 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ 时, 向量 \vec{a} 、 $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$ 共线.

10、平面向量基本定理: 如果 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任意向量 \vec{a} , 有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 , 使 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$. (不共线的向量 \vec{e}_1 、 \vec{e}_2 作为这一平面内所有向量的一组基底)

11、分点坐标公式: 设点 P 是线段 P_1P_2 上的一点, P_1 、 P_2 的坐标分别是 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ,

当 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda\overrightarrow{PP_2}$ 时, 点 P 的坐标是 $\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)$.

12、平面向量的数量积:

(1)定义: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ ($\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$). 零向量与任一向量的数量积为0.

(2)性质: 设 \vec{a} 和 \vec{b} 都是非零向量, 则① $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. ②当 \vec{a} 与 \vec{b} 同向时, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$;

当 \vec{a} 与 \vec{b} 反向时, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$; $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ 或 $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$. ③ $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$.

(3)运算律: ① $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; ② $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$; ③ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

(4)坐标运算: 设两个非零向量 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

若 $\vec{a} = (x, y)$, 则 $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2$, 或 $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

设 \vec{a} 、 \vec{b} 都是非零向量, $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$, θ 是 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

第三章 三角恒等变形

1、同角三角函数基本关系式

(1) 平方关系: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (2) 商数关系: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

(3) 倒数关系: $\tan \alpha \cot \alpha = 1$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$$

注意: $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 按照以上公式可以“知一求二”

2、两角和与差的正弦、余弦、正切

$$S_{(\alpha+\beta)}: \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$S_{(\alpha-\beta)}: \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$C_{(\alpha+\beta)}: \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$C_{(\alpha-\beta)}: \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$T_{(\alpha+\beta)}: \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$T_{(\alpha-\beta)}: \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

正切和公式: $\tan \alpha + \tan \beta = \tan(\alpha + \beta) \cdot (1 - \tan \alpha \tan \beta)$

3、辅助角公式：
$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cdot \cos \varphi + \cos x \cdot \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$$

(其中 φ 称为辅助角, φ 的终边过点 (a, b) , $\tan \varphi = \frac{b}{a}$)

4、二倍角的正弦、余弦和正切公式:

$$S_{2\alpha}: \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$C_{2\alpha}: \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$T_{2\alpha}: \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

*二倍角公式的常用变形: ①、 $\sqrt{1 - \cos 2\alpha} = \sqrt{2} |\sin \alpha|$, $\sqrt{1 + \cos 2\alpha} = \sqrt{2} |\cos \alpha|$;

$$\textcircled{2}、\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha} = |\sin \alpha|, \quad \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha} = |\cos \alpha|$$

$$\textcircled{3} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2};$$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha;$$

$$\text{*降次公式: } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}$$

5、*半角的正弦、余弦和正切公式:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

6、同角三角函数的常见变形: (活用“1”)

$$\textcircled{1} \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha; \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$\textcircled{2} \tan \theta + \cot \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{2}{\sin 2\theta},$$

$$\cot \theta - \tan \theta = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cot 2\alpha$$

$$\textcircled{3} (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \pm \sin 2\alpha; \quad \sqrt{1 \pm \sin 2\alpha} = |\sin \alpha \pm \cos \alpha|$$

7、补充公式：

*①万能公式

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

*②积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

*③和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

注：带*号的公式表示了解，没带*公式为必记公式