三亚市 2024～2025 学年第一学期高一年级学业水平诊断考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1. C　因为 $2\,025°=5\times360°+225°$，所以 $225°$ 与 $2\,025°$ 的终边相同，易知 $225°$ 的终边在第三象限. 故选 C.

2. B　因为 $M=\{x\mid-3<x<5\}$，$N=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}\}$，所以 $M\cap N=\{0,2,4\}$. 故选 B.

3. B　对于命题 p，当 $x=0$ 时，$x^2=-x$，所以 p 为真命题；对于命题 q，当 $x=-1$ 时，$x^3+1=0$，所以 q 为假命题，则 $\neg q$ 为真命题. 综上可知，p 和 $\neg q$ 均为真命题. 故选 B.

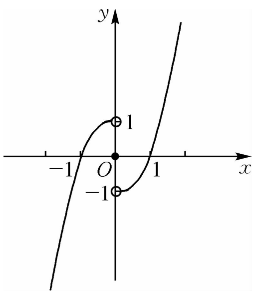
4. D　因为 $\mathrm{e}\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$，所以 $g(\mathrm{e})=[\mathrm{e}]-\mathrm{e}=2-\mathrm{e}<0$，所以 $f(g(\mathrm{e}))=-1$. 故选 D.

5. C　由题意可得 $\begin{cases}x+4\geqslant0,\\1-x>0,\end{cases}$ 解得 $-4\leqslant x<1$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,1)$，所以 $-4\leqslant2x<1$，解得 $-2\leqslant x<\frac{1}{2}$，所以 $f(2x)$ 的定义域为 $\left[-2,\frac{1}{2}\right)$. 故选 C.

6. A　已知幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 经过点 $\left(3,\frac{1}{9}\right)$，可得 $3^\alpha=\frac{1}{9}$，解得 $\alpha=-2$，即 $f(x)=x^{-2}$，易知 $f(x)=x^{-2}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减. 由于 $1=\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4=2$，$0<\ln 2<1<\log_2 3<2<\sqrt{5}$，所以可得 $f(\ln 2)>f(\log_2 3)>f(\sqrt{5})$，综上所述，$b>a>c$. 故选 A.

7. C　由题意得：$\begin{cases}\mathrm{e}^{5k+b}=216,①\\\mathrm{e}^{25k+b}=24,②\end{cases}$ ①÷②得：$\mathrm{e}^{-20k}=9$，则 $\mathrm{e}^{15k+b}=\mathrm{e}^{25k+b}\cdot\mathrm{e}^{-10k}=\mathrm{e}^{25k+b}\cdot(\mathrm{e}^{-20k})^{\frac{1}{2}}=24\times3=72$. 故选 C.

8. D　根据题意，作出 $y=f(x)$ 的图象，如图所示.



由 $x[f(x)-4f(-x)]<0$ 得 $x[f(x)+4f(x)]<0$，即 $xf(x)<0$，则 $\begin{cases}x>0,\\f(x)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\f(x)>0,\end{cases}$

观察图象得 $\begin{cases}x>0,\\0<x<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0,\\-1<x<0,\end{cases}$ 所以 $0<x<1$ 或 $-1<x<0$，即不等式 $x[f(x)-4f(-x)]<0$ 的解集是 $(-1,0)\cup(0,1)$. 故选 D.

9. AC　因为角 α 和 β 的终边关于 x 轴对称，可得 $\alpha=-\beta+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

对于 A，由 $\sin\alpha=\sin(-\beta+2k\pi)=-\sin\beta$，A 正确；

对于 B，由 $\tan\alpha=\tan(-\beta+2k\pi)=\tan(-\beta)=-\tan\beta$，B 错误；

对于 C，由 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=\cos(-\beta+2k\pi)=\cos(-\beta)=\cos\beta$，C 正确；

对于 D，由 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\cos(-\beta+2k\pi)=-\cos\beta$，D 错误. 故选 AC.

10. BCD　因为 $a>0,b>0,a+b^2=1$，所以 $a=1-b^2>0$，所以 $0<a<1,0<b<1$. 对于 A，因为 $b=\sqrt{1-a}$，所以 $\sqrt{a}+b=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}\leqslant 2\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{1-a})^2}{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $\sqrt{a}=\sqrt{1-a}$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 A 错误；对于 B，因为 $a=1-b^2$，所以 $a+2b=1-b^2+2b=-(b-1)^2+2$，因为 $0<b<1$，所以 $1<-(b-1)^2+2<2$，即 $1<a+2b<2$，故 B 正确；对于 C，因为 $b=\sqrt{1-a}$，所以 $b\sqrt{a}=\sqrt{1-a}\cdot\sqrt{a}\leqslant\frac{1-a+a}{2}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $\sqrt{1-a}=\sqrt{a}$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时等号成立，故 C 正确；对于 D，因为 $a+b^2=1$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b^2}\right)(a+b^2)=5+\frac{b^2}{a}+\frac{4a}{b^2}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{b^2}{a}\cdot\frac{4a}{b^2}}=9$，当且仅当 $\frac{b^2}{a}=\frac{4a}{b^2}$，即 $a=\frac{1}{3},b=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立，故 D 正确. 故选 BCD.

11. ACD　函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,1]$ 上的值域为 $[0,1]$，故函数 $y=x^2$ 存在保值区间，A 正确；当 $x>0$ 时，$y<0$；当 $x<0$ 时，$y>0$，故函数 $y=-\frac{1}{x}$ 不存在保值区间，B 错误；当 $k>0$ 时，若函数 $y=kx+m$ 存在保值区间，则有 $\begin{cases}a=ka+m,\\b=kb+m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\m=0;\end{cases}$ 当 $k<0$ 时，若函数 $y=kx+m$ 存在保值区间，则有 $\begin{cases}a=kb+m,\\b=ka+m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\m=a+b,\end{cases}$ 所以 $k=1$ 或 $k=-1$，C 正确；函数 $y=\sqrt{x-1}+t$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，若函数 $y=\sqrt{x-1}+t$ 存在保值区间，则有 $\begin{cases}a=\sqrt{a-1}+t,\\b=\sqrt{b-1}+t,\end{cases}$ 即关于 x 的方程 $x=\sqrt{x-1}+t(x\geqslant 1)$ 有两个不相等的实数根，令 $\sqrt{x-1}=n$，则 $x=n^2+1(n\geqslant 0)$，所以 $t=n^2-n+1=\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(n\geqslant 0)$，结合二次函数的图象可知，$\frac{3}{4}<t\leqslant 1$，故 D 正确. 故选 ACD.

12. $\frac{2\pi}{3}$　由扇形面积 $S=\frac{1}{2}rl$，得 $3\pi=\frac{1}{2}lr$，解得 $l=2\pi$，所以该扇形的圆心角(正角) $\alpha=\frac{l}{r}=\frac{2\pi}{3}$.

13. $\frac{1}{2}a+2b$　由 $7^a=3$，得 $a=\log_7 3$，则 $\log_{49}48=\frac{1}{2}\log_7 48=\frac{1}{2}(\log_7 3+\log_7 16)=\frac{1}{2}(\log_7 3+4\log_7 2)=\frac{1}{2}a+2b$.

14. $(-5,-4)$　易知 $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geqslant 1$，令 $f(x)=t$，则关于 t 的方程 $t^2+mt+4=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上有两个不相等的实数根，由 $\begin{cases}1^2+m+4>0,\\-\frac{m}{2}>1,\\\Delta=m^2-16>0,\end{cases}$ 解得 $-5<m<-4$.

15. 解：(1) 由题意，角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{1}{2},1\right)$，

所以 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. …………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 可得 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2$，…………………………………… 9 分

所以$\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos\alpha}{\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha+\cos\alpha}{-\sin\alpha}=1-\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{2}$. ………………………………………… 13 分

16. 解:(1)由题意知 $A=\{x\mid 2x^2-2<3x\}=\left(-\frac{1}{2},2\right)$, ………………………………………… 2 分

若 $a=\frac{1}{2}$,则 $B=\left(-2,\frac{3}{2}\right)$,………………………………………… 3 分

所以 $A\cup B=(-2,2)$. ………………………………………… 6 分

(2)若“$x\in B$”是“$x\in A$”的必要不充分条件,所以 $A\subsetneqq B$, ………………………………………… 9 分

所以$\begin{cases}2a-3\leqslant -\frac{1}{2},\\ a+1\geqslant 2,\end{cases}$且等号不能同时取得,………………………………………… 12 分

解得 $1\leqslant a\leqslant\frac{5}{4}$,即 a 的取值范围是$\left[1,\frac{5}{4}\right]$. ………………………………………… 15 分

17. 解:(1)因为 $f(x)$为二次函数,所以 $a\neq 0$, ………………………………………… 1 分

又因为不等式 $f(x)<0$ 对一切实数 x 都成立,

所以$\begin{cases}a<0,\\ \Delta=4+4a<0,\end{cases}$解得 $a<-1$. ………………………………………… 5 分

(2)当 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上仅有一个零点时,由 $\Delta=4+4a=0$,解得 $a=-1$,

此时零点为$-\frac{-2}{2a}=-1$,符合题意;………………………………………… 7 分

当 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有两个零点时,$\Delta=4+4a>0$,即 $a>-1$ 且 $a\neq 0$, ………………………………………… 8 分

①当 $f(-2)=0$ 时,$a=-\frac{3}{4}$,则由 $f(x)=-\frac{3}{4}x^2-2x-1=0$ 解得另一个零点为$-\frac{2}{3}$,符合题意;

………………………………………… 10 分

②当 $f(1)=0$ 时,$a=3$,则由 $f(x)=3x^2-2x-1=0$ 解得另一个零点为$-\frac{1}{3}$,符合题意;………… 12 分

③当 $f(-2)f(1)\neq 0$ 时,由零点存在定理,则 $f(-2)f(1)<0$,解得 $a\in\left(-\frac{3}{4},0\right)\cup(0,3)$. ………… 14 分

综上,$f(x)$在区间$(-2,1)$内恰有一个零点时,实数 a 的取值范围为$\{-1\}\cup\left[-\frac{3}{4},0\right)\cup(0,3]$. …… 15 分

18. 解:(1)因为 $f(x_0)=x_0+\frac{4}{x_0}=\sqrt{19}$,所以$\left(x_0+\frac{4}{x_0}\right)^2=x_0^2+8+\frac{16}{x_0^2}=19$,即 $x_0^2+\frac{16}{x_0^2}=11$, ………… 2 分

因为$\left(x_0-\frac{4}{x_0}\right)^2=x_0^2-8+\frac{16}{x_0^2}=11-8=3$,所以 $x_0-\frac{4}{x_0}=\pm\sqrt{3}$. ………………………………………… 5 分

(2)$f(x)$在区间$(0,2)$上单调递减,在区间$(2,+\infty)$上单调递增,证明如下: ………………………… 6 分

任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{4}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{4}{x_2}\right)=(x_1-x_2)+\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-4)}{x_1x_2}$, ………… 8 分

因为 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,所以 $x_1x_2>0$,$x_1-x_2<0$,………………………………………… 9 分

当 $0<x_1<x_2<2$ 时,$x_1x_2-4<0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,

当 $2<x_1<x_2$ 时,$x_1x_2-4>0$,所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,

所以 $f(x)$在区间$(0,2)$上单调递减,在区间$(2,+\infty)$上单调递增. ………………………………………… 11 分

(3)当 $1<t\leqslant 2$ 时，由(2)知 $f(x)$ 在 $[1,t]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=5$； …………………… 13 分

当 $t>2$ 时，由(2)知 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，在 $[2,t]$ 上单调递增，…………………… 14 分

因为 $f(4)=5$，所以若 $2<t<4$，则 $f(x)_{\max}=f(1)=5$， …………………… 15 分

若 $t\geqslant 4$，则 $f(x)_{\max}=f(t)=t+\dfrac{4}{t}$. …………………… 16 分

综上，$f(x)_{\max}=\begin{cases}5, 1<t<4,\\ t+\dfrac{4}{t}, t\geqslant 4.\end{cases}$ …………………… 17 分

19.(1)解：当 $a=2$ 时，$4\oplus 4=\log_2(2^4+2^4)=\log_2 32=5$. …………………… 3 分

(2)证明：因为 $(x\oplus y)\oplus z=\log_a(a^x+a^y)\oplus z=\log_a(a^{\log_a(a^x+a^y)}+a^z)=\log_a(a^x+a^y+a^z)$， …………………… 5 分

$x\oplus(y\oplus z)=x\oplus[\log_a(a^y+a^z)]=\log_a(a^x+a^{\log_a(a^y+a^z)})=\log_a(a^x+a^y+a^z)$， …………………… 7 分

所以 $(x\oplus y)\oplus z=x\oplus(y\oplus z)$. …………………… 8 分

(3)解：由新运算可知，

$f(x)=m\oplus m-\log_a 2=\log_a(a^m+a^m)-\log_a 2=m+\log_a 2-\log_a 2=m=\log_a(x^2-3ax+2a^2)$. …………………… 9 分

令 $g(x)=x^2-3ax+2a^2$，则 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，

由于 $f(x)$ 在 $[s,t]$ 上的值域为 $[\log_a t,\log_a s]$，所以 $\log_a t<\log_a s\,(s<t)$，

则 $0<a<1$， …………………… 10 分

所以 $f(x)$ 在 $[s,t]$ 上单调递增，则 $\begin{cases}g(s)=t,\\ g(t)=s,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}s^2-3as+2a^2=t,\\ t^2-3at+2a^2=s,\end{cases}$ …………………… 11 分

整理得，$s^2-t^2-3a(s-t)=-(s-t)$，所以 $s+t-3a=-1$，

将 $t=3a-s-1$ 代入 $s^2-3as+2a^2=t$，得 $s^2-(3a-1)s+2a^2-3a+1=0$，

同理得，$t^2-(3a-1)t+2a^2-3a+1=0$. …………………… 12 分

所以 s,t 是函数 $h(x)=x^2-(3a-1)x+2a^2-3a+1$ 在 $(0,a)$ 上的两个不同的零点，

则 $\begin{cases}h(0)=2a^2-3a+1>0,\\ h(a)=-2a+1>0,\\ 0<\dfrac{3a-1}{2}<a,\\ \Delta=(3a-1)^2-4(2a^2-3a+1)>0,\end{cases}$ …………………… 14 分

解得 $\begin{cases}a<\dfrac{1}{2}, \text{或 } a>1,\\ a<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{3}<a<1,\\ a<-3-2\sqrt{3}, \text{或 } a>-3+2\sqrt{3},\end{cases}$ 所以 $2\sqrt{3}-3<a<\dfrac{1}{2}$， …………………… 16 分

故实数 a 的取值范围为 $\left(2\sqrt{3}-3,\dfrac{1}{2}\right)$. …………………… 17 分