

## 高中数学选修 4-5 知识点

### 不等式选讲

#### 1、不等式的基本性质

① (对称性)  $a > b \Leftrightarrow b > a$

② (传递性)  $a > b, b > c \Rightarrow a > c$

③ (可加性)  $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

(同向可加性)  $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$

(异向可减性)  $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$

④ (可积性)  $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$

$a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$

⑤ (同向正数可乘性)  $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

(异向正数可除性)  $a > b > 0, 0 < c < d \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

⑥ (平方法则)  $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbb{N}, \text{且 } n > 1)$

⑦ (开方法则)  $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbb{N}, \text{且 } n > 1)$

⑧ (倒数法则)  $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}; a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

#### 2、几个重要不等式

①  $a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbb{R})$ , (当且仅当  $a = b$  时取 "=" 号). 变形公式:  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ .

② (基本不等式)  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a, b \in \mathbb{R}^+)$ , (当且仅当  $a = b$  时取到等号).

变形公式:  $a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ .

用基本不等式求最值时 (积定和最小, 和定积最大), 要注意满足三个条件 “一正、二定、三相等”.

③ (三个正数的算术—几何平均不等式)  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} (a, b, c \in \mathbb{R}^+)$  (当且仅当

$a=b=c$  时取到等号) .

$$\textcircled{4} a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (a, b \in R)$$

(当且仅当  $a=b=c$  时取到等号) .

$$\textcircled{5} a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

(当且仅当  $a=b=c$  时取到等号) .

$$\textcircled{6} \text{ 若 } ab > 0, \text{ 则 } \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2 \quad (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时取等号})$$

$$\text{若 } ab < 0, \text{ 则 } \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq -2 \quad (\text{当且仅当 } a=b \text{ 时取等号})$$

$$\textcircled{7} \frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} < 1 < \frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}, \quad (\text{其中 } a > b > 0, m > 0, n > 0)$$

规律: 小于 1 同加则变大, 大于 1 同加则变小.

$$\textcircled{8} \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } |x| > a \Leftrightarrow x^2 > a^2 \Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a;$$

$$|x| < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \Leftrightarrow -a < x < a.$$

$$\textcircled{9} \text{ 绝对值三角不等式 } |a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

### 3、几个著名不等式

$$\textcircled{1} \text{ 平均不等式: } \frac{2}{a^{-1} + b^{-1}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}, \quad (a, b \in R^+, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 时取 " = " 号}).$$

(即调和平均  $\leq$  几何平均  $\leq$  算术平均  $\leq$  平方平均) .

变形公式:

$$ab \leq \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}; \quad a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}.$$

② 幂平均不等式:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

③ 二维形式的三角不等式:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (x_1, y_1, x_2, y_2 \in R).$$

④ 二维形式的柯西不等式:

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$  ( $a, b, c, d \in R$ ). 当且仅当  $ad = bc$  时, 等号成立.

⑤三维形式的柯西不等式:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

⑥一般形式的柯西不等式:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

⑦向量形式的柯西不等式:

设  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  是两个向量, 则  $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$ , 当且仅当  $\vec{\beta}$  是零向量, 或存在实数  $k$ , 使  $\vec{\alpha} = k\vec{\beta}$  时, 等号成立.

⑧排序不等式 (排序原理):

设  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  为两组实数.  $c_1, c_2, \dots, c_n$  是  $b_1, b_2, \dots, b_n$  的任一排列, 则

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 \leq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n. \quad (\text{反序和} \leq \text{乱序和} \leq$$

顺序和), 当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  或  $b_1 = b_2 = \dots = b_n$  时, 反序和等于顺序和.

⑨琴生不等式: (特例: 凸函数、凹函数)

若定义在某区间上的函数  $f(x)$ , 对于定义域中任意两点  $x_1, x_2$  ( $x_1 \neq x_2$ ), 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{或} \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad \text{则称 } f(x) \text{ 为凸 (或凹) 函数.}$$

4、不等式证明的几种常用方法

常用方法有: 比较法 (作差, 作商法)、综合法、分析法;

其它方法有: 换元法、反证法、放缩法、构造法, 函数单调性法, 数学归纳法等.

常见不等式的放缩方法:

$$\text{①舍去或加上一些项, 如 } \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > \left(a + \frac{1}{2}\right)^2;$$

②将分子或分母放大 (缩小),

$$\text{如 } \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}, \quad \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k(k+1)}, \quad \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \quad (k \in N^*, k > 1) \quad \text{等.}$$

5、一元二次不等式的解法

求一元二次不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  (或  $< 0$ )

( $a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac > 0$ ) 解集的步骤:

一化: 化二次项前的系数为正数.

二判：判断对应方程的根.

三求：求对应方程的根.

四画：画出对应函数的图象.

五解集：根据图象写出不等式的解集.

规律：当二次项系数为正时，小于取中间，大于取两边.

6、高次不等式的解法：穿根法.

分解因式，把根标在数轴上，从右上方依次往下穿（奇穿偶切），结合原式不等号的方向，写出不等式的解集.

7、分式不等式的解法：先移项通分标准化，则

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \quad ( "<或\leq" \text{时同理})$$

规律：把分式不等式等价转化为整式不等式求解.

8、无理不等式的解法：转化为有理不等式求解

$$(1) \quad \sqrt{f(x)} > a (a > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > a^2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \sqrt{f(x)} < a (a > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < a^2 \end{cases}$$

$$(3) \quad \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$$

$$(5) \quad \sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

规律：把无理不等式等价转化为有理不等式，诀窍在于从“小”的一边分析求解.

9、指数不等式的解法：

$$(1) \text{当 } a > 1 \text{ 时, } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

$$(2) \text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

规律：根据指数函数的性质转化.

10、对数不等式的解法

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

(1) 当  $a > 1$  时,

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}.$$

(2) 当  $0 < a < 1$  时,

规律: 根据对数函数的性质转化.

11、含绝对值不等式的解法:

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}.$$

(1) 定义法:

$$(2) \text{平方法: } |f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leq g^2(x).$$

(3) 同解变形法, 其同解定理有:

$$\textcircled{1} |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a (a \geq 0);$$

$$\textcircled{2} |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ 或 } x \leq -a (a \geq 0);$$

$$\textcircled{3} |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow -g(x) \leq f(x) \leq g(x) (g(x) \geq 0)$$

$$\textcircled{4} |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \text{ 或 } f(x) \leq -g(x) (g(x) \geq 0)$$

规律: 关键是去掉绝对值的符号.

12、含有两个 (或两个以上) 绝对值的不等式的解法:

规律: 找零点、划区间、分段讨论去绝对值、每段中取交集, 最后取各段的并集.

13、含参数的不等式的解法

解形如  $ax^2 + bx + c > 0$  且含参数的不等式时, 要对参数进行分类讨论, 分类讨论的标准有:

(1) 讨论  $a$  与 0 的大小;

(2) 讨论  $\Delta$  与 0 的大小;

(3) 讨论两根的大小.

14、恒成立问题

(1) 不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  的解集是全体实数 (或恒成立) 的条件是:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } a = 0 \text{ 时 } \Rightarrow b = 0, c > 0;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } a \neq 0 \text{ 时 } \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

(2) 不等式  $ax^2 + bx + c < 0$  的解集是全体实数 (或恒成立) 的条件是:

①当  $a=0$  时  $\Rightarrow b=0, c<0$ ;

②当  $a \neq 0$  时  $\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

(3)  $f(x) < a$  恒成立  $\Leftrightarrow f(x)_{\max} < a$ ;

$f(x) \leq a$  恒成立  $\Leftrightarrow f(x)_{\max} \leq a$ ;

(4)  $f(x) > a$  恒成立  $\Leftrightarrow f(x)_{\min} > a$ ;

$f(x) \geq a$  恒成立  $\Leftrightarrow f(x)_{\min} \geq a$ .

## 15、线性规划问题

(1)二元一次不等式所表示的平面区域的判断:

法一: 取点定域法:

由于直线  $Ax + By + C = 0$  的同一侧的所有点的坐标代入  $Ax + By + C$  后所得的实数的符号

相同.所以, 在实际判断时, 往往只需在直线某一侧任取一特殊点  $(x_0, y_0)$  (如原点), 由

$Ax_0 + By_0 + C$  的正负即可判断出  $Ax + By + C > 0$  (或  $< 0$ ) 表示直线哪一侧的平面区域.

即: 直线定边界, 分清虚实; 选点定区域, 常选原点.

法二: 根据  $Ax + By + C > 0$  (或  $< 0$ ), 观察  $B$  的符号与不等式开口的符号, 若同号,

$Ax + By + C > 0$  (或  $< 0$ ) 表示直线上方的区域; 若异号, 则表示直线下方的区域.即: 同号

上方, 异号下方.

(2)二元一次不等式组所表示的平面区域:

不等式组表示的平面区域是各个不等式所表示的平面区域的公共部分.

(3)利用线性规划求目标函数  $z = Ax + By$  ( $A, B$  为常数) 的最值:

法一: 角点法:

如果目标函数  $z = Ax + By$  ( $x, y$  即为公共区域中点的横坐标和纵坐标) 的最值存在, 则

这些最值都在该公共区域的边界角点处取得, 将这些角点的坐标代入目标函数, 得到一组对应  $z$  值, 最大的那个数为目标函数  $z$  的最大值, 最小的那个数为目标函数  $z$  的最小值

法二: 画——移——定——求:

第一步, 在平面直角坐标系中画出可行域; 第二步, 作直线  $l_0: Ax + By = 0$ , 平移直线  $l_0$  (据

可行域, 将直线  $l_0$  平行移动) 确定最优解; 第三步, 求出最优解  $(x, y)$ ; 第四步, 将最优解

$(x, y)$  代入目标函数  $z = Ax + By$  即可求出最大值或最小值.

第二步中最优解的确定方法:

利用  $z$  的几何意义:  $y = -\frac{A}{B}x + \frac{z}{B}$ ,  $\frac{z}{B}$  为直线的纵截距.

①若  $B > 0$ , 则使目标函数  $z = Ax + By$  所表示直线的纵截距最大的角点处,  $z$  取得最大值, 使直线的纵截距最小的角点处,  $z$  取得最小值;

②若  $B < 0$ , 则使目标函数  $z = Ax + By$  所表示直线的纵截距最大的角点处,  $z$  取得最小值, 使直线的纵截距最小的角点处,  $z$  取得最大值.

(4)常见的目标函数的类型:

① “截距”型:  $z = Ax + By$ ;

② “斜率”型:  $z = \frac{y}{x}$  或  $z = \frac{y-b}{x-a}$ ;

③ “距离”型:  $z = x^2 + y^2$  或  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

$z = (x-a)^2 + (y-b)^2$  或  $z = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ .

在求该“三型”的目标函数的最值时, 可结合线性规划与代数式的几何意义求解, 从而使问题简单化.