## 专题08 数列通项公式的求法



**知识点1 ：由与关系求通项公式**



由题目给出与（或者直接给出多项数列相加）关系式求通项公式，可以考虑退位相减，构造

然后根据化简。

1. 消得到的关系式
2. 消得到的关系式
3. 根据题目给出的项求和公式或者求积公式，构造项后做差或作商，求通项。

**注意：**构造后，，所以求出通项公式后，记得验证首项是否满足通项公式。

**说明: 作业知识点2：累加法求通项公式**

型（是关于的函数）：

**注意：**

①若是关于的一次函数，累加后可转化为等差数列求和；

②若是关于的指数函数，累加后可转化为等比数列求和；

③若是关于的二次函数，累加后可分组求和；

④若是关于的分式函数，累加后可裂项求和．

验证首项是否满足通项公式。

**说明: 作业知识点3：累乘法求通项公式**

型（是关于的函数）：

**注意：**

的连乘一般可以上下抵消，注意隔项相消的时候，要留意保留的项。

验证首项是否满足通项公式。

**说明: 作业知识点4：构造数列法求通项公式**

目标把拆分成的形式，使得为公比为的等比数列（其中的满足）

目标把拆分成的形式，使得为公比为的等比数列（其中的满足

两边同时除以，得，然后按照的方法去求通项。

**注意：**

通过待定系数法，构造等比数列，最后来确定系数。

验证首项是否满足通项公式。

**说明: 作业知识点5：倒数法求通项公式**

型

化成形式，得{}为等差数列

**说明: 作业知识点6：递推式求周期性数列**

同函数的周期性一致，数列也具有周期性。以下举出几个常见周期数列的特征。

1. 型 分式递推式，可能为周期数列，可计算出几项来证实一下周期性。
2. 或
3. 分段式数列

**注意：**

以上几种数列，当觉得可能为周期数列时，可计算出几项来验证一下周期性。

****

**【题型1】消或消得通项公式**

|  |
| --- |
| 高妙技法  退位构造，然后根据化简。通常都是由消得到的关系式，但是若式子的其余项都是相关项，也会由消得到的关系式。注意检验首项 |

1．（25-26高三上·湖南长沙·月考）已知数列的前*n*项和为，，且，则（   ）

A．3 B．6 C．9 D．12

【答案】A

【分析】根据数列前项和与数列通项之间的关系，求出数列递推公式，进而求出数列前6项，求出结果.

【详解】由可得，即，得，

由可得，，，

故是周期为3的周期数列，且，故.

故选：A.

2．（24-25高二下·广东·月考）记为首项为1的数列的前项和，且，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】根据与的关系可得，利用累乘法计算得出即可求解.

【详解】易得，故，

化简得，即，

由知，故，

累乘可得，

即，故，

当时，也符合上式，故，故.

故选：C.

3．（24-25高二下·北京·期中）设数列的前项和为．若，，则（    ）

A．18 B．12 C．6 D．3

【答案】B

【分析】根据作差得到，再一一求出前几项即可.

【详解】因为，当时，

所以，即，

所以，

又，所以，

由，则，由，则，由，则，

由，则.

故选：B

4．（24-25高二下·黑龙江绥化·期中）已知为数列的前*n*项和，，，则 ．

【答案】2024

【分析】由递推关系得到，再由得数列中所有项都为可得答案．

【详解】当时，由得，

两式相减得，即，

因为，所以由，得，

由，得，

所以数列中所有项都为，

则.

故答案为：.

**【题型2 由公式递推式求项】**

|  |
| --- |
| 高妙技法  若题目给出的是n项相加或相乘的格式，也可以构建n+1项，然后两式相减或者相除，得第n+1项，注意检验首项 |

1．（25-26高二上·甘肃兰州·期中）已知数列满足，设，为数列的前项和.若对任意恒成立，则实数的最小值为（    ）

A．4 B．3 C．2 D．1

【答案】B

【分析】根据给定条件，利用前项和与第项的关系求出，进而求出，再由裂项相消法求出即可求出最小值.

【详解】数列中，，当时，，

当时，，两式相减得，

则，而不满足此式，因此，

当时，，当时，满足上式；

因此，由对任意恒成立，得，

所以的最小值为．

故选：B

2．（25-26高二上·江苏苏州·月考）数列满足，则数列的前9项和为（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】先根据已知条件求出数列的通项公式，再得到数列的通项公式，最后利用裂项相消法求出其前项和.

【详解】数列满足①,

当时，；

当时，②，

①②得，，

又因为，不满足上式，

故，

当时，，

设数列的前9项和为,

则

，

故选：.

3．（2025高三·全国·专题练习）已知数列满足，设数列满足，数列的前项和为，若恒成立，则实数的取值范围为（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】由的关系可求，继而得到，利用裂项相消可求得，整理不等式得，根据恒成立转化为求最值即可.

【详解】数列满足，①

当时，，②

①－②得，，，经检验，，满足．

数列满足，

可得，

由于恒成立，即，整理得，，

因为在上单调递减，

故当时，，所以，

故选：C．

4．（24-25高二下·广东深圳·期末）已知数列满足，则 ．

【答案】

【分析】根据可求.

【详解】时，，与原式相减得

，则，

经检验，时也成立，

故，即．

故答案为：.

**【题型3 累加法求通项公式】**

|  |
| --- |
| 高妙技法  右边项求和时，可以使用求和的几种方法。注意检查首项是否满足最后的通项公式 |

1．（2025高二·全国·专题练习）在数列中，，，则等于（ ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】将给定的递推公式变形，再借助累加法计算作答.

【详解】在数列中，由，得，

则当时，

，

因此，显然满足上式，

所以.

故选：C

2．（24-25高二上·湖北孝感·月考）数列满足：，，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】由累加法可得，从而可得的值.

【详解】由，可得，

利用累加法可得,

化简得，则.

故选：C.

3．（2025高三·全国·专题练习）已知数列满足，，则（    ）

A． B．3 C．4 D．

【答案】C

【分析】根据与的关系，先得到数列的递推关系式，再根据累加法求的值.

【详解】由，

得，

所以，

所以，

，…，

，

各式两端相加得，

故．

故选：C.

4．（2025高三上·广东中山·专题练习）已知数列满足，则 ；

【答案】

【分析】整理数列的递推公式，利用累加法求得其通项公式，再赋值计算即得.

【详解】，

，





．显然满足上式，

．

故答案为：.

**【题型4 累乘法求通项公式】**

|  |
| --- |
| 高妙技法  右侧的累乘项一般是分式可以上下消除，但要注意隔项消除时最后剩下的项。注意检验首项是否满足通项公式。 |

1．（多选）（24-25高二下·辽宁·期中）已知数列满足，，则（   ）

A．是递减数列

B．

C．当的前*n*项和取得最小值时，

D．对任意，不等式，则

【答案】ACD

【分析】对A，由题得，利用数列单调性定义判断；对B，由题，当时，，利用累乘法求出通项；对C，由题得，可得数列的前6项均小于0，从第7项开始大于0，得解；对D，对分奇数和偶数讨论，将原不等式转化为恒成立，求出最值得解.

【详解】对于A，由题，，

又，由递推式可得，所以是递减数列，故A正确；

对于B，由上面可知，当时，，

将上式累乘得，，

整理得，又，所以，故B错误；

对于C，设，则，，

，，，，，

由指数函数与函数的增长速度可知，当时，，

所以当数列的前*n*项和取得最小值时，，故C正确；

对于D，当为偶数时，不等式转化为，又，

所以，

当为奇数时，不等式转化为，又，

所以，

综上，，故D正确.

故选：ACD.

2．（多选）（24-25高二下·辽宁·期中）已知数列满足，，则（   ）

A．， B．，

C．，为完全立方数 D．，数列的前项和

【答案】ABD

【分析】先利用累乘法求出数列的通项公式，作差判断A，根据数列的增减性判断B，利用判断C，利用数学归纳法，假设数列的前项和成立判断D.

【详解】由题意可得，，

所以当时，，…，，，

以上个式子左右两边分别相乘得，

即，将代入解得，

当时满足，所以数列的通项公式为，

因为对恒成立，

所以对恒成立，A说法正确；

易知数列是递增数列，且，，所以，，B说法正确；

因为，所以不存在使得为完全立方数，C说法错误；

下证，数列的前项和，

当时，成立，

假设当时，成立，

则当时，

成立，

所以，数列的前项和，D说法正确；

故选：ABD

3．（24-25高二下·上海奉贤·月考）已知数列 满足 ，则 的通项公式为

【答案】

【分析】通过递推公式得到相邻两项的比值关系，然后利用累乘法求出数列的通项公式.

【详解】已知，将换为，可得，

那么（）.

利用累乘法求（），

由（）可得：

观察发现，约分后可得（）.

当时，，与已知相符.

所以，.

故答案为：，.

4．（2025高三·全国·专题练习）已知，，求数列的通项．

【答案】

【分析】通过累乘法来求数列的通项公式.

【详解】已知，

则，

，

已知，由，

故数列的通项为：.

**【题型5 一次/二次/常数型用构造法求通项公式】**

|  |
| --- |
| 高妙技法  当为常数或者一次函数或者二次函数，用待定系数法构使得 *p*，数列为等比数列。 |

1．（2026高三·全国·专题练习）已知数列满足，则 ．

【答案】

【分析】由，可得，再根据等比数列的定义及通项即可得解.

【详解】由，可得，

又，所以，

所以数列是以为首项，为公比的等比数列，

所以，

所以.

故答案为：.

2．（25-26高二上·甘肃平凉·月考）已知，当时，，则的通项公式为

【答案】

【分析】由题意设，展开后对照已知列方程组求出，再结合等比数列的通项公式，即可求得答案.

【详解】由于当时，①，

故设，即②，

由①，②对照可得，，解得，

即，

又，则是以3为首项，为公比的等比数列，

故，则

故答案为：

3．（多选）（25-26高三上·黑龙江·月考）设首项为1的数列前*n*项和为，已知，则下列结论正确的是（   ）

A．数列为等比数列 B．数列的前*n*项和

C．数列的通项公式为 D．数列不是等比数列

【答案】ABD

【分析】条件可化为，结合等比数列定义可判断A正确，由A可求得的通项公式判断B，由的通项公式可求得的通项公式判断C，利用特殊值可判断D.

【详解】 

又，数列是首项公比都为的等比数列，故选项A正确；

由A知， ，故B选项正确；

又因为，当，，当，，

，故选项C错误；

，，所以数列不是等比数列，故选项D正确.

故选：ABD

4．（多选）（25-26高三上·辽宁·期中）记为数列的前项和，且，，则（    ）

A． B．为等差数列

C．数列单调递减 D．

【答案】AD

【分析】对于A：令可判断；对于B：利用与的关系，把转化成关于的递推公式，然后利用定义可判断；对于C：求出的通项，利用指数函数单调性判断；对于D：利用分组求和以及等比数列的前项和公式计算可判断.

【详解】对于A，令可得，即，

又，解得，故A正确；

对于B，当时，，两式相减可得，且，

即，故是以首项，公比为的等比数列，故B错误；

对于C，易得，

故，易得数列单调递增，故C错误；

对于D，，故D正确.

故选：AD.

**【题型6 指数型用构造法求通项公式】**

|  |
| --- |
| 高妙技法  先除以式子中的指数，把这项变成常数项，然后按照常数的待定系数法去分配。 |

1．（25-26高二上·江苏镇江·期中）已知数列中，，且，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】利用条件证明数列是等差数列并求出数列的通项公式，将代入即可得解.

【详解】已知，两边同时除以，

可得，即.

又当时，，

所以数列是以1为首项，1为公差的等差数列，

所以，所以，

所以.

故选：A

2．（25-26高二上·甘肃·月考）已知单调递增数列满足，且，则（   ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】变形得到、，讨论、时判断数列性质，即可得.

【详解】由于，即，整理得，

当时，单调递增，符合；

当时，则是首项为，公比为的等比数列，

所以，则，

当时，则，，不符，

当时，则，不符，

当时，则，，不符，

故选：A.

3．（多选）（25-26高三上·湖北荆州·月考）已知数列的前项和为，，且，则下列说法正确的有（   ）

A．是一个等差数列

B．是一个等比数列

C．对，．

D．数列的前项和为，则

【答案】ACD

【分析】对于A选项，由已知数列的递推式推得，由等差数列的定义判断即可；对于B选项，C选项，由等差数列的通项公式可得，即可求得，即可判断；对于D选项，由数列的裂项相消求和，即可求解.

【详解】对于A选项，因为，，可以得到，所以由数列是首项为，公差为的等差数列，故A正确；

对于B选项，，可得，

所以当时，，

当时，，

又，故，故B错误；

对于C选项，当时，，

当时，，即，故C正确；

对于D选项，数列，当时，首项为，

当时，，

所以，

当时，，故D正确.

故选：ACD.

4．（25-26高三上·河南新乡·期中）在数列中，，，则 .

【答案】

【分析】由已知的递推公式构造等比数列，求得该等比数列的通项公式，从而得到数列的通项公式.

【详解】由，得.

由，得，则，

所以.

所以数列是首项为，公比为的等比数列.

所以.

所以.

故答案为：.

**【题型7 倒数型求通项公式】**

|  |
| --- |
| 高妙技法  构造倒数数列，然后求倒数数列的通项公式。 |

1．（24-25高二上·江苏镇江·期中）已知在数列中，，，，数列的前项和为，则（   ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】根据取倒数法可得，由等差数列的定义和通项公式可得，进而，结合裂项相消法求和即可.

【详解】由，得，即，

又，所以，

则是以为首项，以为公差的等差数列，

得，故，得，

所以，

所以



.

故选：A

2．（多选）（25-26高二上·江苏南京·月考）数列的前项和为，则下列命题正确的是（　　）

A．

B．

C．数列的最小项为

D．数列为等比数列

【答案】ACD

【分析】利用与的关系，将条件转化为的等差数列，求得；逐一验证各选项：分析的表达式、判断数列最小项、验证新数列的等比性.

【详解】当时，由，得，

两边除以（），得.

由此可知是首项为、公差为4的等差数列，

故，即，

也符合上式，所以，选项A正确.

选项B：时，，

但时，不满足此式，故B错误.

选项C：数列的项为：，，，，……，

时，的绝对值随增大而减小，

故是最小项，选项C正确.

选项D：，，

故，

该数列为常数列（每一项均为），

常数列（非零）是公比为1的等比数列，选项D正确.

故选：ACD

3．（25-26高二上·黑龙江哈尔滨·月考）已知数列满足，，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】先由得到，利用累加法求出，则.

【详解】因为，所以即；

所以

即；

所以，而也符号该式，故

故选：D

4．（2025高三·全国·专题练习）已知在数列中，，且满足，求证：．

【答案】证明见解析

【分析】等式两边同除，构造等比数列求出，带入求和公式利用放缩法裂项相消证明即可.

【详解】因为，且满足，显然对任意，，

等式两边同除以得，即，

所以数列是以为首项，为公比的等比数列，

所以，解得，

所以







．

**【题型8递推式求周期数列的通项公式】**

|  |
| --- |
| 高妙技法  可以列出数列中的几项来发现数列是否是周期数列，并找出其最小周期。 |

1．（25-26高二上·江苏苏州·期中）数列满足，则 .

【答案】/

【分析】先根据递推关系计算数列的项进而得出数列是周期数列，最后根据周期性求值即可.

【详解】数列  满足 ，且 ，

则 

.

所以数列  是周期为4的周期数列，

所以

所以

所以.

故答案为：.

2．（25-26高二上·福建莆田·期中）设数列满足，且，则（   ）

A． B． C． D．3

【答案】C

【分析】根据给定的递推公式，计算数列前5项确定周期，进而求出指定项.

【详解】数列中，，且，则，

，因此数列是周期为4的数列，

所以.

故选：C

3．（25-26高二上·山西·月考）已知数列中，，则（   ）

A．3 B． C． D．

【答案】C

【分析】由，得，利用递推公式得数列的周期，利用周期即可求解.

【详解】由，得，

又，所以，

所以数列是以3为周期的数列，

故.

故选：C.

4．（25-26高三上·辽宁·月考）已知数列满足，，，则下列说法正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【分析】先把递推关系式化简得到，再计算出数列的前几项，即可得到数列是周期为6的周期数列，根据周期性计算即可.

【详解】因为，且，，

故，

所以，

所以数列都是以6为一个周期的周期数列.

又，则，A项错误；

因为，所以，B项错误；

因为，所以，C项错误；

因为，所以，D项正确.

故选：D

****

**一、单选题**

1．（25-26高三上·山东泰安·月考）已知数列的前项和为，满足，则（  ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】由与的关系，得出数列的递推公式，从而利用构造法求得数列的通项公式.进而求得.

【详解】因为，所以当时， ，所以.

当时，，

所以， 化简得.

所以.

因为，所以是首项为4，公比为2的等比数列.

所以.

所以.

故.

故选：B.

2．（25-26高三上·广东肇庆·开学考试）已知数列的前项和为，，且，则（   ）

A．1012 B．2024 C． D．2025

【答案】C

【分析】根据的关系可得，即可通过列举发现周期性，进而可求解.

【详解】由可得，故，

由可得

故是周期为3的周期数列，且，

故，

故选：C

3．（25-26高三上·四川成都·开学考试）已知数列满足，，则（   ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】由题知，代入计算即可得到，继而得到.

【详解】因为数列满足，，

所以，

所以，

则，

所以，

故选：A.

4．（25-26高二上·重庆·月考）已知数列满足，，（），则（   ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】将变成,（）.根据，依次计算即可.

【详解】数列满足，（），所以,（）.

因为，所以，，，.

故选：D.

**二、多选题**

5．（25-26高三上·辽宁·期中）记为数列的前项和，且，，则（    ）

A． B．为等差数列

C．数列单调递减 D．

【答案】AD

【分析】对于A：令可判断；对于B：利用与的关系，把转化成关于的递推公式，然后利用定义可判断；对于C：求出的通项，利用指数函数单调性判断；对于D：利用分组求和以及等比数列的前项和公式计算可判断.

【详解】对于A，令可得，即，

又，解得，故A正确；

对于B，当时，，两式相减可得，且，

即，故是以首项，公比为的等比数列，故B错误；

对于C，易得，

故，易得数列单调递增，故C错误；

对于D，，故D正确.

故选：AD.

6．（24-25高二下·广东深圳·期中）已知数列满足，记分别为数列的前项和，则（    ）

A． B．当时，

C． D．当时，

【答案】ACD

【分析】构造常数列求出数列判断A；利用等差数列前项和公式求解判断B；利用裂项相消法求和C；由单调性判断D.

【详解】对于A，数列中，由，得，因此数列是常数列，

，，A正确；

对于B，数列为等差数列，，显然是递增数列，

当时，，B错误；

对于C，，，

因此，C正确；

对于D，当时，，而数列是递增数列，

则，因此，D正确.

故选：ACD

7．（25-26高三上·福建莆田·期中）已知数列满足，则（    ）

A．

B．的前8项和为86

C．的前12项和为

D．的前16项和为168

【答案】AD

【分析】令即可求出判断A选项；由时得，再结合题设条件等式作差得的通项公式即可计算得前8项的和判断B选项；写出的通项公式，然后由等差数列的性质计算该数列的前12项的和，判断C选项；由的通项公式计算出的前16项和，判断D选项.

【详解】令，则，A选项正确；

由题意可知当时，，

所以，即，

∴数列的前8项和为，B选项错误；

令，则

，C选项错误；

，

，D选项正确.

故选：AD.

**三、填空题**

8．（25-26高三上·重庆·月考）已知数列的前项和为，且满足，则 .

【答案】350或357

【分析】讨论的奇偶性，结合递推关系求项判断数列的周期性，进而求.

【详解】当为奇数时，，则，

数列的项依次为，

数列是周期为3的数列，所以；

当为偶数时，，则，

数列的项依次为，

数列是首项为8，从第2项起周期为3的数列，

所以.

故答案为：350或357

9．（25-26高二上·天津·月考）已知数列中，*a1*＝1，，记*Sn*为{*an*}的前*n*项和，则 ．

【答案】

【分析】先由，*a1*＝1，得到数列周期为4，计算出一个周期内的和为，所以.

【详解】因为数列中， ，；

所以，，

，，

与相同，

所以数列的周期为4

一个周期内的和为，

因为 所以；

故答案为：.

10．（25-26高三上·贵州贵阳·期中）已知数列  中，  ，记  为  的前  项和，  ，则  .

【答案】

【分析】利用数列前项和与的关系得到，然后由累乘法即可求得.

【详解】因为，当时，，

则，即，

可得：．

故答案为：12.

11．（25-26高三上·吉林延边·期中）在数列中，，，则 .

【答案】5

【分析】根据累加法即可求解.

【详解】由可得，

故，

，

……,

,

相加可得，

故答案为：5

**四、解答题**

12．（2025高三·全国·专题练习）已知数列满足，，，求数列的通项．

【答案】

【分析】结合已知等式，利用作商的方法求出时，的表达式，进而得到的表达式，再单独验证时的情况.

【详解】由题意有，

，

两式相除得，即，而也满足该式，

当时，由，得．

所以

13．（2025高二·全国·专题练习）已知数列满足，，求数列的通项公式．

【答案】

【分析】可看作数列的前项和，从而可通过消元法消去求得数列的通项，并进一步得到数列的通项．

【详解】由，

得，

所以，

两式相减可得，

所以，即．

因为，所以，

从而，又因为，所以，

所以.

14．（25-26高二上·海南海口·期中）已知数列满足,且．

(1)求的值；

(2)求证：数列是等差数列，并指出这个等差数列的首项和公差；

(3)求数列的前项和．

【答案】(1);

(2)证明见解析，首项为1，公差为1；

(3)

【分析】（1）依次代入即可求解；

（2）运用构造法，两边同除即可得证；

（3）运用错位相减法解决“等差数列等比数列”的数列求和模型.

【详解】（1）∵,且,

∴,

.

（2）由,

得.

又,故数列是以1为首项，1为公差的等差数列.

（3）由（2）可知：,,故；

,

,

两式相减，得

,

,

,

;

故.

15．（2025高三·全国·专题练习）已知数列中，，求．

【答案】

【分析】通过递推关系寻找规律，然后构造新数列转化成等差数列形式，即可求得.

【详解】，

所以，

又，则是首项为公差为的等差数列，

得，故．