

三亚市 2024~2025 学年度第一学期高三年级学业水平诊断考试

数 学

本试卷共 4 页。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

- 1.答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡上。
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应的答案标号涂黑,如有改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案;回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.命题“ $\forall x \geq 2, \left(\frac{5}{4}\right)^x + \lg x > 1$ ”的否定为

A. $\exists x \geq 2, \left(\frac{5}{4}\right)^x + \lg x \leq 1$

B. $\forall x < 2, \left(\frac{5}{4}\right)^x + \lg x > 1$

C. $\exists x \geq 2, \left(\frac{5}{4}\right)^x + \lg x > 1$

D. $\forall x \geq 2, \left(\frac{5}{4}\right)^x + \lg x \leq 1$

2.已知 $\frac{3}{z} = -1 - 2i$, 则 $\bar{z} =$

A. $-\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$

B. $-\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

C. $\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$

D. $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

3.若向量 $\mathbf{a} = (x, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1)$, 且 $\mathbf{a} \parallel (\mathbf{a} + 3\mathbf{b})$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$

A. -1

B. 2

C. -2

D. 1

4.已知随机事件 A 和 B 互斥, 且 $P(A \cup B) = 0.5$, $P(B) = 0.3$. 则 $P(\bar{A}) =$

A. 0.2

B. 0.3

C. 0.8

D. 0.5

5.函数 $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin x$ 的最小正周期和最大值分别为

A. $\frac{\pi}{4}, 1$

B. $\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\pi, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $2\pi, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

6.已知过原点的直线 l 与圆 $M: (x - 2\sqrt{2})^2 + (y - 2)^2 = 16$ 交于 A, B 两点(M 为圆心), 当 $\triangle MAB$ 的面积最大时, 直线 l 的斜率为

A. -2

B. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & 0 < x \leq 1 \\ ax^2 + 3x + 2, & 1 < x < 2 \end{cases}$ 在其定义域内单调递增, 则 a 的取值范围为

- A. $\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$ B. $[2, +\infty)$ C. $[-2, +\infty)$ D. $\left[-\frac{5}{4}, 2\right)$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, A 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点, M 为双曲线 C 上位于第一象限内的一点, 点 M 关于 y 轴对称的点为 N , 记 $\angle MAN = \alpha$, $\angle MOx = \beta$, 若 $\tan \alpha \tan \beta = 3$, 则双曲线 C 的离心率为

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{5} - 1$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 为夯实科技支撑, 打造高水平“天府粮仓”, 推动农业科技园区高质量发展, 遂宁国家农业科技园区在射洪市青岗镇文化村建设酿酒专用粮品种繁育中试熟化基地, 在高产示范片中选择 3 个高粱品种代表性地块进行挖方测产. 经统计了解得到该优良品种高粱的亩产量的样本期望 $\bar{x} = 650$ (单位: 千克), 样本标准差 $s = 20$, 已知该园区未改良前原品种高粱的亩产量 X 服从正态分布 $N(540, 100)$, 假设改良后新品种高粱的亩产量 Y 服从正态分布 $N(\bar{x}, s^2)$, [若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(Z < \mu - \sigma) \approx 0.1587$], 则

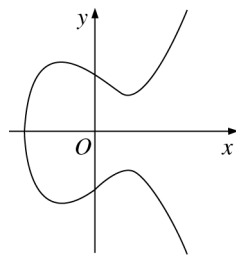
- A. $P(X > 567) < 0.16$ B. $P(X < 550) > 0.84$
C. $P(Y < 630) < 0.15$ D. $P(Y > 670) > 0.15$

10. 已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, 则

- A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点 B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 对称
C. $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减 D. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x^2 - 1) < f(x - 1)$

11. 设计一个实用的门把手, 其造型可以看作图中的曲线 $C: y^2 = x^3 - 2x + 2$ 的一部分, 则

- A. 点 $(1, 1)$ 在 C 上
B. 将 C 在 x 轴上方的部分看作函数 $f(x)$ 的曲线, 则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的极小值点
C. 过 $(1, 1)$ 作 C 的切线, 其与 C 的交点的横纵坐标均为有理数
D. C 在 y 轴左边的部分到坐标原点 O 的距离均大于 $\sqrt{2}$



三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. $(x^2 + 2y)^6$ 的展开式中 $x^6 y^3$ 的系数为 _____ (用数字作答).

13. 已知正数 a, b 满足 $\frac{2}{b} + \frac{1}{a} = 1$, 则 $\frac{2}{a-1} + \frac{1}{b-2}$ 的最小值为 _____.

14. 光学是物理学的重要研究领域,点光源是抽象化的物理概念,指从一个点向周围空间均匀发光的光源.如图 1 所示,有一点光源 P 在垂直于水平地面的屏幕平面上映出长方形 $ABCD$ 的影像,此时点光源发光所形成的空间图形是以 P 为顶点,以长方形 $ABCD$ 为底面的四棱锥.已知 $PA=PB=PC=PD=13$, $AB=6$, $AD=8$,直线 AB 平行于屏幕边界.如图 2 所示,将图 1 的屏幕以直线 AB 为旋转轴向箭头方向旋转 45° 时,屏幕上映出的影像从长方形 $ABCD$ 变成了梯形 $ABEF$,则四棱锥 $P-ABEF$ 的体积为_____.

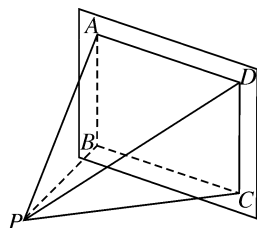


图 1

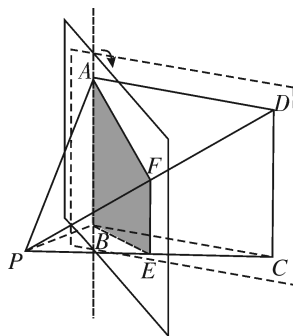


图 2

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 记 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a=2, \sqrt{3}a \sin C = c(1+\cos A)$.

(1) 求 A ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

16. (15 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$.

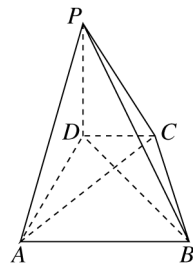
(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有极大值, 且极大值大于 $a^3 - 2$, 求 a 的取值范围.

17.(15 分)如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中, P 在平面 $ABCD$ 内的投影为点 D ,底面 $ABCD$ 为等腰梯形,其中 $AB \parallel CD, AB=2CD=4, AD=\sqrt{10}$.

(1)证明: $AC \perp$ 平面 PBD ;

(2)若 $PD=3$,求平面 PAC 与平面 PAB 夹角的余弦值.



18.(17 分)已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ,上顶点为 P ,长轴长为 $4\sqrt{2}$,直线 PF_2 的倾斜角为 135° .

(1)求 C 的方程;

(2)若 C 上的两动点 A, B 均在 x 轴上方,且 $AF_1 \parallel BF_2$,证明: $\frac{1}{|AF_1|} + \frac{1}{|BF_2|}$ 为定值.

19.(17 分)记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,已知 $S_n = 2(a_n - 1)$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)记数列 $\left\{a_n \cos \frac{n\pi}{3}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n .

(i)求 T_n ;

(ii)证明: $|T_n + 1| \leq a_n$.