海南省2024—2025学年高三学业水平诊断(四)

数学·答案及评分细则

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

1. A　　2. C　　3. B　　4. B　　5. D　　6. A

7. D　　8. C

二、多项选择题:本题共3小题,每小题6分,共18分.每小题全部选对的得6分,部分选对的得部分分,有选错的得0分.

9. AC　　10. BCD　　11. ABD

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 85　　13. $3\sqrt{3}$　　14. $\sqrt{2}$

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解析　(Ⅰ)$P(A)=\frac{70+50}{200}$ 2分 $=0.6$, ……………………………………(3分)

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 4分 $=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{70}{70+30}$ 5分 $=0.7$. ……………………………………(6分)

(Ⅱ)由已知数据可得

$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(70\times50-50\times30)^2}{100\times100\times120\times80}$ 9分 $=\frac{25}{3}\approx8.333$. (不化简，不扣分) ……………………(10分)

因为$\chi^2\approx8.333>6.635$,所以依据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验,可以认为消费者对续航里程的满意率与对充电设施的满意率有关. ……………………………………(13分)

16. 解析　(Ⅰ)由题意知$\frac{1}{a_2}=\frac{3}{a_1}+1=4$,$\therefore a_2=\frac{1}{4}$. ……………………………………(2分)

$\because \frac{1}{a_3}=\frac{3}{a_2}+3=15$,$\therefore a_3=\frac{1}{15}$. ……………………………………(4分)

(Ⅱ)由$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2n-1$,整理得$\frac{1}{a_{n+1}}+n+1=3\left(\frac{1}{a_n}+n\right)$, ……………………………………(7分)

又$\frac{1}{a_1}+1=2$,$\therefore \left\{\frac{1}{a_n}+n\right\}$是首项为2,公比为3的等比数列, ……………………………………(9分)

(Ⅲ)由(Ⅱ)可知$\frac{1}{a_n}+n=2\times3^{n-1}$, ……………………………………(11分)

$\therefore \frac{1}{a_n}=2\times3^{n-1}-n$,　12分

$\therefore T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\times(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-(1+2+3+\cdots+n)$　13分

$=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-\frac{n(n+1)}{2}$ 14分 $=3^n-1-\frac{n^2+n}{2}$. ……………………………………(15分)

17. **解析** （Ⅰ）E 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$， 1分

因为点 $M\left(\frac{3}{2},y_0\right)$ 在 E 上，且 $|MF|=\frac{5}{2}$，即 $\frac{3}{2}+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$，得 $p=2$， 2分 ……………………（3 分）

所以 E 的方程为 $y^2=4x$. ……………………（4 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $F(1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

设 l_1 的方程为 $x=my+1(m\neq 0)$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4my-4=0$. 5分

所以 $y_1+y_2=4m$，则 $y_P=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$， ……………………（6 分）

代入 $x=my+1$，得 $x_P=2m^2+1$，所以 $P(2m^2+1,2m)$. ……………………（7 分）

因为 $l_1\perp l_2$，所以 l_2 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+1$，同理可得 $Q\left(\frac{2}{m^2}+1,-\frac{2}{m}\right)$. ……………………（8 分）

当 $m=\pm 1$ 时，$2m^2+1=\frac{2}{m^2}+1=3$，直线 PQ：$x=3$. ……………………（9 分）

当 $m\neq\pm 1$ 时，$k_{PQ}=\frac{2m+\frac{2}{m}}{2m^2-\frac{2}{m^2}}$ 10分 $=\frac{m+\frac{1}{m}}{\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)}=\frac{1}{m-\frac{1}{m}}=\frac{m}{m^2-1}$， 11分

直线 PQ 的方程为 $y-2m=\frac{m}{m^2-1}[x-(2m^2+1)]$，……………………（12 分）

即 $y=\frac{m}{m^2-1}x-\frac{2m^3+m}{m^2-1}+2m=\frac{m}{m^2-1}x-\frac{3m}{m^2-1}$， 13分

整理得 $y=\frac{m}{m^2-1}(x-3)$. ……………………（14 分）

所以直线 PQ 过定点 $(3,0)$. ……………………（15 分）

18. **解析** （Ⅰ）若 $a=\mathrm{e}$，则 $f(x)=\mathrm{e}x^2-2\ln x$，$f'(x)=2\mathrm{e}x-\frac{2}{x}$， ……………………（1 分）

所以 $f'(1)=2\mathrm{e}-2$，$f(1)=\mathrm{e}$， ……………………（2 分）

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=(2\mathrm{e}-2)(x-1)+\mathrm{e}$， 3分

即 $y=(2\mathrm{e}-2)x-\mathrm{e}+2$. ……………………（4 分）

（Ⅱ）$f'(x)=2ax-\frac{2}{x}$，$x>0$.

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)<0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减； ……………………（5 分）

②若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$，且当 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 时，$f'(x)<0$， 6分 当 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$， 7分

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………（8 分）

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，若 $a\leqslant 0$，则曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴最多有 1 个交点，故 $a>0$.

不妨设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$0<x_1<x_2$，则 $0<x_1<\frac{1}{\sqrt{a}}<x_2$. ……………………（10 分）

要证 $f'(x_0)>0$，即证 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$，只需证 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{\sqrt{a}}$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{\sqrt{a}}$. ……………………………… (11 分)

设函数 $g(x)=f(x)-f\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-x\right)$，则 $g'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-x\right)=\frac{4(\sqrt{a}x-1)^2}{(\sqrt{a}x-2)x}$，12分

当 $x\in\left(0,\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ 上单调递减，……………………………………………… (13 分)

因为 $0<x_1<\frac{1}{\sqrt{a}}$，所以 $g(x_1)>g\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=0$，即 $f\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-x_1\right)<f(x_1)=f(x_2)=0$，…………………………… (15 分)

又 $\frac{2}{\sqrt{a}}-x_1>\frac{1}{\sqrt{a}}$，$x_2>\frac{1}{\sqrt{a}}$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$ 上单调递增，16分

所以 $\frac{2}{\sqrt{a}}-x_1<x_2$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{\sqrt{a}}$. 从而原命题得证. …………………………………………………………… (17 分)

19. **解析** （Ⅰ）由题意知平面 $EFGH$∥平面 $ABCD$，所以四棱锥 $P-EFGH$ 也是正四棱锥，

因为四棱台 $EFGH-ABCD$ 与四棱锥 $P-ABCD$ 的棱长和相等，

所以 $PE+PF+PG+PH=EF+FG+GH+HE$，即 $4PE=4EF$，故 $PE=EF$，即四棱锥 $P-EFGH$ 和正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面都是正三角形. ……………………………………………………………………………………… (2 分)

连接 AC，设点 P 在底面 $ABCD$ 上的射影为 O，则 O 为 AC 的中点.

由已知得 $AC=\sqrt{2}$，$PA=PC=1$，所以 $\triangle PAC$ 是等腰直角三角形，所以 AC 上的高 $PO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………………………………………………………… (3 分)

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times 1^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，当 E 是棱 PA 的中点时，$V_{P-EFGH}=\frac{1}{8}V_{P-ABCD}$，4分

所以四棱台 $EFGH-ABCD$ 的体积为 $\frac{7}{8}V_{P-ABCD}=\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{7\sqrt{2}}{48}$. ……………………………………………… (5 分)

（Ⅱ）设 AD，BC 的中点分别为 M，N，连接 PM，PN，MN.

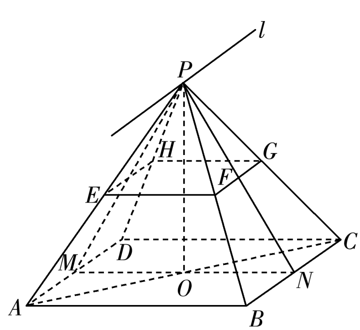
设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l，因为 AD∥BC，所以 AD∥平面 PBC，所以 AD∥BC∥l.

因为 $\triangle PAD$ 是等边三角形，所以 $PM\perp AD$，所以 $PM\perp l$，同理可得 $PN\perp l$，

所以平面 PAD 与平面 PBC 的夹角即 $\angle MPN$（或其补角）. …………………………………………… (7 分)

由已知可得 $PM=PN=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$MN=1$，所以 $\cos\angle MPN=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$，8分

所以平面 PAD 与平面 PBC 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$. ……………………………………………… (9 分)



(Ⅲ)由题意知四棱柱 Ω 的高为 $n\sin\theta$,体积为 $m^2 n\sin\theta$. ……(10 分)

当平面 α 任意上下平移时,设 $\frac{PE}{PA}=t,0<t<1$,

则 $V_{P-EFGH}=t^3V_{P-ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{6}t^3$,四棱台 $EFGH-ABCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)$. ……(11 分)

所以 $m^2 n\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)$. ①

又四棱柱 Ω 与四棱台 $EFGH-ABCD$ 的棱长和相等,所以 $8m+4n=8$,

所以 $n=2-2m,0<m<1$. ……(12 分)

将其代入①,得 $(2m^2-2m^3)\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)$. ……(13 分)

令 $f(m)=2m^2-2m^3$,则 $f'(m)=4m-6m^2=2m(2-3m)$,

当 $0<m<\frac{2}{3}$ 时,$f'(m)>0$,当 $\frac{2}{3}<m<1$ 时,$f'(m)<0$,

所以 $f(m)$ 在 $m=\frac{2}{3}$ 处取得极大值,也是最大值,最大值为 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}$, 14分

所以 $f(m)\in\left(0,\frac{8}{27}\right]$,$(2m^2-2m^3)\sin\theta\in\left(0,\frac{8}{27}\sin\theta\right]$. ……(15 分)

又 $\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$,且总存在满足题中条件的 m 和 n,所以 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\subseteq\left(0,\frac{8}{27}\sin\theta\right]$,

故 $\frac{8}{27}\sin\theta\geqslant\frac{\sqrt{2}}{6}$,解得 $\sin\theta\geqslant\frac{9\sqrt{2}}{16}$, 16分

又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\sin\theta$ 的取值范围是 $\left[\frac{9\sqrt{2}}{16},1\right]$. ……(17 分)