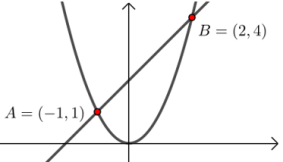
## 5.1 导数的概念及其意义



**作业知识点1 ：平均变化率**

若某个问题中的函数关系用表示，可用式子表示函数从到的平均变化率.

【例】 函数在区间上的平均速度为．它与斜率相等.



若函数在区间上的平均变化率为3，则实数的值等于（    ）.

A．1 B．2 C．3 D．4

**知识点2：瞬时变化率**



我们把物体在某一时刻的速度称为瞬时速度.



某直线运动的物体从时刻到的位移为，那么为（　　）

A．从时刻到物体的平均速度 B．从时刻到位移的平均变化率

C．当时刻为时该物体的速度 D．该物体在时刻的瞬时速度

**作业知识点3 ：导数概念**

1 导数的概念

函数在处的瞬时变化率是

则称它为函数在处的导数，记作，即

2 导函数

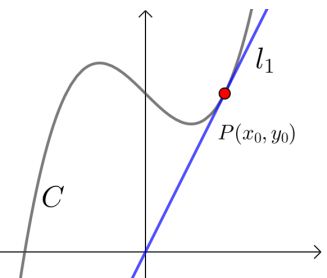
若当变化时，是的函数，则称它为的导函数(简称导数)，记作或，即



若函数在区间内可导，且，则 的值为（    ）

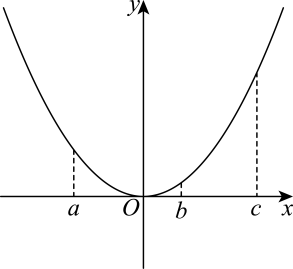
A． B．

C． D．0

作业**知识点4：导数的几何意义**

函数在点处的导数的几何意义是曲线处的切线的斜率，即：曲线在点处的切线的斜率，

切线的方程为．



已知函数的图象如图所示，则下列不等式正确的是（    ）

A． B．

C． D．

****

**题型一： 平均变化率**

例1．某质点沿直线运动，位移（单位：m）与时间（单位：s）之间的关系为：，则该质点在内的平均速度是（   ）

A． B． C． D．

【变式1-1】已知函数，则从1到的平均变化率为（   ）

A． B． C． D．

【变式1-2】函数在到之间的平均变化率为，在到的平均变化为，则与的大小关系是（   ）

A． B． C． D．不确定

【变式1-3】下列函数中，在区间上的平均变化率最大的是（   ）

A． B．（为自然数的底数）

C． D．

**题型二：瞬时变化率的概念及辨析**

例2.1物体运动方程为（位移单位：m，时间单位：s），若，则下列说法中正确的是（   ）

A．18m/s是物体从开始到3s这段时间内的平均速度

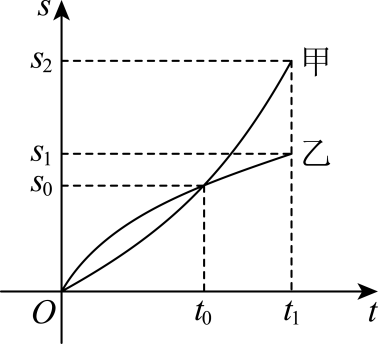
B．18m/s是物体从3*s*到这段时间内的速度

C．18m/s是物体在3s这一时刻的瞬时速度

D．18m/s是物体从3s到这段时间内的平均速度

例2.2如果质点按规律（距离单位：m，时间单位：s）运动，则质点在2s末的瞬时速度为（    ）

A．8 m/s B．7m/s C．6 m/s D．5 m/s

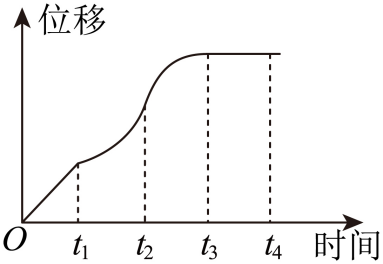
【变式2-1】物体甲、乙在时间0到范围内，路程的变化情况如图所示，下列说法正确的是（   ）

A．在0到范围内，甲的平均速度大于乙的平均速度

B．在0到范围内，甲的平均速度小于乙的平均速度

C．在时，甲的瞬时速度大于乙的瞬时速度

D．在时，甲的瞬时速度等于乙的瞬时速度

【变式2-2】一辆汽车在笔直的公路上行驶，位移关于时间的函数图象如图所示，给出下列四个结论：

①汽车在时间段内每一时刻的瞬时速度相同；

②汽车在时间段内不断加速行驶；

③汽车在时间段内不断减速行驶；

④汽车在时刻的瞬时速度小于时刻的瞬时速度.

其中正确结论的个数有（   ）

A．1个 B．2个 C．3个 D．4个

【变式2-3】某物体的运动方程为（位移单位：，时间单位：），若，则下列说法中正确的是（    ）

A．是物体从开始到这段时间内的平均速度

B．是物体从到这段时间内的速度

C．是物体在这一时刻的瞬时速度

D．是物体从到这段时间内的平均速度

【变式2-4】有一机器人的运动方程为，是时间，是位移，则该机器人在时刻时的瞬时速度为（    ）

A． B． C． D．

**题型三：导数的概念**

例3. 1一物体的运动满足曲线方程*s*(*t*)＝4*t2*＋2*t*－3，且*s*′（5）＝42(m/s)，其实际意义是（    ）

A．物体5 s内共走过42 m

B．物体每5 s运动42 m

C．物体从开始运动到第5 s运动的平均速度是42 m/s

D．物体以*t*＝5 s时的瞬时速度运动的话，每经过1 s，物体运动的路程为42 m

例3. 2 利用导数定义求下列各函数的导数：

(1)； (2)； (3)

【变式3-1】已知函数，下列说法错误的是（    ）

A．叫函数值的改变量

B．叫函数在上的平均变化率

C．在点处的导数记为

D．在点处的导数记为

【变式3-2】已知函数在处的导数为，则等于（    ）

A．－2 B．－1 C．2 D．1

【变式3-3】利用导数的定义，求函数的导数．

**题型四： 导数定义中极限的简单计算**

例4. 若函数在处可导，且，则（    ）

A． B． C．1 D．2

【变式4-1】已知函数的导函数为，若，则（   ）

A． B． C．2 D．3

【变式4-2】设函数在处存在导数为2，则（    ）

A．1 B．2 C． D．4

【变式4-3】已知函数在处可导，则（   ）

A． B． C． D．

**题型五：利用定义求函数在一点处的导数**

例5. 已知函数，则（    ）

A． B． C． D．

【变式5-1】曲线在点处的切线的斜率为（    ）

A． B．

C． D．

【变式5-2】函数在处的导数为（    ）

A．2 B． C． D．

【变式5-3】已知函数在处的导数为3，则函数的解析式可能为（    ）

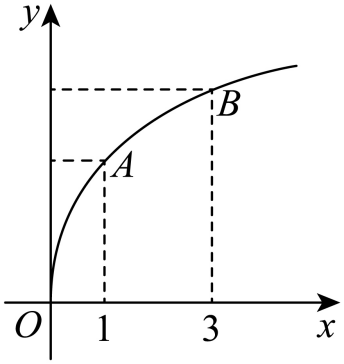
A． B．

C． D．

【变式5-4】已知函数

(1)用导数的定义求函数的导数；

(2)求出，的值

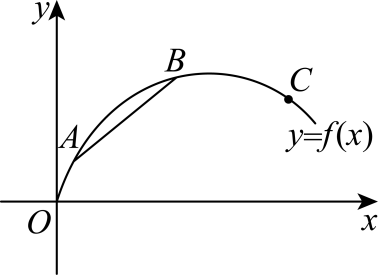


**题型六：对导数的几何意义的理解**

例6. 已知函数的图象如图所示，是的导函数，则下列结论正确的是（    ）

A． B．

C． D．

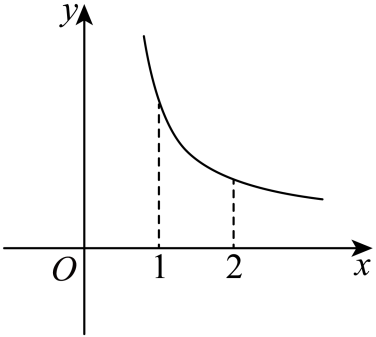
【变式6-1】根据图中的函数图象，下列数值最小的是（    ）

A．曲线在点处切线的斜率 B．曲线在点处切线的斜率

C．曲线在点处切线的斜率 D．割线的斜率

【变式6-2】已知曲线在处的切线方程是，则与分别为（    ）

A． B． C． D．

【变式6-3】函数的图象如图所示，则下列不等关系中正确的是（    ）

A． B．

C． D．

**题型七：求在曲线上一点处的切线方程（斜率）**

例7. 已知函数，则该函数在处的切线斜率为（    ）

A．0 B．1 C．2 D．3

【变式7-1】设存在导函数且满足，则曲线上的点处的切线的斜率为（    ）

A．-1 B．-3 C．1 D．

【变式7-2】已知曲线*y*＝*x3*上一点*P*，则该曲线在*P*点处切线的斜率为（    ）

A．4 B．2 C．－4 D．8

【变式7-3】已知点为曲线上的一点，为曲线的割线，当时，若的极限为，则在点处的切线方程为（    ）

A． B．

C． D．

【变式7-4】已知函数在上可导，且满足，则曲线在点处的切线方程为（    ）

A． B．

C． D．

【变式7-5】设曲线在点处的切线与*x*轴、*y*轴分别交于*A*，*B*两点，*O*为坐标原点，则的面积等于（    ）

A．1 B．2 C．4 D．6

【变式7-6】已知曲线，求：

(1)的导数；

(2)曲线在点处的切线方程.



1如果质点*M*的运动方程是，那么在时间段内的平均速度是（    ）

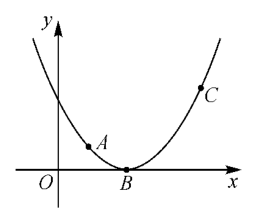
A． B． C． D．

2如果质点运动的位移（单位：m）与时间（单位：s）之间的函数关系是，那么该质点在时的瞬时速度为（    ）

A． B． C． D．

3 已知是定义在上的可导函数，若，则（    ）

A．0 B． C．1 D．

4已知函数的部分图象如图所示，其中，，为图上三个不同的点，则下列结论正确的是（    ）

A．

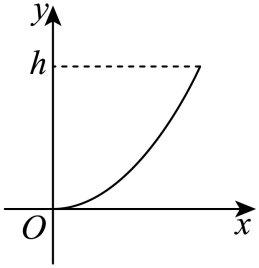
B．

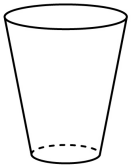
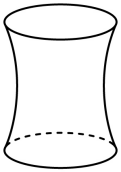
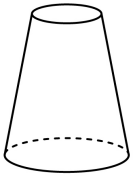
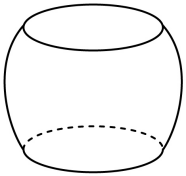
C．

D．

5设存在导函数且满足，则曲线上的点处的切线的斜率为（    ）

A． B． C．1 D．2

6向高为的容器中注水，且任意相等的时间间隔内所注入的水体积相等，若容器内水面的高度与注水时间的函数关系的图象如图所示，则该容器的形状可能是（   ）

A． B． C． D．

7物体的运动方程为，则此物体在时的瞬时速度为（    ）

A．2 B．4 C．6 D．8

8利用导数定义求下列各函数的导数：

(1)； (2)； (3)．

9某正方形铁板在时，边长为.当温度在很小的范围内变化时，由于热胀冷缩，铁板的边长也会发生变化，而且已知温度为时正方形的边长为，其中*a*为常数，设此时正方形的面积为，且，求并解释其实际意义.

10若函数，

(1)用定义求；

(2)求其图象在与轴交点处的切线方程．

## 5.2 导数的运算



**作业知识点1 ：** **基础初等函数的导数**

基本初等函数的导数公式

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 原函数 | 导函数 | 原函数 | 导函数 |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

根据导数的定义求函数的导数，就是求出当时，无限趋近的那个定值.

下面求几个常用函数的导数.



下列求导运算正确的是（   ）

A． B．

C． D．

作业**知识点2：导数运算法则**

(1)；

拓展：；

记忆：函数的和差的导数等于函数导数的和差；

(2)；

记忆：两函数积的导数等于“前导后不导后导前不导”；

特别：，为常数；

证明 ；

(3).

记忆：两函数商的导数等于“分母平分，子导母不导减母导子不导”.



下列求函数的导数不正确的是（    ）

A． B．

C． D．

**作业知识点3 ：** **复合函数的导数**

对于两个函数和，若通过变量可以表示成的函数，则称这个函数为函数和的复合函数，记作．

复合函数的导数与函数 的导数间的关系是

Eg若，设，，

则.



函数的导函数（    ）

A． B． C． D．



**题型一：基本初等函数的导数**

例1.1下列求导运算正确的是（   ）

A． B． C． D．

例1.2已知函数，则（   ）

A．2 B． C． D．

【变式1-1】下列导数运算正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【变式1-2】已知，若，则（    ）

A．1 B． C． D．

【变式1-3】已知函数（*α*为常数），若，则*α*的值为（    ）

A．1 B．2 C．3 D．4

【变式1-4】（若函数，则（   ）

A． B． C． D．

**题型二：导数的加减法**

例2.1 已知函数，则（    ）

A．3 B．2 C．1 D．0

【变式2-1】已知函数，则（    ）

A． B．0 C．1 D．

【变式2-2】若曲线在处的切线的斜率为（   ）

A．2 B． C．1 D．

【变式2-3】若物体的运动方程是，时物体的瞬时速度是（   ）

A．12 B．14 C．16 D．18

**题型三：导数的乘法**

例3. 已知函数，则的值为（   ）

A． B． C． D．

【变式3-1】函数的导函数为（   ）

A． B．

C． D．

【变式3-2】已知函数，则（    ）

A． B． C． D．

【变式3-3】已知，其导函数为，则（    ）

A． B． C． D．

**题型四：导数的除法**

例4. 已知函数为的导函数，则的值为（    ）

A． B． C． D．

【变式4-1】下列求导运算正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【变式4-2】已知函数，则（    ）

A． B． C． D．

【变式4-3】已知函数，则（    ）

A． B． C．0 D．0或

**题型五：简单复合函数的导数**

例5. 求下列函数的导数：

(1)； (2)； (3)．

【变式5-1】下列求导运算结果正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【变式5-2】已知函数，若，则实数（    ）

A． B．0 C．1 D．2

【变式5-3】一个弹簧振子做简谐运动，其位移*y*（单位：cm）与时间*t*（单位：s）之间的关系为，该弹簧振子在时的瞬时速度为（    ）

A． B． C． D．

**题型六：求在曲线上一点处的切线方程（或斜率）**

例6. 函数的图象在处的切线对应的倾斜角为，则sin2=（    ）

A． B．± C． D．±

【变式6-1】曲线在处的切线斜率为（   ）

A．0 B． C． D．

【变式6-2】曲线在处的切线倾斜角是（    ）

A． B． C． D．

【变式6-3】设函数，则曲线在点处的切线方程为（   ）

A． B．

C． D．

**题型七：求过一点的切线方程**

例7. 过点可作曲线的切线条数为（    ）

A．1 B．2 C．3 D．0

【变式7-1】过点且与曲线相切的直线方程是（   ）

A． B．

C． D．

【变式7-2】已知函数，过原点作曲线的切线，则直线与曲线及轴围成的图形的面积为（    ）

A． B． C． D．

【变式7-3】已知函数，若在点可以作曲线的两条切线，则点的坐标可以为（    ）

A． B． C． D．

**题型八：已知切线（或斜率）求参数**

例8. 已知直线与函数的图象相切，则实数（    ）

A．4 B．3 C．2 D．-5

【变式8-1】已知函数在点处的切线方程为，则（    ）

A． B． C．1 D．2

【变式8-2】已知直线与曲线相切，则实数的值为（    ）

A． B． C．1 D．2

【变式8-3】已知曲线存在过坐标原点的切线，则实数的取值范围是（    ）

A． B．

C． D．

**题型九：两条切线平行或垂直问题**

例9. 已知曲线在点处的切线与直线垂直，则的值为（   ）

A．3 B． C． D．

【变式9-1】设的导函数为，曲线在点处的切线与直线垂直，则（    ）

A． B． C． D．

【变式9-2】已知曲线在点处的切线与直线平行，则点的坐标为（    ）

A． B． C．或 D．以上都不对

【变式9-3】若曲线在与处的切线互相垂直，且交点在直线上，则的值可能是（    ）

A． B． C． D．

**题型十：公切线问题**

例10. 若直线是曲线的切线，也是曲线的切线，则（    ）

A． B．2 C． D．2

【变式10-1】若曲线在处的切线与曲线（为常数）相切，则（   ）

A．3 B．0 C．2 D．1

【变式10-2】已知函数，，若经过点存在一条直线与图象和图象都相切，则（    ）

A．0 B． C．3 D．或3

【变式10-3】已知直线为曲线与的公共切线，则直线的方程可以为（    ）

A． B． C． D．



1下列函数的求导正确的是（    ）

A． B． C． D．

2下列求导运算正确的是（    ）

A． B．

C． D．

3已知函数，且，则（    ）

A． B． C． D．

4曲线在处的切线的倾斜角为，则（    ）

A．- B． C．1 D．-1

5已知函数在点处的切线与直线垂直，则（    ）

A．－2 B．－1 C．2 D．3

6已知曲线在点处的切线与曲线相切，则（    ）

A． B． C． D．

7已知函数，若，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

8（多选）曲线在点处的切线平行于直线，则切线方程为（   ）

A． B．

C． D．

9若直线与函数的图象相切，则 ．

10求下列函数的导函数

(1) (2)； (3) (4)

11已知函数，且的图象过点.

(1)求函数的解析式；

(2)过原点作曲线的两条切线，切点分别为.

①求切线的方程；

②求的面积.

12若函数和图象有公共点，且各自在点的切线和重合，则称重合的切线为两函数在点处的公切线．

(1)分别求和在交点处的切线方程；

(2)若和在点处存在公切线，求的值及点的坐标．