## 第Ⅰ卷　选择题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | A | D | C | B | C | A | B |

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

| 题号 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|
| 答案 | ACD | ABC | BC |

## 第Ⅱ卷　非选择题

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. $3\sqrt{2}$　　13. 10　　14. $\sqrt{3}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 解：（1）当对接码中一个数字出现 3 次，另外两个数字各出现 1 次时，　……1 分

种数为：$\dfrac{C_3^1 A_5^5}{A_3^3}=\dfrac{3\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}=60$，　………………3 分

当对接码中两个数字各出现 2 次，另外一个数字出现 1 次时，　……4 分

种数为：$\dfrac{C_3^2 A_5^5}{A_2^2 A_2^2}=\dfrac{3\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}=90$，

所有满足条件的对接码的个数为 150.　………………6 分

（2）随机变量 $X$ 的取值为 $1,2,3$，其分布列为：　………………7 分

$$P(X=1)=\dfrac{\dfrac{C_2^1 A_5^5}{A_3^3}+\dfrac{C_2^2 A_5^5}{A_2^2 A_2^2}}{150}=\dfrac{7}{15},\ P(X=2)=\dfrac{\dfrac{C_2^1 A_5^5}{A_2^2 A_2^2}}{150}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5},$$

$$P(X=3)=\dfrac{A_5^2}{150}=\dfrac{2}{15}$$　………………10 分

故概率分布表为：

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{15}$ |

故$E(X)=1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{2}{15}=\frac{5}{3}$. ……………………13 分

16. 解：(1) 当$a=1$时，$f(x)=x^2-\ln x+1$，$y=f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

则$f'(x)=2x-\frac{1}{x}$，则$f'(1)=2-\frac{1}{1}=1$，$f(1)=1-\ln 1+1=2$， …………3 分

由于函数$f(x)$在点$(1,f(1))$处切线方程为$y-2=x-1$，即$y=x+1$. ……5 分

(2) $f(x)=x^2-a\ln x+1, a\in\mathbf{R}$的定义域为$(0,+\infty)$， …………6 分

$f'(x)=2x-\frac{a}{x}=\frac{2x^2-a}{x}$， …………7 分

当$a>0$时，令$f'(x)>0$，解得：$x>\sqrt{\frac{a}{2}}$；令$f'(x)<0$，解得：$0<x<\sqrt{\frac{a}{2}}$，

所以$f(x)$在$\left(0,\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$上单调递减，在$\left(\sqrt{\frac{a}{2}},+\infty\right)$上单调递增，

所以，$f(x)_{\min}=f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=\frac{a}{2}-a\ln\sqrt{\frac{a}{2}}+1=2$，即$\frac{a}{2}-\frac{a}{2}\ln\frac{a}{2}-1=0$ …10 分

则令$t=\frac{a}{2}>0$，设$g(t)=t-t\ln t-1$，$g'(t)=-\ln t$，

令$g'(t)<0$，解得：$t>1$；令$g'(t)>0$，解得：$0<t<1$，

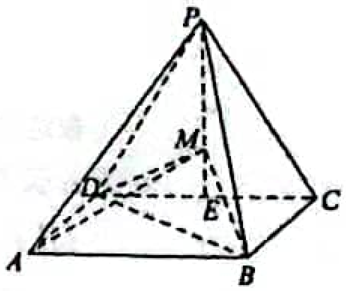
所以$g(t)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以$g(t)\le g(1)=1-\ln 1-1=0$， …………13 分

所以$t=\frac{a}{2}=1$，解得：$a=2$. …………15 分

(不说明唯一性猜$a$值扣 3 分)

17. (1) 证明：连接$AE$，因为$\triangle PCD$是等边三角形，且$E$是$DC$中点，



所以$PE\perp CD$， ………………1 分

又因为$PE\subset$平面$PCD$，平面$PCD\perp$平面$ABCD$，

平面$PCD\cap$平面$ABCD=CD$，

所以$PE\perp$平面$ABCD$， ………………2 分

又因为$BD\subset$面$ABCD$，所以$BD\perp PE$ ……3 分

因为$DE=1, AD=\sqrt{2}, AB=2$，$\frac{DE}{AD}=\frac{AD}{AB}$，

所以$\mathrm{Rt}\triangle EDA\backsim\mathrm{Rt}\triangle DAB$，$\angle DAE=\angle ABD$，

所以$\angle BAE+\angle ABD=\frac{\pi}{2}$，即$AE\perp BD$， …………5 分

因为$BD\perp PE, AE\cap PE=E, AE\subset$平面$PAE, PE\subset$平面$PAE$，

所以$BD\perp$平面$PAE$， …………6 分

又因为$AM\subset$平面$PAE$，所以$BD\perp AM$ …………7 分

另证：(1) 因为三角形$PCD$是等边三角形，且E是$DC$中点， ……………1分

所以$PE\perp CD$，

又因为$PE\subset$平面$PCD$，平面$PCD\perp$平面$ABCD$，

平面$PCD\cap$平面$ABCD=CD$， ……………2分

所以$PE\perp$平面$ABCD$

设F是$AB$中点，以E为原点，$EF$所在直线为$x$轴，$EC$所在直线为$y$轴，$EP$所在直线为$z$轴，建立空间直角坐标系，

由已知得$E(0,0,0),A(\sqrt{2},-1,0),B(\sqrt{2},1,0),D(0,-1,0),P(0,0,\sqrt{3})$， ……4分

设$M(0,0,m)(0<m<\sqrt{3})$，

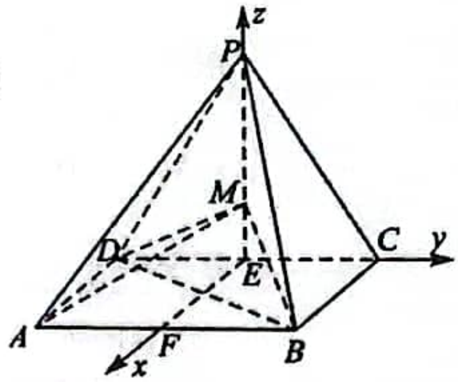
则$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},1,m),\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},-2,0)$，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=2-2+0=0$，

所以$BD\perp AM$ ……………7分

(2) 解：设$F$是$AB$中点，以$E$为原点，$EF$所在直线为$x$轴，$EC$所在直线为$y$轴，$EP$所在直线为$z$轴，建立空间直角坐标系，

由已知得$E(0,0,0),A(\sqrt{2},-1,0),B(\sqrt{2},1,0),D(0,-1,0),P(0,0,\sqrt{3})$，

设$M(0,0,m)(0<m<\sqrt{3})$，




则$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},1,m),\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},-2,0),\overrightarrow{DM}=(0,1,m)$

设平面$BDM$的法向量为$\vec{n}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-\sqrt{2}a-2b=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=b+mc=0\end{cases}$，

令$b=1$，有$\vec{n}=\left(-\sqrt{2},1,-\dfrac{1}{m}\right)$， ……10分

设直线$AM$与平面$BDM$所成的角$\alpha$，

所以$\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{AM}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{3+m^2}\cdot\sqrt{3+\dfrac{1}{m^2}}}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{10+3\left(m^2+\dfrac{1}{m^2}\right)}}\le\dfrac{1}{2}$ …………13分

（表达式2分，不等式1分）

当且仅当$m=1$时取等号， …………14分

当$AM=2$时，直线$AM$与平面$BDM$所成角最大. …………15分

18. 解：(1) 由题设得$\begin{cases}b=2\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$， …………2分

解得$a^2=12$，所以$C$的方程为$\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ …………4分

（2）由题意可设$l_{AB}: y=kx+m(m\neq 2)$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$， ……5分

由$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，整理得$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-12=0$，

$\Delta=36k^2m^2-4(1+3k^2)(3m^2-12)=12(12k^2-m^2+4)$.

由韦达定理得$x_1x_2=\dfrac{3m^2-12}{1+3k^2}$，$x_1+x_2=\dfrac{-6mk}{1+3k^2}$， …………7分

由$k_{PA}+k_{PB}=4k_{AB}$得$\dfrac{y_1-2}{x_1}+\dfrac{y_2-2}{x_2}=4k$， …………8分

即$\dfrac{kx_1+m-2}{x_1}+\dfrac{kx_2+m-2}{x_2}=4k$，

所以$(m-2)(x_1+x_2)-2kx_1x_2=0$ …………10分

整理得$2mk(m-2)=2(4-m^2)k$，因为$k\neq 0$，得$m^2-m-2=0$，

解得$m=2$或$m=-1$， …………11分

$m=2$时，直线$AB$过定点$P(0,2)$舍去；

$m=-1$时，满足$\Delta=36(4k^2+1)>0$，

所以直线$AB$过定点$(0,-1)$. …………12分

（3）由（2）知

$$S_{F_1AF_2B}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_1-y_2|=2\sqrt{2}|k||x_1-x_2|$$

$$=2\sqrt{2}|k|\frac{\sqrt{144k^2+36}}{1+3k^2}=12\sqrt{2}\frac{\sqrt{4k^4+k^2}}{1+3k^2}$$

$$=12\sqrt{2}\frac{\sqrt{\frac{1}{k^2}+4}}{\frac{1}{k^2}+3}$$ …………15分

因为$k_{AF_2}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，所以$k^2>\dfrac{1}{8}$，所以$0<\dfrac{1}{k^2}<8$，

令$t=\sqrt{\dfrac{1}{k^2}+4}$，$t\in(2,2\sqrt{3})$，

所以$S_{F_1AF_2B}=12\sqrt{2}\dfrac{t}{t^2-1}=12\sqrt{2}\dfrac{1}{t-\frac{1}{t}}$，在$t\in(2,2\sqrt{3})$上单调递减，

所以$S_{F_1AF_2B}$的范围是$\left(\dfrac{24\sqrt{6}}{11},8\sqrt{2}\right)$. …………17分

19．解：（1）设$\{b_n\}$的公比为$q$，则$b_3=b_1q^2=2q^2=8,q^2=4$，

……………1分

解得$q=\pm2$

……………2分

当$q=2$时，数列$\{b_n\}$为$2,4,8,16,8,4,2$

……………3分

当$q=-2$时，数列$\{b_n\}$为$2,-4,8,-16,8,-4,2$

（2）$S_{2k+1}=c_1+c_2+\cdots\cdots c_k+c_{k+1}+c_{k+2}\cdots\cdots+c_{2k+1}$

$=2(c_{k+1}+c_{k+2}\cdots\cdots+c_{2k+1})-c_{k+1}$ ……………5分

$S_{2k+1}=C_1+C_2+\cdots C_k+C_{k+1}+C_{k+2}+\cdots C_{2k+1}$

$=2\times\left(100(k+1)+\dfrac{(k+1)k}{2}\cdot(-4)\right)-100$

$=200k+200+(-4)k(k+1)-100$

$=-4\left(k^2-49k+\dfrac{49^2}{4}\right)+49^2+100$

$=-4(k-\dfrac{49}{2})^2+2501$ ……………7分

当$k=24$或$25$时，$S_{2k+1}$取得最大值$2500$. ……………9分

另解：当该S数列恰为4，8，……96，100，96，……8，4

或0，4，8，……96，100，96，……8，4，0时取得最大值，

所以当$k=24$或$25$时，$S_{2k+1}=\dfrac{(4+96)\times24}{2}\times2+100=2500$.

（3）所有可能的“对称数列”是：

① $1,2,2^2,\ldots,2^{m-2},2^{m-1},2^{m-2},\ldots,2^2,2,1$;

② $1,2,2^2,\ldots,2^{m-2},2^{m-1},2^{m-1},2^{m-2},\ldots,2^2,2,1$;

③ $2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1}$

④ $2^{m-1},2^{m-2},\cdots,2^2,2,1,1,2,2^2,\cdots,2^{m-2},2^{m-1}$

（写任意一种情况1分，四种全齐得2分） ……………11分

对于①,

当$m\ge2024$时，$S_{2024}=1+2+2^2+\cdots+2^{2023}=2^{2024}-1$

当$1500<m\le2023$时，

$S_{2024}=1+2+\cdots+2^{m-2}+2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2^{2m-2025}$

$=2^m-1+2^{m-1}-2^{2m-2025}$

$=2^m+2^{m-1}-2^{2m-2025}-1$

对于②，

当 $m\geq 2024$ 时，$S_{2024}=2^{2024}-1$

当 $1500<m\leq 2023$ 时，$S_{2024}=2^{m+1}-2^{2m-2024}-1$

对于③，

当 $m\geq 2024$ 时，$S_{2024}=2^{m}-2^{m-2024}$

当 $1500<m\leq 2023$ 时，$S_{2024}=2^{m}+2^{2025-m}-3$

对于④，

当 $m\geq 2024$ 时，$S_{2024}=2^{m}-2^{m-2024}$

当 $1500<m\leq 2023$ 时，$S_{2024}=2^{m}+2^{2024-m}-2$

（写任意一种情况 3 分，四种全齐得 6 分，其他每个 1 分）

………………17分