

重庆南开中学高 2027 届高一（上）期中考试

数学试题

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列说法正确的是

A. $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$

B. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

C. $\{0, 1, 2\} = \{2, 1, 0\}$

D. $\{(1, 2)\} \subseteq \{1, 2\}$

2. 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ”的否定为

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$

B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$

C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$

3. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ 的定义域为

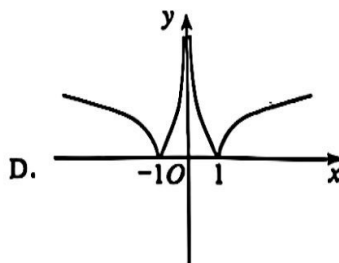
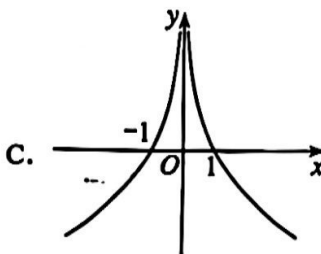
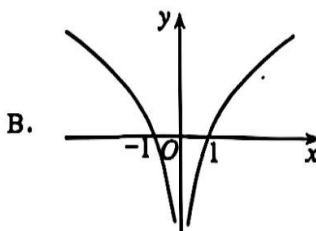
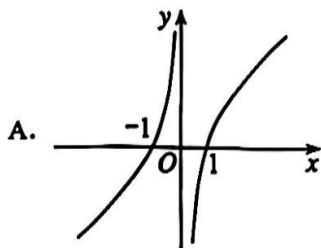
A. $[-1, +\infty)$

B. $(-1, +\infty)$

C. $[-1, 1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

4. 函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ 的大致图象是



5. 设 $a > 0, b > 0$, 若 $a + b = 2$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{9}{b}$ 的最小值为

A. 8

B. 4

C. $\frac{9}{2}$

D. $\frac{25}{2}$



6. 函数 $y = x - \sqrt{1-2x}$ 的值域为

- A. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ B. $(-\infty, 1]$ C. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

7. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 3f(1-x) = 2x + 3$, 则 $f(x) =$

- A. $\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ B. $-\frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ C. $-\frac{x}{2} + \frac{3}{4}$ D. $-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{2}, & x < 1 \\ x^2 - 2ax, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围为

- A. $\left(\frac{1}{6}, 1\right)$ B. $\left[0, \frac{1}{6}\right)$ C. $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ D. $(1, +\infty)$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得部分分.

9. 下列命题正确的有

A. $y = \frac{|x|}{x}$ 与 $y = \frac{x}{|x|}$ 是同一个函数

B. $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ 是偶函数

C. $f(x) = \frac{1}{x}$ 是单调递减函数

D. $f(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$ 的单调递增区间为 $[-6, -2]$

10. 已知实数 $a > 1$, $b > 1$, 且满足 $ab = a + b + 3$, 则

A. ab 的最小值为 9

B. $a + b$ 的最小值为 7

C. $a^2 + b^2$ 的最大值为 18

D. $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1}$ 的最小值为 1

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 1$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > -1$, $f(1) = 1$, 则下列结论正确的有

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增

C. $f(2027) = 4053$

D. 不等式 $f(x^2) < f(x) + 4$ 的解集为 $(-1, 2)$



第 II 卷 （非选择题）

三、填空题：本大题 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分。各题答案必须填写在答题卡上相应位置（只填结果，不写过程）。

12. 已知数集 $A = \{a+1, a, -2\}$, $B = \{a^2, 2, -2\}$, 若 $A = B$, 则 $a =$ _____.

13. 已知“函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数”，根据这个结论，若函数 $f(x) = mx + \frac{1}{x-1}$ 图象的对称中心是 $(1, -1)$, 则 $m =$ _____.

14. 已知关于 x 的不等式 $x^2 - kx - k + 3 > 0$ 在区间 $[0, 2]$ 有解，则实数 k 的取值范围为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知集合 $A = \{x | (x+1)(x-2) < 0\}$, 集合 $B = \{x | a-2 < x < a+2\}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a = 2$ 时，求 $A \cup B$;

(2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

16. (15 分)

近日，重庆市第七届运动会田径比赛在合川体育中心落下帷幕，重庆南开中学田径队奋勇争先、顽强拼搏，经过 11 个单元的激烈比拼，创造了 11 金 6 银 5 铜的佳绩，累计打破 5 项赛会纪录。好成绩离不开平时的刻苦训练。根据相关研究，某一体能训练项目有助于运动员的肌力改善，其肌力增长速度值 $v(t)$ ($v(t)$ 值越大，表示肌力增长速度越快、效果越好) 与训练时间 t (分钟) 的函数关系如下：

$$v(t) = \begin{cases} -\frac{240}{t+2} + 120, & 0 < t \leq 10 \\ 100, & 10 < t \leq 30 \\ -\frac{4}{5}(t-30)^2 + 100, & t > 30 \end{cases}$$

(1) 训练开始多长时间，训练的效果可以达到最好？最多维持多少分钟？

(2) 若在集训中，要求运动员的肌力增长速度值不低于 80，并且至少保持 30 分钟才能达标，请判断进行该项体能训练能否达标？并说明理由。



17. (15 分)

已知函数 $f(x)$ 为一次函数, 且对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 均满足 $f(f(x)) = x + 4$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 已知 $x > 0$, $y > 0$, 且 $f(x) + 2f(y) = 8$, 求 $\left(\frac{1}{x} + 2\right)\left(\frac{1}{2y} + 2\right)$ 的最小值.

18. (17 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 判断并用定义证明函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上的单调性;

(3) 记函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(x)_{\max}$, 最小值为 $f(x)_{\min}$, 当 $x \in [-m, m]$ 时, $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} = \frac{2m+1}{m+2}$,

求实数 m 的值.

19. (17 分)

给定函数 $f(x)$, 若实数 x_0 使得 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不动点; 若实数 x_0 使得 $f(f(x_0)) = x_0$,

则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的稳定点. 函数的不动点一定是该函数的稳定点.

(1) 求函数 $g(x) = \frac{2x+6}{x+1}$ 的不动点;

(2) 设 $f(x) = x^2 + ax - a$, $a \in \mathbf{R}$, 且 $f(x)$ 恰好有两个稳定点 x_1 和 x_2 ,

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) $\forall x \in [x_1, x_2]$, $2x_1 \leq f(f(x)) \leq 2x_2$, 求实数 a 的取值范围.

