

2024-2025 学年度海南创新中学协作校高二月考

数学学科试题

(考试时间: 120 分钟 试卷满分: 150 分)

命题人: 琼海市嘉积中学 郭倩

审题人: 华东师范大学澄迈实验中学 肖旭斌

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

1. 双曲线 $2x^2 - y^2 = 1$ 的渐近线方程是 ()

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm 2x$

2. 下列四条直线中, 倾斜角最大的是 ()

- A. $y = \sqrt{3}$ B. $x - y = 0$ C. $\sqrt{3}x + y = 0$ D. $x + y = 0$

3. 已知直线 $l_1: ax + y - 1 = 0$, 直线 $l_2: x + ay - 2 = 0$, 则 “ $a = 1$ ” 是 “ $l_1 \parallel l_2$ ” 的 () 条件

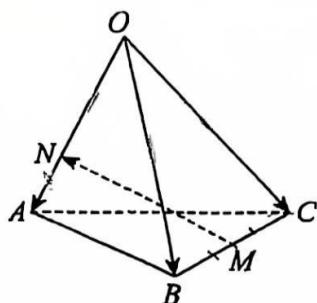
- A. 充分不必要 B. 必要不充分 C. 充要 D. 既不充分也不必要

4. $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(3, 4)$, 则 $\triangle ABC$ 的外接圆方程是

()

- A. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 20$ B. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 20$
C. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$ D. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 5$

5. 如图, 空间四边形 $OABC$ 中, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$, 点 M 为 BC 中点, 点 N 在侧棱 OA 上, 且 $ON = 2NA$, 则 $\overrightarrow{MN} =$ ()



- A. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

6. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 点 $A(-1, 0)$, 点 $B(1, 0)$. 点 P 是圆 O 上异于 A, B 的动点. 过点 P



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

作 x 轴的垂线，垂足为 Q，点 M 满足 $2\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{PM}$ ，则点 M 的轨迹方程为（ ）

A. $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1 (x \neq \pm 1)$ B. $9x^2 + y^2 = 1 (x \neq \pm 1)$

C. $\frac{y^2}{9} + x^2 = 1 (x \neq \pm 1)$ D. $x^2 + 9y^2 = 1 (x \neq \pm 1)$

7. 点 A(2, 1, 1) 是直线 l 上一点， $\vec{a} = (1, 0, 0)$ 是直线 l 的一个方向向量，则点 P(1,

2, 0) 到直线 l 的距离是（ ）

A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$

8. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F(3, 0)，过点 F 的直线交椭圆 E 于 A, B 两

点，若 AB 的中点坐标为 (1, -1)，则椭圆 E 的方程为（ ）

A. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$ C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ D. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{36} = 1$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列命题中正确的是（ ）

A. 若空间向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ，则 $\vec{a} = \vec{c}$

B. 若直线 l 的方向向量为 $\vec{e} = (1, -1, 2)$ ，平面 α 的法向量为 $\vec{m} = (6, 4, -1)$ ，则 $l \perp \alpha$

C. 点 M(3, 2, 1) 关于平面 yOz 对称的点的坐标是 (-3, 2, -1)

D. 已知 O 为空间任意一点，A, B, C, P 四点共面，且任意三点不共线，若 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} +$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ ，则 $m = \frac{1}{6}$

10. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{m} = 1$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. 双曲线 C 的实轴长为 2

B. 若 $(2\sqrt{2}, 0)$ 是双曲线 C 的一个焦点，则 $m=6$

C. 双曲线 C 的焦点到渐近线的距离为 m

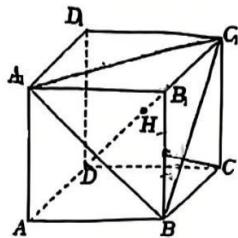
D. 若双曲线 C 的两条渐近线相互垂直，则 $m=2$

11. 如图所示，棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，G 为 BB_1 的中点， DB_1 与面 A_1BC_1 交于点 H，则下列结论正确的有（ ）



CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App



- A. \overrightarrow{CG} 在 $\overrightarrow{BB_1}$ 方向上的投影向量是 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$ B. BB_1 与面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

- C. 三棱锥 $A_1 - BB_1C_1$ 的外接球的体积为 $4\sqrt{3}\pi$ D. 点 H 是 $\triangle A_1BC_1$ 的重心

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知平面 α 的一个法向量 $\vec{a} = (x, 1, -2)$ ，平面 β 的一个法向量 $\vec{b} = \left(-1, y, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，若 $\alpha \perp \beta$ ，则 $x - y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 曲线与 $y = \sqrt{6x - x^2}$ 直线 $y = k(x+2)$ 有公共点，则 k 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 左右焦点分别为 F_1, F_2 ，且 F_2 关于它的一条渐近线的对称点为 P ，若以 P 为圆心， PF_1 为半径的圆过原点，则双曲线的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分) 已知不共面的三个单位向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 两两之间的夹角均为 60° ，

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}.$$

(1) 求证: $OM \perp BC$;

(2) 求 $\cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ON} \rangle$.

16. (本小题满分 15 分) 唐代诗人李颀的边塞诗《古从军行》开头两句说：“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河”。诗中隐含着一个有趣的数学问题——“将军饮马”，即将军在观望烽火之后从山脚下某处出发，先到河边饮马后再回军营，怎样走才能使总路程最短？在平面直角坐标系中，设将军的出发点是 $A(4, 1)$ ，军营所在位置为 $B(3, 5)$ ，河岸线所在直线的方程为 $x + y - 3 = 0$ 。

(1) 求将军从出发点到河边饮马，再回到军营（“将军饮马”）的最短总路程；

(2) 设“将军饮马”路程最短时的饮马点为 C ，在 $\triangle ABC$ 中，求 BC 边上的高所在直线的方程。



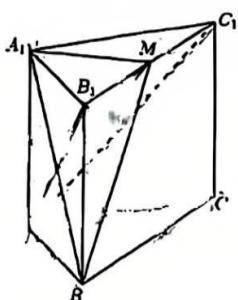
CS 扫描全能王

3亿人都在用的扫描App

17. (本小题满分 15 分) 如图, 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AA_1 = BC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}AC$, 点 M 为 B_1C_1 的中点.

(1) 证明: $AC_1 \parallel$ 平面 A_1BM ;

(2) 棱 AC 上是否存在点 N , 使二面角 $B - A_1M - N$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 若存在, 求 $\frac{AN}{CN}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



18. (本小题满分 17 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F_2(1, 0)$, 点

P $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若过原点的两条直线分别交椭圆 C 于点 E, G 和 F, H , 且 $k_{EG} \cdot k_{FH} = -\frac{3}{4}$ (O 为坐标原

点). 判断四边形 $EFGH$ 的面积是否为定值? 若为定值, 求四边形 $EFGH$ 的面积; 若不为定值, 请说明理由.

19. (本小题满分 17 分) 公元前 3 世纪, 古希腊数学家阿波罗尼斯 (Apollonius) 在《平面轨迹》一书中, 研究了众多的平面轨迹问题, 其中有如下著名结果: 平面内到两个定点 A, B 距离之比为 λ ($\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$) 的点 P 的轨迹为圆, 此圆称为阿波罗尼斯圆. 已知两

定点 $A(-1, 4)$, $B(2, 4)$, 若动点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = 2$, 动点 P 轨迹为圆 C .

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 过点 $(0, 1)$ 的直线 l 与圆 C 交于 D, E 两点, 若弦长 $|DE| = \frac{2\sqrt{55}}{5}$, 求直线 l 的方程;

(3) 若 Q 是 x 轴上的动点, QF, QG 与圆 C 相切, 切点分别为 F, G , 试问直线 FG 是否恒过定点? 若是, 求出定点坐标; 若不是, 请说明理由.