绝密★启用前

海南省2023—2024学年高三学业水平诊断(四)

数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$A=\{x|x>1\}$,$B=\{x|(x+1)(x-3)<0\}$,则$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $(3,+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(-1,3)$　　D. $(-1,1]$

2. 复数$z=-\dfrac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$的虚部为

A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $-\dfrac{1}{5}$　　C. -1　　D. -2

3. 已知函数$f(x)=x^3-x+2\sin x$,则曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程为

A. $x-y=0$　　B. $y=1$　　C. $2x+y=0$　　D. $2x-y=0$

4. 我们平时登录各类网络平台的密码中的不同符号都各自对应一个字节数,若某个密码使用的符号对应的字节数分别为1,2,4,4,6,7,8,则这组数据的75%分位数为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

5. 已知$\{a_n\}$为等差数列,$a_1+a_3+a_5=21$,$a_2+a_4+a_6=36$,则$a_6=$

A. 32　　B. 27　　C. 22　　D. 17

6. 将椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上所有点的横坐标伸长为原来的$m(m>1)$倍,纵坐标伸长为原来的$n(n>1)$倍得到椭圆$C_2$,设$C_1$,$C_2$的离心率分别为$e_1$,$e_2$,则下列说法正确的是

A. 若$m<n$,则$e_2<e_1$　　B. 若$m>n$,则$e_2>e_1$

C. 若$e_2>e_1$,则$m>n$　　D. 若$e_2=e_1$,则$m=n$

7. 已知正四棱台 $ABCD-EFGH$ 的上底面积为 16，下底面积为 64，且其各个顶点均在半径 $R=\sqrt{57}$ 的球 O 的表面上，则该四棱台的高为

A. 2　　B. 8　　C. 2 或 12　　D. 4 或 8

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\lg(-x),x<0,\\1-|x-1|,0\leqslant x<2,\\f(x-2),x\geqslant 2\end{cases}$ 的图象在区间 $(-t,t)(t>0)$ 内恰好有 5 对关于 y 轴对称的点，则 t 的值可以是

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 设 α,β 是两个平面，m,n 是两条不同的直线，则下列命题为真命题的是

A. 若 $\alpha/\!/\beta,m\perp\beta$，则 $m/\!/\alpha$　　B. 若 $m\perp\alpha,n\perp\alpha$，则 $m/\!/n$

C. 若 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$　　D. 若 $n\perp\alpha,n\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

10. 已知实数 a,b,c 满足 $-3<a<b<-1,c\neq a,c\neq b$，则

A. $a+2b<-3<a+b$　　B. $\dfrac{b}{a}>\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$　　D. 当 $|a-c|+|b-c|$ 最小时，$a<c<b$

11. 在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB=BC=CD=2$，且 $\overrightarrow{BA}\perp(2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$，$\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC})=4$，则

A. $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$　　B. $\triangle ACD$ 的面积为 2

C. 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形　　D. $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BD}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{BD}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 近日海南文旅火爆出圈，海南岛优美的海滨景观和深厚的文化底蕴吸引着全国各地游客前往，小明计划假期去海口、三亚、儋州、文昌、琼海五个城市游玩，每个城市都去且只去一次，若儋州和文昌这两个城市不排在最前面和最后面，则不同的游玩顺序有________种.（用数字作答）

13. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 在 $[-1,m]$ 内恰有 3 个零点，则 m 的取值范围是________.

14. 已知 P 为双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的右支上一点，点 A,B 分别在 C 的两条渐近线上，O 为坐标原点，若四边形 $OAPB$ 为平行四边形，且 $|PA|=1$，则 $|PB|=$ ________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

甲、乙两队进行排球比赛，规则是：每个回合由一方发球，另一方接球，每个回合的胜方得 1 分，负方不得分，且胜方为下一回合的发球方. 无论之前得分情况如何，每个回合中发球方得分的概率均为 $\frac{1}{3}$，接球方得分的概率均为 $\frac{2}{3}$，且第一回合的发球方为甲队.

(Ⅰ) 求第二回合甲队得分的概率；

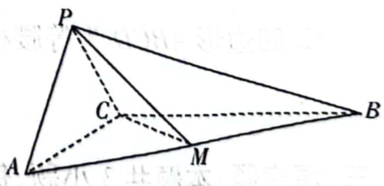
(Ⅱ) 设前三个回合中，甲队发球的次数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

16. (15 分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle PAC$ 和 $\triangle ABC$ 均为等腰直角三角形，$AC=BC$，$PA=PC$，M 为棱 AB 的中点，且 $PM=PA$.

(Ⅰ) 求证：平面 $PAC\perp$ 平面 ABC；

(Ⅱ) 求二面角 $M-PC-A$ 的正弦值.



(15 分)

已知$\{a_n\}$为等比数列,其前 n 项和为 S_n,$S_3=13$,$S_6=364$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)记各项均为正数的数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,若$\frac{b_{n+1}}{b_n}<\frac{a_{n+2}+1}{a_{n+1}+1}$,证明:当 $n\geqslant 2$ 时,

$\frac{T_n}{b_1}<\frac{3^n-1}{2}$.

(17 分)

(Ⅰ)证明:当 $x>1$ 时,$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$;

(Ⅱ)若过点$(0,-2)$且斜率为 $k(k\neq 0)$的直线 l 与曲线 $y=\ln x$ 交于 A,B 两点,O 为坐标原点,证明:$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<1+\frac{1}{k^2}$.

(17 分)

在直角坐标系 xOy 中,动点 P 到直线 $x=a-\frac{1}{4}(a<0)$的距离等于点 P 到点$\left(a+\frac{1}{4},0\right)$的距离,动点 Q 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上,且$|PQ|$的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{4}-1$,设动点 P 的轨迹为 W.

(Ⅰ)求 W 的方程;

(Ⅱ)已知圆 O 的切线 l 与曲线 W 交于 A,B 两点,求$|AB|$的最小值.