

数学

考生注意:

- 1.答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
- 2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $M=\{x|3x+1<5\}$, $N=\{x|0\leq x\leq 2\}$, 则 $M\cap N=$

A. \emptyset B. $[0, 2)$ C. $(\frac{4}{3}, 2]$ D. $[0, \frac{4}{3})$

2.若复数 z 满足 $\frac{2+3}{2+3}=1+i$, 则 $z=$

A. $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ B. $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ C. $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$ D. $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$

3.若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 的右焦点 F 到渐近线 $2x-y=0$ 的距离为 $2\sqrt{5}$, 则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

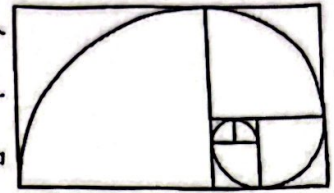
4.已知向量 $OA=a$, $OB=b$, $OC=3a+b$, 若 a, b 不共线, OC 是 $\triangle AOB$ 的平分线, 则 $\frac{|b|}{|a|}=$

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$

C. 2

D. 3

5. 如图所示, 用若干个正方形拼成一个大矩形, 然后在每个正方形中以边长为半径绘制 $\frac{1}{4}$ 圆弧, 这些圆弧连起来得到一段螺旋形的曲线, 我们称之为“斐波那契螺旋线”. 若图中最大的矩形面积为104, 则这段斐波那契螺旋线的长度为



A. 26π

B. 20π

C. 13π

D. 10π

数学试题第1页 (共4页)

6. 已知 α, β 都是第二象限角, 则 “ $\sin(\alpha - \beta) < 0$ ” 是 “ $\tan \alpha < \tan \beta$ ” 的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 已知玩具A由 a_1, a_2, a_3, a_4 四个部件拼成, 玩具B由 b_1, b_2, b_3 三个部件拼成, 玩具C由 c_1, c_2, c_3 三个部件拼成, 其中 a_3 与 b_3 完全相同, b_2 与 c_1 完全相同, 其余部件各不相同. 将A, B, C三个玩具拆开成10个部件, 从中随机选取3个部件, 则能拼成一个完整的玩具(A, B, C其中之一)的概率为

A. $\frac{1}{30}$

B. $\frac{1}{20}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{5}$

8. 若 $a = \ln 1.1$, $b = \frac{1}{0.9}$, $c = \sqrt{0.1}$, 则

A. $a < b < c$

B. $c < b < a$

C. $a < c < b$

D. $c < a < b$

二、多项选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AC \perp B_1D_1$, AD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 30° , 则

A. 异面直线 A_1D 与 BC_1 所成的角为 60°

B. 异面直线 AB 与 A_1C_1 所成的角为 45°

C. BD_1 与平面 ADD_1A_1 所成的角为 60°

D. BD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$

10. 已知函数 $f(x) = x \ln \sqrt{x^2 + 3/4}$, 则

A. $f(x)$ 是奇函数

B. $f(x)$ 仅有1个零点

C. 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2})$

D. 对任意 $a \in \mathbb{R}$, $f(a^2 + 2) + f(-2|a| - 1) \geq 0$

11. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a + b - ab = \frac{3}{4}$, 则

A. $a + b \geq 3$

B. $0 < ab \leq \frac{1}{4}$ 或 $ab \geq \frac{9}{4}$

C. $(a-1)^2 + (b-1)^2 \leq \frac{1}{2}$

D. $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{4}{3}$ 或 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$

12. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 经过点 $A(-2, 1)$, $B(6, 9)$ 和 $P(a, b)$ ($-2 < a < 6$), 过点 B 作直线 AP 的垂线, 垂足为 Q , 则

A. C 的焦点坐标为 $(1, 0)$

B. 直线 AP 的斜率的取值范围是 $(-1, 1)$

C. $\triangle ABQ$ 面积的最大值为 32

D. $|PA| \cdot |PQ|$ 的最大值为 24

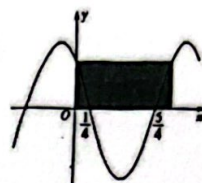
数学试题第2页 (共4页)

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知直线 l 经过点 $(0, 1)$, 且平分圆 $E: (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ 的面积, 则 l 的方程为_____.

14. 若随机变量 $X \sim N(u, \sigma^2)$, 且 $P(X < 0) = P(X > 4) = 0.2$, 则 $P(n-2 < X \leq y) =$.

15. 已知函数 $f(x) = \sin(cx+4)$ 的部分图象如图所示, 则图中矩形(阴影部分)的面积为_____.



16. 已知正三棱锥 $A-BCD$ 的四个顶点均在球 O 的表面上, 若正三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\sqrt{3}$, 则球 O 的体积的最小值为.

四、解答题:共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $2S_n \cdot S_{n-1} = S_n - 1$ ($n \geq 2$), 且 $a_1 = \frac{1}{3}$.

(I) 证明数列 $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列, 并求 S_n 的表达式;

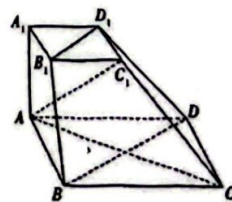
(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18. (12分)

如图, 四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面均为正方形, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = 2AA_1 = 2A_1B_1$.

(I) 证明: $AC_1 \perp$ 平面 BDD_1B_1 ;

(II) 求平面 ACC_1 与平面 BCC_1 的夹角的余弦值.



19. (12分)

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{2c \cos B}{a}$$

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C / \sin B = \frac{(2c \cos B)}{a}$ 且 $b \neq c$.

(I) 证明: $A = 2B$;

(II) 若 $a + b = ab = \frac{25}{6}$, 求 $\sin C$.

数学试题第3页 (共4页)

(12分)

某工厂有工人200名，统计他们某天加工产品的件数，统计数据如下表所示：

加工产品的件数	(50,60]	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
人数	50	80	40	20	10

规定一天加工产品件数大于70的工人为“生产标兵”。已知这天的生产标兵中年龄大于30岁的有15人，这15人占该工厂年龄大于30岁的工人数的25%。

(I) 完成下面的 2×2 列联表，根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验，能否认为该工厂的工人是否为生产标兵与年龄有关？

	年龄不大于30岁	年龄大于30岁
生产标兵		
非生产标兵		

(II) 该工厂采用“阶梯式”的计件工资：日加工产品不超过50件的部分每件1元，超过50件但不超过60件的部分每件2元，超过60件但不超过80件的部分每件3元，超过80件的部分每件5元。假设工人小张每天加工产品的件数只可能为样本数据中各分组区间的右端点值，用对应区间的频率估计其概率，求小张每天的计件工资 X （单位：

元）的期望。

$$n(ac-bd)^2$$

α	0.05	0.01	0.001
χ^2_{α}	3.841	6.635	10.828

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ac-bd)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

(12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $1/2$ ，上顶点为 $(0, \sqrt{3})$ 。

(I) 求 C 的方程；

(II) 设 C 的右顶点为 D ，点 P, Q 是 C 上的两个动点，且直线 DP 与 DQ 的斜率之和为3，证明：直线 PQ 过定点。

(12分)

已知函数 $f(x) = x^2 + ax - x \ln x$ 的导函数为 $f'(x)$ 。

(I) 若 $a = -1$, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程.

(II) 若 $f(x)$ 存在两个不同的零点 x_1, x_2 ,

(i) 求实数 a 的取值范围;

(ii) 证明: $x_1 + x_2 > 1$.

数学试题第4页 (共4页)