

天一大联考
海南省 2020—2021 学年第一学期高二期末考试

数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

1. 抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2$ 的焦点到点 $(2, 5)$ 的距离为 ()

- A. $\frac{\sqrt{97}}{2}$ B. $\sqrt{13}$ C. $\frac{\sqrt{109}}{2}$ D. $\sqrt{29}$

2. 直线 $l_1: (a+2)x + y - 1 = 0$ 与直线 $l_2: 2x + (a+3)y + a - 1 = 0$ 平行，则 a 为 ()

- A. -1 或 -4 B. -1 C. 2 D. -4

3. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ 的渐近线方程为

- A. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ B. $y = \pm x$ C. $y = \pm \sqrt{2}x$ D. $y = \pm 2x$

4. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_4 = 4, a_7 = 10$ ，则 $a_{10} =$

- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

5. 过点 $(1, -3)$ ，且垂直于直线 $x + 2y - 3 = 0$ 的直线方程为

- A. $2x - y - 5 = 0$ B. $2x - y - 1 = 0$
C. $x - 2y + 5 = 0$ D. $x - 2y - 7 = 0$

6. 直线 $x + y + 1 = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ 截得的弦长为

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. 已知点 $F(1, 0)$ ，过直线 $x = -1$ 上一动点 P 作与 y 轴垂直的直线，与线段 PF 的中垂线交于点 Q ，则 Q 点的轨迹方程为

- A. $x^2 + y^2 = 1$ B. $x^2 - y^2 = 1$ C. $y^2 = 2x$ D. $y^2 = 4x$

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中， $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NC}$ ，则

- A. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{PB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{PC}$ B. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{PB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{PC}$
C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} - \frac{1}{6}\overrightarrow{PB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$ D. $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得3分，有选错的得0分。

9. 满足下列条件的数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 是递增数列的为 **B D**

A. $a_n = \frac{1}{n}$

B. $a_n = n^2 + n$

C. $a_n = 1 - 2n$

D. $a_n = 2^n + 1$

10. 下列四个说法错误的是 ()

A. 直线 l 的斜率 $k \in [-1, 1]$ ，则直线 l 的倾斜角 $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$;

B. 直线 $l: y = kx + 1$ 与以 $A(-1, 5)$ 、 $B(4, -2)$ 两点为端点的线段相交，则 $k \leq -4$ 或 $k \geq \frac{3}{4}$;

C. 如果实数 x, y 满足方程 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ ，那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$;

D. 直线 $y = kx + 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{m} = 1$ 恒有公共点，则 m 的取值范围是 $m \geq 1$.

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{12-m} + \frac{y^2}{m-4} = 1 (8 < m < 12)$ 的焦距为4，则

A. 椭圆 C 的焦点在 x 轴上

B. 椭圆 C 的长轴长是短轴长的 $\sqrt{3}$ 倍

C. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. 椭圆 C 上的点到其一个焦点的最大距离为 $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

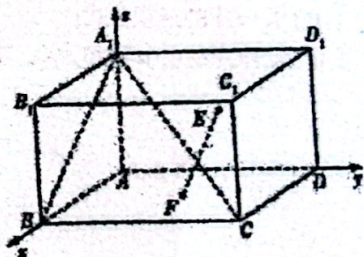
12. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = 1, AB = AD = \sqrt{3}$ ， E 是侧面 AA_1D_1D 的中心， F 是底面 $ABCD$ 的中心，以 A 为坐标原点， AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，则

A. \vec{EF} 是单位向量

B. $\vec{n} = (1, 0, \sqrt{3})$ 是平面 A_1BC 的一个法向量

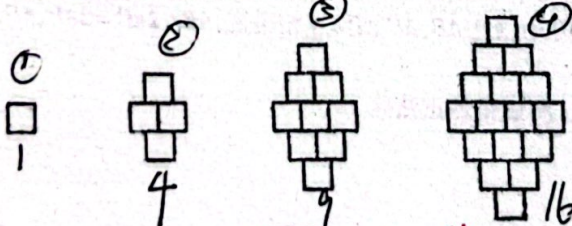
C. 直线 EF 与 A_1C 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

D. 点 E 到平面 A_1BC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$



三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 下列从左到右排列的图形中，小正方形个数构成的数列的一个通项公式为 $a_n = n^2$.



14. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1 = 2, S_4 = 3S_2$ ，则 $a_3 = 4$.

15. 著名的数学家欧拉在1765年发表的《三角形的几何学》一书中指出：三角形的外心、垂心和重心在同一条直线上，这条直线称为欧拉线。已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1, 0), B(1, 3), C(5, 3)$ ，则 $\triangle ABC$ 的欧拉线的一般式方程为 $x - 2y + 3 = 0$.

16. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2 ，若双曲线上存在一点 M ，使得 $\triangle MF_1F_2$ 是等腰三角形也是钝角三角形，则双曲线离心率的取值范围是 $(1, 2)$.

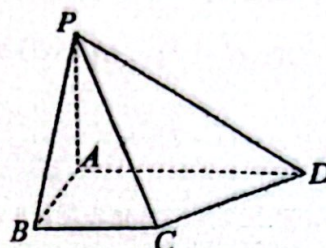
四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形， $BC \parallel AD$ ， $AD \perp AB$ ， $\angle ADC = 45^\circ$ ，

$PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AB = AP = 2$ ， $AD = 3$ 。

(1) 求异面直线 PB 与 CD 所成角的大小。

(2) 求直线 AD 到平面 PBC 的距离。



18. (12 分)

已知 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列， $a_2 = -6$ ，且 a_1, a_2, a_4 依次成等比数列。

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

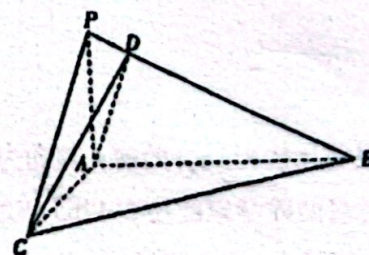
(II) 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_n 的最小值。

19. (12 分)

如图所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中， AP, AB, AC 两两互相垂直， $AB = 2AC = 2AP$ ， $AD \perp PB$ 。

(I) 证明： $CD \perp PB$ ；

(II) 求直线 AP 与平面 PBC 所成角的正弦值。



20. (12分)

已知 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, a_1, a_2 是方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 的根.

(I)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II)求数列 $\left\{\frac{n+2}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和.

21. (12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 经过点 $(1, -1)$.

(I)求抛物线 C 的方程及其焦点坐标;

(II)过抛物线 C 上一动点 P 作圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线,切点分别为 A, B ,求四边形 $PAMB$ 面积的最小值.

22. (12分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A ,上顶点为 B .已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|AB| = \sqrt{5}$.

(I)求椭圆的标准方程;

(II)设直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点, l 与直线 AB 交于点 M ,且点 P, M 均在第一象限,若

$$\frac{S_{\triangle BMP}}{S_{\triangle BPQ}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (S \text{ 表示面积}), \text{求 } k \text{ 的值.}$$

2024. 01. 08 高二周测

一、单选题

- 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_4 + a_7 = 30$, 则 $a_2 + a_6$ 的值为 ()
A. 20 B. 15 C. 10 D. 5
- 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 a_7 a_9 a_{11} = 36$, 则 $a_2 a_{14} =$ ()
A. 6 B. 9 C. ± 6 D. 19
- 如果圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$) 关于直线 $y = 2x$ 对称, 那么 ()
A. $D = 2E$ B. $E = 2D$
C. $E + 2D = 0$ D. $D = E$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$ 且 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 a_{10} 为 () *构造*
A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $-\frac{2}{9}$ D. $\frac{2}{11}$
- 设椭圆的两个焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P , 若 $\triangle F_1 P F_2$ 为等腰直角三角形, 则椭圆的离心率是 ()
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\sqrt{2}$
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 9$, $S_6 = 36$, 则 $a_7 + a_8 + a_9 =$ ()
A. 27 B. 45 C. 81 D. 18
- 设等差数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+3}{4n-3}$, 则 $\frac{a_3}{b_3}$ 的值为 ()
A. $\frac{37}{65}$ B. $\frac{19}{29}$ C. $\frac{9}{19}$ D. $\frac{11}{19}$

二、多选题

- 设椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , P 是椭圆 C 上的动点, 则下列结论中正确的有 ()
A. 离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $|PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{2}$
C. $\triangle PF_1 F_2$ 面积的最大值为1 D. 直线 $x + y - \sqrt{2} = 0$ 与以线段 $F_1 F_2$ 为直径的圆相切

三、填空题

9. 曲线 $y = -2x^2 + x$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为_____.

10. 已知质点运动的位移 s (单位: 米) 与时间 t (单位: 秒) 的关系为 $s = \frac{1}{2}t^2 - t$, 则质点在 $t = 2$ 时刻的瞬时速度为_____米/秒.

四、解答题

11. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_4 = 10$, $S_7 = 28$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{ \frac{1}{a_n \cdot a_{n+2}} \right\}$ 的前 n 项和 T_n .

2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_5 + a_8 = 15$, $S_5 = 15$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知求数列 $b_n = \frac{a_n}{2^{a_n}}$, 求 $\{b_n\}$