绝密★启用前

# 海南省 2024—2025 学年高三学业水平诊断(一)

# 数　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

## 一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

$1 \le x \le 4$　25

B 1. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-5x+4\leq 0\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$

C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

D 2. 若复数 $z$ 满足 $\frac{z+1}{i}=2-i$，则 $z=$ $a+bi$

$a=0$　$b=2$

A. $1-2i$　　B. $1+2i$

C. $-2i$　　D. $2i$

C 3. 若 $\tan\alpha=-4$，则 $\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\alpha}=$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

A. 4　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-4$　　D. $-\frac{1}{4}$

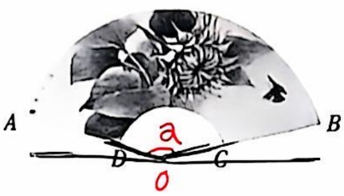
A

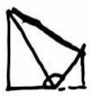
D 4. 中国历代书画家喜欢在纸扇的扇面上题字绘画，某扇面为如图所示的扇环，记 $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $l$，$\overset{\frown}{CD}$ 的长为 $m$，若 $l:m:AD=9:3:2$，则扇环的圆心角的弧度数为

设圆心角为α

$\frac{OD\times\alpha}{OA\times\alpha}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$OA=3OD=3(OA-AD)$



A. 3 $\frac{AD}{OA}=\frac{2}{3}$　　B. 2　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$ 150°

$\frac{OA\times\alpha}{AD}=\frac{9}{2}$　$\alpha=\frac{9}{2}\times\frac{2}{3}=3$

$x^2+4ax+7>0$

C 5. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若函数 $f(x)=a^x$ 与 $g(x)=\log_2(x^2+4ax+7)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上的单调性相同，则 $a$ 的取值范围是

$x^2+4ax+7>0$

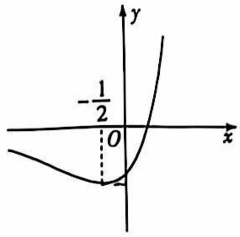
$\therefore y=x^2+4ax+7$ 单增

$\therefore g(x)$ 单增

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　C. $(1,2)$　　D. $(1,+\infty)$

D 6. 如图是函数 $f(x)=e^x(ax-1)$ 的大致图象，则不等式 $f(x)f'(x)<0$ 的解集为

$f'(x)=e^x(ax-1)+e^x a$




A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

~~A~~ C 7. 若函数 $f(x)=mx^2+m-1-\cos\frac{\pi x}{2}$ 在区间 $(-1,1)$ 上存在零点，则实数 $m$ 的取值范围是

A. $(-\infty,2]$　　B. $\left(\frac{1}{2},1\right]$　　C. $\left(\frac{1}{2},2\right]$　　D. $(1,2]$

~~B~~ A 8. 若函数 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+a}+2x$ 的图象关于点 $(b,4)$ 对称，且 $a\neq 1$，则 $a-b=$

A. $-7$　　B. $-5$　　C. $-3$　　D. $-1$

3 二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

~~AC~~ ABD 9. 自然常数 e = 2. 718 28…是数学中非常重要的一个常数，17 世纪人们在研究经济学中的复利问题时发现了这个数，后来众多数学家对自然常数进行了深入的研究，其字母表示 e 来自数学家欧拉(Euler)的名字. 已知函数 $f(x)=e^{|x|}-1$，则下列命题为真命题的是

A. $\forall x\in\mathbf{R}, f(x)=f(-x)$

B. $\exists x\in\mathbf{R}, f(x)=-f(-x)$

C. $\forall x,y\in\mathbf{R}, f(x+y)-f(x)f(y)=f(x)+f(y)$

D. $\exists x,y\in(0,+\infty), f(x+y)-f(x)f(y)=f(x)+f(y)$

~~BC~~ 10. 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，若 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{2}{3}$，$\tan(\alpha+\beta)+\tan\alpha+\tan\beta=0$，则

A. $\tan\alpha\tan\beta=\frac{1}{2}$　　B. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{9}$

C. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{9}$　　D. $\cos(\alpha+\beta)=\frac{2}{9}$

AD ~~B~~ 11. 已知 $a<b<c$，若函数 $f(x)=ax+bx^3+cx^4$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 $x$ 轴平行，则

A. $b+c>0$　　B. $a+c>0$

$f'(x)=a+3bx^2+4cx^3$

$f(1)=a+b+c$

$f'(1)=a+3b+4c=0$

C. $\frac{c-b}{c-a}<\frac{1}{5}$　　D. $\frac{c}{a+c}<-\frac{1}{6}$

## 三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知实数 $a,b$ 满足 $ab=2$，则 $a^2+4b^2$ 的最小值为 8 ________.

$\frac{ab}{2}=1$ $=\frac{2a}{b}+\frac{4b}{a}$

13. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=x$，若 $g(x)=f(\sin x)$，$g'(x)$ 为 $g(x)$ 的导函数，则 $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ________.

$g(\frac{\pi}{4})=f(\sin\frac{\pi}{4})$ $=f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ $f'(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 记函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值为 $\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，最小值为 $\min\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，则 $\min\limits_{x\in[1,3]}\left\{\max\limits_{y\in[-1,0]}\left\{\frac{e^{x-y}}{x-y}\right\}\right\}=$ $\frac{e^2}{2}$ ________.

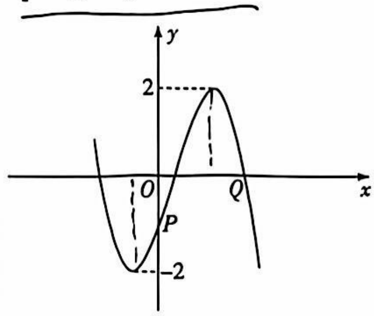
## 四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，点 $P(0,-1)$，$Q\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式；

（Ⅱ）将 $f(x)$ 的图象上各点的纵坐标保持不变，横坐标伸长为原来的 2 倍，再将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到 $g(x)$ 的图象，求 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 上的最值.




16.（15 分）

已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2e}x^2$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的图象在点 $(e,f(e))$ 处的切线与坐标轴围成的封闭图形的面积；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}a(x+1)^2+(a+1)x$，若 $g(x)$ 在定义域内单调递减，求实数 $a$ 的取值范围.

(15 分)

甲、乙两位跑步爱好者坚持每天晨跑，上周的 7 天中，他们各有 5 天晨跑路程超过 10 km.

( Ⅰ ) 从上周任选 3 天，设这 3 天中甲晨跑路程超过 10 km 的天数为 $X$，求 $X$ 的分布列和数学期望.

( Ⅱ ) 用上周 7 天甲、乙晨跑路程的频率分布估计他们各自每天晨跑路程的概率分布，且他们每天晨跑的路程互不影响. 设“下个月的某 3 天中，甲晨跑路程超过 10 km 的天数比乙晨跑路程超过 10 km 的天数恰好多 2”为事件 $M$，求 $P(M)$.

*参考数据*：$7^6 = 117\ 649$.

(17 分)

已知直线 $y=x$ 与抛物线 $C: x^2=2py\ (p>0)$ 交于 $O, E$ 两点（$O$ 为坐标原点），且 $|OE| = 4\sqrt{2}$，动直线 $l$ 过点 $D(0,4)$.

( Ⅰ ) 求 $C$ 的方程；

( Ⅱ ) 求点 $E$ 关于 $l$ 的对称点 $P$ 的轨迹方程；

( Ⅲ ) 若 $l$ 与 $C$ 交于 $A, B$ 两点（均异于点 $E$），直线 $EA, EB$ 分别与直线 $y=-4$ 交于点 $M, N$，证明：$OM \perp ON$.

(17 分)

记数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，已知 $S_n = 2a_n - n$.

( Ⅰ ) 证明：$\{a_n + 1\}$ 为等比数列；

( Ⅱ ) 任意给定 $n \in \mathbf{N}^*$，求满足 $3\times 2^n - 2 < a_i + a_j < 3\times 2^{n+1} - 2$ 的数对 $(i,j)\ (i<j)$ 的个数；

( Ⅲ ) 若 $b_n = \dfrac{1}{\log_2(a_n+1)}$，证明：当 $n \geq 2$ 时，$\ln(n+1) < \sum\limits_{i=1}^{n} b_i < 1 + \ln n$.