## 6.3 二项式定理



**作业知识点1：二项式定理**

**1、二项式定理的定义**

，这个公式叫做二项式定理．

（1）二项展开式：

（2）二项式系数：各项的系数叫做展开式的二项式系数

（3）二项式通项：叫做二项展开式的通项，用表示，

即通项为展开式中的第项，可记为：

（4）在二项式定理中，若设，，则得到公式．

**2、二项展开式的特点**

（1）展开式共有项；

（2）各项的次数和都等于二项式的幂指数；

（3）字母的幂指数按降幂排列，从第一项开始，次数由逐项减1直到为0，字母的幂指数按升幂排列，从第一项开始，次数由0逐项加1直到为．

**注意：**

（1）通项公式是的展开式中的第项，这里；

（2）二项式的第项和的展开式第项是有区别的，应用二项式定理时，其中的与不能随便交换位置．

（24-25高二下·广东·月考）二项式展开式中的第3项为（    ）

A． B．15 C． D．20

【答案】A

【解析】因为展开式中的通项为，，

所以.故选：A.

**作业知识点2：二项式定理的性质**

**1、对称性：**与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等．即，，…，

事实上，这一性质可直接由公式得到．直线将函数的图象分成对称的两部分，它是图象的对称轴．

**2、增减性与最大值**

（1）增减性：因为，即，

所以当时，随的增加而增大．由对称性知，当时，随的增加而减小．

（2）最大值：

①如果二项式的幂指数是偶数，中间项时第项，其二项式系数最大；

②如果二项式的幂指数是奇数，中间项有两项，即为第项和第项，它们的二项式系数和相等且最大．

**3、各二项式系数的和**

①已知，

令得．

这就是说，二项展开式的各二项式系数的和为．

②奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和，且都等于．

在二项式定理中，令，则，

即．

（24-25高二下·山西太原·月考）若二项式的展开式中，第3项的二项式系数最大，则的取值不可能是（    ）

A．3 B．4 C．5 D．6

【答案】D

【解析】在二项式展开式中，

对于A，当时，展开式中二项式系数为1,3,3,1，

第3项与第2项的二项式系数为3，同为最大值；

对于B，当时，展开式中二项式系数为1,4,6,4,1，

第3项的二项式系数6为最大值；

对于C，当时，展开式中二项式系数为1,5,10,10,5,1，

第3项与第4项的二项式系数为10，同为最大值；

对于D，当时，展开式中二项式系数为1,6,15,20,15,6,1，

第3项的二项式系数15小于第4项的二项式系数20，

第3项的二项式系数不最大.故选：D.



**题型一：二项式定理的正用和逆用**

例1．（24-25高二下·江苏镇江·期中）的值是（    ）

A． B．1 C．0 D．22024

【答案】A

【解析】由二项式定理得





.故选：A.

【变式1-1】（24-25高二下·贵州贵阳·月考）化简，其结果等于（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】设．

根据组合数的性质，则．

由二项式定理可知，

即．

那么，

因为，所以．

即，则．故选：A．

【变式1-2】（24-25高二上·甘肃白银·月考）已知，若，则 ．

【答案】

【解析】因为，

所以，解得．

【变式1-3】（24-25高二下·河北沧州·月考）若对恒成立，其中，则（    ）

A． B．0 C．1 D．2

【答案】D

【解析】

，

，即.故选：D

**题型二：二项展开式的特定项问题**

例2.（24-25高二下·浙江湖州·月考）的展开式中第四项是（    ）

A．-20 B．20 C．-160 D．160

【答案】C

【解析】由题意得展开式的第四项为.故选：C.

【变式2-1】（25-26高二上·黑龙江齐齐哈尔·月考）二项式的展开式中常数项为（    ）

A． B．540 C．15 D．

【答案】B

【解析】二项式的展开式的通项为，

由，得，

所以二项式的展开式中常数项为.故选：B.

【变式2-2】（24-25高二下·江苏南通·月考）的展开式中的系数是（    ）

A．2 B．3 C．4 D．5

【答案】C

【解析】多项式的展开式中含的项为，

所以的系数是4.故选：C.

【变式2-3】（24-25高二下·山西长治·月考）二项式的展开式中，共有有理项是 项

【答案】1012

【解析】二项式的展开式，，

展开式中有理项即为为整数，为偶数，

又，则符合条件的有1012个，

所以共有有理项1012项.

**题型三：三项展开式的特定项问题**

例3.（24-25高二下·云南昆明·月考）在的展开式中，的系数为（    ）

A． B． C．60 D．30

【答案】A

【解析】表示5个的乘积，

在这5个因式中，有2个因式选，2个因式选，

剩下的1个因式选−2，即可得到含的项，

故含的项的系数为，故选：A．

【变式3-1】（25-26高二上·江西鹰潭·月考）的展开式中的系数为（    ）

A．4 B．6 C．8 D．12

【答案】B

【解析】的通项公式，

令，则，所以的系数为故选：B

【变式3-2】（24-25高二下·河北邯郸·月考）在的展开式中，的系数是（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】根据题意的系数可以成从6个含有的括号中，

其中3个选，剩下3个里1个选，剩下2个选，

所以，故选：A.

【变式3-3】（24-25高二下·浙江·月考）的展开式中的系数为 .

【答案】

【解析】因为，

的展开式通项为，

的展开式通项为，

所以的展开式通项为，

由可得或或或，

因此，展开式中的系数为

.

**题型四：多个多项式相乘问题**

例4.（24-25高二下·山东·月考）的展开式中的系数为（    ）

A．30 B．10 C． D．

【答案】A

【解析】由题意知的展开式的通项为.

令，得的展开式中的系数为；

令，得的展开式中的系数为，

所以的展开式中的系数为.故选：A.

【变式4-1】（25-26高三上·河北沧州·月考）在的展开式中，的系数为（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】在的展开式中，的系数为，的系数为，

所以的展开式中，的系数为，故选：B.

【变式4-2】（24-25高二下·广东中山·月考）的展开式中常数项为（    ）

A．120 B．-120 C．180 D．-180

【答案】D

【解析】

展开式的通项为:，.

不存在的值使得，所以的展开式中没有常数项；

当且仅当时，的展开式可取到常数项，

则的常数项为.

综上所述：的展开式中常数项为-180.故选：D.

【变式4-3】展开后的系数为 ．

【答案】

【解析】因为，

故展开后含的项为，

故系数为．

**题型五：二项式系数最大问题**

例5.（24-25高二下·广东深圳·月考）在的展开式中，若仅有第5项的二项式系数最大，则展开式中系数最大的项是第（    ）项.

A． B． C．2或3 D．3或4

【答案】D

【解析】由的展开式中，仅第5项的二项式系数最大，得展开式共9项，则，

的展开式的通项公式，

设展开式中系数最大项是，

则，即，解得，

而，因此或，，，

所以展开式中系数最大的项是第3或4项.故选：D.

【变式5-1】（24-25高二下·天津河北·月考）已知 的展开式中，二项式系数之和是，则展开式中二项式系数最大的项为（    ）

A．第项 B．第项 C．第项 D．第项

【答案】B

【解析】因为 的展开式中，二项式系数之和是，可得，

故展开式中二项式系数最大的项为第项.故选：B.

【变式5-2】（24-25高二下·四川成都·月考）已知的展开式中只有第3项的二项式系数最大，则项的系数为 （    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【解析】因为的展开式中只有第3项的二项式系数最大，

则为偶数，最大项为，则

所以，又因为二项展开式的通项公式为：，

令，得，所以项的系数为：.故选：C

【变式5-3】（23-24高二下·江苏·期中）设，展开式中二项式系数的最大值为*x*，展开式中二项式系数的最大值为*y*，若，则（    ）

A．2 B．3 C．4 D．5

【答案】D

【解析】由题意可得或，

故，解得，故选：D

**题型六：展开式系数最大问题**

例6.（24-25高三上·云南昆明·月考）若的展开式中第2项与第8项的系数相等，则展开式中系数最大的项为（    ）

A．第3项 B．第4项 C．第5项 D．第6项

【答案】C

【解析】由的展开式中第2项与第8项的系数相等，

由的展开式的二项式系数和项的系数相等，

所以，所以，

则展开式中共有9项，系数最大的项为第5项，故选：C．

【变式6-1】（23-24高二下·江苏南通·月考）在的二项展开式中，系数最大的项是（    ）

A．第4项 B．第5项 C．第6项 D．第5项和第6项

【答案】B

【解析】的通项公式为,

根据二项式系数的性质可知，第5项和第6项的二项式系数最大，

第6项时，展开式的系数为负，因此第5项，展开式系数最大故选：B

【变式6-2】（24-25高二下·天津·期中）若，则取最大值时的值为（    ）

A．8 B．9 C．10 D．11

【答案】B

【解析】令，，且，

解得，，且，

所以时，，

而，，

所以，且，

故取最大值时的值为9．故选：B．

【变式6-3】（24-25高三上·重庆长寿·期末）设，则中最大的是（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】因为展开式的通项公式为，

所以展开式各项的系数与二项式系数相等或互为相反数，

又由二项式系数的性质知，二项式系数最大的项为第五、第六项，即，，

所以中最大的是.故选：B.

**题型七：利用赋值法解系数问题**

例7.（24-25高二下·贵州贵阳·月考）在的展开式中，各项二项式系数的和与各项系数的和之比为，则（    ）

A．8 B．4 C．6 D．2

【答案】B

【解析】的展开式中各项二项式系数的和为，

令得二项展开式中各项系数和为，，

即，解得.故选：B.

【变式7-1】（24-25高二下·江苏南京·月考）已知，则下列描述正确的是（    ）

A． B．

C． D．除以5所得的余数是1

【答案】D

【解析】，

令，可得，再令，可得，

，故A错误．

因为，

所以，

所以，故B错误．

由于为展开式各项系数和，

故，，故C错误．

由题意，，

显然，除了最后一项外，其余各项均能被5整除，

除以5所得的余数是1，故D确．故选：D

【变式7-2】（24-25高二下·山东·月考）若，则的值为（    ）

A．－121 B．－122 C．121 D．122

【答案】A

【解析】由，

令，得①，

令，得②，

①+②得，，

所以.故选：A

【变式7-3】（25-26高二上·山东潍坊·月考）若，则 .

【答案】49

【解析】中，

令得，

中，

令得，即，

解得.

**题型八：利用二项式定理解决整除与求余问题**

例8.（25-26高二上·上海浦东新·月考）若是正整数，则除以8的余数是 ．

【答案】7

【解析】根据二项式定理可知，，

又

所以除以8的余数为7.

【变式8-1】（24-25高二下·江苏连云港·月考）若能被7整除，则的最小正整数取值为 .

【答案】5

【解析】因为，而，所以.

根据二项式定理，将展开可得

除了最后一项外，其余各项都含有因数，都能被整除.

所以

（其中为整数）.

因为能被整除， 14*k*能被整除，所以只要能被整除即可.

当时，，此时取最小正整数.

【变式8-2】（24-25高二下·河南·月考）除以8的余数为（    ）

A．1 B．3 C．5 D．7

【答案】B

【解析】，

又，

所以，

所以除以8的余数为3.故选：B.

【变式8-3】（24-25高二下·江苏连云港·月考）今天是星期四，小美在参加数学考试，那么再过天后是星期（    ）

A．一 B．二 C．三 D．日

【答案】A

【解析】

，

，能被整除，

又，再过天后是星期一.故选：A.

**题型九：利用二项式定理近似计算**

例9.（24-25高二下·安徽·期中）的小数点后第三位数字为（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】因为

，

因此，的小数点后第三位数字为.故选：A.

【变式9-1】（23-24高二下·江苏苏州·期末）最接近下列哪个数字（    ）

A．1.20 B．1.21 C．1.22 D．1.23

【答案】C

【解析】由题意得，

由二项式定理得，

而从第3项以后，后面的项非常小，我们进行忽略即可，

所以我们得到，

则其与1.22更接近，故C正确.故选：C

【变式9-2】（23-24高二上·江西九江·期末）实数精确到的近似值为 .

【答案】

【解析】因为



，

将精确到，故近似值为.

【变式9-3】（23-24高二下·江苏南通·月考）的计算结果精确到0.001的近似值是 .

【答案】

【解析】由

.



**一、单选题**

1．（24-25高二下·四川南充·月考）的展开式的第3项的系数为（    ）

A．10 B． C．40 D．

【答案】C

【解析】写出的通项，，第三项，即令，则 ，

所以第三项的系数为40.故选：C

2．（24-25高二下·云南昆明·月考）在的展开式中，常数项为（    ）

A．8 B．24 C．60 D．160

【答案】D

【解析】的展开式通项为，

令，解得，

所以展开式中的常数项为.故选:D.

3．（2025·湖南·三模）的展开式中的常数项是（    ）

A．12 B．8 C． D．

【答案】B

【解析】的通项公式为，

当时，．当时，，

故的展开式中常数项的值为．故选：B．

4．（24-25高二下·湖北宜昌·期中）化简：（    ）

A．2 B．1 C．0 D．

【答案】C

【解析】因为，

，所以.故选：C.

5．（23-24高二下·重庆·月考）已知的展开式中仅第4项的二项式系数最大，则展开式中系数最大的项是第（    ）项

A．2 B．3 C．4 D．5

【答案】B

【解析】由题意二项式系数仅最大，故，所以二项式为，

其通项公式为，

设二项式展开式中第项的系数最大，

则有，，即，

故，经经验符合题意，

所以展开式中系数最大的项是第3项.故选：B.

**二、多选题**

6．（24-25高二下·江苏南京·月考）对于的二项展开式，以下判断中正确的有（    ）

A．展开式中有常数项 B．展开式中没有常数项

C．展开式中没有的三次项 D．展开式中有的三次项

【答案】BD

【解析】的展开式通项为，

令，解得，故展开式中没有常数项，A错B对；

令，解得，故展开式中有的三次项，C错D对.故选：BD.

7．（24-25高二下·福建福州·期中）关于的展开式，下列结论正确的是（    ）

A．二项式系数和为64 B．所有项的系数之和为1

C．第三项的二项式系数最大 D．系数最大值为240

【答案】ABD

【解析】对A，二项式系数和为，正确；

对B，令，，所以所有项的系数之和为1，正确；

对C，二项式系数最大的是第四项，错误；

对D，通项公式为，

所以，，

，，

，，

,，

所以系数最大值为240，正确.故选：ABD

8．（25-26高二上·辽宁·月考）已知，则下列结论正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】ABD

【解析】对于A项，令，则，A项正确；

对于B项，令，则，B项正确；

对于C项，令，则，结合B项得，C项错误；

对于D项，，，则，D项正确．故选：ABD

**三、填空题**

9．（24-25高二下·河北·月考）在的展开式中，的系数为 .

【答案】

【解析】，

令，则，即的系数为.

10．（24-25高二下·陕西宝鸡·月考）在的展开式中，常数项为 .

【答案】20

【解析】由题意有：，

令得，所以常数项为.

11．（24-25高二下·江苏无锡·月考）展开式中含项的系数为 ．

【答案】

【解析】展开式中含项的为，则其系数为.

**四、解答题**

12．（25-26高二上·河南驻马店·月考）已知的展开式中第项为，，且第三项和第九项的二项式系数相等．

(1)求第四项的二项式系数与系数；

(2)求二项式系数的最大值及展开式系数的最大值．

【答案】(1)第四项的二项式系数为；系数为；(2)二项式系数的最大值为；系数最大值为

【解析】（1）已知的展开式中第项，，且第三项和第九项的二项式系数相等．

即，故；

又展开式的通项为，故，

所以第四项的二项式系数为，系数为；

（2）因为是偶数，故二项式系数的最大值为，

因为，故，

因为，

令，得：，

因为是正整数，故时，；

时，，

所以第8项的系数最大，最大值为．

13．（24-25高二下·山东菏泽·期末）已知的展开式中第三项的系数是第二项系数的2倍．

(1)求的值；

(2)求展开式中二项式系数最大的项；

(3)求的展开式中含项的系数（结果用数值表示）．

【答案】(1)；(2)和；(3)219

【解析】（1）的展开式的通项为，

因为第三项的系数是第二项系数的2倍，

，解得，因为，所以；

（2）由知展开式共有10项，二项式系数最大的项为第5项和第6项，

由（1）知第5项为，第6项为，

所以二项式系数最大的项为和；

（3）由（1）知展开式中的系数为

，

所以展开式中含项的系数为219.