海南省2024—2025学年高三学业水平诊断(四)

数学·答案

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

1. 答案　A

命题透析　本题考查共轭复数.

解析　由题得 $z=2+\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=2-\mathrm{i}$.

2. 答案　C

命题透析　本题考查双曲线的方程和离心率.

解析　由 C 的方程知 $a^2=9,b^2=16,c^2=a^2+b^2=25$,故 C 的离心率 $e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{5}{3}$.

3. 答案　B

命题透析　本题考查诱导公式和同角三角函数的基本关系.

解析　根据诱导公式可知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$,所以 $\cos\alpha=3\sin\alpha$,所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{3}$.

4. 答案　B

命题透析　本题考查立体几何中平行与垂直关系的判断.

解析　对于B,若矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 不是正方形,则 A_1C_1 与 B_1D_1 不垂直,直线 A_1C_1 与平面 BDD_1B_1 也不可能垂直,故B错误.易知其余选项均正确.

5. 答案　D

命题透析　本题考查集合的交运算,对数函数与指数函数的性质.

解析　由 $\log_3(x-1)<1$,得 $0<x-1<3$,所以 $1<x<4$,故 $A=\{x|1<x<4\}$.由 $\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 8$,解得 $-1\leqslant x\leqslant 3$,故 $B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$.所以 $A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}=(1,3]$.

6. 答案　A

命题透析　本题考查二项分布的性质.

解析　由题意知 $X\sim B(5,p)$,所以 $D(X)=5p(1-p)=0.8$,解得 $p=0.8$ 或 $p=0.2$,因为全部识别成功的概率大于全部识别失败的概率,所以 $p^5>(1-p)^5$,即 $p>1-p$,得 $p>0.5$,所以 $p=0.8$.

7. 答案　D

命题透析　本题考查圆锥的结构特征及相关计算.

解析　圆锥的底面半径 $r=1$,设母线长为 l,则圆锥的高为 $h=\sqrt{l^2-1}$,圆锥内能容纳的最大球的表面积为 2π,即圆锥的内切球的表面积为 2π,所以内切球的半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,故该圆锥的轴截面三角形的内切圆半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(2+2l)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{l^2-1}$,解得 $l=3$,故圆锥的表面积为 $\pi rl+\pi r^2=4\pi$.

8. **答案**　C

命题透析　本题考查平面向量的模、线性运算的性质.

解析　$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\left|\frac{9}{5}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{5}(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right|\leqslant\frac{9}{5}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+\frac{1}{5}|4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{11}{5}$,当 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 方向相反时等号成立,可得此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反,且 $|\boldsymbol{a}|=\frac{1}{5}$, $|\boldsymbol{b}|=\frac{6}{5}$.

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 每小题全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. **答案**　AC

命题透析　本题考查不等式的性质.

解析　对于 A,因为 $a>b>0>c$,所以 $\frac{b}{a}-\frac{b-c}{a-c}=\frac{b(a-c)-a(b-c)}{a(a-c)}=\frac{(a-b)c}{a(a-c)}<0$,所以 $\frac{b}{a}<\frac{b-c}{a-c}$,故 A 正确;

对于 B,$\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{b-a}{(a+c)(b+c)}$,因为 $a>b>0$,所以 $b-a<0$,但 $a+c,b+c$ 的符号无法确定,故 $\frac{1}{a+c}$ 与 $\frac{1}{b+c}$ 的大小不确定,故 B 错误;

对于 C,因为 $a>b>0,-c>0$,所以 $a-c>b-c>0$,则 $\frac{a}{b-c}-\frac{b}{a-c}=\frac{a^2-ac-b^2+bc}{(b-c)(a-c)}=\frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)}>0$,所以 $\frac{a}{b-c}>\frac{b}{a-c}$,故 C 正确;

对于 D,$\left(a+\frac{c}{b}\right)-\left(b+\frac{c}{a}\right)=(a-b)+c\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=(a-b)\left(1+\frac{c}{ab}\right)$,$a>b>0$,$a-b>0$,但 $1+\frac{c}{ab}$ 的符号无法确定,故 D 错误.

10. **答案**　BCD

命题透析　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　对于 A,当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,$4x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$,所以点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 不是 $f(x)$ 的图象的对称中心,故 A 错误;

对于 B,当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$4x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$,函数 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,故 B 正确;

对于 C,当 $x\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$ 时,$4x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right)$,函数 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right)$ 上有 4 个极值点,即 $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}$,所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$ 上有 4 个极值点,故 C 正确;

对于 D,因为 $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$,所以 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y=\sin 4x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到,故 D 正确.

11. **答案**　ABD

命题透析　本题考查利用导数研究函数的性质.

解析　对于 A,当 $a=1$ 时,$f(x)=\begin{cases}e^x-x-1, & x\leqslant 0,\\ \ln x-x+1, & x>0,\end{cases}$ 当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)=e^x-x-1$,$f'(x)=e^x-1$,因为 $x\leqslant 0$,所

以$f'(x)\leqslant 0$,故$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减,且$f(0)=e^0-0-1=0$,所以$x=0$是$f(x)$的一个零点;当$x>0$时,$f(x)=\ln x-x+1$,$f'(x)=\frac{1}{x}-1$,令$f'(x)=0$,得$x=1$,易知$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,则$f(x)_{\max}=f(x)_{极大值}=f(1)=\ln 1-1+1=0$,所以$x=1$是$f(x)$的一个零点,故当$a=1$时,$f(x)$有$x=0$,$x=1$两个零点,故A正确.

对于B,当$x\leqslant 0$时,$f(x)=e^x-ax-1$,则$f'(x)=e^x-a$,依题意,当$x\leqslant 0$时,$f'(x)=e^x-a\leqslant 0$恒成立,即$a\geqslant e^x$恒成立,又$x\leqslant 0$,所以$0<e^x\leqslant 1$,所以$a\geqslant 1$,故B正确.

对于C,当$a=\frac{1}{2}$时,$f(x)=\begin{cases}e^x-\frac{1}{2}x-1,x\leqslant 0,\\ \ln x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},x>0,\end{cases}$当$x\leqslant 0$时,$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x-1$,$f'(x)=e^x-\frac{1}{2}$,令$f'(x)=0$,得$x=-\ln 2$.当$x<-\ln 2$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(-\infty,-\ln 2)$上单调递减;当$-\ln 2<x\leqslant 0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-\ln 2,0]$上单调递增,所以$f(x)$在$x=-\ln 2$处取得极小值,也是在$(-\infty,0]$上的最小值,且$f(-\ln 2)=e^{-\ln 2}-\frac{1}{2}(-\ln 2)-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2-1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$,故C错误.

对于D,$f(x)=\begin{cases}e^x-ax-1,x\leqslant 0,\\ \ln x-ax+a,x>0,\end{cases}$当$x\leqslant 0$时,$f(x)=e^x-ax-1$,$f'(x)=e^x-a$,当$x>0$时,$f(x)=\ln x-ax+a$,$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.依题意,$f(x)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$,则$e^{x_1}-a=0(x_1\leqslant 0)$,$\frac{1}{x_2}-a=0(x_2>0)$,即$a=e^{x_1}=\frac{1}{x_2}$,则$x_1=\ln a$,$x_2=\frac{1}{a}$,因为$x_1\leqslant 0$,所以$0<a\leqslant 1$,又$f(x)$有两个极值点,所以$a\neq 1$,所以$0<a<1$,所以$x_1+x_2=\ln a+\frac{1}{a}(0<a<1)$,令$g(a)=\ln a+\frac{1}{a}$,则当$0<a<1$时,$g'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}<0$,所以$g(a)$在$(0,1)$上单调递减,则$g(a)>g(1)=\ln 1+\frac{1}{1}=1$,即$x_1+x_2>1$,故D正确.

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. **答案** 85

命题透析 本题考查计数原理的应用.

解析 从10个地标建筑中选取3个,共有$C_{10}^3=120$种,若不选甲、乙、丙这3个地标建筑,即从剩下的7个中选3个,有$C_7^3=35$种,所以满足条件的选法有$120-35=85$种.

13. **答案** $3\sqrt{3}$

命题透析 本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析 由正弦定理得$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{3}\sin B}{\sin B}$,即$\tan A=\sqrt{3}$,又$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$.由$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$,得$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,可得$bc=6$.在$\triangle ABC$中,由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,又$a=3$,$A=\frac{\pi}{3}$,代入可得$b^2+c^2=15$,所以$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=27$,所以$b+c=3\sqrt{3}$.

14. **答案** $\sqrt{2}$

命题透析 本题考查椭圆与直线的位置关系.

解析 设 C 的半焦距为 $c(c>0)$,则 $c^2+1=a^2$,由题意可得直线 AP 的方程为 $y=\frac{1}{c}x+1$,直线 AQ 的方程为 $y=-cx+1$. 由 $\begin{cases} y=\frac{1}{c}x+1, \\ \frac{x^2}{a^2}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $\frac{a^2+c^2}{c^2}x^2+\frac{2a^2x}{c}=0$,得 $x=0$ 或 $x=-\frac{2a^2c}{a^2+c^2}$,则 $P\left(-\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}\right)$,用 $-\frac{1}{c}$ 替换 c,可得 $Q\left(\frac{2a^2c}{1+a^2c^2},\frac{1-a^2c^2}{1+a^2c^2}\right)$,又因为直线 PQ 经过 C 的右焦点 $(c,0)$,所以 $\dfrac{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}{c+\frac{2a^2c}{a^2+c^2}}=\dfrac{\frac{a^2c^2-1}{1+a^2c^2}}{c-\frac{2a^2c}{1+a^2c^2}}$,结合 $c^2+1=a^2$,解得 $a^2=\frac{3}{2}$,$c^2=\frac{1}{2}$,所以 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 C 的焦距为 $2c=\sqrt{2}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. **命题透析** 本题考查独立性检验的应用.

解析 (Ⅰ) $P(A)=\frac{70+50}{200}=0.6$, ……(3 分)

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{70}{70+30}=0.7$. ……(6 分)

(Ⅱ)由已知数据可得

$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(70\times50-50\times30)^2}{100\times100\times120\times80}=\frac{25}{3}\approx8.333$. ……(10 分)

因为 $\chi^2\approx8.333>6.635$,所以依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,可以认为消费者对续航里程的满意率与对充电设施的满意率有关. ……(13 分)

16. **命题透析** 本题考查递推数列、等差数列与等比数列求和.

解析 (Ⅰ)由题意知 $\frac{1}{a_2}=\frac{3}{a_1}+1=4$,$\therefore a_2=\frac{1}{4}$. ……(2 分)

$\because \frac{1}{a_3}=\frac{3}{a_2}+3=15$,$\therefore a_3=\frac{1}{15}$. ……(4 分)

(Ⅱ)由 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2n-1$,整理得 $\frac{1}{a_{n+1}}+n+1=3\left(\frac{1}{a_n}+n\right)$, ……(7 分)

又 $\frac{1}{a_1}+1=2$,$\therefore \left\{\frac{1}{a_n}+n\right\}$ 是首项为 2,公比为 3 的等比数列, ……(9 分)

(Ⅲ)由(Ⅱ)可知 $\frac{1}{a_n}+n=2\times3^{n-1}$, ……(11 分)

$\therefore \frac{1}{a_n}=2\times3^{n-1}-n$,

$\therefore T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\times(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-(1+2+3+\cdots+n)$

$=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-\frac{n(n+1)}{2}=3^n-1-\frac{n^2+n}{2}$. ……(15 分)

17. **命题透析** 本题考查抛物线的性质、抛物线与直线的位置关系.

解析 （Ⅰ）E 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$,

因为点 $M\left(\frac{3}{2},y_0\right)$在 E 上，且$|MF|=\frac{5}{2}$，即$\frac{3}{2}+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$，得 $p=2$, ……………………………… (3 分)

所以 E 的方程为 $y^2=4x$. ……………………………… (4 分)

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $F(1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

设 l_1 的方程为 $x=my+1(m\neq0)$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4my-4=0$.

所以 $y_1+y_2=4m$，则 $y_P=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$, ……………………………… (6 分)

代入 $x=my+1$，得 $x_P=2m^2+1$，所以 $P(2m^2+1,2m)$. ……………………………… (7 分)

因为 $l_1\perp l_2$，所以 l_2 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+1$，同理可得 $Q\left(\frac{2}{m^2}+1,-\frac{2}{m}\right)$. ……………………………… (8 分)

当 $m=\pm1$ 时，$2m^2+1=\frac{2}{m^2}+1=3$，直线 $PQ:x=3$. ……………………………… (9 分)

当 $m\neq\pm1$ 时，$k_{PQ}=\dfrac{2m+\frac{2}{m}}{2m^2-\frac{2}{m^2}}=\dfrac{m+\frac{1}{m}}{\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)}=\dfrac{1}{m-\frac{1}{m}}=\dfrac{m}{m^2-1}$,

直线 PQ 的方程为 $y-2m=\frac{m}{m^2-1}[x-(2m^2+1)]$, ……………………………… (12 分)

即 $y=\frac{m}{m^2-1}x-\frac{2m^3+m}{m^2-1}+2m=\frac{m}{m^2-1}x-\frac{3m}{m^2-1}$,

整理得 $y=\frac{m}{m^2-1}(x-3)$. ……………………………… (14 分)

所以直线 PQ 过定点$(3,0)$. ……………………………… (15 分)

18. **命题透析** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 （Ⅰ）若 $a=\mathrm{e}$，则$f(x)=\mathrm{e}x^2-2\ln x$，$f'(x)=2\mathrm{e}x-\frac{2}{x}$, ……………………………… (1 分)

所以$f'(1)=2\mathrm{e}-2$，$f(1)=\mathrm{e}$, ……………………………… (2 分)

所以曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=(2\mathrm{e}-2)(x-1)+\mathrm{e}$,

即 $y=(2\mathrm{e}-2)x-\mathrm{e}+2$. ……………………………… (4 分)

（Ⅱ）$f'(x)=2ax-\frac{2}{x}$，$x>0$.

①若 $a\leqslant0$，则$f'(x)<0$ 恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减； ……………………………… (5 分)

②若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$，且当 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$,

所以$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$上单调递增. ……………………………… (8 分)

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，若 $a\leqslant0$，则曲线 $y=f(x)$与 x 轴最多有 1 个交点，故 $a>0$.

不妨设 $A(x_1,0),B(x_2,0),0<x_1<x_2$,则 $0<x_1<\frac{1}{\sqrt{a}}<x_2$. …………………………………… (10 分)

要证 $f'(x_0)>0$,即证 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$,只需证 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{\sqrt{a}}$,即 $x_1+x_2>\frac{2}{\sqrt{a}}$. …………………… (11 分)

设函数 $g(x)=f(x)-f\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-x\right)$,则 $g'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-x\right)=\frac{4(\sqrt{a}x-1)^2}{(\sqrt{a}x-2)x}$,

当 $x\in\left(0,\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$时,$g'(x)\leqslant 0$,所以 $g(x)$ 在$\left(0,\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$上单调递减, …………………………………… (13 分)

因为 $0<x_1<\frac{1}{\sqrt{a}}$,所以 $g(x_1)>g\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=0$,即 $f\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-x_1\right)<f(x_1)=f(x_2)=0$, …………………… (15 分)

又 $\frac{2}{\sqrt{a}}-x_1>\frac{1}{\sqrt{a}},x_2>\frac{1}{\sqrt{a}}$,$f(x)$ 在$\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$上单调递增,

所以 $\frac{2}{\sqrt{a}}-x_1<x_2$,即 $x_1+x_2>\frac{2}{\sqrt{a}}$. 从而原命题得证. …………………………………… (17 分)

19. **命题透析** 本题考查棱锥、棱台、棱柱的结构特征及相关计算.

解析 (Ⅰ)由题意知平面 $EFGH$∥平面 $ABCD$,所以四棱锥 $P-EFGH$ 也是正四棱锥,

因为四棱台 $EFGH-ABCD$ 与四棱锥 $P-ABCD$ 的棱长和相等,

所以 $PE+PF+PG+PH=EF+FG+GH+HE$,即 $4PE=4EF$,故 $PE=EF$,即四棱锥 $P-EFGH$ 和正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面都是正三角形. …………………………………… (2 分)

连接 AC,设点 P 在底面 $ABCD$ 上的射影为 O,则 O 为 AC 的中点.

由已知得 $AC=\sqrt{2}$,$PA=PC=1$,所以△PAC 是等腰直角三角形,所以 AC 上的高 $PO=\frac{\sqrt{2}}{2}$,即四棱锥 $P-ABCD$ 的高为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………… (3 分)

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times 1^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,当 E 是棱 PA 的中点时,$V_{P-EFGH}=\frac{1}{8}V_{P-ABCD}$,

所以四棱台 $EFGH-ABCD$ 的体积为$\frac{7}{8}V_{P-ABCD}=\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{7\sqrt{2}}{48}$. …………………………………… (5 分)

(Ⅱ)设 AD,BC 的中点分别为 M,N,连接 PM,PN,MN.

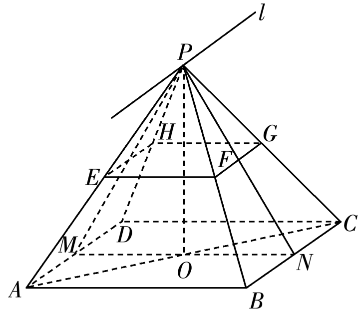
设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l,因为 AD∥BC,所以 AD∥平面 PBC,所以 AD∥BC∥l.

因为△PAD 是等边三角形,所以 $PM\perp AD$,所以 $PM\perp l$,同理可得 $PN\perp l$,

所以平面 PAD 与平面 PBC 的夹角即∠MPN(或其补角). …………………………………… (7 分)

由已知可得 $PM=PN=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$MN=1$,所以 $\cos\angle MPN=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$,

所以平面 PAD 与平面 PBC 的夹角的余弦值为$\frac{1}{3}$. …………………………………… (9 分)



（Ⅲ）由题意知四棱柱 Ω 的高为 $n\sin\theta$，体积为 $m^2n\sin\theta$. ……………………（10 分）

当平面 α 任意上下平移时，设 $\frac{PE}{PA}=t$，$0<t<1$，

则 $V_{P-EFGH}=t^3V_{P-ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{6}t^3$，四棱台 $EFGH-ABCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)$. ……………………（11 分）

所以 $m^2n\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)$. ①

又四棱柱 Ω 与四棱台 $EFGH-ABCD$ 的棱长和相等，所以 $8m+4n=8$，

所以 $n=2-2m$，$0<m<1$. ……………………（12 分）

将其代入①，得 $(2m^2-2m^3)\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)$. ……………………（13 分）

令 $f(m)=2m^2-2m^3$，则 $f'(m)=4m-6m^2=2m(2-3m)$，

当 $0<m<\frac{2}{3}$ 时，$f'(m)>0$，当 $\frac{2}{3}<m<1$ 时，$f'(m)<0$，

所以 $f(m)$ 在 $m=\frac{2}{3}$ 处取得极大值，也是最大值，最大值为 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}$，

所以 $f(m)\in\left(0,\frac{8}{27}\right]$，$(2m^2-2m^3)\sin\theta\in\left(0,\frac{8}{27}\sin\theta\right]$. ……………………（15 分）

又 $\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$，且总存在满足题中条件的 m 和 n，所以 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\subseteq\left(0,\frac{8}{27}\sin\theta\right]$，

故 $\frac{8}{27}\sin\theta\geqslant\frac{\sqrt{2}}{6}$，解得 $\sin\theta\geqslant\frac{9\sqrt{2}}{16}$，

又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $\sin\theta$ 的取值范围是 $\left[\frac{9\sqrt{2}}{16},1\right]$. ……………………（17 分）