海南省2023—2024学年高三学业水平诊断(四)

数学·答案

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的表示与运算.

解析　因为$\complement_{\mathbf{R}} A=(-\infty,1]$,$B=\{x\mid -1<x<3\}$,所以$(\complement_{\mathbf{R}} A)\cap B=(-1,1]$.

2. 答案　B

命题意图　本题考查复数的概念和运算.

解析　由$z=-\dfrac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{-2-\mathrm{i}}{5}$,可知虚部为$-\dfrac{1}{5}$.

3. 答案　A

命题意图　本题考查导数的几何意义.

解析　因为$f(x)=x^3-x+2\sin x$,所以$f'(x)=3x^2-1+2\cos x$,则$f(0)=0$,$f'(0)=1$,所以曲线$y=f(x)$在$x=0$处的切线方程为$y=x$,即$x-y=0$.

4. 答案　D

命题意图　本题考查百分位数的计算.

解析　$7\times0.75=5.25$,故该组数据的75%分位数是从小到大第6个数据,为7.

5. 答案　C

命题意图　本题考查等差数列的性质.

解析　由$a_1+a_3+a_5=21$,$a_2+a_4+a_6=36$,两式相减可得$3d=15$,所以$d=5$,再由$a_1+a_3+a_5=3a_3=21$,可得$a_3=7$,所以$a_6=a_3+3d=7+15=22$.

6. 答案　B

命题意图　本题考查椭圆的几何性质.

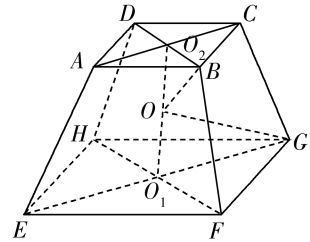
解析　由题意,椭圆C_1的焦点在x轴上,若$m>n$,则从C_1变换到C_2的过程中,x轴方向比y轴方向上的伸长幅度更大,所以C_2比C_1更扁,即$e_2>e_1$,所以B正确.若$m<n$,当C_2的焦点也在x轴上时,$e_1>e_2$,当C_2的焦点在y轴上时,e_1和e_2的大小不确定,所以A,C,D都不正确.

7. 答案　C

命题意图　本题考查正四棱台的结构特征.

解析　如图,连接HF,EG交于点O_1,连接AC,DB交于点O_2,连接O_1O_2,则由球的几何性质可知,正四棱台的外接球的球心O必在直线O_1O_2上.由题意可得$O_1G=\dfrac{1}{2}EG=4\sqrt{2}$,$O_2B=\dfrac{1}{2}BD=2\sqrt{2}$,连接$OG$,$OB$,在$\mathrm{Rt}\triangle OGO_1$中,$OG^2=OO_1^2+O_1G^2$,即$(\sqrt{57})^2=OO_1^2+(4\sqrt{2})^2$,得$OO_1=5$.在$\mathrm{Rt}\triangle OBO_2$中,$OB^2=OO_2^2+O_2B^2$,即$(\sqrt{57})^2=$

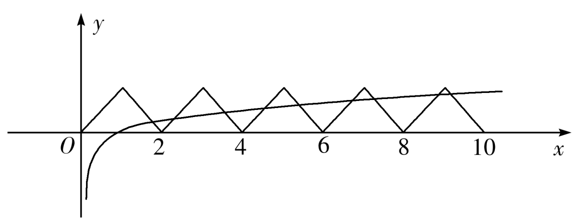
$OO_2^2+(2\sqrt{2})^2$，得 $OO_2=7$. 当球心 O 在线段 O_1O_2 上时(如图)，$O_1O_2=12$，当球心 O 在线段 O_2O_1 的延长线上时(图略)，$O_1O_2=2$.



8. 答案　C

命题意图　本题考查分段函数的图象.

解析　因为 $y=\lg x$ 与 $y=\lg(-x)$ 的图象关于 y 轴对称，所以问题转化为 $y=\lg x$ 的图象与 $f(x)=\begin{cases}1-|x-1|,0\leqslant x<2,\\ f(x-2),x\geqslant 2\end{cases}$ 的图象在 $(0,t)(t>0)$ 内有 5 个不同的交点，结合图象可得 t 的值可以是 6.



二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 每小题全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 答案　BD

命题意图　本题考查空间位置关系的判断.

解析　对于 A，由于 $m\perp\beta,\alpha/\!/\beta$，所以 $m\perp\alpha$，故 A 错误；

对于 B，由于 $m\perp\alpha,n\perp\alpha$，所以 $m/\!/n$，故 B 正确；

对于 C，若 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$，则 m,n 可能平行、相交或异面，故 C 错误；

对于 D，若 $n\perp\alpha,n\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$，故 D 正确.

10. 答案　BCD

命题意图　本题考查不等式的性质.

解析　对于 A，当 $a=-2,b=-\dfrac{3}{2}$ 时，$a+b<-3$，故 A 错误；

对于 B，由 $-3<a<b<-1$ 得 $\dfrac{b}{a}>\dfrac{-1}{a}>\dfrac{-1}{-3}=\dfrac{1}{3}$，故 B 正确；

对于 C，因为 $\dfrac{b}{a}>0$，所以 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=2$，因为 $a<b$，所以等号不成立，故 C 正确；

对于 D，$|a-c|+|b-c|$ 最小即数轴上 c 到 a 和 b 的距离之和最小，当且仅当 $|a-c|+|b-c|=|b-a|$ 时最小，此时 $a<c<b$，故 D 正确.

11. **答案** ABD

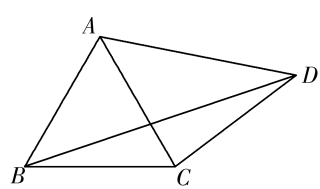
命题意图 本题考查平面向量与解三角形.

解析 对于 A,由$\overrightarrow{BA}\perp(2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$,得$\overrightarrow{BA}\cdot(2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}^2=0$,所以$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\angle ABC=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}^2=2$,所以$\cos\angle ABC=\frac{1}{2}$,因为$0°<\angle ABC<180°$,所以$\angle ABC=60°$,所以$\triangle ABC$为等边三角形,所以$S_{\triangle ABC}=2^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$,故 A 正确;

对于 B,设$AD=x$,由余弦定理,得$\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=\frac{x^2+4-4}{2x\cdot 2}=\frac{x}{4}$,由$\overrightarrow{DA}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=4=x\cdot 2\cdot\frac{x}{4}$,解得$x=2\sqrt{2}$,所以$AD^2=AC^2+CD^2$,即$\angle ACD=90°$,所以$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times AC\times CD=2$,故 B 正确;

对于 C,因为$\angle BCD=\angle ACB+\angle ACD=60°+90°=150°$,$\angle ADC=45°$,$\angle ABC=60°$,所以$AD$与$BC$不平行,$AB$与$DC$不平行,故 C 错误;

对于 D,因为$BC=CD$,$\angle BCD=150°$,所以$\angle CBD=15°$,又$\angle ABC=60°$,所以$\angle ABD=45°$,则由余弦定理知$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD=4+4-2\times2\times2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8+4\sqrt{3}=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2$,所以$|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,所以向量$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{BD}$方向上的投影向量为$|\overrightarrow{BA}|\cos\angle ABD\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BD}|}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\overrightarrow{BD}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\overrightarrow{BD}$,故 D 正确.



三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. **答案** 36

命题意图 本题考查排列组合的应用.

解析 先从海口、三亚、琼海这三个城市中任选两个安排在最前面和最后面,中间三个位置可以任意排列,所以不同的游玩顺序有$A_3^2A_3^3=36$种.

13. **答案** $\left[\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$

命题意图 本题考查三角函数的性质.

解析 当$x\in[-1,m]$时,$\pi x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},m\pi+\frac{\pi}{3}\right]$,因为$f(x)$在$[-1,m]$内恰有 3 个零点,所以结合正弦函数的性质可得$2\pi\leqslant m\pi+\frac{\pi}{3}<3\pi$,所以$\frac{5}{3}\leqslant m<\frac{8}{3}$.

14. **答案** $\frac{5}{4}$

命题意图 本题考查双曲线与直线的位置关系.

解析 设 $P(x_0,y_0)$,易知双曲线的渐近线的方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,由题意可知 $PA\mathbin{/\mkern-5mu/}OB$,$PB\mathbin{/\mkern-5mu/}OA$.

由 $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x,\\ y-y_0=\frac{1}{2}(x-x_0),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}x_0-y_0,\\ y=-\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0,\end{cases}$ 不妨取 $A\left(\frac{1}{2}x_0-y_0,-\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0\right)$,同理可得

$B\left(\frac{1}{2}x_0+y_0,\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0\right)$,则 $|OA|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}x_0-y_0\right)^2+\left(-\frac{1}{4}x_0+\frac{1}{2}y_0\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{1}{2}x_0-y_0\right|$,

$|OB|=\frac{\sqrt{5}}{2}\left|\frac{1}{2}x_0+y_0\right|$,于是 $|PA|\cdot|PB|=|OB|\cdot|OA|=\frac{5}{4}\left|\frac{x_0^2}{4}-y_0^2\right|=\frac{5}{4}$,又 $|PA|=1$,所以 $|PB|=\frac{5}{4}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. **命题意图** 本题考查相互独立事件的概率计算、随机变量的分布列和期望.

解析 (Ⅰ)所求概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$. ……………………………………………………………………(4 分)

(Ⅱ)X 的所有可能取值为 1,2,3, ……………………………………………………………………(5 分)

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$, ……………………………………………………………………(7 分)

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$, ……………………………………………………………………(9 分)

$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. ……………………………………………………………………(11 分)

故 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{9}$

……………………………………………………………………(12 分)

X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{2}{9}+2\times\frac{2}{3}+3\times\frac{1}{9}=\frac{17}{9}$. ……………………………………………………………………(13 分)

16. **命题意图** 本题考查面面垂直的证明以及利用空间向量计算二面角.

解析 (Ⅰ)设 $AC=2$,如图,取 AC 的中点 D,连接 MD,PD.

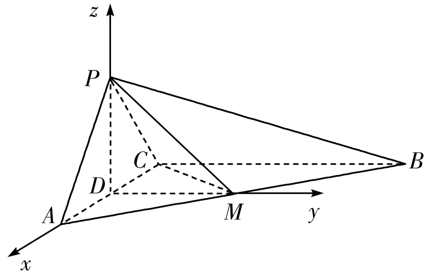
因为 M 为 AB 的中点,所以 $MD/\!/BC$,且 $MD=\frac{1}{2}BC=1$,又 $AC\perp BC$,所以 $MD\perp AC$, ……………………(2 分)

又 $\triangle PAC$ 为等腰直角三角形,$PA=PC$,所以 $PD=\frac{1}{2}AC=1$ 且 $PD\perp AC$, ……………………(4 分)

所以 $\angle PDM$ 是二面角 $P-AC-B$ 的平面角. ……………………………………………………………………(5 分)

易知 $PM=PA=\sqrt{2}$,所以 $PD^2+DM^2=PM^2$,所以 $\angle PDM=90°$,

所以平面 $PAC\perp$ 平面 ABC. ……………………………………………………………………(7 分)



(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 PD,AC,DM 两两互相垂直,故以 D 为原点,$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DP}$的方向为 x,y,z 轴的正方向建立空间直角坐标系,如图.

设 $AC=2$,则 $C(-1,0,0)$,$P(0,0,1)$,$M(0,1,0)$,

所以$\overrightarrow{CP}=(1,0,1)$,$\overrightarrow{CM}=(1,1,0)$. ………………………………………………………………… (9 分)

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面 PCM 的法向量,

则$\begin{cases}\overrightarrow{CP}\cdot\boldsymbol{n}=x+z=0,\\\overrightarrow{CM}\cdot\boldsymbol{n}=x+y=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}=(-1,1,1)$. ……………………………………………………… (11 分)

平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$. ……………………………………………………………… (12 分)

因为 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,……………………………………………………………… (14 分)

所以二面角 $M-PC-A$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………………………………………………………………… (15 分)

17. **命题意图** 本题考查等比数列的性质及相关运算.

解析 (Ⅰ)设$\{a_n\}$的公比为 q, ………………………………………………………………………… (1 分)

则 $q^3=\dfrac{S_6-S_3}{S_3}=\dfrac{351}{13}=27$,所以 $q=3$. ………………………………………………………………… (3 分)

又 $S_3=a_1(1+q+q^2)=13a_1=13$,所以 $a_1=1$, ……………………………………………………… (5 分)

所以 $a_n=3^{n-1}$. ……………………………………………………………………………………………… (7 分)

(Ⅱ)因为$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}<\dfrac{a_{n+2}+1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{3^{n+1}+1}{3^n+1}<\dfrac{3^{n+1}+3}{3^n+1}=3$,……………………………………………………… (10 分)

所以$\dfrac{b_2}{b_1}<3,\dfrac{b_3}{b_2}<3,\cdots,\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}<3,\dfrac{b_n}{b_{n-1}}<3$,

将上面各式累乘得$\dfrac{b_n}{b_1}<3^{n-1}$. …………………………………………………………………………… (13 分)

所以当 $n\geqslant2$ 时,$\dfrac{T_n}{b_1}=\dfrac{b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n}{b_1}=1+\dfrac{b_2}{b_1}+\dfrac{b_3}{b_1}+\cdots+\dfrac{b_n}{b_1}<1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$. … (15 分)

18. **命题意图** 本题考查利用导数与函数证明不等式.

解析 (Ⅰ)设$f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$,则$f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$,…………………………………………… (1 分)

当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增, …………………………………………………………………… (2 分)

所以当 $x>1$ 时,$f(x)>f(1)=0$,即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$. ……………………………………………………（3 分）

设 $g(x)=\ln x-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$,则 $g'(x)=-\frac{(x-1)^2}{2x^2}$, ……………………………………………………（4 分）

当 $x>1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减, ……………………………………………………（5 分）

所以当 $x>1$ 时,$g(x)<g(1)=0$,即 $\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$. ……………………………………………………（6 分）

综上可得:当 $x>1$ 时,$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$. ……………………………………………………（7 分）

（Ⅱ）由题意可知直线 l 的方程为 $y=kx-2(k\neq 0)$,设 $A(x_1,\ln x_1)$,$B(x_2,\ln x_2)$,

不妨设 $x_1>x_2>0$,则$\frac{x_1}{x_2}>1$. ……………………………………………………（8 分）

由（Ⅰ）知:当 $x>1$ 时,$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$,

所以 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$,整理可得$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$,即 $k>\frac{2}{x_1+x_2}$,所以 $x_1+x_2>\frac{2}{k}$. ……………（11 分）

在 $\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$中,用$\sqrt{x}$替换 x 可得 $\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$,所以 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}}$,

所以$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}<\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$,即 $k<\frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$,所以 $x_1x_2<\frac{1}{k^2}$. ……………………………………………………（14 分）

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+(kx_1-2)(kx_2-2)=(k^2+1)x_1x_2-2k(x_1+x_2)+4$

$<\frac{k^2+1}{k^2}-2k\times\frac{2}{k}+4=1+\frac{1}{k^2}$. ……………………………………………………（17 分）

19. **命题意图** 本题考查抛物线、圆与直线的综合问题.

解析 （Ⅰ）设点 P 的坐标为(x,y),由题意得$\left|x-a+\frac{1}{4}\right|=\sqrt{\left(x-a-\frac{1}{4}\right)^2+y^2}$, ……………………（1 分）

两边平方得$\left(x-a+\frac{1}{4}\right)^2=\left(x-a-\frac{1}{4}\right)^2+y^2$,整理得 $x-a=y^2$,

即 W 的方程为 $x-a=y^2$. ……………………………………………………（3 分）

由题意知动点 P 总在圆 O 外,所以$|PQ|_{\min}=|OP|_{\min}-1=\frac{3\sqrt{2}}{4}-1$,所以$|OP|_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. ……………（5 分）

又因为$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x-a}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-a}\geqslant\sqrt{-\frac{1}{4}-a}$,当 $x=-\frac{1}{2}$时等号成立,

……………………………………………………（6 分）

所以$\sqrt{-\frac{1}{4}-a}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$,解得 $a=-\frac{11}{8}$,

所以 W 的方程为 $y^2=x+\frac{11}{8}$. ……………………………………………………（8 分）

（Ⅱ）因为 l 与 W 有两个交点，所以 l 不与 x 轴平行，设 $l:x=ty+m$，

因为 l 与圆 O 相切，所以 $\frac{|m|}{\sqrt{1+t^2}}=1$，所以 $m^2=1+t^2$. ……………………………………………（10 分）

由 $\begin{cases}x=ty+m,\\y^2=x-a,\end{cases}$ 消去 x 可得 $y^2-ty-m+a=0$，

易知 $\Delta>0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=t$，$y_1y_2=a-m$. ……………………………（11 分）

所以 $|AB|=\sqrt{1+t^2}|y_1-y_2|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+t^2}\sqrt{t^2+4m-4a}$，………（12 分）

由（Ⅰ）知 $a=-\frac{11}{8}$，所以 $|AB|^2=(1+t^2)(t^2+4m-4a)=m^2\left(m^2+4m+\frac{9}{2}\right)$，

因为 $m^2=1+t^2$，$t\in\mathbf{R}$，所以 $m^2\geqslant1$，即 $m\leqslant-1$ 或 $m\geqslant1$. ……………………………（13 分）

设 $f(m)=m^2\left(m^2+4m+\frac{9}{2}\right)$，$m\leqslant-1$ 或 $m\geqslant1$.

则 $f'(m)=4m^3+12m^2+9m=m(2m+3)^2$，……………………………………………………（14 分）

当 $m\geqslant1$ 时，$f'(m)>0$，$f(m)$ 单调递增，所以 $f(m)\geqslant f(1)=\frac{19}{2}$. ……………………………（15 分）

当 $m\leqslant-1$ 时，$f'(m)\leqslant0$，$f(m)$ 单调递减，所以 $f(m)\geqslant f(-1)=\frac{3}{2}$. ……………………（16 分）

所以 $|AB|^2$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$，$|AB|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………………………（17 分）