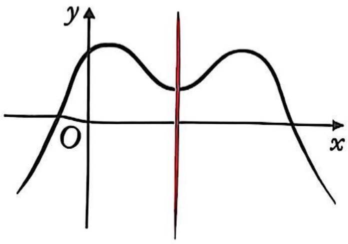
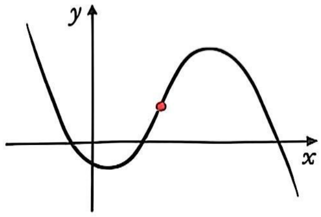


普通轴对称

$$f(a+x)=f(b-x)$$

关于 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称



普通中心对称

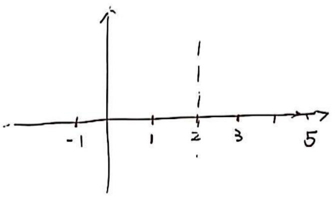
$$f(a+x)+f(b-x)=c$$

关于 $(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2})$ 对称

若函数 $f(x)=(x^2-1)(x^2+ax+b)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 均满足 $f(x)=f(4-x)$，则 $f(x)$ 的最小值为 $\underline{-16}$

$=(x+1)(x-1)(x^2+ax+b)$

关于 $x=2$ 对称



结合对称性可推出 $f(x)$ 的零点还有 $x=3$ 和 $x=5$

即 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)$

分析 $f(x)$ 图像特征，可用穿针引线，但要求的是最小值

可求导，但有点麻烦。

$f(x)=[(x+1)(x-5)][(x-1)(x-3)]$

$=(x^2-4x-5)(x^2-4x+3)$

令 $t=x^2-4x=x(x-4)$

则 $y=(t-5)(t+3)$

当 $t=1$ 时 $y_{min}=-4\times4=-16$

2024 上海徐汇

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=1-f(1-x)$，若函数 $y=\frac{4^x}{4^x+2}$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{2025}, y_{2025})$，则 $\sum_{i=1}^{2025}(x_i+y_i)=($　　$)$

A. 0　　B. $\frac{2025}{2}$　　C. 2025　　D. $\frac{6075}{2}$

对称性问题结合交点问题，秒杀就不会。

由 $f(x)=1-f(1-x)$ 得 $f(x)+f(1-x)=1$ ∴ 关于点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 对称。

但凡是两函数有很多交点，要么考察对称性，要么考察周期性。

若其中一函数已知对称性，则另一函数对称性与之相同，否则出题人就出错了

∴ 验证 $y=\frac{4^x}{4^x+2}$ 也是关于 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 点对称

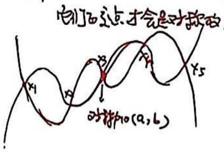
即证 $g(x)+g(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=1$ 得证。

两函数都关于 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 对称，则它们的交点也关于 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 对称。

$\therefore \sum_{i=1}^{2025}(x_i+y_i)=\underbrace{x_1+x_2+\cdots+x_{2025}}_{2025\times\frac{1}{2}}+\underbrace{y_1+y_2+\cdots+y_{2025}}_{2025\times\frac{1}{2}}$

$=2025\times\frac{1}{2}+2025\times\frac{1}{2}=2025$

注释：两函数只有对称性一样（即有相同对称轴或对称中心），它们的交点才会是对称的。eg:



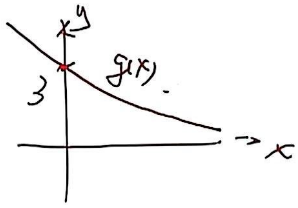
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2a+2a+a=5a$

$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=2b+2b+b=5b$.

2025 湖南模拟 ★★★

方程 $3^x+5^x+7^x=11^x$ 共有 ___1___ 个不同的实根.

若是指数项难处理. 式两边相除. 转化为幂函数去求解即可.



$$\left(\frac{3}{11}\right)^x+\left(\frac{5}{11}\right)^x+\left(\frac{7}{11}\right)^x=1$$

令 $g(x)=\left(\frac{3}{11}\right)^x+\left(\frac{5}{11}\right)^x+\left(\frac{7}{11}\right)^x$.

∵ $y_1=\left(\frac{3}{11}\right)^x$. $y_2=\left(\frac{5}{11}\right)^x$. $y_3=\left(\frac{7}{11}\right)^x$ 均为减↓. 且当 $x=0$ 时. $g(0)=3$.

且 $x\to+\infty$ 时. $g(x)\to 0$. ∴ 有且仅有一个实根.

已知函数 $f(x)=\log_3(9^x+9)-x$，若 $f(a+2)\geq f(2a-1)$ 成立，则实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3},3\right]$.

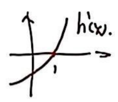
这里显然要考察单调性. 即 f(x) 是可分析的. → 需要先化简.

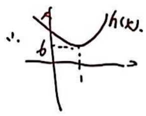
$f(x)=\log_3(9^x+9)-\log_3 3^x=\log_3\frac{9^x+9}{3^x}=\log_3(3^x+3^{2-x})$. 找 x 与 $2-x$ 的中间值 即 1.

则 $f(1+x)=\log_3(3^{1+x}+3^{1-x})$　$f(1-x)=\log_3(3^{1-x}+3^{1+x})$ ⇒ $f(1+x)=f(1-x)$. ∴ $x=1$ 为对称轴.

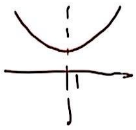
将式子化简完了. 单调性可利用复合函数单调性+求导解决. 令 $h(x)=3^x+3^{2-x}$.　$h'(x)=3^x\ln3-3^{2-x}\cdot\ln3$

$=\ln3(3^x-3^{2-x})$. 且 x 与 $2-x$ 平均 1. 易求 $h'(1)=0$. ∵ $3^x\uparrow$, $3^{2-x}\downarrow$ ∴ $3^x-3^{2-x}\uparrow$ ∴





∴ 由同增异减. 得. $f(x)$ 在 $(-\infty,1)\downarrow$, $(1,+\infty)\uparrow$. 且 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.



距离1距离越远. 函数值越大 (用绝对值 | 距离问题)

$|a+2-1|\geq|2a-1-1|$　$|a+1|^2\geq|2a-2|^2$ → 用平方差 $(a+1+2a-2)(a+1-2a+2)\geq0$

$(3a-1)(3-a)\geq0$ ∴ $\frac{1}{3}\leq a\leq3$.

● **2025 湖北月考**

对数运算化简得对称性. 求导+复合函数单调性特点. 得单调性. 用绝对值处理距离问题.

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，$f(1)=1$，则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$ (A)

A. -3　　B. -2　　C. 0　　D. 1

令 $y=1$. 得 $f(x+1)+f(x-1)=f(x)$. → x 都为同号. 则考周期性. → 与周期有关的. 大胆去替代. 令 $x=x+1$. 得.

$f(x+2)+f(x)=f(x+1)$. 两式相加. 得. $f(x+2)+f(x-1)=0$.　$f(x+2)=-f(x-1)$　$f(x+3)=-f(x)$. ∴ $T=6$.

则只需求出前6个数的值即可. 令 $x=y=1$. $f(2)+f(0)=f(1)\cdot f(1)$ | 令 $x=1$, $y=0$. $f(1)+f(1)=f(1)\cdot f(0)\Rightarrow f(0)=2$

∴ $f(2)=f(1)-f(0)=1-2=-1$　$f(3)=f(2)-f(1)=-2$　$f(4)=f(3)-f(2)=-1$　$f(5)=f(4)-f(3)=1$　$f(6)=f(0)=2$.

∴ $f(1)+\cdots+f(6)=0$ ∴ $\sum_{k=1}^{22}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-3$.

小结: 带特殊值找周期性 / 带特殊值求周期中的值. 然后选择. 中档.

周期性非常规表达式

回顾定义记住. 高考不定都是这样的

● 来源未知 ★★★☆

已知 $y=f(x)$ 是定义在全体实数集 $\mathbf{R}$ 上的实值函数，对任意实数 x，总有 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$，其中 $a>0$，证明：$y=f(x)$ 是周期函数.

$\left(f(x+a)-\frac{1}{2}\right)^2=f(x)-[f(x)]^2$ 凑完全平方公式

$=-\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ 题式

令 $x=x+a$ 得 $\left(f(x+2a)-\frac{1}{2}\right)^2=-\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}$

$=-\left[-\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{4}$

$=\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)^2$

$\therefore f(x+2a)=f(x)$

● 2025 福建模拟节选改编 ★★★★

设 $f(x)$ 满足 $f(x_1)+f(x_2)=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)f\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)$，且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，$x_1, x_2\in\mathbf{R}$，证明：$y=f(x)$ 是周期函数

已知 $f(\frac{\pi}{2})=0$. 故可以代换去进行化简. 但直接令 x_1 或 x_2 为 $\frac{\pi}{2}$ 显然很难化简. 所以这里有一定技巧. 令 $x_1-x_2=\pi$. 则 $x_1=\pi+x_2$.

$f(x_2+\pi)+f(x_2)=2f(x_2+\frac{\pi}{2})\cdot f(\frac{\pi}{2})=0$.

$f(x_2+\pi)=-f(x_2)$ $\therefore T=2\pi$.

函数性质综合

函数 $f(x)=\sin(x^2-x)$，下列说法正确的是（ BC ）

A. $f(x)$ 是周期函数

B. $f(x)$ 最大值是 1

C. $f(x)$ 图像至少有一条对称轴

D. $f(x)$ 图像至少有一个对称中心

先判断A选项. 只需证 $f(x+m)=f(x)$. 可得 $\sin[(x+m)^2-x-m]=\sin(x^2-x)$. $\Rightarrow \sin(x^2-x+m^2-m+2mx)=\sin(x^2-x)$

可得 $m^2-m+2mx$ 需要等于 $2k\pi$. 即要等于一个与 x 无关的常数. 但 $m^2-m+2mx$ 中含 x. 随着自变量变化. $m^2-m+2mx$ 不会是一个定值. 故

判断B选项. 要判断最值. 那就是研究函数图像. 且是复合函数. 令 $t=x^2-x$. 则 $y=\sin t$（$t\geq-\frac{1}{4}$） $\therefore$ B正确.

判断C选项. 只需证 $f(x)=f(1-x)$. 可得 $\sin(x^2-x)=\sin[(1-x)^2-(1-x)]=\sin(x^2-x)$. C正确.

判断D选项. 周期+对称轴可推出对称中心（两对称轴推周期）. 但 $f(x)$ 非周期函数. 因此 $f(x)$ 必定只有一个对称轴

● 2024 陕西同盛实验高三模

函数 $f(x)$ 满足：$\forall x\in R$，$f(x+1)f(x)=2$. 已知当 $x\in[0, 1)$ 时，$f(x)=2^x$，则（ BCD ）

A. $f(1)=1$

B. $f(x)$ 为周期函数

C. $f(x)$ 为偶函数

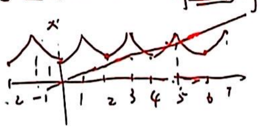
D. 方程 $f(x)=\frac{x}{3}$ 恰有 3 个解

令 $x=0$. $f(1)\cdot f(0)=2$. $\therefore f(1)=\frac{2}{f(0)}=\frac{2}{2^0}=2$. A错.

由 $f(x+1)\cdot f(x)=2$ 得 $f(x)\neq0$. 令 $x=x+1$, $f(x+2)\cdot f(x+1)=2$. $\therefore f(x+2)=f(x)$. $\therefore T=2$. B正确

令 $x\in[-1,0)$. 则 $x+1\in[0,1)$. $f(x)=\frac{2}{f(x+1)}=\frac{2}{2^{x+1}}=2^{-x}=f(-x)$. $\therefore f(x)$ 为偶函数 C正确

$\therefore$ B. C正确 $\therefore$

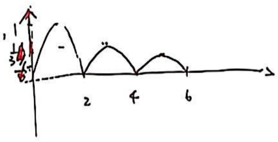


$\therefore$ 有三个交点. D正确.

函数的类周期

定义在$[0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足$f(x)=3f(x+2)$，当$x\in[0,2)$时，$f(x)=-x^2+2x$．设$f(x)$在$[2n-2,2n)$上的最大值为a_n $(n\in\mathbf{N}^*)$，且$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则$S_n=$ $\underline{\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]}$

$f(x)=3f(x+2)$
$f(x+2)=\frac{1}{3}f(x)$ → x每增加2，函数值变为原来的$\frac{1}{3}$．∴



当n=1时，f(x)在[0,2)上最大值$a_1=1$
n=2时，f(x)在[2,4)上最大值$a_2=\frac{1}{3}$

∴ $S_n=1+\frac{1}{3}+(\frac{1}{3})^2+\cdots+(\frac{1}{3})^n=\frac{1\cdot[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]$

● 2011 四川高考★

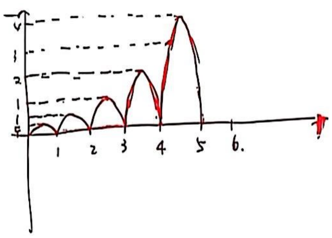
已知函数$f(x)$的定义域为R，且①$f(x)+x^2$是奇函数，②$f(x)-x$是偶函数，设函数$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[0,1]\\ 2g(x-1), & x\in(1,+\infty)\end{cases}$若对任意$x\in[0,m]$，$g(x)\le 3$恒成立，则实数$m$的最大值为（ B ）

A. $\frac{13}{3}$　　B. $\frac{17}{4}$　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{13}{4}$

由①②得，$\begin{cases}f(x)+x^2+f(-x)+(-x)^2=0\\ f(x)-x=f(-x)+x\end{cases}$ 两式相加，得 $2f(x)+2x^2-x=x$　∴$f(x)=x-x^2$．

$g(x)=2g(x-1)$ 即x每增加1，函数值×2．

∴



由图像得，$g(x)\le3$时，在[4,5]之间有函数

此段解析式：可由$x-x^2$纵坐标先扩大16倍，得$16x-16x^2$．

然后向右移4个单位，得$16(x-4)-16(x-4)^2=3$，→ $x=\frac{17}{4}$

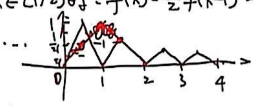
或用二次函数两点式 设$y=a(x-4)(x-5)$，把点(4.5, 4)代入求出a即可

● 2023 福建厦门同安一中期

03 已知定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x+1)=\frac{1}{2}f(x)$，且当$x\in[0,1)$时，$f(x)=1-|2x-1|$，当$x\in\left[\frac{1}{4},\frac{13}{4}\right]$时，$y=f(x)$的值域为 $\underline{[0,1]}$．

类周期函数，就是利用函数关系，常规地画图即可．$x\in[1,2)$时，$f(x)=\frac{1}{2}f(x-1)$，因此时$x-1\in[0,1)$，可带入解析式，$=\frac{1}{2}(1-|2x-3|)$．

$x\in[2,3)$时，$f(x)=\frac{1}{4}(1-|2x-5|)$　∴



04 已知$f_n(x)=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x$ $(n\in N^*)$，则（　　）

A. $f_2(x)$的最小正周期为π　　B. $f_3(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上是单调函数

C. $f_n(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称　　D. $\frac{1}{2^{n-1}}\le f_n(x)\le1$