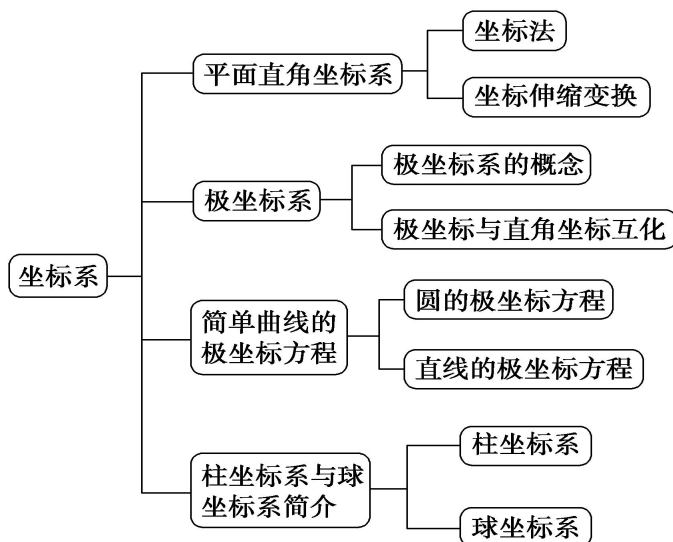


高中数学选修 4-4

坐标系与参数方程知识点总结

第一讲



一 平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系

(1)数轴：规定了原点，正方向和单位长度的直线叫数轴．数轴上的点与实数之间可以建立一一对应关系．

(2)平面直角坐标系：

①定义：在同一个平面上互相垂直且有公共原点的两条数轴构成平面直角坐标系，简称为直角坐标系；

②数轴的正方向：两条数轴分别置于水平位置与竖直位置，取向右与向上的方向分别为两条数轴的正方向；

③坐标轴水平的数轴叫做 x 轴或横坐标轴，竖直的数轴叫做 y 轴或纵坐标轴， x 轴或 y 轴统称为坐标轴；

④坐标原点：它们的公共原点称为直角坐标系的原点；

⑤对应关系：平面直角坐标系上的点与有序实数对 (x, y) 之间可以建立一一对应关系．

(3)距离公式与中点坐标公式：设平面直角坐标系中，点 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ ，线段 P_1P_2 的中点为 P ，填表：

两点间的距离公式	中点 P 的坐标公式
$ P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$

2. 平面直角坐标系中的伸缩变换

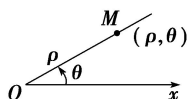
设点 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点, 在变换 $\varphi: \begin{cases} x' = \lambda x (\lambda > 0) \\ y' = \mu y (\mu > 0) \end{cases}$ 的作用下, 点 $P(x, y)$ 对应到点 $P'(x', y')$, 称 φ 为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换, 简称伸缩变换.

二 极坐标系

(1) 定义: 在平面内取一个定点 O , 叫做极点; 自极点 O 引一条射线 Ox 叫做极轴; 再选定一个长度单位、一个角度单位(通常取弧度)及其正方向(通常取逆时针方向), 这样就建立了一个极坐标系.

(2) 极坐标系的四个要素: ①极点; ②极轴; ③长度单位; ④角度单位及它的方向.

(3) 图示



2. 极坐标

(1) 极坐标的定义: 设 M 是平面内一点, 极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的极径, 记为 ρ ; 以极轴 Ox 为始边, 射线 OM 为终边的角 xOM 叫做点 M 的极角, 记为 θ . 有序数对 (ρ, θ) 叫做点 M 的极坐标, 记作 $M(\rho, \theta)$.

(2) 极坐标系中的点与它的极坐标的对应关系: 在极坐标系中, 极点 O 的极坐标是 $(0, \theta)$, $(\theta \in \mathbf{R})$, 若点 M 的极坐标是 $M(\rho, \theta)$, 则点 M 的极坐标也可写成 $M(\rho, \theta + 2k\pi)$, $(k \in \mathbf{Z})$.

若规定 $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, 则除极点外极坐标系内的点与有序数对 (ρ, θ) 之间才是一一对应关系.

3. 极坐标与直角坐标的互化公式

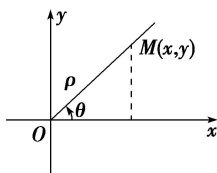
如图所示, 把直角坐标系的原点作为极点, x 轴的正半轴作为极轴, 且长度单位相同, 设任意一点 M 的直角坐标与极坐标分别为 (x, y) , (ρ, θ) .

(1) 极坐标化直角坐标

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

(2) 直角坐标化极坐标

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2, \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0). \end{cases}$$



三 简单曲线的极坐标方程

1. 曲线的极坐标方程

一般地, 在极坐标系中, 如果平面曲线 C 上任意一点的极坐标中至少有一个满足方程 $f(\rho, \theta) = 0$, 并且坐标适合方程 $f(\rho, \theta) = 0$ 的点都在曲线 C 上, 那么方程 $f(\rho, \theta) = 0$ 叫做曲线 C 的极坐标方程.

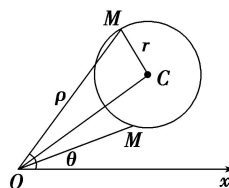
2. 圆的极坐标方程

(1) 特殊情形如下表:

圆心位置	极坐标方程	图 形
圆心在极点(0, 0)	$\rho=r$ ($0\leq\theta<2\pi$)	
圆心在点(r, 0)	$\rho=2r\cos\theta$ ($-\frac{\pi}{2}\leq\theta<\frac{\pi}{2}$)	
圆心在点(r, \frac{\pi}{2})	$\rho=2r\sin\theta$ ($0\leq\theta<\pi$)	
圆心在点(r, \pi)	$\rho=-2r\cos\theta$ ($\frac{\pi}{2}\leq\theta<\frac{3\pi}{2}$)	
圆心在点(r, \frac{3\pi}{2})	$\rho=-2r\sin\theta$ ($-\pi<\theta\leq0$)	

(2)一般情形：设圆心 $C(\rho_0, \theta_0)$ ，半径为 r ， $M(\rho, \theta)$ 为圆上任意一点，则 $|CM|=r$ ， $\angle COM=|\theta-\theta_0|$ ，根据余弦定理可得圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)+\rho_0^2-r^2=0$ 即

$$r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)$$

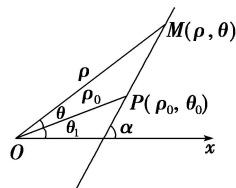


3. 直线的极坐标方程

(1)特殊情形如下表：

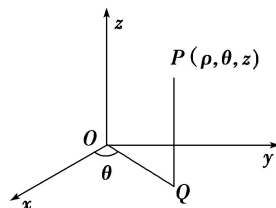
直线位置	极坐标方程	图 形
过极点，倾斜角为 α	(1) $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$ 或 $\theta=\alpha+\pi(\rho\in\mathbf{R})$ (2) $\theta=\alpha(\rho\geq0)$ 和 $\theta=\pi+\alpha(\rho\geq0)$	
过点(a, 0)，且与极轴垂直	$\frac{\rho\cos\theta}{1} = a$ $\left[-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right]$	
过点 $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ ，且与极轴平行	$\frac{\rho\sin\theta}{1} = a$ ($0<\theta<\pi$)	
过点(a, 0)倾斜角为 α	$\rho\sin(\alpha-\theta)=a\sin\alpha$ ($0<\theta<\pi$)	

(2)一般情形，设直线 l 过点 $P(\rho_0, \theta_0)$ ，倾斜角为 α ， $M(\rho, \theta)$ 为直线 l 上的动点，则在 $\triangle OPM$ 中利用正弦定理可得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\alpha-\theta)=\rho_0\sin(\alpha-\theta_0)$ 。



四 柱坐标系与球坐标系简介（了解）

1. 柱坐标系

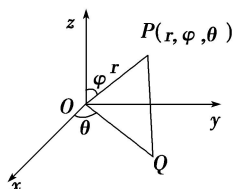


(1)定义：一般地，如图建立空间直角坐标系 $Oxyz$. 设 P 是空间任意一点，它在 Oxy 平面上的射影为 Q ，用 (ρ, θ) ($\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) 表示点 Q 在平面 Oxy 上的极坐标，这时点 P 的位置可用有序数组 (ρ, θ, z) ($z \in \mathbf{R}$) 表示. 这样，我们建立了空间的点与有序数组 (ρ, θ, z) 之间的一种对应关系. 把建立上述对应关系的坐标系叫做柱坐标系，有序数组 (ρ, θ, z) 叫做点 P 的柱坐标，记作 $P(\rho, \theta, z)$ ，其中 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, z \in \mathbf{R}$.

(2)空间点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与柱坐标 (ρ, θ, z) 之间的变换公式为

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

2. 球坐标系

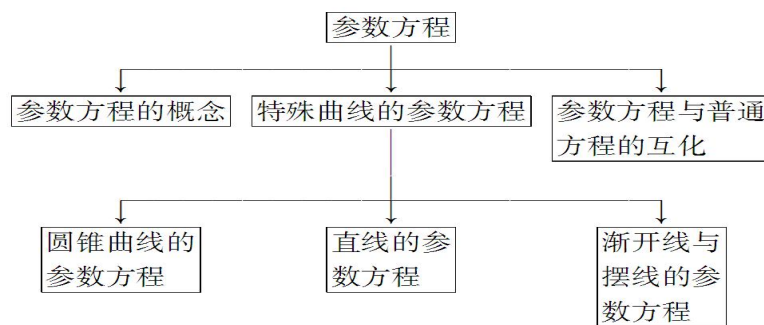


(1)定义：一般地，如图建立空间直角坐标系 $Oxyz$. 设 P 是空间任意一点，连接 OP ，记 $|OP|=r$ ， OP 与 Oz 轴正向所夹的角为 ϕ ，设 P 在 Oxy 平面上的射影为 Q ， Ox 轴按逆时针方向旋转到 OQ 时所转过的最小正角为 θ ，这样点 P 的位置就可以用有序数组 (r, ϕ, θ) 表示，这样，空间的点与有序数组 (r, ϕ, θ) 之间建立了一种对应关系. 把建立上述对应关系的坐标系叫做球坐标系(或空间极坐标系)，有序数组 (r, ϕ, θ) ，叫做点 P 的球坐标，记作 $P(r, \phi, \theta)$ ，其中 $r \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi$.

(2)空间点 P 的直角坐标 (x, y, z) 与球坐标 (r, ϕ, θ) 之间的变换公式为

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

第二讲:



一 曲线的参数方程

1. 参数方程的概念

1. 参数方程的概念

(1)定义: 一般地, 在平面直角坐标系中, 如果曲线上任意一点的坐标 x, y 都是某个变数 t 的函数:
$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad ①$$
 并且对于 t 的每一个允许值, 由方程组①所确定的点 $M(x, y)$ 都在这条曲线上, 那么方程①就叫做这条曲线的参数方程, 联系变数 x, y 的变数 t 叫做参变数, 简称参数. 相对于参数方程而言, 直接给出点的坐标间关系的方程叫做普通方程.

(2)参数的意义: 参数是联系变数 x, y 的桥梁, 可以是有物理意义或几何意义的变数, 也可以是没有明显实际意义的变数.

2. 参数方程与普通方程的区别与联系

(1)区别: 普通方程 $F(x, y)=0$, 直接给出了曲线上点的坐标 x, y 之间的关系, 它含有 x, y 两个变量; 参数方程 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ (t 为参数)间接给出了曲线上点的坐标 x, y 之间的关系, 它含有三个变量 t, x, y , 其中 x 和 y 都是参数 t 的函数.

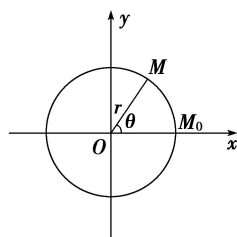
(2)联系: 普通方程中自变量有一个, 而且给定其中任意一个变量的值, 可以确定另一个变量的值; 参数方程中自变量也只有一个, 而且给定参数 t 的一个值, 就可以求出唯一对应的 x, y 的值.

这两种方程之间可以进行互化, 通过消去参数可以把参数方程化为普通方程, 而通过引入参数, 也可把普通方程化为参数方程.

2. 圆的参数方程

1. 圆心在坐标原点, 半径为 r 的圆的参数方程

如图圆 O 与 x 轴正半轴交点 $M_0(r, 0)$.



(1)设 $M(x, y)$ 为圆 O 上任一点, 以 OM 为终边的角设为 θ , 则以 θ 为参数的圆 O 的参数

方程是 $\begin{cases} x=r\cos \theta \\ y=r\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数).

其中参数 θ 的几何意义是 OM_0 绕 O 点逆时针旋转到 OM 的位置时转过的角度.

(2) 设动点 M 在圆上从 M_0 点开始逆时针旋转作匀速圆周运动, 角速度为 ω , 则 OM_0 经过时间 t 转过的角 $\theta=\omega t$, 则以 t 为参数的圆 O 的参数方程为 $\begin{cases} x=r\cos \omega t \\ y=r\sin \omega t \end{cases}$ (t 为参数).

其中参数 t 的物理意义是质点做匀速圆周运动的时间.

2. 圆心为 $C(a, b)$, 半径为 r 的圆的参数方程

圆心为 (a, b) , 半径为 r 的圆的参数方程可以看成将圆心在原点, 半径为 r 的圆通过坐标平移得到, 所以其参数方程为 $\begin{cases} x=a+r\cos \theta \\ y=b+r\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数).

3. 参数方程和普通方程的互化

曲线的参数方程和普通方程的互化

(1) 曲线的参数方程和普通方程是在同一平面直角坐标系中表示曲线的方程的两种不同形式, 两种方程是等价的可以互相转化.

(2) 将曲线的参数方程化为普通方程, 有利于识别曲线的类型. 参数方程通过消去参数就可得到普通方程.

(3) 普通方程化参数方程, 首先确定变数 x, y 中的一个与参数 t 的关系, 例如 $x=f(t)$, 其次将 $x=f(t)$ 代入普通方程解出 $y=g(t)$, 则 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$ (t 为参数) 就是曲线的参数方程.

(4) 在参数方程与普通方程的互化中, 必须使 x, y 的取值范围保持一致.

二 圆锥曲线的参数方程

1. 椭圆的参数方程

椭圆的参数方程

(1) 中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=a\cos \phi \\ y=b\sin \phi \end{cases}$ (ϕ 是参数), 规定参数 ϕ 的取值范围是 $[0, 2\pi)$.

(2) 中心在原点, 焦点在 y 轴上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=b\cos \phi \\ y=a\sin \phi \end{cases}$ (ϕ 是参数), 规定参数 ϕ 的取值范围是 $[0, 2\pi)$.

(3) 中心在 (h, k) 的椭圆普通方程为 $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, 则其参数方程为 $\begin{cases} x=h+a\cos \phi \\ y=k+b\sin \phi \end{cases}$ (ϕ 是参数).

2. 双曲线的参数方程和抛物线的参数方程

1. 双曲线的参数方程

(1) 中心在原点, 焦点在 x 轴上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=a\sec \phi \\ y=b\tan \phi \end{cases}$ (ϕ 为参数),

规定参数 ϕ 的取值范围为 $\phi \in [0, 2\pi)$ 且 $\phi \neq \frac{\pi}{2}, \phi \neq \frac{3\pi}{2}$.

(2)中心在原点, 焦点在 y 轴上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的参数方程是 $\begin{cases} x = b \tan \phi \\ y = a \sec \phi \end{cases}$ (ϕ 为参数).

2. 抛物线的参数方程

(1)抛物线 $y^2 = 2px$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ (t 为参数).

(2)参数 t 的几何意义是抛物线上除顶点外的任意一点与原点连线的斜率的倒数.

三 直线的参数方程

1. 直线的参数方程

经过点 $M_0(x_0, y_0)$, 倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数).

2. 直线的参数方程中参数 t 的几何意义

(1)参数 t 的绝对值表示参数 t 所对应的点 M 到定点 M_0 的距离.

(2)当 $\vec{M_0M}$ 与 e (直线的单位方向向量) 同向时, t 取正数. 当 $\vec{M_0M}$ 与 e 反向时, t 取负数, 当 M 与 M_0 重合时, $t=0$.

3. 直线参数方程的其他形式

对于同一条直线的普通方程, 选取的参数不同, 会得到不同的参数方程. 我们把过点 $M_0(x_0, y_0)$, 倾斜角为 α 的直线, 选取参数 $t = M_0M$ 得到的参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数) 称为直线参数方程的标准形式, 此时的参数 t 有明确的几何意义.

一般地, 过点 $M_0(x_0, y_0)$, 斜率 $k = \frac{b}{a}$ (a, b 为常数) 的直线, 参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ (t 为参数), 称为直线参数方程的一般形式, 此时的参数 t 不具有标准式中参数的几何意义.

四 渐开线与摆线 (了解)

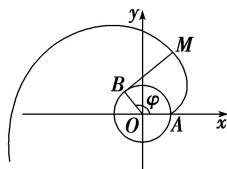
1. 渐开线的概念及参数方程

(1)渐开线的产生过程及定义

把一条没有弹性的细绳绕在一个圆盘上, 在绳的外端系上一支铅笔, 将绳子拉紧, 保持绳子与圆相切, 逐渐展开, 铅笔画出的曲线叫做圆的渐开线, 相应的定圆叫做渐开线的基圆.

(2)圆的渐开线的参数方程

以基圆圆心 O 为原点, 直线 OA 为 x 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系. 设基圆的半径为 r , 绳子外端 M 的坐标为 (x, y) , 则有 $\begin{cases} x = r (\cos \phi + \phi \sin \phi) \\ y = r (\sin \phi - \phi \cos \phi) \end{cases}$ (ϕ 是参数). 这就是圆的渐开线的参数方程.



2. 摆线的概念及参数方程

(1)摆线的产生过程及定义

平面内, 一个动圆沿着一条定直线无滑动地滚动时圆周上一个固定点所经过的轨迹, 叫做平摆线, 简称摆线, 又叫旋轮线.

(2)半径为 r 的圆所产生摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x=r(\varphi-\sin \varphi), \\ y=r(1-\cos \varphi) \end{cases} (\varphi \text{ 是参数}).$$