海南省 2023—2024 学年高三学业水平诊断(三)

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　C

命题意图　本题考查复数的相关概念.

解析　由题知 $z=1-\mathrm{i}$,$\therefore \bar{z}=1+\mathrm{i}$,$\therefore \bar{z}+1+2\mathrm{i}=2+3\mathrm{i}$,$\therefore |2+3\mathrm{i}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

2. 答案　A

命题意图　本题考查正弦定理的应用.

解析　由正弦定理得 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{3}{4}$.

3. 答案　D

命题意图　本题考查分层随机抽样的概念.

解析　由题知,样本中本科学历占比为 $630\div 1\ 000=63\%$,硕士学历占比为 $1-(17\%+63\%+2\%+5\%)=13\%$,故抽取的硕士学历的人数为 $200\times 13\%=26$.

4. 答案　D

命题意图　本题考查等比数列的基本性质.

解析　由题意知 $a_1+a_3=\dfrac{a_2+a_4}{3}=4$,$a_3+a_5=3(a_2+a_4)=36$,所以 $a_5-a_1=36-4=32$.

5. 答案　A

命题意图　本题考查同角三角函数的基本关系与三角恒等变换.

解析　$\because \tan\alpha=-2$,$\therefore \sin\alpha=-2\cos\alpha$,$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=5\cos^2\alpha=1$,又 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$\therefore \cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore \cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{3\pi}{4}+\sin\alpha\sin\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

6. 答案　B

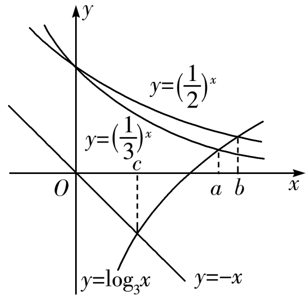
命题意图　本题考查圆锥的结构特征.

解析　由条件知 $0^\circ<\theta<180^\circ$,$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$,则$\dfrac{\theta}{2}=30^\circ$,则该飞机形成的马赫锥在距离顶点 30 m 处的截面圆半径为 $30\tan 30^\circ=10\sqrt{3}$,截面圆面积为 $300\pi\ \mathrm{m}^2$.

7. 答案　D

命题意图　本题考查指数函数、对数函数的图象与性质.

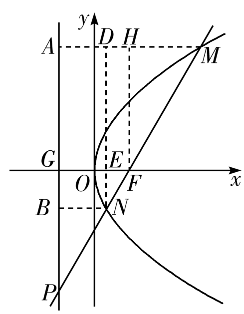
解析　在同一平面直角坐标系中作出 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$,$y=\log_3 x$,$y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$,$y=-x$ 的图象,由图得 $c<a<b$.



8. **答案**　C

命题意图　本题考查抛物线与直线的位置关系.

解析　如图,分别过点 M,N 作抛物线准线的垂线,垂足分别为 A,B,分别过点 N,F 作 $ND\perp MA$,$FH\perp MA$,垂足分别为 D,H,设 ND 交 x 轴于点 E,准线与 x 轴交于点 G. 由题知 $|GF|=p$,$\because$ l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$,$\therefore$ $\angle AMF=\angle GFN=\angle BNP=\frac{\pi}{3}$,则 $|NF|=|NB|=\frac{1}{2}|PN|=1$,$\therefore$ $|PF|=3$,又 $|AM|=|MF|=\frac{1}{2}|PM|$,$\therefore$ $|MF|=|PF|=3$.



二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 每小题全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. **答案**　BCD

命题意图　本题考查曲线与方程.

解析　对于 A,$|PA|+|PB|=4=|AB|$,则点 P 的轨迹为线段 AB,故 A 错误;

对于 B,$||PA|-|PB||=2<4=|AB|$,则点 P 的轨迹是双曲线,故 B 正确;

对于 C,设 $P(x,y)$,由 $|PA|^2-|PB|^2=4$,可得 $(x+2)^2+y^2-(x-2)^2-y^2=4$,化简得 $x=\frac{1}{2}$,表示一条直线,故 C 正确;

对于 D,由 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|$,可得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,则点 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆,故 D 正确.

10. **答案**　BC

命题意图　本题考查三角函数的性质.

解析　设最小正周期为 T,则 $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{4}$,$\therefore$ $T=\pi$,故 A 错误. 不妨令 $\omega>0$,则 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$. 再由五点法知 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}$,$\therefore$ $\varphi=\frac{\pi}{6}$,$\therefore$ $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. $\because$ $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 2x$,此函数为奇

函数,故 B 正确. 当 $x\in\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{6}\in[\pi,2\pi]$,由余弦函数的性质知 C 正确. 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,$\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,故 D 错误.

11. **答案** ABD

命题意图 本题考查空间位置关系的判断.

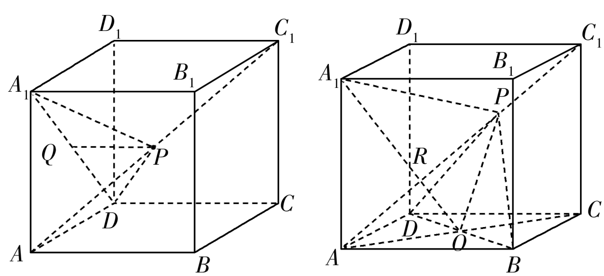
解析 由题意知点 P 在线段 AC_1 上(不包含 A 点).

对于 A,若 A,B,D,A_1,P 在同一球面上,则此球为正方体的外接球,所以 P 与 C_1 重合,所以 $\lambda=1$,故 A 正确;

对于 B,如图(1),设 A_1D 的中点为 Q,则平面 ABC_1D_1 与平面 A_1DP 的交线为直线 PQ,要使 $AB/\!/$平面 A_1DP,则需 $AB/\!/PQ$,则 P 为 AC_1 的中点,此时 $\lambda=2$,故 B 正确;

对于 C,点 P 到 A,B,D,A_1 四点的距离相等,则 P 为正方体外接球的球心,即 AC_1 的中点,此时 $\lambda=2$,故 C 错误;

对于 D,如图(2),设正方形 $ABCD$ 的中心为 O,连接 A_1O 与 AC_1 交于点 R,在对角面 AA_1C_1C 内,易知 R 是 AC_1 上靠近 A 的三等分点,且 $A_1O\perp AC_1$,若 $A_1P\perp$平面 PBD,则 $A_1P\perp PO$,由对称性易知$\triangle A_1AO\cong\triangle A_1PO$,则 $RA=RP$,从而 P 是 AC_1 的靠近 C_1 的三等分点,此时 $\lambda=\frac{3}{2}$,故 D 正确.



图(1) 图(2)

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. **答案** 2

命题意图 本题考查集合的关系.

解析 因为 $A\cap B=B$,所以 $B\subseteq A$,则 $a,a^2\in A$,且 $a\neq a^2$,所以 $a=2$.

13. **答案** -480

命题意图 本题考查二项式定理的应用.

解析 由题知可将$(x-2y+1)^6$ 看成 6 个 $x-2y+1$ 相乘,先从 6 个因式中选 2 个因式取 x,有 C_6^2 种不同的取法,再从剩余 4 个因式中选 3 个因式取 $-2y$,则 y^3 的系数为 $C_4^3(-2)^3$,最后 1 个因式取 1,所以 x^2y^3 的系数为 $C_6^2(-2)^3C_4^3=-480$.

14. **答案** $\frac{1}{e}$

命题意图 本题考查函数性质的综合应用.

解析 由题知 $f(x)$ 在区间$(0,1]$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减. 注意到 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$,因此若 $f(ax)>$

$f(\ln x)$对任意 $x\in(1,\mathrm{e})$恒成立,则$(ax-\ln x)\left(ax-\frac{1}{\ln x}\right)<0$,即$\left(a-\frac{\ln x}{x}\right)\left(a-\frac{1}{x\ln x}\right)<0$ 对任意 $x\in(1,\mathrm{e})$恒成立. 由于 $y=\frac{\ln x}{x}$在区间$(1,\mathrm{e})$上单调递增,且值域为$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$,$y=\frac{1}{x\ln x}$在区间$(1,\mathrm{e})$上单调递减,且值域为$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$,因此$\left(a-\frac{\ln x}{x}\right)\left(a-\frac{1}{x\ln x}\right)<0$ 对 $1<x<\mathrm{e}$ 恒成立时 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. **命题意图** 本题考查数列的通项公式与求和.

解析 (Ⅰ)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=3$, …………(2 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=3n$, …………(4 分)

$\therefore a_n=3n$. …………(5 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $b_n=3n\times 2^n$, …………(6 分)

$\therefore T_n=3\times 2+6\times 2^2+9\times 2^3+\cdots+3n\times 2^n$,① …………(7 分)

$2T_n=3\times 2^2+6\times 2^3+\cdots+3(n-1)\times 2^n+3n\times 2^{n+1}$,②

①-②得,

$-T_n=3\times 2+3\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+3\times 2^n-3n\times 2^{n+1}$ …………(9 分)

$=\frac{6(1-2^n)}{1-2}-3n\times 2^{n+1}=3(1-n)\times 2^{n+1}-6$, …………(12 分)

$\therefore T_n=3(n-1)\times 2^{n+1}+6$. …………(13 分)

16. **命题意图** 本题考查空间中的位置关系以及空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)因为 E 为 AB 的中点,所以点 B 到平面 PDE 的距离等于点 A 到平面 PDE 的距离,

又四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}$,从而 $V_{三棱锥P-ADE}=\frac{1}{4}V_{四棱锥P-ABCD}=2$. …………(2 分)

设点 A 到平面 PDE 的距离为 d,则$\frac{1}{3}S_{\triangle PDE}d=\sqrt{2}d=2$,得 $d=\sqrt{2}$,

因此点 B 到平面 PDE 的距离为$\sqrt{2}$. …………(5 分)

(Ⅱ)因为四边形 $ABCD$ 为矩形,E 为 AB 的中点,所以 $CE=DE$.

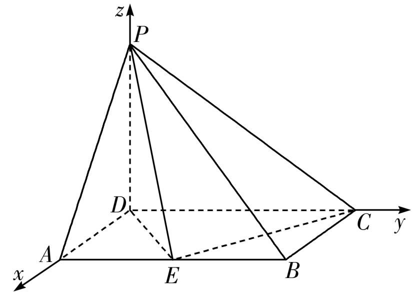
因为 $PD\perp$平面 $ABCD$,所以 $PD\perp CE$,又 $CE\perp PE$,$PE\cap PD=P$,所以 $CE\perp$平面 PDE,所以 $CE\perp DE$.

即$\triangle CDE$ 是等腰直角三角形. …………(7 分)

设 $AD=x$,$PD=h$,则 $AB=2x$,$DE=\sqrt{2}x$.

由条件知$\begin{cases}\frac{1}{3}\times 2x^2h=8,\\ \frac{1}{2}\times\sqrt{2}xh=3\sqrt{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\ h=3.\end{cases}$ …………(9 分)

如图,以 D 为坐标原点,DA,DC,DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系,



则 $P(0,0,3),B(2,4,0),C(0,4,0),E(2,2,0)$, ……………………………………………………………… (10 分)

所以$\overrightarrow{CB}=(2,0,0),\overrightarrow{PC}=(0,4,-3)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 PBC 的法向量,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=4y-3z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2x=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(0,3,4)$. ……………………………………………… (12 分)

平面 PDE 的一个法向量为$\overrightarrow{EC}=(-2,2,0)$. …………………………………………………………… (13 分)

$\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EC}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EC}|}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$,

所以平面 PDE 与平面 PBC 的夹角的余弦值为$\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$. ……………………………………………… (15 分)

17. **命题意图**　本题考查双曲线与直线的位置关系.

解析　(Ⅰ)由题可得 $C:x^2-\dfrac{y^2}{m^2}=1(m>0)$, ……………………………………………………………… (2 分)

因为 C 的离心率为$\sqrt{3}$,所以 $\sqrt{m^2+1}=\sqrt{3}$,得 $m^2=2$, ………………………………………………… (5 分)

所以 C 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)l 过 C 的右顶点$(1,0)$,不妨设 $A(1,0),B(x_1,y_1)$,由 C 的方程可得其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,因为 A,B 均在 C 的右支上,所以 $k>\sqrt{2}$或 $k<-\sqrt{2}$. ……………………………………………………………… (7 分)

由$\begin{cases}y=k(x-1),\\ x^2-\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 得$(2-k^2)x^2+2k^2x-2-k^2=0$,

所以 $x_1+1=\dfrac{2k^2}{k^2-2},x_1=\dfrac{k^2+2}{k^2-2}$. ……………………………………………………………… (8 分)

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-1|=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{k^2-2}$, ……………………………………………………………… (10 分)

以线段 AB 为直径的圆的圆心横坐标为$\dfrac{x_1+1}{2}=\dfrac{k^2}{k^2-2}$,半径为$\dfrac{|AB|}{2}=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}}{k^2-2}$, ………………… (11 分)

由题意知$\dfrac{k^2}{k^2-2}=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}}{k^2-2}$, ……………………………………………………………… (13 分)

整理得 $k^4-4k^2-4=0$,

解得 $k^2=2+2\sqrt{2}$(负值舍去). ………………………………………………………………………………(15 分)

18. **命题意图** 本题考查全概率公式的应用,以及数列与概率的综合问题.

解析 (Ⅰ)由题意,前 4 天管理停车场的顺序为“甲乙丙甲”或“甲丙乙甲”, ……………………………(2 分)

所以 $P=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$. ……………………………………………………………………(6 分)

(Ⅱ)设事件 A_n 表示“第 n 天甲管理停车场”,事件 B_n 表示“第 n 天乙管理停车场”,事件 C_n 表示“第 n 天丙管理停车场”,记 $P(A_n)=f(n)$,$P(B_n)=g(n)$,则 $P(C_n)=1-f(n)-g(n)$.

由题意知 $f(1)=P(A_1)=1$, ………………………………………………………………………………………(8 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$P(A_n)=P(B_{n-1})P(A_n|B_{n-1})+P(C_{n-1})P(A_n|C_{n-1})$, ……………………………………(9 分)

即 $f(n)=\frac{1}{3}g(n-1)+\frac{1}{3}[1-f(n-1)-g(n-1)]$,

整理得 $f(n)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}f(n-1)$, ……………………………………………………………………………(11 分)

所以 $f(n)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left[f(n-1)-\frac{1}{4}\right]$,

所以 $\left\{f(n)-\frac{1}{4}\right\}$是以 $f(1)-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$为首项,$-\frac{1}{3}$为公比的等比数列, ……………………………(13 分)

所以 $f(n)-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,故 $f(n)=\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$,

即第 n 天是甲管理停车场的概率为$\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$. …………………………………………………(15 分)

(Ⅲ)$E(X)<E(Y)=E(Z)$. ………………………………………………………………………………………(17 分)

19. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 (Ⅰ)$f'(x)=2e^x-2a$. ……………………………………………………………………………………(1 分)

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ……………………………………(3 分)

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $x<\ln a$,令 $f'(x)>0$,得 $x>\ln a$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减,在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………(6 分)

(Ⅱ)不等式 $f(x)\geqslant x^2+a^2$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,即 $2e^x-2ax-x^2-a^2\geqslant 0$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立.

令 $g(x)=2e^x-2ax-x^2-a^2$,则 $g'(x)=2e^x-2x-2a$. ……………………………………………………(7 分)

设 $\varphi(x)=g'(x)=2e^x-2x-2a$,则 $\varphi'(x)=2e^x-2$.

当 $x>0$ 时,$\varphi'(x)=2e^x-2>0$,所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x>0$ 时,$g'(x)>g'(0)=2-2a=2(1-a)$. ……………………………………………………………(9 分)

①若 $1-a\geqslant 0$,当 $x>0$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

则 $g(0)=2-a^2\geqslant 0$,所以 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$,所以 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 1$. ………………………………………(11 分)

②若 $1-a<0$,则 $g'(0)<0$,又当 $x\to+\infty$ 时,$g'(x)\to+\infty$,所以 $\exists x_0>0$,使得 $g'(x_0)=2e^{x_0}-2x_0-2a=0$,

即 $a=e^{x_0}-x_0$. ………………………………………………………………………………………………(12 分)

当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

当 $x>x_0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $g(x)_{\min}=g(x_0)=2e^{x_0}-(x_0+a)^2=2e^{x_0}-(e^{x_0})^2=e^{x_0}(2-e^{x_0})\geqslant 0$，

所以 $e^{x_0}\leqslant 2$，所以 $0<x_0\leqslant \ln 2$. ………………………………………………………………（14 分）

由 $a=e^{x_0}-x_0$，令函数 $h(x)=e^x-x$，则当 $0<x\leqslant \ln 2$ 时，$h'(x)=e^x-1>0$，

所以 $1<h(x)\leqslant 2-\ln 2$，所以 $1<a\leqslant 2-\ln 2$. …………………………………………………（16 分）

综上，实数 a 的取值范围是 $[-\sqrt{2},2-\ln 2]$. …………………………………………………（17 分）