

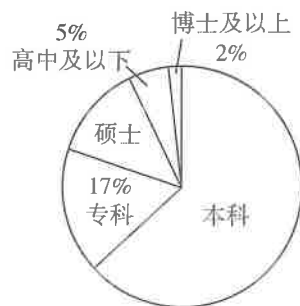
数 学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知复数 z 在复平面内对应的点为 $(1, -1)$, 则 $|\bar{z} + 1 + 2i| =$
A. $\sqrt{5}$ B. 3 C. $\sqrt{13}$ D. 5
2. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 2, b = 3, \sin A = \frac{1}{2}$, 则 $\sin B =$
A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
3. 某机构统计了 1 000 名演员的学历情况,制作出如图所示的饼状图,其中本科学历的人数为 630. 现按比例用分层随机抽样的方法从中抽取 200 人,则抽取的硕士学历的人数为

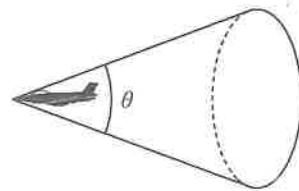


4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 3, $a_2 + a_4 = 12$, 则 $a_5 - a_1 =$
A. 20 B. 24 C. 28 D. 32

5. 已知 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 且 $\tan \alpha = -2$, 则 $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) =$

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

6. 当飞机超音速飞行时,声波会形成一个以飞机前端为顶点,飞机的飞行方向为轴的圆锥(如图),称为“马赫锥”.马赫锥的轴截面顶角 θ 与飞机的速度 v 、音速 c 满足关系式 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{c}{v}$. 若一架飞机以 2 倍音速沿直线飞行,则该飞机形成的马赫锥在距离顶点 30 m 处的截面圆面积为



- A. $100\pi \text{ m}^2$ B. $300\pi \text{ m}^2$ C. $600\pi \text{ m}^2$ D. $900\pi \text{ m}^2$
7. 已知正实数 a, b, c 满足 $\left(\frac{1}{3}\right)^a = \log_3 a, \left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_3 b, c = \log_{\frac{1}{3}} c$, 则
A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$
8. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点,过 F 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线 l 与 C 交于 M, N 两点,与 C 的准线交于点 P (点 N 在线段 MP 上), $|PN| = 2$, 则 $|MF| =$
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $A(-2, 0), B(2, 0)$, P 是一个动点,则下列说法正确的是
A. 若 $|PA| + |PB| = 4$, 则点 P 的轨迹为椭圆
B. 若 $||PA| - |PB|| = 2$, 则点 P 的轨迹为双曲线
C. 若 $|PA|^2 - |PB|^2 = 4$, 则点 P 的轨迹为一条直线
D. 若 $|\vec{PA} + \vec{PB}| = |\vec{PA} - \vec{PB}|$, 则点 P 的轨迹为圆
10. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的一个最大值点为 $x = -\frac{\pi}{12}$, 与之相邻的一个零点为 $x = \frac{\pi}{6}$, 则
A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ B. $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数
C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$ 上单调递增 D. $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 满足 $\lambda \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$, 其中 $\lambda \in [1, +\infty)$, 则下列说法正确的是
- A. 若 A, B, D, A_1, P 在同一球面上, 则 $\lambda = 1$
- B. 若 $AB \parallel$ 平面 A_1DP , 则 $\lambda = 2$
- C. 若点 P 到 A, B, D, A_1 四点的距离相等, 则 $\lambda = 3$
- D. 若 $A_1P \perp$ 平面 PBD , 则 $\lambda = \frac{3}{2}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{a, a^2\}$, 若 $A \cap B = B$, 则 $a =$ _____.
13. $(x-2y+1)^6$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为 _____.
14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1, \end{cases}$ 若 $f(ax) > f(\ln x)$ 对任意 $x \in (1, e)$ 恒成立, 则 $a =$ _____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

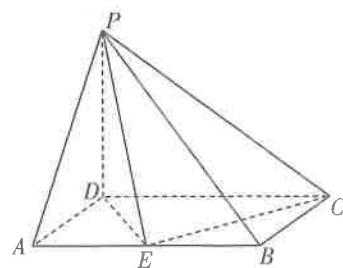
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$.

- (I) 求 a_n ;
- (II) 若 $b_n = a_n \times 2^{\frac{n}{3}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

16. (15 分)

如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 8, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为矩形, E 为棱 AB 的中点, 且 $\triangle PDE$ 的面积为 $3\sqrt{2}$.

- (I) 求点 B 到平面 PDE 的距离;
- (II) 若 $CE \perp PE$, 求平面 PDE 与平面 PBC 的夹角的余弦值.



17. (15 分)

如果一双曲线的实轴及虚轴分别为另一双曲线的虚轴及实轴, 则这两双曲线互为“共轭双曲线”. 已知双曲线 $\frac{y^2}{m^2} - x^2 = 1 (m > 0)$ 的共轭双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{3}$.

- (I) 求 C 的方程;
- (II) 若直线 $l: y = k(x-1)$ 与 C 的右支交于 A, B 两点, 且以线段 AB 为直径的圆与 y 轴相切, 求 k^2 的值.

18. (17 分)

某学校有甲、乙、丙三名保安, 每天由其中一人管理停车场, 相邻两天管理停车场的人不相同. 若某天是甲管理停车场, 则下一天有 $\frac{1}{2}$ 的概率是乙管理停车场; 若某天是乙管理停车场, 则下一天有 $\frac{2}{3}$ 的概率是丙管理停车场; 若某天是丙管理停车场, 则下一天有 $\frac{1}{3}$ 的概率是甲管理停车场. 已知今年第 1 天管理停车场的是甲.

- (I) 求第 4 天是甲管理停车场的概率;
- (II) 求第 n 天是甲管理停车场的概率;
- (III) 设今年甲、乙、丙管理停车场的天数分别为 X, Y, Z , 判断 $E(X), E(Y), E(Z)$ 的大小关系. (给出结论即可, 不需要说明理由)

19. (17 分)

已知函数 $f(x) = 2e^x - 2ax, a \in \mathbf{R}$.

- (I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (II) 若不等式 $f(x) \geq x^2 + a^2$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求 a 的取值范围.