

# 高中数学必修 4 知识点

## 第一章 三角函数

1、任意角  $\begin{cases} \text{正角: 按逆时针方向旋转形成的角} \\ \text{负角: 按顺时针方向旋转形成的角} \\ \text{零角: 不作任何旋转形成的角} \end{cases}$

2、象限的角: 在直角坐标系内, 顶点与原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 角的终边落在第几象限, 就是第几象限的角; 角的终边落在坐标轴上, 这个角不属于任何象限, 叫做轴线角。

第一象限角的集合为  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第二象限角的集合为  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 90^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第三象限角的集合为  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 180^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 270^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

第四象限角的集合为  $\{\alpha | k \cdot 360^\circ + 270^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在 x 轴上的角的集合为  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在 y 轴上的角的集合为  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 180^\circ + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

终边在坐标轴上的角的集合为  $\{\alpha | \alpha = k \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

3、与角  $\alpha$  终边相同的角, 连同角  $\alpha$  在内, 都可以表示为集合  $\{\beta | \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$

4、弧度制:

(1) 定义: 等于半径的弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角, 用弧度做单位叫弧度制。

半径为  $r$  的圆的圆心角  $\alpha$  所对弧的长为  $l$ , 则角  $\alpha$  的弧度数的绝对值是  $|\alpha| = \frac{l}{r}$ .

(2) 度数与弧度数的换算:  $360^\circ = 2\pi$ ,  $180^\circ = \pi$  rad,  $1 \text{ rad} = (\frac{180}{\pi})^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'$

注: 角度与弧度的相互转化: 设一个角的角度为  $n^\circ$ , 弧度为  $\alpha$ ;

①角度化为弧度:  $n^\circ = n^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{n\pi}{180}$ , ②弧度化为角度:  $\alpha = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$

(3) 若扇形的圆心角为  $\alpha$  ( $\alpha$  是角的弧度数), 半径为  $r$ , 则:

弧长公式: ①  $l = \frac{n\pi r}{180}$  (用度表示的), ②  $l = |\alpha| r$  (用弧度表示的) ;

扇形面积: ①  $S_{\text{扇}} = \frac{n\pi r^2}{360}$  (用度表示的) ②  $S_{\text{扇}} = \frac{1}{2} |\alpha| r^2 = \frac{1}{2} lr$  (用弧度表示的)

## 5、三角函数：

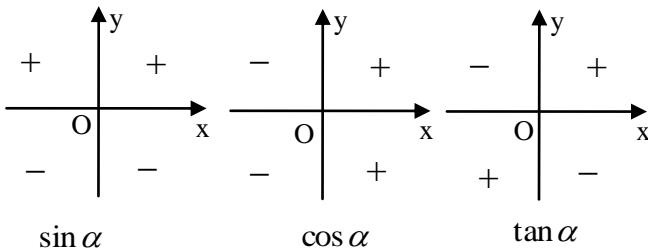
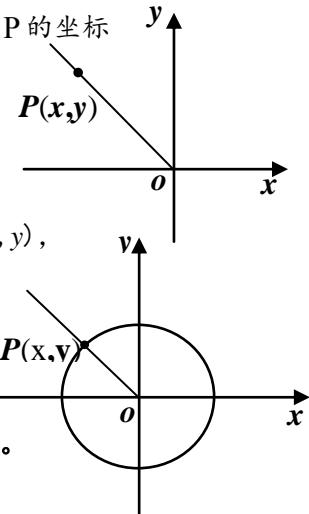
(1) 定义①：设  $\alpha$  是一个任意大小的角， $\alpha$  的终边上任意一点 P 的坐标是  $(x, y)$ ，它与原点的距离是  $r (|OP|=r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$ ，

$$\text{则 } \sin \alpha = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0)$$

定义②：设  $\alpha$  是一个任意角，它的终边与单位圆交于点  $P(x, y)$ ，那么  $v$  叫做  $\alpha$  的正弦，记作  $\sin \alpha$ ，即  $\sin \alpha = y$ ； $u$  叫做  $\alpha$  的余弦，记作  $\cos \alpha$ ，即  $\cos \alpha = x$ ；当  $\alpha$  的终边不在  $y$  轴上时，

$$\frac{y}{x}$$
 叫做  $\alpha$  的正切，记作  $\tan \alpha$ ，即  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ .

(2) 三角函数值在各象限的符号：口诀：全正，S 正，T 正，C 正。

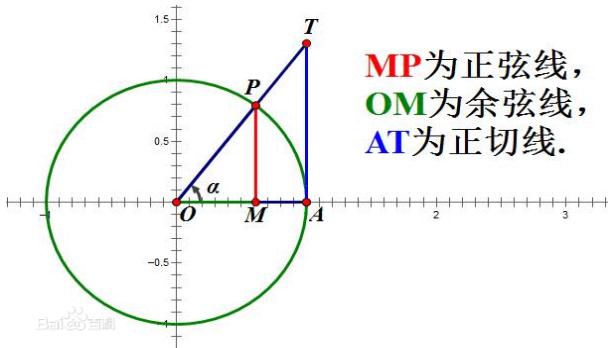


口诀：第一象限全为正；  
二正三切四余弦。

(3) 特殊角的三角函数值

$\alpha$ 的角度	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\alpha$ 的弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\alpha$ 的角度	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$	
$\alpha$ 的弧度	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$	
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	
$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

(4) 三角函数线：如下图



(5) 同角三角函数基本关系式

$$(1) \text{ 平方关系: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (2) \text{ 商数关系: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

6、三角函数的诱导公式：

$$(1) \sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha, \cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha, \tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha (k \in \mathbb{Z}).$$

口诀：终边相同的角的同一三角函数值相等。

$$(2) \sin(-\alpha) = -\sin \alpha, \cos(-\alpha) = \cos \alpha, \tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$$

$$(3) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha, \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

$$(4) \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$(5) \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha, \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha, \tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$$

口诀：函数名称不变，正负看象限。

$$(6) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$$

$$(7) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha.$$

口诀：正弦与余弦互换，正负看象限。

诱导公式记忆口诀：“奇变偶不变，符号看象限”。即将括号里面的角拆成  $\beta = k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha$  的形式。

7、正弦函数、余弦函数和正切函数的图象与性质：

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
图象			
定义域	$R$	$R$	$\left\{ x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
值域	值域： $[-1, 1]$ 当 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 时， $y_{\max} = 1$ ； 当 $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 时， $y_{\min} = -1$ .	值域： $[-1, 1]$ 当 $x = 2k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 时， $y_{\max} = 1$ ； 当 $x = 2k\pi + \pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 时， $y_{\min} = -1$ .	值域： $R$ 既无最大值也无最小值
周期性	$y = \sin x$ 是周期函数；周期为 $T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$ ； 最小正周期为 $2\pi$	$y = \cos x$ 是周期函数；周期为 $T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$ ； 最小正周期为 $2\pi$	$y = \tan x$ 是周期函数；周期为 $T = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 且 $k \neq 0$ ；最小正周期为 $\pi$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 上是增函数；在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 上是减函数.	在 $[2k\pi - \pi, 2k\pi]$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 上是增函数；在 $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 上是减函数.	在 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 上是增函数.
对称性	对称中心 $(k\pi, 0)$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 对称轴 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )	对称中心 $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, 0\right)$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 对称轴 $x = k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )	对称中心 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 无对称轴

8、(1)  $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$  的图象与  $y = \sin x$  图像的关系:

$$\textcircled{1} \text{振幅变换: } y = \sin x \xrightarrow{\text{图象上每个点的横坐标不变, 纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}} y = A \sin x$$

$$\textcircled{2} \text{周期变换: } y = \sin x \xrightarrow{\text{图象上每个点的横坐标变为原来的 } \frac{1}{\omega} \text{ 倍, 纵坐标不变}} y = \sin \omega x$$

$$\textcircled{3} \text{相位变换: } y = \sin x \xrightarrow{\text{图象整体向左 } (\varphi > 0) \text{ 或向右 } (\varphi < 0) \text{ 平移 } |\varphi| \text{ 个单位}} y = \sin(x + \varphi)$$

$$\textcircled{4} \text{平移变换: } y = A \sin(\omega x + \varphi) \xrightarrow{\substack{\text{图象整体向上 } (b > 0) \text{ 或向下 } (b < 0) \\ \text{平移 } |b| \text{ 个单位}}} y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$$

注: 函数  $y = \sin x$  的图象怎样变换得到函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$  的图象: (两种方法)

① 先平移后伸缩:

$$\begin{aligned} y = \sin x &\xrightarrow{\substack{\text{平移 } |\varphi| \text{ 个单位} \\ (\text{左加右减})}} y = \sin(x + \varphi) \\ &\xrightarrow{\substack{\text{纵坐标不变} \\ \text{横坐标变为原来的 } \left|\frac{1}{\omega}\right| \text{ 倍}}} y = \sin(\omega x + \varphi) \\ &\xrightarrow{\substack{\text{横坐标不变} \\ \text{纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}}} y = A \sin(\omega x + \varphi) \\ &\xrightarrow{\substack{\text{平移 } |B| \text{ 个单位} \\ (\text{上加下减})}} y = A \sin(\omega x + \varphi) + B \end{aligned}$$

② 先伸缩后平移:

$$\begin{aligned} y = \sin x &\xrightarrow{\substack{\text{纵坐标不变}}} y = \sin \omega x \\ &\xrightarrow{\substack{\text{横坐标变为原来的 } \left|\frac{1}{\omega}\right| \text{ 倍}}} y = \sin(\omega x + \varphi) \\ &\xrightarrow{\substack{\text{平移 } \left|\frac{\varphi}{\omega}\right| \text{ 个单位} \\ (\text{左加右减})}} y = \sin(\omega x + \varphi) \\ &\xrightarrow{\substack{\text{横坐标不变} \\ \text{纵坐标变为原来的 } A \text{ 倍}}} y = A \sin(\omega x + \varphi) \\ &\xrightarrow{\substack{\text{平移 } |B| \text{ 个单位} \\ (\text{上加下减})}} y = A \sin(\omega x + \varphi) + B \end{aligned}$$

(上加下减)

(2) 函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) 的性质:

①振幅:  $A$ ; ②周期:  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ; ③频率:  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ ; ④相位:  $\omega x + \varphi$ ; ⑤初相:  $\varphi$ .

定义域:  $R$

值域:  $[-A+b, A+b]$

当  $\omega x + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in Z$ ) 时,  $y_{\max} = A+b$ ;

当  $\omega x + \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$  ( $k \in Z$ ) 时,  $y_{\min} = -A+b$ .

周期性: 函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) 是周期函数; 周期为  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

单调性:  $\omega x + \varphi$  在  $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$  ( $k \in Z$ ) 上时是增函数;

$\omega x + \varphi$  在  $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$  ( $k \in Z$ ) 上时是减函数.

对称性: 对称中心为  $\left(\frac{k\pi - \varphi}{\omega}, 0\right)$  ( $k \in Z$ ); 对称轴为  $\omega x + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in Z$ )

## 第二章 平面向量

1、向量定义: 既有大小又有方向的量叫做向量, 向量都可用同一平面内的有向线段表示.

2、零向量: 长度为 0 的向量叫零向量, 记作  $\vec{0}$ ; 零向量的方向是任意的.

3、单位向量: 长度等于 1 个单位长度的向量叫单位向量; 与向量  $\vec{a}$  平行的单位向量:  $\vec{e} = \pm \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ .

4、平行向量(共线向量): 方向相同或相反的非零向量叫平行向量也叫共线向量, 记作  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ;

规定  $\vec{0}$  与任何向量平行.

5、相等向量: 长度相同且方向相同的向量叫相等向量, 零向量与零向量相等.

**注意:** 任意两个相等的非零向量,  
都可以用同一条有向线段来表  
示, 并且与有向线段的起点无关。

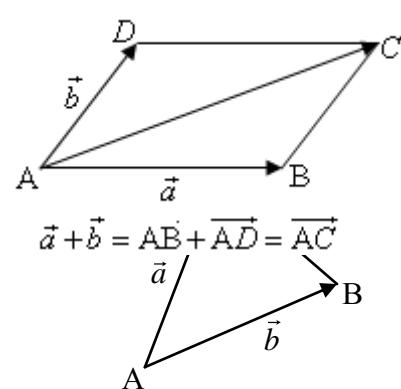
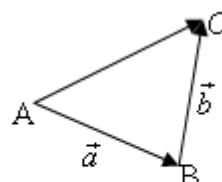
6、向量加法运算:

(1) 三角形法则的特点:

首尾相接

(2) 平行四边形法则的特点:

起点相同



(3)运算性质：

①交换律： $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ；

②结合律： $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ； ③ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ 。

(4)坐标运算：设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , 则 $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .

7、向量减法运算：

(1)三角形法则的特点：共起点，连终点，方向指向被减向量。

(2)坐标运算：设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , 则

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

设A、B两点的坐标分别为 $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , 则

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

8、向量数乘运算：

(1)实数 $\lambda$ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量的运算叫做向量的数乘，记作 $\lambda\vec{a}$ 。

① $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ ；

②当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相同；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 的方向相反；

当 $\lambda = 0$ 时， $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ .

(2)运算律：① $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ ； ② $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ； ③ $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ 。

(3)坐标运算：设 $\vec{a} = (x, y)$ , 则 $\lambda\vec{a} = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ .

9、向量共线定理：向量 $\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$ 与 $\vec{b}$ 共线，当且仅当有唯一一个实数 $\lambda$ ，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ 。

设 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , 其中 $\vec{b} \neq \vec{0}$ , 则当且仅当 $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ 时，向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$ 共线。

10、平面向量基本定理：如果 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内

的任意向量 $\vec{a}$ ，有且只有一对实数 $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ ，使 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$ . (不共线的向量 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 作为这一平面内所有向量的一组基底)

11、分点坐标公式：设点P是线段 $P_1P_2$ 上的一点， $P_1$ 、 $P_2$ 的坐标分别是 $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,

当 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda\overrightarrow{PP_2}$ 时，点P的坐标是 $\left( \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right)$ .

12、平面向量的数量积：

(1) 定义:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$  ( $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ). 零向量与任一向量的数量积为 0.

(2) 性质: 设  $\vec{a}$  和  $\vec{b}$  都是非零向量, 则 ①  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . ② 当  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  同向时,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ ;

当  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  反向时,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$ ;  $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$  或  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ . ③  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ .

(3) 运算律: ①  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ; ②  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$ ; ③  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ .

(4) 坐标运算: 设两个非零向量  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , 则  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ .

若  $\vec{a} = (x, y)$ , 则  $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2$ , 或  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

设  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ , 则  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ .

设  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  都是非零向量,  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ,  $\theta$  是  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角, 则

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

### 第三章 三角恒等变形

#### 1、同角三角函数基本关系式

$$(1) \text{ 平方关系: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (2) \text{ 商数关系: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$(3) \text{ 倒数关系: } \tan \alpha \cot \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad ; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$$

**注意:**  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$  按照以上公式可以“知一求二”

#### 2、两角和与差的正弦、余弦、正切

$$S_{(\alpha+\beta)}: \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$S_{(\alpha-\beta)}: \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$C_{(\alpha+\beta)}: \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$C_{(\alpha-\beta)}: \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$T_{(\alpha+\beta)}: \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$T_{(\alpha-\beta)}: \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\text{正切和公式: } \tan \alpha + \tan \beta = \tan(\alpha + \beta) \cdot (1 - \tan \alpha \tan \beta)$$

$$3、\text{辅助角公式: } a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cdot \cos \varphi + \cos x \cdot \sin \varphi) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$$

(其中  $\varphi$  称为辅助角,  $\varphi$  的终边过点  $(a, b)$ ,  $\tan \varphi = \frac{b}{a}$ )

4、二倍角的正弦、余弦和正切公式:

$$S_{2\alpha}: \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$C_{2\alpha}: \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$T_{2\alpha}: \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

\*二倍角公式的常用变形: ①、 $\sqrt{1 - \cos 2\alpha} = \sqrt{2} |\sin \alpha|$ ,  $\sqrt{1 + \cos 2\alpha} = \sqrt{2} |\cos \alpha|$ ;

$$\textcircled{2}、\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha} = |\sin \alpha|, \quad \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha} = |\cos \alpha|$$

$$\textcircled{3} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{\sin^2 2\alpha}{2};$$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha;$$

$$\text{*降次公式: } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = -\frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}$$

5、\*半角的正弦、余弦和正切公式:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad ; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

6、同角三角函数的常见变形: (活用“1”)

$$\textcircled{1} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha; \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$\textcircled{2} \tan \theta + \cot \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{2}{\sin 2\theta},$$

$$\cot \theta - \tan \theta = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cot 2\alpha$$

$$③ (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \pm \sin 2\alpha ; \quad \sqrt{1 \pm \sin 2\alpha} = |\sin \alpha \pm \cos \alpha|$$

7、补充公式：

\* ①万能公式

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} ; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} ; \quad \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

\* ②积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

\* ③和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} ; \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} ; \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

注：带\*号的公式表示了解，没带\*公式为必记公式