

高中数学选修 2-2 知识点

第一章 导数及其应用

一. 导数概念的引入

1. 导数的物理意义：瞬时速率。一般的，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$ ，

$$\text{即 } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2. 导数的几何意义：曲线的切线。通过图像，我们可以看出当点 P_n 趋近于 P 时，直线 PT 与曲线相切。容易

知道，割线 PP_n 的斜率是 $k_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ ，当点 P_n 趋近于 P 时，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导

数就是切线 PT 的斜率 k ，即 $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0)$

3. 导函数：当 x 变化时， $f'(x)$ 便是 x 的一个函数，我们称它为 $f(x)$ 的导函数。 $y=f(x)$ 的导函数有

$$\text{时也记作 } y', \text{ 即 } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

二. 导数的计算

1) 基本初等函数的导数公式：

1 若 $f(x) = c$ (c 为常数)，则 $f'(x) = 0$ ；

2 若 $f(x) = x^\alpha$ ，则 $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ ；

3 若 $f(x) = \sin x$ ，则 $f'(x) = \cos x$

4 若 $f(x) = \cos x$ ，则 $f'(x) = -\sin x$ ；

5 若 $f(x) = a^x$ ，则 $f'(x) = a^x \ln a$

6 若 $f(x) = e^x$ ，则 $f'(x) = e^x$

7 若 $f(x) = \log_a^x$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

8 若 $f(x) = \ln x$ ，则 $f'(x) = \frac{1}{x}$

2) 导数的运算法则

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

$$2. [f(x) \bullet g(x)]' = f'(x) \bullet g(x) + f(x) \bullet g'(x)$$

$$3. \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \bullet g(x) - f(x) \bullet g'(x)}{[g(x)]^2}$$

3) 复合函数求导

$y = f(u)$ 和 $u = g(x)$, 称则 y 可以表示成为 x 的函数, 即 $y = f(g(x))$ 为一个复合函数

$$y' = f'(g(x)) \bullet g'(x)$$

三. 导数在研究函数中的应用

1. 函数的单调性与导数:

一般的, 函数的单调性与其导数的正负有如下关系:

在某个区间 (a, b) 内, 如果 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在这个区间单调递增;

如果 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y = f(x)$ 在这个区间单调递减.

2. 函数的极值与导数

极值反映的是函数在某一点附近的大小情况.

求函数 $y = f(x)$ 的极值的方法是:

(1) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) > 0$, 右侧 $f'(x) < 0$, 那么 $f(x_0)$ 是极大值;

(2) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x) < 0$, 右侧 $f'(x) > 0$, 那么 $f(x_0)$ 是极小值;

4. 函数的最大(小)值与导数

函数极大值与最大值之间的关系.

求函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的极值;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a), f(b)$ 比较, 其中最大的是一个最大值, 最小的是最小值.

四. 生活中的优化问题

利用导数的知识, 求函数的最大(小)值, 从而解决实际问题

第二章 推理与证明

1、归纳推理

把从个别事实中推演出一般性结论的推理, 称为归纳推理(简称归纳).

简言之, 归纳推理是由部分到整体、由特殊到一般的推理。

归纳推理的一般步骤:

- 通过观察个别情况发现某些相同的性质;
- 从已知的相同性质中推出一个明确表述的一般命题(猜想);
- 证明(视题目要求, 可有可无).

2、类比推理

由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理称为类比推理（简称类比）。

简言之，类比推理是由特殊到特殊的推理。

类比推理的一般步骤：

- 找出两类对象之间可以确切表述的相似特征；
- 用一类对象的已知特征去推测另一类对象的特征，从而得出一个猜想；
- 检验猜想。

3、合情推理

归纳推理和类比推理都是根据已有的事实，经过观察、分析、比较、联想，再进行归纳、类比，然后提出猜想的推理。

归纳推理和类比推理统称为合情推理，通俗地说，合情推理是指“合乎情理”的推理。

4、演绎推理

从一般性的原理出发，推出某个特殊情况下的结论，这种推理称为演绎推理。

简言之，演绎推理是由一般到特殊的推理。

演绎推理的一般模式——“三段论”，包括

- (1) 大前提——已知的一般原理；
- (2) 小前提——所研究的特殊情况；
- (3) 结论——据一般原理，对特殊情况做出的判断。

5、直接证明与间接证明

(1) 综合法：利用已知条件和某些数学定义、公理、定理等，经过一系列的推理论证，最后推导出所要证明的结论成立。要点：顺推证法；由因导果。

(2) 分析法：从要证明的结论出发，逐步寻找使它成立的充分条件，直至最后，把要证明的结论归结为判定一个明显成立的条件（已知条件、定理、定义、公理等）为止。

要点：逆推证法；执果索因。

(3) 反证法：一般地，假设原命题不成立，经过正确的推理，最后得出矛盾，因此说明假设错误，从而证明了原命题成立。的证明方法. 它是一种间接的证明方法。

反证法法证明一个命题的一般步骤：

- (1) （反设）假设命题的结论不成立；
- (2) （推理）根据假设进行推理，直到导出矛盾为止；
- (3) （归谬）断言假设不成立；
- (4) （结论）肯定原命题的结论成立。

6、数学归纳法

数学归纳法是证明关于正整数 n 的命题的一种方法。

用数学归纳法证明命题的步骤：

- (1) （归纳奠基）证明当 n 取第一个值 n_0 ($n_0 \in N^*$) 时命题成立；
 - (2) （归纳递推）假设 $n = k$ ($k \geq n_0$, $k \in N^*$) 时命题成立，推证当 $n = k + 1$ 时命题也成立。
- 只要完成了这两个步骤，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立。

第三章 数系的扩充与复数的引入

一：复数的概念

(1) 复数：形如 $a + bi$ ($a \in R, b \in R$) 的数叫做复数， a 和 b 分别叫它的实部和虚部。

(2) 分类：复数 $a + bi$ ($a \in R, b \in R$) 中，当 $b = 0$ ，就是实数； $b \neq 0$ ，叫做虚数；当 $a = 0, b \neq 0$ 时，叫做纯虚数。

(3) 复数相等：如果两个复数实部相等且虚部相等就说这两个复数相等。

(4) 共轭复数:当两个复数实部相等,虚部互为相反数时,这两个复数互为共轭复数.

(5) 复平面:建立直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面,x 轴叫做实轴, y 轴除去原点的部分叫做虚轴.

(6) 两个实数可以比较大小, 但两个复数如果不全是实数就不能比较大小.

2. 相关公式

$$(1) a+bi=c+di \Leftrightarrow a=b, \text{且} c=d$$

$$(2) a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$$

$$(3) |z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$(4) \bar{z}=a-bi$$

z, \bar{z} 指两复数实部相同, 虚部互为相反数 (互为共轭复数).

3. 复数运算

$$(1) \text{复数加减法: } (a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i;$$

$$(2) \text{复数的乘法: } (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i;$$

$$(3) \text{复数的除法: } \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

(类似于无理数除法的分母有理化 \rightarrow 虚数除法的分母实数化)

4. 常见的运算规律

$$(1) |z|=|\bar{z}|; \quad (2) z+\bar{z}=2a, z-\bar{z}=2bi;$$

$$(3) z \cdot \bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2=a^2+b^2; (4) \bar{\bar{z}}=z; (5) z=\bar{z} \Leftrightarrow z \in R$$

$$(6) i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i, i^{4n+4}=1;$$

$$(7) (1 \pm i)^2 = \pm i; (8) \frac{1+i}{1-i}=i, \frac{1-i}{1+i}=-i, \left(\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pm i$$

$$(9) \text{设 } \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ 是 1 的立方虚根, 则 } 1+\omega+\omega^2=0, \omega^{3n+1}=\omega, \omega^{3n+2}=\bar{\omega}, \omega^{3n+3}=1$$