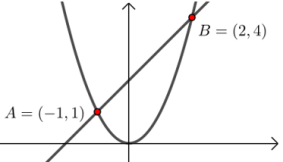
## 5.1 导数的概念及其意义



**作业知识点1 ：平均变化率**

若某个问题中的函数关系用表示，可用式子表示函数从到的平均变化率.

【例】 函数在区间上的平均速度为．它与斜率相等.

作业**知识点2：瞬时变化率**

我们把物体在某一时刻的速度称为瞬时速度.

**作业知识点3 ：导数概念**

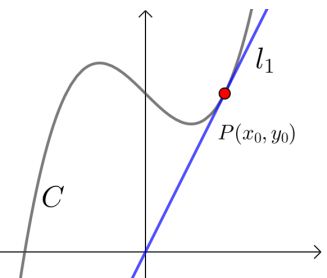
1 导数的概念

函数在处的瞬时变化率是

则称它为函数在处的导数，记作，即

2 导函数

若当变化时，是的函数，则称它为的导函数(简称导数)，记作或，即

作业**知识点4：导数的几何意义**

函数在点处的导数的几何意义是曲线处的切线的斜率，即：曲线在点处的切线的斜率，

切线的方程为．

****

**题型一： 平均变化率**

例1．（24-25高二下·四川绵阳·期末）某质点沿直线运动，位移（单位：m）与时间（单位：s）之间的关系为：，则该质点在内的平均速度是（   ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】由平均速度的定义求解即可.

【详解】由题意可得平均速度是.

故选：A

【变式1-1】（24-25高二下·河南·期末）已知函数，则从1到的平均变化率为（   ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】根据平均变化率的定义计算可得.

【详解】.

故选：C.

【变式1-2】（24-25高二下·天津静海·月考）函数在到之间的平均变化率为，在到的平均变化为，则与的大小关系是（   ）

A． B． C． D．不确定

【答案】B

【分析】根据平均变换率的公式先计算，利用作差法比较大小即可.

【详解】由题意有，，

所以，

故选：B.

**题型二：瞬时变化率的概念及辨析**

例2.1（24-25高二·全国·课堂例题）物体运动方程为（位移单位：m，时间单位：s），若，则下列说法中正确的是（   ）

A．18m/s是物体从开始到3s这段时间内的平均速度

B．18m/s是物体从3*s*到这段时间内的速度

C．18m/s是物体在3s这一时刻的瞬时速度

D．18m/s是物体从3s到这段时间内的平均速度

【答案】C

【分析】由瞬时变化率的物理意义判断．

【详解】是物体在这一时刻的瞬时速度，是物体从到这段时间内的平均速度的极限值，即是是物体在这一时刻的瞬时速度.

故选：C

例2.2（2025·甘肃白银·三模）如果质点按规律（距离单位：m，时间单位：s）运动，则质点在2s末的瞬时速度为（    ）

A．8 m/s B．7m/s C．6 m/s D．5 m/s

【答案】B

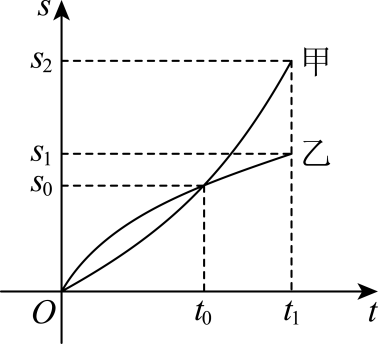
【分析】利用瞬时变化率的定义即可求得该质点在2s末的瞬时速度.

【详解】，

则质点在2s末的瞬时速度为7m/s.

故选：B

【变式2-1】（24-25高二下·北京·期中）物体甲、乙在时间0到范围内，路程的变化情况如图所示，下列说法正确的是（   ）



A．在0到范围内，甲的平均速度大于乙的平均速度

B．在0到范围内，甲的平均速度小于乙的平均速度

C．在时，甲的瞬时速度大于乙的瞬时速度

D．在时，甲的瞬时速度等于乙的瞬时速度

【答案】C

【分析】利用平均速度、瞬时速度的定义逐项判断即可.

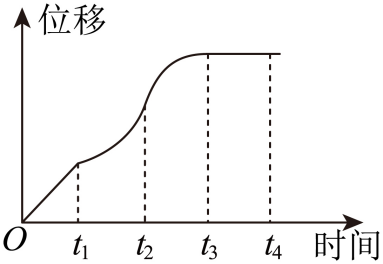
【详解】在0到范围内，甲、乙的平均速度都为，故A、B错误；

因为甲对应的曲线在处的切线的斜率大于乙对应的曲线在处的切线的斜率

故在处，甲的瞬时速度大于乙的瞬时速度，故C正确，D错误.

故选：C.

【变式2-2】（24-25高二下·北京顺义·月考）一辆汽车在笔直的公路上行驶，位移关于时间的函数图象如图所示，给出下列四个结论：



①汽车在时间段内每一时刻的瞬时速度相同；

②汽车在时间段内不断加速行驶；

③汽车在时间段内不断减速行驶；

④汽车在时刻的瞬时速度小于时刻的瞬时速度.

其中正确结论的个数有（   ）

A．1个 B．2个 C．3个 D．4个

【答案】C

【分析】根据斜率表示变化率及导数表示瞬时速度，从而由斜率的变化得出速度的变化情况，进而得出答案．

【详解】根据题意，

①在时间段内，位移是一条斜率大于零的直线，则汽车在该时间段内匀速行驶，汽车在时间段内每一时刻的瞬时速度相同，故①正确；

②在时间段内，位移是一条斜率越来越大的曲线，则汽车在该时间段内不断加速行驶，故②正确；

③在时间段内，位移是一条斜率越来越小的曲线，则汽车在该时间段内不断减速行驶，故③正确；

④汽车在时刻的瞬时速度为0，在时间段内，位移不变，则汽车在该时间段内静止不动故时刻的瞬时速度为0，故④不正确．

故选：C．

**题型三：导数的概念**

例3. 1（24-25高二·全国·课后作业）一物体的运动满足曲线方程*s*(*t*)＝4*t2*＋2*t*－3，且*s*′（5）＝42(m/s)，其实际意义是（    ）

A．物体5 s内共走过42 m

B．物体每5 s运动42 m

C．物体从开始运动到第5 s运动的平均速度是42 m/s

D．物体以*t*＝5 s时的瞬时速度运动的话，每经过1 s，物体运动的路程为42 m

【答案】D

【分析】根据瞬时速度的定义即可得出选项.

【详解】由导数的物理意义知，

*s*′（5）＝42(m/s)表示物体在*t*＝5 s时的瞬时速度．

故选：D.

例3. 2 （22-23高二·全国·随堂练习）利用导数定义求下列各函数的导数：

(1)；

(2)；

(3)

【答案】(1) (2) (3)

【分析】由导数定义直接运算即可.

【详解】（1）由题意.

（2）由题意.

（3）由题意.

【变式3-1】（24-25高二·全国·课后作业）已知函数，下列说法错误的是（    ）

A．叫函数值的改变量

B．叫函数在上的平均变化率

C．在点处的导数记为

D．在点处的导数记为

【答案】C

【分析】根据函数值的改变量、平均变化率、导数概念进行判断选择.

【详解】叫函数值的改变量,叫函数在上的平均变化率,在点 的导数应记为,不为;选C.

【点睛】本题考查函数值的改变量、平均变化率、导数概念,考查基本分析识别能力,属基础题.

【变式3-2】（21-22高二下·陕西咸阳·期中）已知函数在处的导数为，则等于（    ）

A．－2 B．－1 C．2 D．1

【答案】A

【分析】根据导数的定义，即可判断.

【详解】根据导数的定义可知.

故选：A

【变式3-3】（2025高二·全国·专题练习）利用导数的定义，求函数的导数．

【答案】

【分析】根据导数的定义，由，结合极限的运算法则，即可求解.

【详解】因为.

**题型四： 导数定义中极限的简单计算**

例4. （24-25高二下·河北张家口·月考）若函数在处可导，且，则（    ）

A． B． C．1 D．2

【答案】C

【分析】由导数的概念可解.

【详解】.

故选：C

【变式4-1】（24-25高二下·贵州安顺·期末）已知函数的导函数为，若，则（   ）

A． B． C．2 D．3

【答案】D

【分析】利用导数的定义计算进行求解.

【详解】由，

则.

故选：D.

【变式4-2】（24-25高二下·四川南充·月考）设函数在处存在导数为2，则（    ）

A．1 B．2 C． D．4

【答案】D

【分析】由导数的定义可得.

【详解】由题意可得

.

故选：D

【变式4-3】（2025高三·全国·专题练习）已知函数在处可导，则（   ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】根据导数的定义及极限的运算性质求解.

【详解】

当时，，

所以，

故选：D．

**题型五：利用定义求函数在一点处的导数**

例5. （24-25高二上·全国·课后作业）已知函数，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】根据导数的定义可求.

【详解】由导数的定义得:

．

故选：D.

【变式5-1】（22-23高二下·全国·课后作业）曲线在点处的切线的斜率为（    ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】利用导数的定义求得正确答案.

【详解】设，

故选：C

【变式5-2】（24-25高二·全国·课后作业）函数在处的导数为（    ）

A．2 B． C． D．

【答案】D

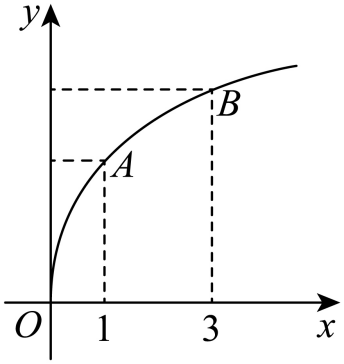
【分析】利用导数的定义即可求出结果.

【详解】，所以函数在处的导数为.

故选：D.

**题型六：对导数的几何意义的理解**

例6. （23-24高二下·广东东莞·月考）已知函数的图象如图所示，是的导函数，则下列结论正确的是（    ）



A． B．

C． D．

【答案】B

【分析】利用导数的几何意义进行求解即可.

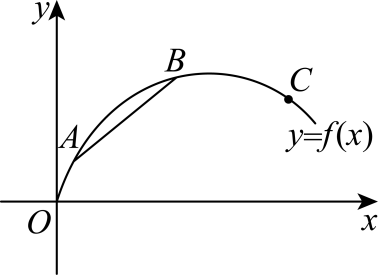
【详解】表示曲线在点处切线的斜率，表示曲线在点处切线的斜率，

表示割线的斜率，

由图可知.

故选：B

【变式6-1】（24-25高二下·上海浦东新·期末）根据图中的函数图象，下列数值最小的是（    ）



A．曲线在点处切线的斜率 B．曲线在点处切线的斜率

C．曲线在点处切线的斜率 D．割线的斜率

【答案】C

【分析】根据导数的定义及割线的定义结合函数的图象判断即可．

【详解】通过图象可知，曲线在点处、点处切线的斜率为正，在点处切线的斜率为负，割线的斜率为正，

所以最小值为曲线在点处切线的斜率.

故选：C

【变式6-2】（24-25高二下·黑龙江哈尔滨·月考）已知曲线在处的切线方程是，则与分别为（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】根据导数的几何意义分别代入计算可得结果.

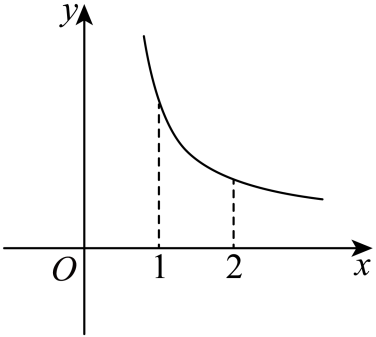
【详解】将3代入直线方程可得，

易知切线的斜率为，所以；

因此与分别为.

故选：A

【变式6-3】（23-24高二下·湖北·月考）函数的图象如图所示，则下列不等关系中正确的是（    ）

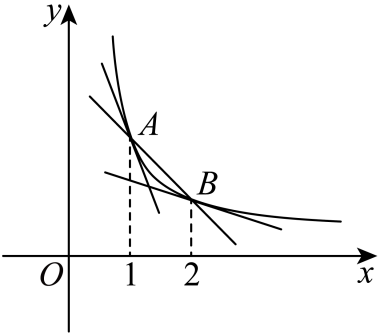


A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】根据导数的几何意义和割线的斜率可得三者之间的大小关系.

【详解】

设，由图可得，

而，

故，

故选：C.



1（24-25高二下·福建厦门·月考）如果质点*M*的运动方程是，那么在时间段内的平均速度是（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】由平均速度的定义求解即可.

【详解】由题意可得平均速度是.

故选：A

2（23-24高二下·福建厦门·期中）如果质点运动的位移（单位：m）与时间（单位：s）之间的函数关系是，那么该质点在时的瞬时速度为（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】根据瞬时变化率的定义求解即可.

【详解】，

所以.

故选：D.

3（24-25高二下·河北承德·月考）已知是定义在上的可导函数，若，则（    ）

A．0 B． C．1 D．

【答案】B

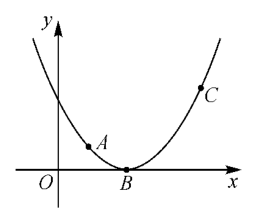
【分析】对条件变形，利用导数的定义求解出到数值.

【详解】因为，所以，

故

故选：B

4（21-22高二下·北京顺义·期末）已知函数的部分图象如图所示，其中，，为图上三个不同的点，则下列结论正确的是（    ）



A．

B．

C．

D．

【答案】B

【分析】根据导数的几何意义直接判断.

【详解】由图可知函数在点的切线斜率小于，即，

在点的切线斜率等于，即，

在点的切线斜率大于，即，

所以，

故选：B.

5（24-25高二下·江西赣州·期中）设存在导函数且满足，则曲线上的点处的切线的斜率为（    ）

A． B． C．1 D．2

【答案】A

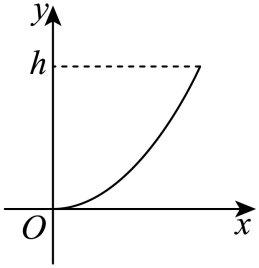
【分析】由导数的定义及几何意义即可求解.

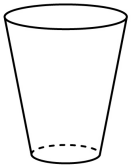
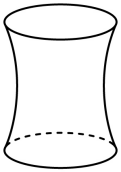
【详解】解：因为存在导函数且满足，

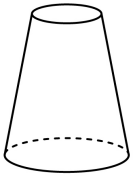
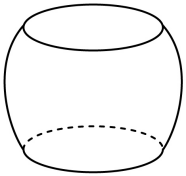
所以，即曲线上的点处的切线的斜率为，

故选：A.

6（24-25高三上·河北邢台·期末）向高为的容器中注水，且任意相等的时间间隔内所注入的水体积相等，若容器内水面的高度与注水时间的函数关系的图象如图所示，则该容器的形状可能是（   ）



A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】根据函数图象可知在相等时间间隔内容器内水面的高度增加量越来越大，结合容器形状可确定选项.

【详解】根据函数图象可知，随着注水时间的增大，在相等时间间隔内容器内水面的高度的增加量越来越大，即的变化率逐渐增大，

故该容器从下到上宽度应逐渐减小，选项C中容器符合要求.

故选：C.

7（24-25高二下·新疆博尔塔拉·期中）物体的运动方程为，则此物体在时的瞬时速度为（    ）

A．2 B．4 C．6 D．8

【答案】C

【解析】利用导数的物理意义和定义可直接求得结果.

【详解】当时，，

则，

故物体在时的瞬时速度为.

故选：.

【点睛】本题考查导数的物理意义及利用定义求解导数值的问题，属于基础题.

8（22-23高二·全国·随堂练习）利用导数定义求下列各函数的导数：

(1)；

(2)；

(3)．

【答案】(1)

(2)

(3)

【分析】由导数定义直接运算即可.

【详解】（1）由题意.

（2）由题意.

（3）由题意.

## 5.2 导数的运算



**作业知识点1 ：** **基础初等函数的导数**

基本初等函数的导数公式

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 原函数 | 导函数 | 原函数 | 导函数 |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

根据导数的定义求函数的导数，就是求出当时，无限趋近的那个定值.

下面求几个常用函数的导数.

作业**知识点2：导数运算法则**

(1)；

拓展：；

记忆：函数的和差的导数等于函数导数的和差；

(2)；

记忆：两函数积的导数等于“前导后不导后导前不导”；

特别：，为常数；

证明 ；

(3).

记忆：两函数商的导数等于“分母平分，子导母不导减母导子不导”.

**作业知识点3 ：** **复合函数的导数**

对于两个函数和，若通过变量可以表示成的函数，则称这个函数为函数和的复合函数，记作．

复合函数的导数与函数 的导数间的关系是

Eg若，设，，

则.



**题型一：基本初等函数的导数**

例1.1（24-25高二下·北京海淀·期中）下列求导运算正确的是（   ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】利用基本初等函数的导数公式可逐项判断各选项中导数运算的正误.

【详解】对于A，，故A错误；

对于B，，故错误；

对于C，，故C正确；

对于D，，故D错误.

故选：C.

例1.2（24-25高二下·北京·期中）已知函数，则（   ）

A．2 B． C． D．

【答案】C

【分析】由基本初等函数的导数公式计算可得.

【详解】由题意可得，

所以.

故选：C

【变式1-1】（22-23高二下·四川成都·期中）下列导数运算正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】根据导数公式判断各项正误即可.

【详解】由，，，，

所以A、B、D错，C对.

故选：C

【变式1-2】（24-25高二下·甘肃临夏·期末）已知，若，则（    ）

A．1 B． C． D．

【答案】B

【分析】对函数求导，根据题中条件代入计算得到答案.

【详解】，

，解得.

故选：B.

【变式1-3】（24-25高二下·河北·期末）已知函数（*α*为常数），若，则*α*的值为（    ）

A．1 B．2 C．3 D．4

【答案】C

【分析】先求得，再由列式求解即得.

【详解】因为，，

则，解得.

故选：C.

【变式1-4】（25-26高三上·辽宁·开学考试）若函数，则（   ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】根据求导公式及导数的定义求解.

【详解】由题意得，，

则．

故选：B

**题型二：导数的加减法**

例2.1 （24-25高二下·四川成都·月考）已知函数，则（    ）

A．3 B．2 C．1 D．0

【答案】C

【分析】直接求导求值即可．

【详解】，

，

，

故选：C．

【变式2-1】（23-24高二下·天津·期中）已知函数，则（    ）

A． B．0 C．1 D．

【答案】D

【分析】求导，再令即可得解.

【详解】，

所以.

故选：D.

【变式2-2】（24-25高二下·黑龙江·期中）若曲线在处的切线的斜率为（   ）

A．2 B． C．1 D．

【答案】C

【分析】先对给定的函数求导，然后将带入即可.

【详解】由题意得，则，由导数的几何意义可知切线的斜率为，

故选：.

【变式2-3】（24-25高二下·河南·期中）若物体的运动方程是，时物体的瞬时速度是（   ）

A．12 B．14 C．16 D．18

【答案】C

【分析】直接求导计算即可.

【详解】，，

则其时物体的瞬时速度是16.

故选：C.

**题型三：导数的乘法**

例3. （24-25高二下·广西北海·期末）已知函数，则的值为（   ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】求出，代值计算可得的值.

【详解】由题意知，，所以，

故选：D．

【变式3-1】（24-25高二下·河北邢台·月考）函数的导函数为（   ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【分析】根据积的导数的运算法则求导函数.

【详解】因为，

所以 .

故选：D

【变式3-2】（24-25高二下·北京丰台·期末）已知函数，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】根据求导的乘法公式，求导后直接代入求值即可.

【详解】，

所以.

故选：C.

【变式3-3】（24-25高二下·陕西西安·月考）已知，其导函数为，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】求出的表达式，在、的表达式中，分别令，可得出关于、的值，得出结果.

【详解】因为，

所以，

又因为，

所以，则.

故选：D.

**题型四：导数的除法**

例4. （24-25高二下·天津武清·月考）已知函数为的导函数，则的值为（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】求出导函数，将*x*=1代入即可得解.

【详解】因函数，则，

于是得.

故选：B

【变式4-1】（22-23高二上·陕西商洛·月考）下列求导运算正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】根据题意，由导数的四则运算代入计算，即可判断.

【详解】，故A正确；

，故B错误；

，故C错误；

，故D错误；

故选：A

【变式4-2】（24-25高二下·广西河池·月考）已知函数，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】求出，代值计算可得出的值.

【详解】因为，则，故.

故选：B.

【变式4-3】（25-26高二上·全国·单元测试）已知函数，则（    ）

A． B． C．0 D．0或

【答案】D

【分析】求出函数的导数，再列式求解.

【详解】函数，求导得，

则，解得或．

故选：D

**题型五：简单复合函数的导数**

例5. （22-23高二·全国·课堂例题）求下列函数的导数：

(1)；

(2)；

(3)．

【答案】(1)

(2)

(3)

【分析】（1）（2）（3）根据复合函数求导法则和初等函数导数公式求导可得.

【详解】（1）函数可以看作与复合而成，

根据复合函数求导法则有．

（2）函数可以看作与复合而成，

根据复合函数求导法则有．

（3）函数可以看作与复合而成，

根据复合函数求导法则有.

【变式5-1】（24-25高二下·湖北武汉·月考）下列求导运算结果正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】根据复合函数求导法则对选项ABC逐一判断即可知AB错误，C正确，再结合除法运算法则可得D错误.

【详解】对于A，易知，即A错误；

对于B，，即B错误；

对于C，，可得C正确；

对于D，，即D错误.

故选：C

【变式5-2】（24-25高二下·海南·月考）已知函数，若，则实数（    ）

A． B．0 C．1 D．2

【答案】D

【分析】根据复合函数求导原则，结合代入法进行求解即可.

【详解】.

故选：D

【变式5-3】（24-25高二下·山东聊城·期末）一个弹簧振子做简谐运动，其位移*y*（单位：cm）与时间*t*（单位：s）之间的关系为，该弹簧振子在时的瞬时速度为（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】根据瞬时速度即位移*y*的导数，先求出导函数，再代值计算即可.

【详解】由求导得，

依题意该弹簧振子在时的瞬时速度为：

.

故选：A.

**题型六：求在曲线上一点处的切线方程（或斜率）**

例6. （2025·湖南长沙·模拟预测）函数的图象在处的切线对应的倾斜角为，则sin2=（    ）

A． B．± C． D．±

【答案】C

【分析】先求导，通过导数的几何意义得到函数在处的切线斜率，再利用同角三角函数的关系得到sin2的值．

【详解】因为

所以

当时，，此时，

∴．

故选：C.

【变式6-1】（23-24高二下·山东枣庄·期中）曲线在处的切线斜率为（   ）

A．0 B． C． D．

【答案】D

【分析】由导函数的几何意义得，曲线在某点处的导函数值即是在该点处的切线斜率，进而可求解.

【详解】因为，所以，

将代入可得切线斜率为.

故选：D.

【变式6-2】（23-24高二下·河北保定·期中）曲线在处的切线倾斜角是（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】由导数的意义求出切线的斜率，再结合斜率与倾斜角的关系得到倾斜角的大小即可.

【详解】设曲线在处的切线倾斜角为，

因为，则.

所以曲线在处的切线倾斜角是，

故选：D.

【变式6-3】（25-26高三上·河北·月考）设函数，则曲线在点处的切线方程为（   ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】求出，利用导数的公式求出，从而求出，利用点斜式得到在点处的切线方程.

【详解】，

，

，

，

曲线在点处的切线方程为，

即.

故选：A.

**题型七：求过一点的切线方程**

例7. （24-25高三上·河北承德·开学考试）过点可作曲线的切线条数为（    ）

A．1 B．2 C．3 D．0

【答案】B

【分析】根据导数的几何意义，结合该点是不是切点分类讨论进行求解即可.

【详解】由，

当点是切点时，此时切线的斜率为，此时有一条切线；

当点不是切点时，设切点为，则切线的斜率为，

切线方程为：，该切线过点，

于是有

或（舍去），

综上所述：过点可作曲线的切线条数为，

故选：B

【变式7-1】（2025·江西景德镇·一模）过点且与曲线相切的直线方程是（   ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】根据导数几何意义以及斜率公式，计算可得切点坐标，即可求得切线方程.

【详解】，点不在曲线上，

设切点为，则，

解得：，得切点，则

切线方程为：，

故选：．

**题型八：已知切线（或斜率）求参数**

例8. （25-26高三上·重庆·月考）已知直线与函数的图象相切，则实数（    ）

A．4 B．3 C．2 D．-5

【答案】A

【分析】利用导数来求出斜率，通过切线斜率来求切点坐标，再代入切线方程，即可求参数值.

【详解】由切线斜率，则，解得：或(舍去)，

因为，所以切点坐标为，代入切线方程得：，

故选：A.

【变式8-1】（25-26高三上·山东聊城·期中）已知函数在点处的切线方程为，则（    ）

A． B． C．1 D．2

【答案】A

【分析】对函数求导，根据导数的几何意义结合切线方程求出结果即可.

【详解】对函数求导得，

因为函数在点处的切线方程为，

所以有，解得.

所以.

故选：A.

【变式8-2】（24-25高二下·浙江台州·期末）已知直线与曲线相切，则实数的值为（    ）

A． B． C．1 D．2

【答案】C

【分析】设切点为，再根据切点在曲线与切线上，以及导数的几何意义可得，最后根据函数的单调性以及即可得解.

【详解】因为，

所以，

设直线与曲线的切点为，

所以，

所以，且，

令函数，，

因为，

所以函数在单调递减，在单调递增，

又因为，

所以，

所以.

故选：C.

【变式8-3】（23-24高二上·江苏连云港·期末）已知曲线存在过坐标原点的切线，则实数的取值范围是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】B

【分析】设出切点横坐标，利用导数的几何意义求得切线方程，根据切线经过原点得到关于的方程，根据此方程应有实数根，求得的取值范围.

【详解】∵，

∴，

设切点为，则，切线斜率，

∴切线方程为，

∵切线过原点，

∴，整理得：

∵存在过坐标原点的切线，

∴，解得或，

∴实数的取值范围是.

故选：B.

**题型九：两条切线平行或垂直问题**

例9. （25-26高二上·重庆沙坪坝·期中）已知曲线在点处的切线与直线垂直，则的值为（   ）

A．3 B． C． D．

【答案】D

【分析】利用导数的几何意义即可求解．

【详解】，

又因为曲线在点处的切线与直线垂直，

所以切线斜率，解得．

故选：D．

【变式9-1】（24-25高二下·山西·期中）设的导函数为，曲线在点处的切线与直线垂直，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】根据题意，得到曲线在点处的切线的斜率为，进而得到的值，得到答案.

【详解】曲线在点处的切线与直线垂直，

可得曲线在点处的切线的斜率为，所以．

故选：C.

【变式9-2】（24-25高二下·广东潮州·月考）已知曲线在点处的切线与直线平行，则点的坐标为（    ）

A． B． C．或 D．以上都不对

【答案】C

【分析】根据的导函数为，又由其过*P*点的切线与直线平行性可知，求得切点*P*的横坐标，代回曲线方程求得的值，可得答案.

【详解】解：由题意可知：函数的导函数为

过*P*点的切线与直线平行

，解得

当时，，此时切线方程为，即；

当时，，此时切线方程为，即.

所以点*P*的坐标是（2，14）或（-2，-14）

故选:C

【变式9-3】（2024高三·全国·专题练习）若曲线在与处的切线互相垂直，且交点在直线上，则的值可能是（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】根据题意，可得，利用正弦函数的值域分析推得中必有一个为1，另一个为，由此可求得，，即得，结合图象，可得等腰直角三角形，从而得到，对取值即可判断.

【详解】因，故,易知切线的斜率存在．

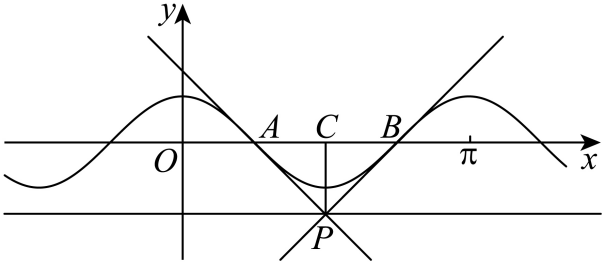
因曲线在与处的切线互相垂直，

则．因,

不妨设，，

则，，

此时,．



如图，设，，，

则是以为直角顶点的等腰直角三角形（切线的斜率为1，切线的斜率为）．

由图知，，

易得．

取，得．经检验,当时,无法使的值取到,和.

故选:C．

**题型十：公切线问题**

例10. （25-26高三上·陕西西安·月考）若直线是曲线的切线，也是曲线的切线，则（    ）

A． B．2 C． D．2

【答案】B

【分析】设出两个切点的横坐标，根据公切线可得关于切点横坐标的方程组，求出其解后可得直线的斜率.

【详解】设，则.

设直线与曲线相切时切点的横坐标为，

与曲线相切时切点的横坐标为，

则,故，解得，

故直线的斜率，

故选：B.

【变式10-1】（2025·山东聊城·模拟预测）若曲线在处的切线与曲线（为常数）相切，则（   ）

A．3 B．0 C．2 D．1

【答案】C

【分析】根据导数的几何意义，求得切线方程为，设切线与曲线相切的切点为，得到，求得的值，进而得到答案.

【详解】由函数，可得，所以且，

所以曲线在点处的切线方程为，

又由，可得，

设切线与曲线相切的切点为，则，

解得，所以，解得.

故选：C.

【变式10-2】（2025·甘肃·二模）已知函数，，若经过点存在一条直线与图象和图象都相切，则（    ）

A．0 B． C．3 D．或3

【答案】D

【分析】先求得在处的切线方程，然后与联立，由求解.

【详解】因为，

所以，

则，

所以

所以函数在处的切线方程为，

由得，

由，解得或，

故选：D

【变式10-3】（24-25高二下·江苏盐城·期末）已知直线为曲线与的公共切线，则直线的方程可以为（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】利用导数求出两条曲线的切线方程，再利用公共切线可解出切点，进而求得切线的方程.

【详解】设直线与曲线的切点坐标为，直线与曲线的切点坐标为，

直线方程为，

，，直线的方程为，

又，直线的方程化简为，

，，直线的方程为，

又，直线的方程化简为，

直线为曲线与的公共切线，

①，②，

由①得，两边取对数得，，，

代入②中得，，即，

解得或，

当时，，，直线的方程为；

当时，，，直线的方程为；

根据选项可知直线的方程可以为.

故选：C.



1（24-25高二下·四川凉山·期中）下列函数的求导正确的是（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】根据导数的计算公式与求导法则计算即得．

【详解】对于A，，故A错误；

对于B，，故B正确；

对于C，，故C错误；

对于D，，故D错误；

故选：B．

2（22-23高二上·陕西商洛·月考）下列求导运算正确的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】根据题意，由导数的四则运算代入计算，即可判断.

【详解】，故A正确；

，故B错误；

，故C错误；

，故D错误；

故选：A

3（24-25高二下·北京房山·月考）已知函数，且，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】求导后，代入即可构造方程求得结果.

【详解】，，解得：.

故选：B.

4（24-25高三下·海南省直辖县级单位·月考）曲线在处的切线的倾斜角为，则（    ）

A．- B． C．1 D．-1

【答案】A

【分析】利用导数的几何意义求得切线的斜率，求得其倾斜角，即可求解.

【详解】由题意，函数，可得，

则，即曲线在处的切线的斜率为，即，

因为，所以，所以.

故选：A.

5（24-25高二下·湖南·月考）已知函数在点处的切线与直线垂直，则（    ）

A．－2 B．－1 C．2 D．3

【答案】B

【分析】求出的导数，可得切线的斜率，由两直线垂直的条件：斜率之积为−1，解方程即可得到所求值.

【详解】函数的导数为，

∴，即函数在处的切线斜率为，

由切线与直线垂直，

可得，

解得.

故选：B.

6（25-26高三上·山西大同·期中）已知曲线在点处的切线与曲线相切，则（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】先求得曲线在点处的切线，再根据直线与抛物线相切求解即可.

【详解】由得，当时，，

所以曲线在点处的切线方程为，即，

由，得，

所以，解得.

故选：D.

7（24-25高三上·北京·期末）已知函数，若，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】求出抛物线与直线相切时的斜率，由数形结合得解.

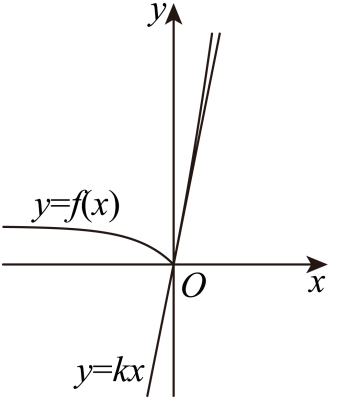
【详解】设直线与相切于点，

由，则，

所以切线方程为，又切线过，

所以，解得，

所以，作出及切线的图象，如图，



由图象可知，当时，成立.

故选：D

8(多选)（25-26高二·全国·假期作业）（多选）曲线在点处的切线平行于直线，则切线方程为（   ）

A． B．

C． D．

【答案】AB

【分析】设切点坐标，利用导数求出切线斜率建立方程求出切点，即可得出切线方程.

【详解】设切点，

由知，

所以切线斜率，解得，

故或，

所以切线方程为或，

即切线方程为或.

故选：AB

9（25-26高三上·安徽芜湖·月考）若直线与函数的图象相切，则 ．

【答案】

【分析】设出切点坐标，求导函数，结合切线斜率，利用直线与曲线相切，从而可得切点坐标，代入，可求得的值．

【详解】设直线与函数图象的切点为，

，

，

，，

，

，又在直线上，

，．

故答案为：．

10（24-25高二下·海南省直辖县级单位·月考）求下列函数的导函数

(1)

(2)；

(3)

(4)

【答案】(1)

(2)

(3)

(4)

【分析】（1）利用幂函数与指数函数的求导法则求导即得；

（2）利用乘法的求导法则求导即得；

（3）利用除法的求导法则求导即得；

（3）利用复合函数的求导法则求导即得.

【详解】（1）

（2）因为，

所以；

（3）因为，

所以 ；

（4）因为，

所以 .

11（25-26高三上·江西·期中）已知函数，且的图象过点.

(1)求函数的解析式；

(2)过原点作曲线的两条切线，切点分别为.

①求切线的方程；

②求的面积.

【答案】(1)

(2)①；②

【分析】（1）将所给点代入函数解析式，解得即得；

（2）①先求出时，过原点的曲线的切线方程，再根据是偶函数，由对称性求得另一条切线；

②求得切点坐标，根据形状利用面积公式求解.

【详解】（1）由已知得，即，

所以.

故.

（2）①当时，.

不妨设切点.

所以.故切线的方程为.

因为过原点，故，解得.

所以切线的方程为.

又为偶函数，其图象关于轴对称，

故切线的方程为.

所以切线的方程为.

②由①可知，，由对称性可知，

为等腰三角形，其面积为

12（25-26高二上·上海·期中）若函数和图象有公共点，且各自在点的切线和重合，则称重合的切线为两函数在点处的公切线．

(1)分别求和在交点处的切线方程；

(2)若和在点处存在公切线，求的值及点的坐标．

【答案】(1)；；

(2)；.

【分析】（1）根据导数的几何意义直接求切线方程可得；

（2）根据公切线的定义可求得公切点，进而可得所求结果.

【详解】（1）联立，解得或（舍去），所以交点坐标为．

对求导，可得，将代入，得切线斜率．

切线方程，即.

对求导，，将，得切线斜率．

切线方程，即.

所以交点处的切线方程为，.

（2）设公切点．

对求导，根据求导公式，可得，则在点处的切线斜率．

对求导，可得，则在点处的切线斜率.

因为两函数在点处存在公切线，所以，即①．

又因为点在两函数图象上，所以②．

由①得，将其代入②可得：，即，解得.

将代入（1）得：，解得.

将代入得.

所以，点的坐标为．

## 5.3.1 导数与函数的单调性



**知识点1：函数单调性与导数**

在某个区间内，若 ，则函数在这个区间内单调递增；

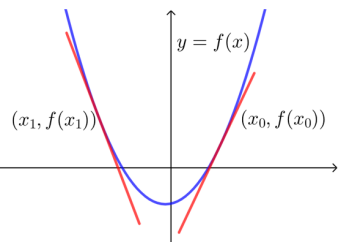
若，则函数在这个区间内单调递减．

**解释**

(1) 如下图，导数表示函数的图象在点处的切线的斜率，可发现，

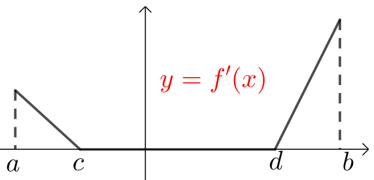
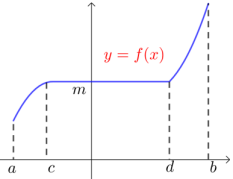
在处，，切线是“左下右上”的上升式，函数的图象也是上升的，函数在附近单调递增；

在处，，切线是“左上右下”的下降式，函数的图象也是下降的，函数在附近单调递减.



(2) 若函数在某个区间内单调递增，则(含等号)恒成立，但不存在一区间内使得；

假如存在一区间内使得，那原函数在区间内恒等于一个常数，即是个常数，则原函数不可能在内单调递增.

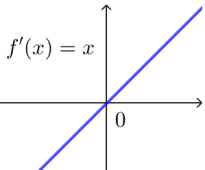
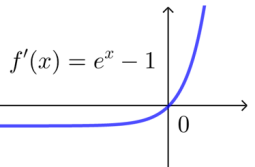
 

函数在某个区间内单调递减有类似结论！

(3)导函数“穿线图”与原函数“趋势图”

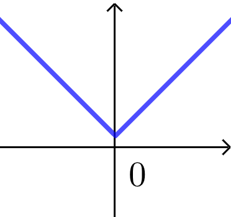
① 导函数“穿线图”关注导函数在各区间的正负，故特别注意函数与轴的交点情况，

如与的“穿线图”视为一样的，它们在上为负，在上为正.

② 原函数“趋势图”仅关注函数在各区间上的单调性，没顾及其最值或曲线形状等，

如由导函数的“穿线图”易得原函数在上递减，在上为递增，趋势图可如下图，



③ 后面涉及到函数单调性均可通过分析导函数“穿线图”得出原函数的单调性.



（24-25高二·全国·课后作业）函数的单调减区间是 .

【答案】(*a*，*a*+1)

【分析】求出函数*f*(*x*)的导数，再求出不等式的解集即可.

【详解】依题意，函数*f*(*x*)的定义域为**R**，，

由解得*a*<*x*<*a*+1，即*f*(*x*)在(*a*，*a*+1)上单调递减，

所以*f*(*x*)的单调减区间是(*a*，*a*＋1).

故答案为：(*a*，*a*＋1)

作业**知识点2：函数增长快慢**

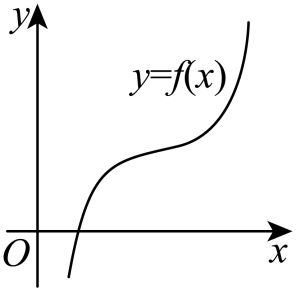
一般地，如果一个函数在某一范围内导数的绝对值较大，那么函数在这个范围内变化得较快，这时函数的图象就比较“陡峭”(向上或向下)；反之，函数在这个范围内变化得较慢，函数的图象就比较“平缓”.

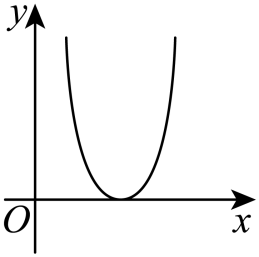
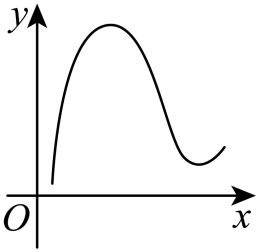
【例】

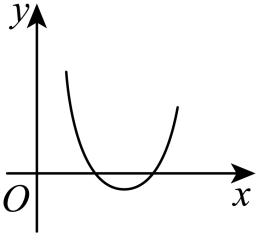
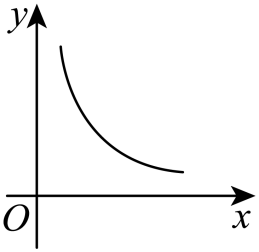
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 对数函数 | 幂函数 | 指数函数 |
| 导数 |  |  |  |
| 导数绝对值变化 | 在上较大，  在上较小 | 在原点附近较小，  离原点越远越大 | 在上较大，  在上较小 |
| 图象变化 | 在上陡峭，  在上平缓 | 在原点附近平缓，  离原点越远越陡峭 | 在上陡峭，  在上平缓 |
| 图象 |  |  |  |



（2025高三·全国·专题练习）（24-25高二下·广东佛山·期末）已知函数的图象如图所示，则其导函数的图象大致形状为（ ）



A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】利用先单调递增的速度由快到慢，再由慢到快，结合导数的几何意义判断即可.

【详解】由的图象可知，函数先单调递增的速度由快到慢，再由慢到快，

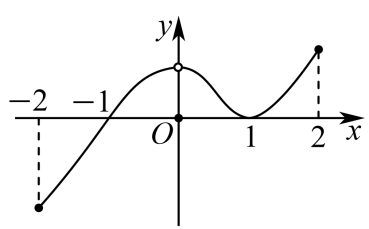
由导数的几何意义可知，先减后增，且恒大于0，故符合题意的只有选项A.

故选：A.



**题型一：****导函数的“穿线图”与原函数的“趋势图”**

例1．（25-26高三上·辽宁·开学考试）已知连续函数的导函数为，如图是函数在上的图象，则（    ）



A．在上单调递减 B．在上单调递减

C．在上单调递增 D．在上单调递增

【答案】A

【分析】结合图象确定导函数在区间，，，上的正负，结合导数与单调性的关系判断结论.

【详解】由图象可得当时，，

此时，函数在上单调递增，

当时，，

此时，函数在上单调递减，

当时，，

此时，函数在上单调递增，

当时，，

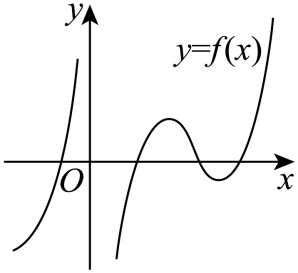
此时，函数在上单调递增，

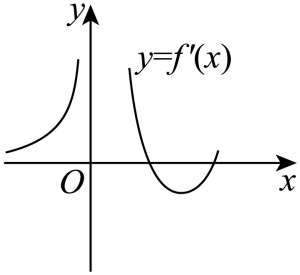
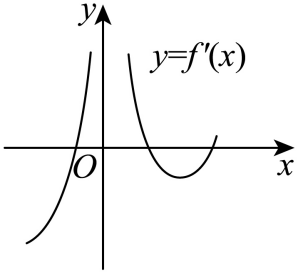
又，，为连续函数，

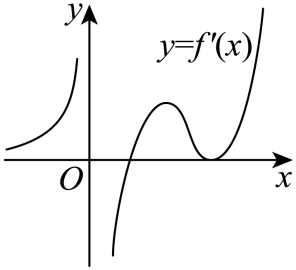
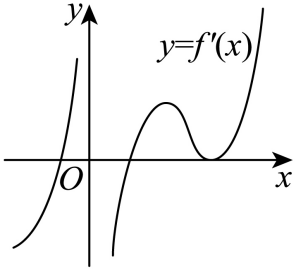
故BCD都错误，A正确.

故选：A.

【变式1-1】（24-25高二上·甘肃平凉·期末）设函数可导，的图象如图所示，则导函数图象可能为（    ）



A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】根据图象的单调性与导函数的符号之间的关系逐项分析判断.

【详解】由图象知，，的图象为增函数，则，

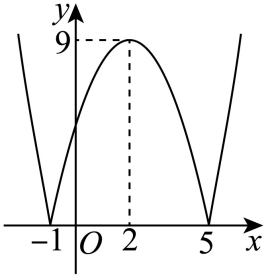
故排除B，D.

当时，的图象先增，后减，再增，

所以的图象先正，后负，再正，所以A正确，C错误.

故选：A

【变式1-2】（24-25高二下·江西景德镇·期末）已知函数的图象如图所示，则不等式的解集为（    ）



A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】由函数图象得出和的解，然后用分类讨论思想求得结论．

【详解】由函数的图象可得的解集为，的解集为，

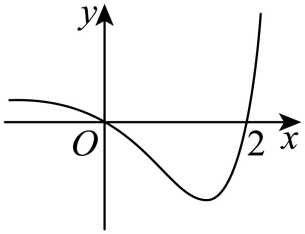
等价于或，

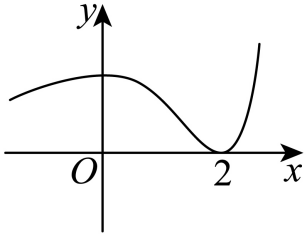
所以或，

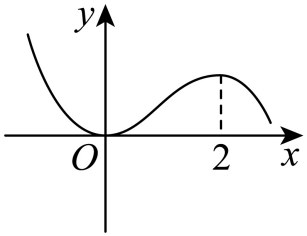
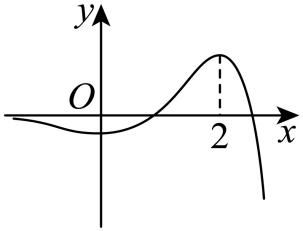
所以不等式的解集为.

故选：A.

【变式1-3】（24-25高二下·广东江门·期中）已知下列四个图象之一是函数在某区间的图象，且的导函数在该区间的图象如图所示，则在该区间的图象是（    ）



A．  B． 

C．  D． 

【答案】B

【分析】由的图象得到的单调性，即可判断C、D，再由导数的几何意义及的图象排除A.

【详解】不妨设在区间（，可为，也可为）内的图象，

由的图象可知，当或时，当时，

所以在，上单调递增，在上单调递减，故排除C、D；

又在上单调递减，则在上切线的斜率逐渐减小，

且由的图象可知当时趋近于一个常数（正数），

所以的切线斜率不趋近于，故排除A.

故选：B

**题型二：求不含参函数的单调性**

例2. 1（24-25高二下·福建莆田·期末）函数的单调递减区间为（   ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】求导，即可求解.

【详解】由，得，

令，解得，

所以函数的单调递减区间为.

故选：B.

例2. 2（25-26高三上·湖南永州·开学考试）函数在下列区间上单调递增的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】B

【分析】先求出，再分析各项中的的符号，进而即可得到答案．

【详解】由，则，

对于选项A，当时，，此时，

当时，，此时，

所以该函数在区间上单调递减，在区间上单调递增，

所以该函数在区间上不是单调递增，故A错误；

对于选项B，当时，，此时，

所以该函数在区间上单调递增，故B正确；

对于选项C，当时，，此时，

当时，，此时，

所以该函数在区间上单调递增，在区间上单调递减，

所以该函数在区间上不是单调递增，故C错误；

对于选项D，当时，，此时，

所以该函数在区间上单调递减，故D错误．

故选：B．

【变式2-1】（24-25高二下·福建泉州·月考）函数的单调减区间为（   ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】求导，令导数小于零求解．

【详解】函数的定义域为，

，

由得，所以的单调减区间为.

故选：D.

【变式2-2】（25-26高三上·吉林长春·月考）设函数的导函数为，且，则的单调递减区间为（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】由求，解不等式求单调区间.

【详解】定义域为，，

所以，解得，

所以，，

由解得，

所以的单调递减区间为.

故选：A.

【变式2-3】（25-26高三上·湖南·期中）已知函数.

(1)判断的奇偶性，并说明理由；

(2)求曲线在原点处的切线方程；

(3)求的单调区间.

【答案】(1)奇函数，理由见解析

(2)

(3)在，且上单调递减，在，且上单调递增.

【分析】（1）根据奇函数的定义判断即可；

（2）利用导数求出切线斜率即可得解；

（3）根据导数及正弦函数的性质解不等式即可求出单调区间.

【详解】（1）是奇函数.

理由如下：

的定义域为.

，所以是奇函数.

（2）.

.

故曲线在原点处的切线方程为.

（3）当时，令，解得.

令，解得.

当时，令，解得，且.

令，解得，且.

故在，且上单调递减，在，且上单调递增.

**题型三：由函数单调区间求参数**

例3. （24-25高二下·广东深圳·期末）已知函数在**R**上单调递增，则的最小值为（    ）

A． B． C． D．1

【答案】A

【分析】利用恒成立，讨论分析得到、的关系式，化简带入，把得到的函数构造为，求导得到最小值点，从而得出答案.

【详解】由题意，函数的定义域为，导函数为，

因为函数在上单调递增，所以在上恒成立，

若，则时矛盾，

所以，与同号，

所以，即，故，

令，则，

令，则；令，则，

所以在上单调递减，在上单调递增，

所以的最小值为．

故选：A

【变式3-1】（2025·四川泸州·一模）若函数在单调递减，则的取值范围是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】先对函数求导，根据导数的函数性质结合零点取值得出已知条件恒成立时需满足的条件，再讨论的符号得出的取值范围．

【详解】函数，求导得，

当时，，在**R**上单调递增，不合题意；

令，解得或，

若函数在单调递减，则在恒成立，

当时，，，

当时，，，

的取值范围为.

故选：C．

【变式3-2】（24-25高二下·湖南岳阳·期末）已知函数在上不是单调函数，则实数*a*的取值范围是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】先讨论得出的单调区间，然后根据已知列出不等式，求解即可得出答案.

【详解】由已知可得，定义域为，.

若，则恒成立，则在上单调递增，与已知不符，舍去；

当时，由可知，或（舍去）.

当时，有，所以在上单调递减；

当时，有，所以在上单调递增.

由已知函数在上不是单调函数，

所以应有，所以.

故选：A.

【变式3-3】（25-26高三上·四川·开学考试）已知函数在上单调递增，则的最大值为（    ）

A．0 B．3 C．6 D．8

【答案】C

【分析】根据条件，利用分函数的单调性及导数与函数单调性间的关系，即可求解.

【详解】因为函数在上单调递增，

当时，，对称轴为，则，

当时，，则，

要使函数在区间上单调递增，则在区间上恒成立，得到.

又因为，即，

综上所述，，，所以

则的最大值为6，

故选：C.

**题型四：求含参函数的单调性之一次函数型**

例4. （24-25高二下·天津红桥·月考）已知

(1)若 求在处的切线的斜率;

(2)讨论的单调性;

【答案】(1)

(2)答案见详解

【分析】（1）利用导数的几何意义求出切线的斜率即可.

（2）求导，分和讨论，求出单调性即可.

【详解】（1）当时，，则，

所以所求切线的斜率为.

（2）由，，则，

当时，，即在上单调递增，

当时，，

由，得，由，得，

所以在上单调递增，在上单调递减，

综上，当时，在上单调递增；

当时，在上单调递增，在上单调递减.

【变式4-1】（2025高三·全国·专题练习）若对于，不等式恒成立，则参数*a*的取值范围为 ．

【答案】

【分析】令，求得，分、和，三种情况，结合，即可求解.

【详解】令，可得，

若时，，单调递减，

又由，所以当时，可得，不符合题意，舍去；

若时，令，可得，

当时，，单调递减；

当时，，单调递增；

又由，所以存在，使得，不符合题意，舍去；

若时，令，可得，

当时，，单调递增，且，

所以当时，恒成立，符合题意，

所以实数的取值范围为．

故答案为：．

【变式4-2】（24-25高二下·全国·随堂练习）已知函数，讨论的单调性.

【答案】答案见解析

【分析】对进行分类讨论，结合导函数的正负与函数单调性的关系即可得解.

【详解】因为，，

所以，

若，则恒成立，此时在上单调递增；

若，令，得，易得时，，时，，

此时在上单调递增，在上单调递减，

综上所述：当时，在上单调递增；

当时，在上单调递增，在上单调递减.

**题型五：求含参函数的单调性之二次函数型**

例5. （23-24高二下·福建厦门·月考）已知函数.

(1)讨论的单调性.

(2)求证：若，有且仅有一个零点.

【答案】(1)答案见解析

(2)答案见解析

【分析】（1）先确定定义域，对求导，利用导数与函数单调性间的关系，对进行讨论，即可求出结果；

（2）利用（1）中结果，再利用零点存在性原理，即可得出结果.

【详解】（1）函数的定义域为，

，

令，解得或，

若，则当时，当时，，

所以在上单调递增，在上单调递减；

若，则当或时，，当时，，

所以在和上单调递减，在上单调递增；

若，则恒成立，所以在上单调递减；

若，则当时，，当或时，，

所以在和上单调递减，在上单调递增；

综上所述：当时，在上单调递增，在上单调递减；

当时，在和上单调递减，在上单调递增；

当时，在上单调递减；

当时，在和上单调递减，在上单调递增；

（2）由（1）可知当时，在上单调递减，

又，，

因此存在唯一使，则有且仅有一个零点；

当时，函数在处取得极小值，

令，求导得，

当时，，当时，，

函数在上单调递减，在上单调递增，

，即，，

当时，，，则，

因此存在唯一使，则有且仅有一个零点；

当时，函数在处取得极小值，

，

同理存在唯一使，则有且仅有一个零点；

所以有且仅有一个零点.

【变式5-1】（24-25高二下·河北张家口·月考）若函数恰好有三个单调区间，则实数的取值范围是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】通过求导，再依据和分类讨论求其单调区间即可.

【详解】，则，

，

当，即时，，则在上单调递增，不满足题意，舍；

当，即或时，的两根为，且，

则得或；得，

则 在和上单调递增，在上单调递减，

则恰好有三个单调区间，满足题意，故实数的取值范围是.

故选：C.

【变式5-2】（24-25高二下·全国·课后作业）设函数，其中．讨论的单调性．

【答案】答案见解析

【分析】求导得导数的两个零点为或，对分类讨论即可求解.

【详解】的定义域是，

若，，函数在上单调递增，

当时，，

令，解得或，

若，则当时，，当时，，

所以在上单调递减，在上单调递增；

若，则当时，，当时，，

所以在上单调递减，在上单调递增．

综上所述，当时，在上单调递增；

当时，在上单调递减，在上单调递增；

当时，在上单调递减，在上单调递增．

【变式5-3】（2025高二·全国·专题练习）已知函数，.讨论函数的单调性.

【答案】答案见解析

【分析】对求导，然后分和两种情况讨论即可；

【详解】函数的定义域为，

所以.

当时，，所以在上单调递增；

当时，令得，令得，

所以在上单调递减：在上单调递增.

综上，当时，函数在上单调递增；当时，在上单调递减，在上单调递增.

**题型六： 求含参函数的单调性之指数函数型**

例6. （24-25高二下·天津河东·月考）设函数，．

(1)若，求曲线在处的切线方程；

(2)求函数的单调区间．

【答案】(1)

(2)答案见解析

【分析】（1）由可求出的值，再利用导数的几何意义可求出所求切线的方程；

（2）求得，对实数的取值进行分类讨论，分析导数的符号变化，由此可得出函数的增区间和减区间.

【详解】（1）因为，则，解得，故，

所以，所以，

此时，曲线在处的切线方程为，即.

（2）因为，则，

当时，则，

即函数的单调递减区间为，没有单调递增区间；

当时，由可得，由可得.

此时，函数的单调递减区间为，单调递增区间为.

综上所述，当时，函数的单调递减区间为，无单调递增区间；

当时，函数的单调递减区间为，单调递增区间为.

【变式6-1】讨论函数的单调性；

【答案】答案见解析

【分析】对函数进行求导，参数进行分类讨论，再利用函数的单调性与导数的关系即得；

【详解】 由题意得，，

①当时，，函数在上单调递增；

②当时，令，解得，

，解得，

所以函数在上单调递增，在上单调递减；

综上，当时，函数在上单调递增；

当时，函数在上单调递减，

在上单调递增.

【变式6-2】（24-25高二·全国·课后作业）已知函数，讨论的单调性．

【答案】答案见解析

【分析】就分类讨论导数的符号后可得函数的单调区间.

【详解】的定义域为，，

若，则恒成立，故在上为减函数；

若，则当时，，当时，，

故在上为增函数，在上为减函数，

综上，当时，在上为减函数；

当时，在上为增函数，在上为减函数．

【变式6-3】（2024高二下·全国·专题练习）已知函数．

(1)若曲线在点处的切线的斜率为，求的值；

(2)若，讨论函数的单调性；

【答案】(1)

(2)答案见解析.

【分析】（1）求导，可得结果；

（2），讨论，，，根据导数正负判断单调性．

【详解】（1）

．

（2）由题，

由于，的解为．

①当，即时，，则在上单调递增；

②当，即时，

在区间，上，，在区间上，，

所以在，上单调递增；在上单调递减；

③当，即时，在区间，上，，

在区间上，，

所以在，上单调递增；在上单调递减．

故当时，在上单调递增；

当时，在，上单调递增；在上单调递减；

当时，在，上单调递增；在上单调递减．

**题型七：求含参函数的单调性之对数函数型**

例7. （24-25高二·江苏·课后作业）已知函数，其中．讨论的单调性；

【答案】在上单调递减，在上单调递增

【分析】根据函数求出函数的定义域，然后对函数求导，利用导数的正负来讨论函数的单调性即可求解.

【详解】函数的定义域为，．

当时，由于在上单调递增，所以至多有一解；

又，则当时，；当时，；

所以在上单调递减，在上单调递增．

【变式7-1】（2025高二·全国·专题练习）函数的单调增区间为（   ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】根据函数的导数大于0可得增区间.

【详解】因为，.

则，

由，解得，此时单调递增.

故选：B

【变式7-2】（2025高三·全国·专题练习）已知函数，讨论的单调性；

【答案】在上单调递减，在上单调递增

【分析】求出函数的导数，讨论其导数的正负，即可判断函数的单调性.

【详解】函数的定义域为，．

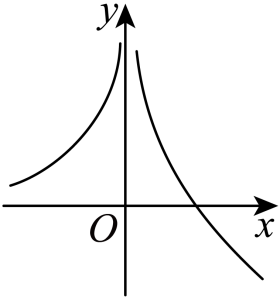
令，解得，

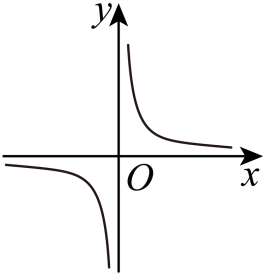
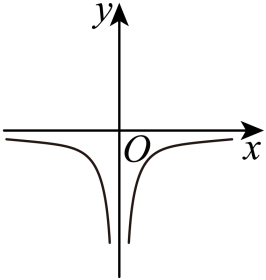
则有当时，；当时，；

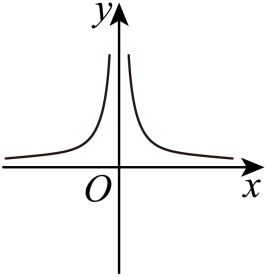
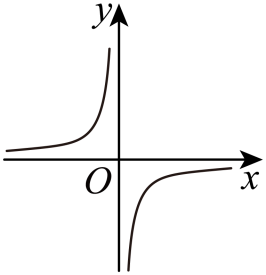
所以在上单调递减，在上单调递增．



1（2025·江西新余·模拟预测）函数的图象如图所示，则的图象可能是（   ）



A．   B．

C．   D．

【答案】D

【分析】根据导数于原函数单调性的关系进行判断.

【详解】当时，曲线的切线斜率大于0且越来越大，当时，曲线的切线斜率小于0且越来越大.

故选：D

2（2026高三·全国·专题练习）函数的递增区间是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【分析】对函数求导，令导函数大于0构建不等式，其解集为单调增区间.

【详解】由，得，

其中，，令，即，解得，

所以函数的递增区间是.

故选：D

3（25-26高三上·贵州黔东南·期中）已知函数，若在上单调递增，则实数的取值范围为（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】根据在上单调递增，将问题转化为在恒成立即可求解．

【详解】，

若在上单调递增，则在恒成立，

即，

令，其对称轴为，所以的最大值为，

故只需．即．

故选：D．

4（2025高二上·辽宁营口·学业考试）已知函数，在下列区间中，一定包含零点的区间是（   ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【分析】求定义域，求导，得到函数单调性和极值，结合零点存在性定理可得答案.

【详解】的定义域为，

，当时，，

在上单调递减，

当时，令得，令得，

故在上单调递增，在上单调递减，

又，所以在恒负，

，，，

，

根据零点存在性定理知，在区间上一定存在零点.

故选：D

5（25-26高三上·海南·月考）已知，，，则（   ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】构造函数，再利用导数可得函数单调性，利用函数单调性即可得解.

【详解】令，则，

故在上单调递增，故，

则，故，

，故，

故有，即.

故选：D.

6（2025高三·全国·专题练习）若对于，都有成立，则的最大值为（   ）

A． B．1 C． D．

【答案】B

【分析】首先对已知不等式进行变形，得到，再构造函数，利用导数分析函数的单调区间即可得解．

【详解】因为，，

所以，即．

令，则，

当时，，则在上单调递增；

当时，，则在上单调递减．

故时满足题意，所以的最大值为1．

故选：B．

7（多选）（25-26高三上·福建龙岩·期中）已知函数的定义域为，满足，函数为奇函数，且对任意的，都有，则下列结论正确的是（    ）

A．是偶函数 B．

C． D．

【答案】ABD

【分析】由函数奇偶性的定义和判定方法，可判定，可判定A正确；推得，得到的周期为8，可判定B正确；根据函数单调性，结合对数的运算法则，可判定C错误；令，求得，得到函数的单调性，得到，再由，求得，得到在上递增，进而判定D正确.

【详解】对于A，因为为奇函数，所以关于点中心对称，

则，所以，

又因为，令，则，

则，所以，则是偶函数，所以A正确；

对于B，由，，可得，

则的周期为8，所以，所以B正确；

对于C，由在上单调递增，可得，所以C错误；

对于D，令，则，

所以在上单调递增，所以，即，所以，

令，，则，

所以在上递增，所以，即，即，

所以，在上单调递增，所以D正确.

故选：ABD.

8（2025高三·全国·专题练习）已知函数，则的单调增区间为 ．

【答案】当时，函数单调递增区间为；当时，函数单调递增区间为；当时，函数单调递增区间为

【分析】求导，按，，讨论即可.

【详解】函数的导函数，

①，若，；若，，

所以函数在上单调递增，在上单调递减．

②，，此时函数在上单调递增．

③，若，；若，，

此时函数在上单调递减，在上单调递增．

综上所述：当时，函数单调递增区间为；当时，函数单调递增区间为；当时，函数单调递增区间为.

故答案为：当时，函数单调递增区间为；当时，函数单调递增区间为；当时，函数单调递增区间为

9（25-26高三上·浙江·期中）已知函数.

(1)求的单调区间；

(2)当时，判断并证明与的大小关系.

【答案】(1)的单调递增区间为，单调递减区间为

(2)，证明见解析

【分析】（1）求导分析单调递区间即可；

（2）利用函数的导函数判断函数单调性，再通过做差法即可判断与的大小关系.

【详解】（1）由题意：，，

当时，；当时，

故的单调递增区间为，单调递减区间为

（2），证明如下：

由题意，

令，则

因为，所以，即在上单调递减

故

则

所以，即

10（2025高三·全国·专题练习）已知函数，讨论函数的单调性．

【答案】答案见解析

【分析】求得函数的导数，讨论的取值范围，结合一元二次方程的根的情况判断导数的正负，即可判断函数的单调性.

【详解】函数定义域为，由题意，

当时，在时，恒成立，在上单调递增；

当时，的解为，的解为，

所以在上递增，在上递减．

综上所述，当时，在上单调递增；

当时，在上递增，在上递减.

11（25-26高三上·北京海淀·月考）已知函数．

(1)已知曲线切线的倾斜角是0，求该切线方程；

(2)求的单调区间；

(3)已知，直接写出函数的零点个数．

【答案】(1)

(2)单调递增区间为，单调递减区间为；

(3)1

【分析】（1）求导，设切点为，由导数几何意义得到方程，解得，得到切点坐标，求出切线方程；

（2）先求定义域，令得，令得或，从而求出单调区间；

（3）令，则或，从而可得零点个数.

【详解】（1）由题意的，

而切线的倾斜角是0，则切线斜率为，

设切点为，则，解得，

故，故切点坐标为，

故该切线方程为；

（2）在中，令，解得，

故定义域为，

由（1）知，，令得，

令得或，

所以在上单调递增，在上单调递减，

所以单调递增区间为，单调递减区间为；

（3）令，则或，

当时，即，解得，

当，即，解得，

因为函数定义域为，

所以函数零点的个数为1.

12（2025·河北·模拟预测）已知函数是函数的一个极值点．

(1)求函数的单调区间；

(2)若函数有三个零点，且．

①求实数的取值范围；

②求证：．

【答案】(1)单调递减区间为，单调递增区间是（0，2）．

(2)①；②证明见解析

【分析】（1）先求导函数，因为是函数的一个极值点，所以，解得，所以，再利用导数求解函数的单调区间；

（2）①由（1）知函数的单调递减区间为，单调递增区间是分别验证函数有三个零点时，必有，反之验证当时，函数有三个零点，故函数有三个零点的充要条件为，进而得到的范围；②先利用极值点偏移证明，又由，故．

【详解】（1）由题知，因为是函数的一个极值点，所以，即，解得，

故，令，解得或，

当时，，函数单调递减；

当时，，函数单调递增；

当时，，函数单调递减．

所以是函数的极大值点，

所以函数的单调递减区间为，单调递增区间是（0，2）．

（2）①由（1）知函数的单调递减区间为，单调递增区间是而，，函数有三个零点时，必有解得．

当时，，又因为且在区间上单调递减，故存在唯一使得；

因为且在区间上单调递增，故存在唯一使得；

因为且在区间上单调递减，故存在唯一使得．

所以满足题意．

所以实数的取值范围为．

②先证：．

要证，只需证，因为且在区间 上单调递增，故只需证，即只需证，即只需证．

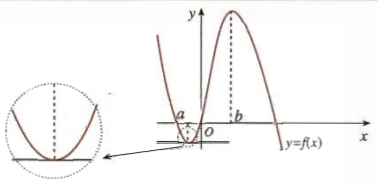
设，则，当时，，故，故在区间上单调递减，故.因此成立．

又因为，故．

## 5.3.2 函数的极值与最大（小）值



**知识点1：极值的概念**



若在点附近的左侧，右侧则称为函数的极小值点，称为函数的极小值；

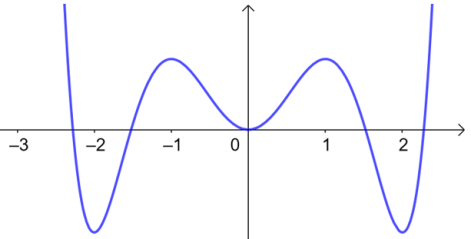
若在点附近的左侧，右侧，则称为函数的极大值点，称为函数的极大值．

极小值点、极大值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值．

解释

① 把函数图象看成一座“山脉”，极大值就是“山峰”，极小值就是“山谷”， 如下图；

② 极值是“函数值”，极值点是“自变量值”，如下图有极大值和，极小值和，极大值点和，极小值点和.



③ 极值反映了函数在某一点附近的大小情况，刻画了函数的局部性质；

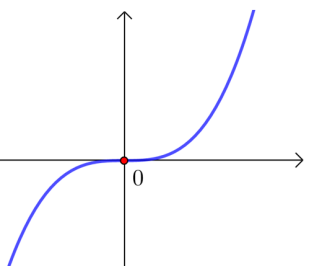
④ 对于极值还有特别强调一下，看例题：

设是函数的极值点，则下列说法准确的是( )

A. 必有 B.不存在

C. 或不存在 D.存在但可能不为

解析：函数，

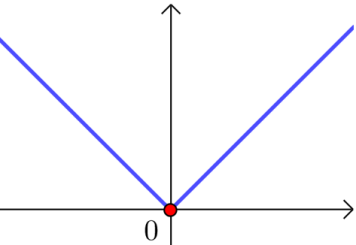


，

但时，时，；

故根据极值的定义，不是函数的极值点，这个从函数图象也很容易知道.

又如函数，



当时，； 当时，；

所以在处取到极值，但在导数不存在；故选.

总结

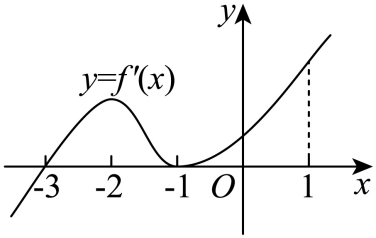
① 若可导，且是的解；

② 若是的解，；

③ 定义很重要.



（24-25高二下·重庆·期中）函数的导函数的图象如图所示，则下列选项正确的是（    ）



A．在区间上单调递减

B．在区间上单调递增

C．是函数的极大值点

D．是函数的极小值点

【答案】B

【分析】利用导数图象分析函数的单调性，结合极值点的定义判断即可.

【详解】对于A选项，当时，，故函数在区间上单调递增，A错；

对于B选项，当时，，故函数在区间上单调递增，B对；

对于C选项，当时，，当时，，

所以，函数在上单调递减，在上单调递增，

所以，是函数的极小值点，C错；

对于D选项，函数在区间上单调递增，在区间上单调递增，

故不是函数的极值点，D错.

故选：B.

作业**知识点2：求函数的极值的方法**

解方程，当时：

(1) 如果在附近的左侧，右侧，那么是极大值；

(2) 如果在附近的左侧，右侧，那么是极小值．



（2025·河南新乡·三模）已知函数的极小值为，则实数的值为（    ）

A．8 B．6 C．4 D．2

【答案】A

【分析】由已知得，令，得，判断单调性，根据极小值求出参数的值.

【详解】由已知得，令，得，

当时，单调递减，

当或时，单调递增，

所以的极小值为，解得.

故选：A.

**知识点3 ：函数在上的最大值与最小值的步骤**

(1)求函数在内的极值；

(2)将函数的各极值与端点处的函数值，比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值．

**解释**

(1) 极大值不一定是最大值，极小值不一定是最小值.

(2) 一般地，如果在区间上函数的图象是一条连续不断的曲线，那么它必有最大值和最小值.



（24-25高二下·河南新乡·期中）已知直线与函数，的图象分别交于点、，当取得最小值时，（   ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】令函数，利用导数求出函数的最小值及其对应的值，即可得出结论.

【详解】由题意可得，

令函数，则．

由可得，由可得，

所以，函数在上单调递减，在上单调递增，

所以，，即的最小值为，此时．

故选：A.



**题型一：函数极值或极值点的辨析**

例1．（24-25高二下·广西桂林·期末）已知函数的导函数则的极值点的个数为（    ）

A．0 B．1 C．2 D．3

【答案】C

【分析】求出的根，确定变号根的个数即可得．

【详解】由得，，，

或时，，不是极值点，

或时，，时，，因此都是极值点．极点点有2个．

故选：C．

【变式1-1】（24-25高二下·甘肃武威·月考）已知函数在处连续，下列命题中正确的是（    ）．

A．导数为零的点一定是极值点

B．如果在附近的左侧，右侧，那么是极大值

C．如果在附近的左侧，右侧，那么是极小值

D．如果在附近的左侧，右侧，那么是极大值

【答案】B

【分析】用极值点的定义判断A选项，用极大值和极小值的定义来判断BCD选项

【详解】导数为0的点不一定是极值点，还要满足导函数在这一点的左侧与右侧的函数值异号，故A错误；

根据极值的概念，在附近的左侧，函数单调递增；在附近的右侧，函数单调递减，所以为极大值，故B正确，CD错误．

故选：B

【变式1-2】（24-25高二·全国·课后作业）下列说法正确的是（    ）

A．当时，则为的极大值

B．当时，则为的极小值

C．当时，则为的极值

D．当为的极值且存在时，则有

【答案】D

【分析】由导函数及极值定义得解.

【详解】不妨设函数则可排除ABC

由导数求极值的方法知当为的极值且存在时，则有

故选：D

【点睛】本题考查导数求函数极值,属于基础题.

【变式1-3】（23-24高二下·江苏南通·月考）函数是（   ）

A．偶函数，且没有极值点 B．偶函数，且有一个极值点

C．奇函数，且没有极值点 D．奇函数，且有一个极值点

【答案】B

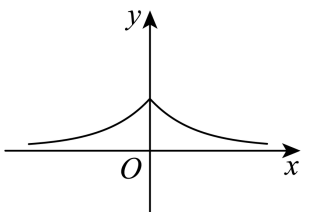
【分析】根据函数图象结合极值点的定义即可得出结论.

【详解】画出的图象，函数是偶函数，

且函数在上单调递增，在上单调递减，

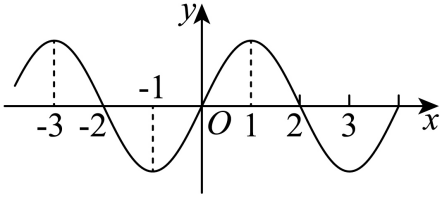
所以函数有一个极大值点.

故选：B.



**题型二：函数图像与极值的关系**

例2. （24-25高二下·广东深圳·期中）已知函数的导函数的图象如图所示，则下列判断正确的是（   ）



A．函数有四个极值点 B．为的极大值点

C．函数在上单调递增 D．函数在上单调递减

【答案】D

【分析】根据导函数的图象得出导函数的符号分别情况，进而可的出函数的单调区间，从而可得出极值点，即可得解.

【详解】由图可知，时，，

所以函数在和上单调递增，

时，，

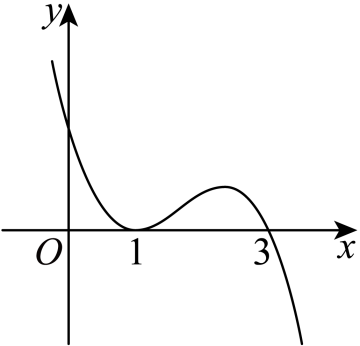
所以函数在和上单调递减，

所以函数的极大值点为，极小值点为，

故ABC错误，D正确.

故选：D.

【变式2-1】（24-25高二下·广东东莞·月考）已知函数，其导函数的图象如图所示，则（    ）



A．有2个极值点 B．在处取得极小值

C．有极大值，没有极小值 D．在上单调递减

【答案】C

【分析】根据导函数的图象得出导函数的符号分布情况，进而可得出函数的单调区间，再根据极值的定义即可得解.

【详解】由导函数的图象可知，

当时，，仅时，；当时，，

所以函数在上单调递增，在上单调递减，

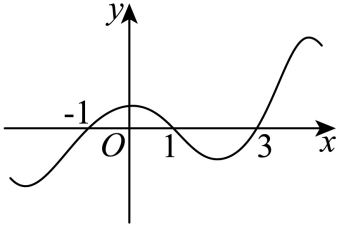
所以函数只有一个极值大点，无极小值点，

所以有极大值，没有极小值，

故ABD错误，C正确.

故选：C.

【变式2-2】（24-25高二下·福建厦门·月考）已知函数的定义域为，其导函数为的部分图象如图所示，则（    ）



A．在上单调递增 B．的最大值为

C．的一个极大值点为 D．在上单调递减

【答案】D

【分析】根据给定的部分图象，逐项分析判断.

【详解】对于A，由的部分图象并不能确定在恒成立，A错误；

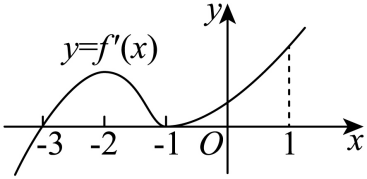
对于B，由图只能得出的部分区间单调性，最大值不一定为，B错误；

对于C，由图知，且在左右两侧左负右正，为的一个极小值，的一个极小值点为，C错误；

对于D，当时，，因此在上单调递减，D正确.

故选：D

【变式2-3】（25-26高三上·湖南常德·开学考试）函数的导函数的图象如图所示，则（    ）



A．是函数的一个零点

B．是函数的极小值点

C．是函数的极大值点

D．函数在区间上单调递增

【答案】D

【分析】由图可知为导函数的图象，导函数图象的正负即可判断原函数的增减，依次判断即可.

【详解】根据导函数的图像可知，当时，，当时，，

所以函数在上单调递减，在上单调递增，

可知是函数的极值点，不足以说明是函数零点.

因为函数在上单调递增，可知不是函数的极小值点，也不是函数的极大值点，

所以ABC不正确，故D正确.

故选：D.

**题型三：求不含参已知函数的极值**

例3. （24-25高二下·北京平谷·期末）已知函数．

(1)求曲线在点处的切线方程；

(2)求函数的极值．

【答案】(1)

(2)极大值为，无极小值.

【分析】（1）对函数求导，可得到切线的斜率，然后根据点的坐标即可求出切线方程.

（2）对函数求导，根据定义域确定函数的单调性，从而确定极值点和极值.

【详解】（1）因为，所以.

所以切线斜率为，而，

所以曲线在点处的切线方程为，即.

（2）令，则，求得.

因为，当时，；当时，；

所以函数在单调递增，在上单调递减，

所以函数在处取得极大值为.

所以函数的极大值为，无极小值.

【变式3-1】（25-26高三上·云南·月考）函数的极小值为（   ）

A． B．0 C．2 D．4

【答案】B

【分析】利用导数分析函数的单调性，由此可求得函数的极小值.

【详解】由，

可得，

当时，，在上单调递增，

当时，，在上单调递减，

当时，，在上单调递增，

所以的极小值为.

故选：B．

【变式3-2】（24-25高二下·湖北恩施·期末）已知函数，则（   ）

A．极大值为，无极小值 B．极小值为，无极大值

C．极大值为，无极小值 D．极小值为，无极大值

【答案】A

【分析】对求导，令，，求出的单调性，即可求出的极值.

【详解】，令，解得，

，，单调递增；，，单调递减，

因此，在处取得极大值，极大值为，无极小值.

故选：A.

【变式3-3】（24-25高二下·广东揭阳·月考）对于函数，下列结论不正确的（    ）

A．在处取得极大值 B．有两个不同的零点

C． D．若恒成立，则

【答案】B

【分析】对函数求导得出其单调性，可判断A正确，画出函数图象可判断B错误，结合函数在上单调递减以及可判断C正确，构造函数并求出其最大值即可得D正确.

【详解】易知函数的定义域为，

可得，

令，可得，

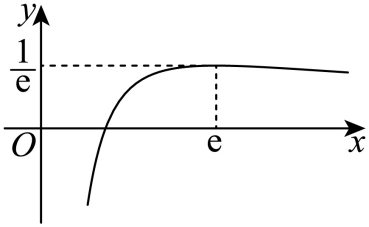
因此当时，，即在上单调递增，

当时，，即在上单调递减；

对于A，因此可得在处取得极大值，可得A正确，

对于B，易知，

当时，；当时，，画出函数图象如下图所示：



由图可知有且仅有一个零点，即B错误；

对于C，易知，

又因为在上单调递减，易知，

所以，即C正确；

对于D，若恒成立，即，可得在上恒成立；

记，可得，

当时，，此时在上单调递增，

当时，，此时在上单调递减，

可得在处取得极大值，也是最大值，

若在上恒成立，可得，所以，即D正确.

故选：B

**题型四：根据极值求参数**

例4.1 （25-26高三上·陕西咸阳·月考）已知函数在处取得极小值，则的值为（    ）

A．或 B． C．1 D．

【答案】B

【分析】由求得或，再分别代入验证极值确定值.

【详解】由题意得，又函数在处取得极小值，

则，解得或．

当时，，令，则或，

当时，，在上单调递减，

当时，，在上单调递增，

则在处取得极小值，故符合；

当时，，令，则或，

当时，，在上单调递增，

当时，，在上单调递减，

则在处取得极大值，故不符合，

所以．

故选：B.

例4.2（25-26高三上·重庆北碚·月考）若函数在上有两个极值点，则的取值范围为 （    ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】对函数求导，问题化为导函数在上有两个变号零点，令，与在上有两个交点，结合二次函数的性质求参数范围.

【详解】由题设，令，

又在上有两个极值点，即在上有两个变号零点，

令在上单调递减，且，

根据二次函数性质知只需与在上有两个交点，

所以在上单调递增，在上单调递减，

所以，在上，在上，

综上，与有两个交点，则.

故选：B

【变式4-1】（24-25高二下·河北承德·期中）已知函数在上存在极值，则实数的取值范围为（    ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】将在上存在极值，转化为在上有变号零点，再利用二次方程的判别式大于0求解即可.

【详解】，

因为在上存在极值，所以在上有变号零点，

所以方程有两个不同的实数根，

故，解得或.

故选：C.

【变式4-2】（24-25高二下·四川成都·月考）已知函数在处有极值2，则（   ）

A． B．6 C．2 D．

【答案】B

【分析】根据函数在处有极值2，可得，解方程组即可得解.

【详解】，

因为函数在处有极值2，

所以，即，解得，

则，

故当时，，当时，，

所以函数在处有极小值，

所以，所以.

故选：B

【变式4-3】（25-26高三上·河北沧州·月考）若函数恰有两个极值点，则实数*m*的取值范围为（    ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】求得，根据题意，转化为在上有两个不同的解，即为与的图象在上有两个不同的交点，结合二次函数的图象和性质，得到，即可求解.

【详解】由函数，其定义域为，且，

因为函数恰有两个极值点，即在上有两个不同的解，

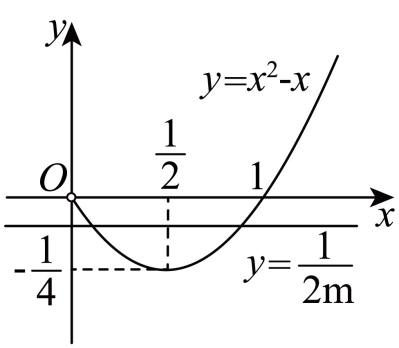
显然，即在上有两个不同的解，

即与的图象在上有两个不同的交点，

又由对应的抛物线开口向上，且对称轴为，且，

如图所示，可得，解得，所以实数的取值范围为.

故选：C.



**题型五： 求含参函数的极值**

例5. （25-26高三上·福建厦门·月考）已知函数.

讨论的单调区间和极值.

【答案】答案见解析

【分析】先求，根据导数的正负确定函数单调性，进而可得单调区间和极值.

【详解】函数的定义域为，

，

（ⅰ）当时，，所以在上单调递增，无极值.

（ⅱ）当时，令，得，

令，得.

在上单调递减，在上单调递增，

在处取得极小值，

，

综上，当时，在上单调递增，无极值；

当时，在上单调递减，在上单调递增，

极小值为，无极大值.

【变式5-1】（25-26高三上·山西大同·月考）已知函数

讨论函数的单调性并求极值.

【答案】答案见解析

【分析】利用导数并讨论参数 的范围研究导数的符号，即可判断单调性，据此求极值；

【详解】函数的定义域为 ，求导得 ，

当时， ，所以函数在上单调递增，无极值；

当时，令 ，解得 ，

当 时， ，函数在 上单调递减，

当 时， ，函数在上单调递增，

所以有极小值.

综上所述，当时，函数在上单调递增，无极值；

当时，函数 在上单调递减，在上单调递增，有极小值．

【变式5-2】（25-26高三上·黑龙江·月考）已知函数，.

(1)若，求曲线在处的切线方程；

(2)若为函数的导函数，讨论函数的极值；

【答案】(1)

(2)当时，函数在上无极值；

当时，函数在处取得极小值，无极大值.

【分析】（1）对函数求导，求出曲线在切点处的切线斜率及切点坐标，代入直线方程求解.

（2）求出函数的导函数，明确函数的定义域，对导函数再次求导，利用倒数的符号变化判断单调性，进而确定极值.

【详解】（1）当时，，，

所以，

所以，又，

则曲线在处的切线方程为，即.

（2）因为，，

所以，，

令，，

则，.

当时，，函数在上单调递增，

此时函数在上无极值；

当时，令，解得，

当时，，此时函数在上单调递减；

当时，，此时函数在上单调递增，

所以当时，函数取得极小值，无极大值.

综上，当时，函数在上无极值；

当时，函数在处取得极小值，无极大值.

【变式5-3】（25-26高三上·天津·月考）已知函数.

(1)当时，求曲线在处的切线斜率；

(2)讨论函数的极值；

【答案】(1)

(2)答案见解析

【分析】(1)根据导数的几何意义即可求解；

(2)利用导数判断函数的单调性，结合极值定义即可求解；

【详解】（1）当时， ，

所以，

所以，

所以曲线在处的切线斜率为.

（2），

所以，

当时，， ，

所以，所以在上单调递增，无极值；

当时， 令，解得，

当时， ，

当时， ，

所以在上单调递减，在上单调递增，

，

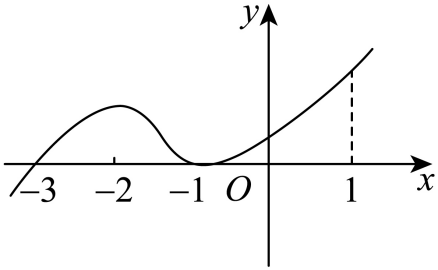
所以在处取得极小值为，无极大值，

综上： 当时， 无极值，

当时，有极小值为，无极大值.

**题型六：函数最值与极值的辨析**

例6. （23-24高二上·安徽六安·期末）已知函数为连续可导函数，的图象如图所示，以下命题正确的是（    ）



A．是函数的最小值

B．是函数的极小值

C．在区间上单调递增

D．在处的切线的斜率大于0

【答案】D

【分析】根据图象得到的单调性，并结合极值的定义和导数的几何意义求出答案.

【详解】C选项，由图象可看出当时，，

当时，，

当时，，

当时，，

故在上单调递增，在上单调递减，在上单调递增，C错误；

A选项，是函数的极小值，但无法确定是不是最小值，A错误；

B选项，是函数的极大值，B错误；

D选项，由于，故在处的切线的斜率大于0，D正确.

故选：D

【变式6-1】（24-25高二下·全国·课前预习）连续函数在上（    ）

A．极大值一定比极小值大

B．极大值一定是最大值

C．最大值一定是极大值

D．最大值一定大于极小值

【答案】D

【详解】由函数的最值与极值的概念可知，*y*＝*f*(*x*)在[*a*，*b*]上的最大值一定大于极小值.

【变式6-2】（23-24高二下·广东湛江·月考）已知函数定义域为，且在该区间上连续，在上函数有唯一的极大值，则下列说法正确的是（    ）

A．函数有最大值

B．函数有最大值，但不一定是

C．函数的最小值也可能是

D．函数不一定有最大值

【答案】D

【分析】根据函数的极值与最值的定义即可求解.

【详解】函数定义域为，是开区间，

则当趋近于或时，若趋于正无穷大，

此时函数没有最大值，故AB错误，D正确；

因为函数有唯一的极大值，

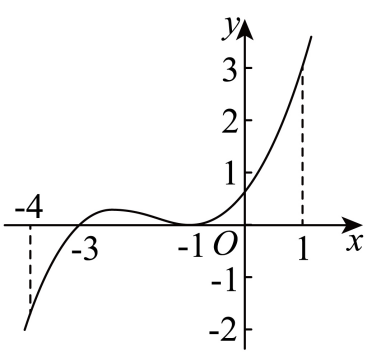
所以在附近，函数值小于，

所以函数的最小值不可能是，故C错误.

故选：D.

【点睛】关键点点睛：区分函数的极值和最值是解决本题的关键.

【变式6-3】（24-25高二下·北京·期中）已知定义在**R**上的函数的导函数的图象如图所示，下列命题中正确的是（    ）



A．是的极值点

B．在区间上单调递增

C．是在区间上的最小值点

D．曲线在点处的切线斜率小于零

【答案】C

【分析】根据导函数的正负，可确定的单调性，即可结合极值和选项逐一求解.

【详解】由的图象可知：当时，，当时，，

故在单调递减，在单调递增，

故是函数的极小值点，也是上的最小值点，故A错误，B错误，C正确，

由图可知：，因此曲线在点处的切线斜率大于零，故D错误，

故选：C

**题型七：求不含参已知函数的最值**

例7.1 （25-26高三上·重庆沙坪坝·开学考试）函数 的最小值为（    ）

A． B．1 C． D．

【答案】C

【分析】利用导数判断函数的单调性后可得函数的最小值.

【详解】，

设，则，

故为上的增函数，而，，

故当时，即，当时，即，

故在上为减函数，在上为增函数，故，

故选：C.

例7.2（重庆市2026届高三上学期七校联考数学试卷）已知函数.

(1)求在处的切线方程；

(2)当时，求的最值.

【答案】(1)

(2)最大值为，最小值为

【分析】（1）求出的值，利用导数的几何意义可得出所求切线的方程；

（2）利用导数判断出函数在上的单调性，再利用单调性结合给定区间求出的最值.

【详解】（1）依题意，，，则，

又，即切点坐标为，

故所求切线方程为：，即.

（2）由.

当时，，则在上单调递增，

故当时，取到最小值为，

当时，取到最大值为，

故在区间上的最大值为，最小值为.

【变式7-1】（25-26高二·全国·假期作业）函数在闭区间上的最大值和最小值分别是（   ）

A． B． C． D．

【答案】B

【分析】求出导函数，即可求出单调区间，从而求出极值与端点处的函数值，即可求出函数的最值.

【详解】因为，所以，由，得．

又当或时，当时，

所以在，上单调递增，在上单调递减，

又因为，．

故，．

故选：B

【变式7-2】（24-25高二下·江西九江·期末）已知函数，若存在实数，使得成立，则实数*t*的最小值是（    ）

A． B．2π C．-1 D．1

【答案】A

【分析】利用导数求出函数在时的最小值，结合题意即可求得答案.

【详解】由，得，

当时，，故在上单调递减，

当时，，故在上单调递增，

故当时，，

而存在实数，使得成立，故，

即实数*t*的最小值是，

故选：A

【变式7-3】（2025高三·全国·专题练习）若当时，，则*a*的取值范围为（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】利用换元法将用进行替换，再利用参变量分离将问题转化为求最大值的问题，再利用导数求最值即可.

【详解】令，，则可转化为，即，

令，则，

当时，，当时，，

所以在单调递增，在单调递减，

故，

所以，解得，

则的取值范围是，

故选：C．

【变式7-4】（2025·广东·模拟预测）已知函数．

(1)求曲线在点处的切线方程；

(2)证明：；

(3)证明：．

【答案】(1)

(2)证明见解析

(3)证明见解析

【分析】（1）由题意求出的值，求导可得解析式，根据导数的几何意义，可得切线的斜率，代入点斜式方程，化简整理，即可得答案.

（2）令，求得极值点，分别讨论和时，的正负，可得的单调性和极值，分析计算，即可得证.

（3）由（2）得，对任意恒成立，则，化简整理，即可得证.

【详解】（1）由题意得，

又，则，

故曲线在点处的切线方程为，

整理得．

（2）由（1）得，，

令，解得，

当时，，，故，故单调递增；

当时，，，故，单调递减．

故．

（3）由（2）得，对任意恒成立，

所以，

故．

**题型八： 由函数的最值求参数**

例8. （24-25高二下·云南昆明·期中）已知函数在内有最小值，则实数的取值可以是（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】求出函数的导函数，即可得到函数的单调区间，求出函数的极小值点，进而求出的范围即可.

【详解】函数定义域为，求导得，

当时，，当时，，

函数在上单调递减，在上单调递增，函数在处取得极小值，即最小值，

又函数在内有最小值，则，解得，

所以实数的取值可以是.

故选：D

【变式8-1】（24-25高二下·江西·月考）已知是函数的导函数，若，且在上的最大值为5，则的值为（    ）

A．1 B． C． D．

【答案】D

【分析】求出函数的导函数，由求出的值，即可得到函数在上的单调性，从而求出的值.

【详解】因为，所以，

所以，解得，所以，则，

所以当时，所以在上单调递增，

所以，解得.

故选：D

【变式8-2】（24-25高三上·贵州贵阳·月考）已知函数，当时，函数取得最大值，则（    ）

A． B．或

C． D．

【答案】D

【分析】根据题设有、求参数，注意验证所得函数是否符合题设，进而求对应函数值.

【详解】由题设，故，且，

所以，故，即，

此时，且，

所以，时，在上单调递增；

时，在上单调递减；

故处为极大值，也是最大值，满足题设；

所以.

故选：D

【变式8-3】（四川省德阳市2026届高三第一次诊断考试数学试题）已知函数（，且），函数的图象与的图象关于直线对称.

(1)求；

(2)若的最小值是2，求.

【答案】(1)

(2)

【分析】（1）由指数函数和对数函数的关系即可直接得解；

（2）先由题设分析得到，再利用导数工具研究函数的单调性和最值，结合即可求解.

【详解】（1）依题意得；

（2）由题对恒成立，

当时，为增函数，所以函数在上单调递增，且，

则函数无最小值，不符合，所以，

所以为增函数，令，

所以时，时，

所以函数在上单调递减，在上单调递增，

所以，又，所以.

综上所述，.

**题型九： 求含参函数的最值**

例9. （22-23高三上·北京东城·开学考试）设函数

(1)当时，求函数在处的切线方程；

(2)当时，求证：

(3)当时，求函数在上的最小值

【答案】(1)

(2)证明过程见解析

(3)答案见解析

【分析】（1）求出，，利用点斜式得到切线方程；

（2）求导得到函数单调性，极值和最值，证明出结论；

（3）求导，分和两种情况，求出函数在上的单调性，得到函数最小值.

【详解】（1）当时，，，

又，故，

所以函数在处的切线方程为；

（2）当时，，，

当时，，当时，，

故在上单调递减，在上单调递增，

故在上取得极小值，也是最小值，

且，

故在R上恒成立.

（3），

，，

令，解得，令，解得，

当时，，故在上单调递减，在上单调递增，

此时在上取得极小值，也是最小值，

故在上的最小值为，

当时，，故在上单调递减，

此时在上的最小值为

综上：当时，在上的最小值为，

当时，在上的最小值为.

【变式9-1】（24-25高二下·河南商丘·月考）已知函数.

(1)当时，求函数的图象在处的切线方程；

(2)当时，求函数在区间上的值域.

【答案】(1)

(2)答案见解析

【分析】（1）求出切点坐标，利用导数求出切线斜率，再用点斜式写出切线方程，从而得解；

（2）求导，对分类讨论，判断在区间上的单调性，进而计算可求得值域.

【详解】（1）当时，由，可得，

由，可得，所以，

所以切线方程为，即；

（2）由，可得，

令，可得或，

当时，由二次函数性质可知，，

所以在上单调递减，又，

，所以值域为，

当时，由二次函数性质可知，，时，，

所以函数在区间上的最大值为，

又，，

若时，，

所以函数在区间上的最小值为，所以值域为，

若时，，

所以函数在区间上的最小值为，所以值域为，

综上所述：当时，函数在区间上的值域为，

当时，函数在区间上的值域为，

当时，函数在区间上的值域为.

【变式9-2】（2025·黑龙江齐齐哈尔·模拟预测）已知函数.

(1)当时，求在处的切线方程；

(2)讨论的单调性，并求最值.

【答案】(1)

(2)答案见解析

【分析】（1）通过求导得到切线斜率，利用点斜式即可求得切线方程；

（2）将函数求导后，根据参数分类讨论函数的单调性，即可判断求解函数的最值.

【详解】（1）当时，，求导得：，

则，，

则在处的切线方程：，即；

（2）由求导得：，

①当时，在上恒成立，故在上单调递增，无最值；

②当时，由，解得，

当时，，则在上单调递减；

当时，，在单调递增，

所以在有最小值，为,无最大值.

【变式9-3】（23-24高二上·江苏·课前预习）（1）求函数的最值．

（2）求函数（是自然对数的底数）的最值．

（3）已知*a*为常数，求函数的最大值．

【答案】（1）最小值；最大值；（2）最大值为，无最小值；（3）答案见解析

【分析】（1）（2）求导判单调性求得最值；

（3）求导，分，，三种情况判单调性求最大值

【详解】（1），令，由，

解得或．

当变化时，，的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | ＋ |  | － |  | ＋ |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

由表可知，当时，有最小值；当时，有最大值

（2）由题意知的定义域为**R**．

，令，解得

当时，，单调递增；当时，，单调递减．

故函数的最大值为，无最小值．

（3）．

若*,*则，函数单调递减，

∴当时，有最大值．

若，则令，解得．∵，∴只考虑的情况．

①若，即，

（如下表所示）

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

则当时，有最大值

②若，即，

则当时，，函数在区间上单调递增，

∴当时，有最大值

综上可知，当，时，有最大值；

当，时，有最大值

当，时，有最大值．

**题型十：函数单调性、极值与最值的综合应用**

例10. 1 （2025·重庆·模拟预测）已知，若函数存在两个零点，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】由题意得，构造函数得，再构造函数，结合图象即可得答案．

【详解】由，，知

故，

即

即

令则上述式子即为

由于，且，

故在是单调递增函数，

故由可得

即，令，

，

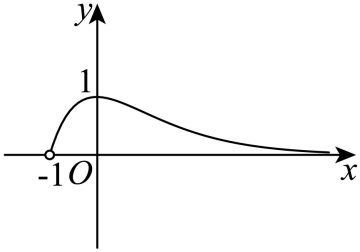
由，得，

当时，，

当时，，

故，，且当时，恒成立，

由此可得出的大致图象如下：



由题意要求函数存在两个零点，等价于函数与的图象有两个交点，

由图可得：．

故选：C．

例10. 2（25-26高三上·北京·月考）已知函数.

(1)求曲线在点处的切线方程；

(2)求证：存在极大值点；

(3)求的零点个数.

【答案】(1)

(2)证明见解析

(3)

【分析】（1）借助导数的几何意义计算即可得；

（2）求导后结合零点存在性定理分析可得函数单调性，即可得其极值情况；

（3）结合函数单调性与零点存在性定理分析即可得.

【详解】（1），

则，又，

则曲线在点处的切线方程为，即；

（2），

令，则，

故在上单调递增，

又，，

故存在，使得，

当时，，当时，，

则当时，，当时，，

故在、上单调递增，在上单调递减，

故是的极大值点；

（3）由（2）得在、上单调递增，在上单调递减，

则，

又，

故在上有一零点，在上无零点，

故的零点个数为.

【变式10-1】（25-26高三上·贵州贵阳·开学考试）已知函数的值域为，则实数的取值范围是（   ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】当时，整理函数解析式后利用基本不等式，即得的取值范围，当时，利用导数求得的取值范围，再由的值域为**R**，得到不等式，解之即得.

【详解】当时，

，

当且仅当，即时取等号，

即时，；

当时，，则，

令，解得或，

当时，，则在上单调递增，

当时，，则在上单调递减，

故在处取得极大值，也是最大值，为，

又当时，所以时，，

由的值域为，可得，即，解得.

故选：A

【变式10-2】（2025高三·全国·专题练习）已知函数函数有三个不同的零点，，则的取值范围是（其中是自然对数的底）（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】作出函数的图象先判定的范围，再结合根与系数的关系得出，构造函数利用导数研究函数的单调性计算最值即可.

【详解】由题作出函数的图象如图所示，所以当时，拋物线的对称轴为，顶点，

若函数有三个不同的零点，

不妨设，即有三个不同的根，

则，即，

当时，，即，则，

当时，由，得，即，则，

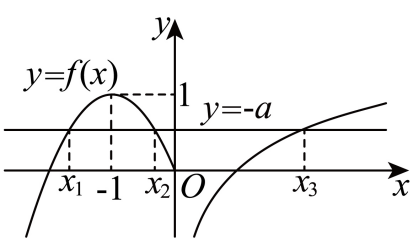
设，则导数，

则当时，恒成立，即此时函数为减函数，

则，即，即，

即的取值范围是.

故选：D.



【变式10-3】（23-24高三上·福建漳州·开学考试）已知直线是曲线的切线，也是曲线的切线，则*a*的最大值是（   ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】设直线与，分别切于点，根据导数的几何意义，可得斜率，化简计算，可得，设，利用导数可得的单调区间和极值，分析即可得答案.

【详解】设直线与，分别切于点，

由，得，由，得，

由导数的几何意义可得，

所以，则，

所以，则，

所以，

设，则

令，解得，

当时，，则单调递增，

当时，，则单调递减，

所以的极大值为，

所以，即*a*的最大值为，

故选：A

【变式10-4】（25-26高三上·安徽·月考）已知，满足，则的最大值为（   ）

A． B．2 C． D．

【答案】C

【分析】由已知得，令，利用导数分析的性质得到，从而得到，再构造函数，利用导数即可求最大值.

【详解】由，整理得，

设，，令解得

在单调递减，在内单调递增，

当时，，又，

时，，时，，

依题意，，且，

，

，则，

，

设，，

令解得，

在单调递增，在内单调递减，

的最大值为.

故选：C.

【变式10-5】（多选）（25-26高三上·山东济南·期中）已知函数，，则下列说法正确的（    ）

A．函数与函数有相同的极小值

B．若方程有唯一实根，则的取值范围为

C．若方程有两个不同的实根，则

D．当时，若，则成立

【答案】ACD

【分析】利用导数分别求出两个函数极小值判断A；根据条件求出的范围判断B；利用方程根的意义，变形构造函数，利用导数借助单调性推理判断C；利用同构方法进行转化求解判断D.

【详解】对于A，函数定义域，求导得，当时，，

当时，，函数在上单调递减，在上单调递增，

函数在处取得极小值；

函数定义域，求导得，当时，，

当时，，函数在上单调递减，在上单调递增，

函数在处取得极小值，A正确；

对于B，由选项A知，，则当时，也有唯一实根，B错误；

对于C，因为当趋近于0时，趋近于0，

所以，由方程有两个不同的实根，得，不妨令，

由，得，则，

消去得，则，令，

于是，，

令，求导得，令，

求导得，函数在上单调递减，，

函数在上单调递增，，因此，即，C正确；

对于D，，由，得，

所以，则，

，于是，而函数在上单调递增，则，

因此成立，D正确.

故选：ACD

【变式10-6】（2025·陕西西安·二模）已知函数，（其中且）.

(1)当时，证明是偶函数；

(2)当时，设，若对任意恒成立，求实数的取值范围；

(3)当时，设的最小值为.证明：的最大值为2.

【答案】(1)证明见解析

(2)

(3)证明见解析

【分析】（1）利用恒等式，结合定义域来证明奇偶性；

（2）利用指数函数的单调性求值域，再结合不等式恒成立思想，即可得参数范围；

（3）利用导数判断单调性即可求最小值，再利用特殊值，从而把问题转化为不等式证明，再利用不等式等价变形，构造函数，再次导数来判断单调性求最值，从而问题得证.

【详解】（1）当时，，由题意可知函数的定义域为，

且，所以函数为偶函数；

（2）当时，，因此，对任意的恒成立，可得，化简得：，

当时，函数单调递增，当时，，

因为，所以恒成立.

当时，函数单调递减，当时，，

因为，所以不成立.综上所述，实数的取值范围为.

（3）当时，函数，

令，得，

即，由于当时，，当时，，

所以在单调递减，单调递增，

即.

注意到，要证的最大值为2，只需证明，

即证，即，

两边同时取自然对数，可得

.

设函数，

则，令，得，即，

当时，，当时，，

所以在单调递减，在单调递增，所以，

，即得证.

综上所述，的最大值为2.



1（24-25高三上·云南大理·开学考试）已知函数的导函数为，若函数的图象如图所示，则的极小值点为（    ）



A． B．0 C．或 D．

【答案】D

【分析】根据导函数的符号判断函数的单调性，判断函数的极小值点.

【详解】由图可知，当时，，

当时，，当且仅当时，

所以在和上单调递增，在上单调递减，

从而的极小值点为.

故选：D

2（24-25高一下·北京·期末）下列函数中，存在极小值的是（    ）

A． B．

C． D．

【答案】B

【分析】对于AC，由指数函数、对数函数单调性判断即可；对于BD，求导判断函数单调性，进一步得极小值情况即可.

【详解】对于AC，因为对数函数、是增函数，故它们都不存在极小值，故AC错误；

对于B，，求导得，

或，，

所以在上单调递增，在上单调递减，

所以在处取得最小值，故B正确；

对于D，对求导得，且不恒成立，

所以是增函数，即不存在极小值.

故选：B.

3（23-24高二上·江苏南通·期末）若函数的导数，的最小值为，则函数的零点为（    ）

A．0 B． C． D．

【答案】C

【分析】由，确定，由的最小值为，可求出，即可得出的解析式，进一步求出函数的零点.

【详解】因为函数的导数，所以，为常数，

设，则恒成立，在上单调递增，

即在上单调递增，又，

故当时，，即单调递减，

时，，即单调递增，

所以在处取得最小值，即，所以，

所以，由，

令，解得，所以的零点为.

故选：C.

4（23-24高二下·四川遂宁·月考）若函数在区间上存在最值，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．或

【答案】C

【分析】借助导数研究函数单调性即可得其在何处取得最值，即可得解.

【详解】，

则当时，，当时，，

即在上单调递减，在上单调递增，

即在处取得最值，则有，

解得.

故选：C.

5（25-26高三上·西藏拉萨·月考）已知函数有两个极值点，则实数的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】求出函数的导数，由在上有两个变号零点求出范围.

【详解】函数的定义域为，求导得，

由函数有两个极值点，得函数在上有两个变号零点，

令，求导得，

当时，，函数在上单调递减，最多一个零点，不符合题意；

当时，由，得；由，得，

函数在上单调递增，在上单调递减，

则，而当从大于0的方向趋近于0时，，

当时，，因此当且仅当时，有两个零点，

即，解得，所以实数的取值范围是.

故选：D

6（25-26高一上·上海浦东新·月考）对于函数，则（ ）

A．有极大值，也有极小值 B．有极小值，没有极大值

C．函数与的图象有两个交点 D．函数有两个零点

【答案】D

【分析】对函数求导，通过求导判断函数的单调性从而可知函数是否有极值判断AB；画出函数与的图象从而可判断交点个数可判断C；函数有两个零点价于函数与的图象有两个交点，数形结合即可判断D.

【详解】，则，

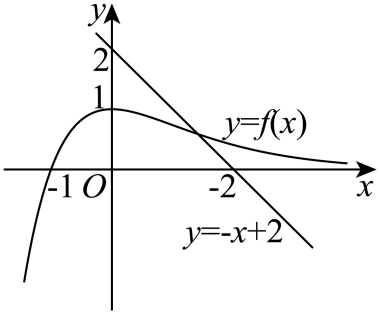
因为在恒成立.

所以当时，，在单调递减；

当时，，在单调递增；

所以在处有极大值，没有极小值，故A错误，B错误；

根据的单调性，画出函数的图象，以及的图象，如图：



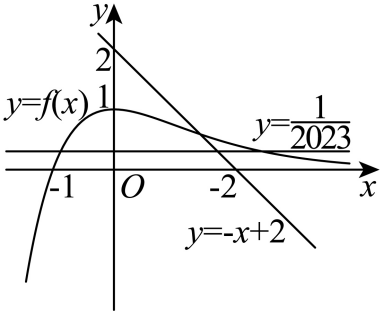
由此可知，函数与的图象只有一个交点，故C错误；

函数有两个零点等价于函数与的图象有两个交点，

因为在单调递增，在单调递减，所以可得，

又时，，当时，，

如下图所示：



由此可知，函数与的图象有两个交点，即函数有两个零点；故D正确.

故选：D.

7（2025高二·全国·专题练习）若，若存在唯一的整数使得，则实数*a*的取值范围为（   ）

A． B．

C． D．

【答案】C

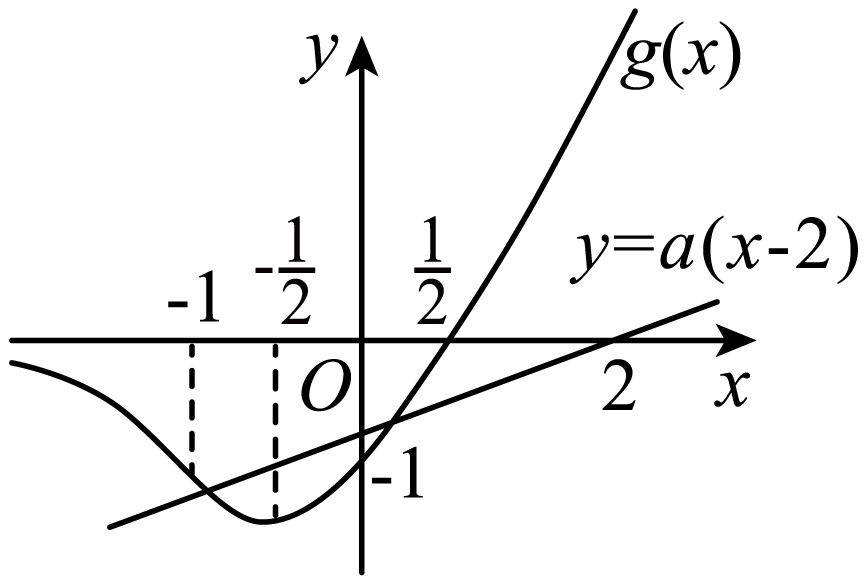
【分析】将存在唯一的整数，使得，即，转化为在图像上只有一个横坐标为整数的点在直线下方，利用导数判断函数的单调性，作出其大致图像，数形结合，列出不等式组，即可求得答案.

【详解】，，因为存在唯一的整数，使得，即，

，当时，，在上单调递减，

当时，，在上单调递增，

故当时，函数取得极小值也是最小值，，作出其大致图像如图：



是斜率为，恒过定点的直线，

当，存在无穷多个满足条件的整数满足不等式，不符合题意，故，

又，，，

此时需满足在图像上只有一个横坐标为整数的点在直线下方，

则需满足，解得.

故选：C

8（多选）（2025·四川泸州·一模）已知函数，则（    ）

A．

B．在上单调递增

C．的最大值为1

D．在上存在唯一极值点

【答案】ACD

【分析】根据函数的性质，利用特殊值法分析判断选项A，对求导，利用导数分析函数单调性及极值，进而判断选项BCD．

【详解】选项A：，，

，，

，

需比较与的大小，

，，，

，故，故A正确；

选项B：，求导得，分母，

，对于任意，，，

又 ，，

对于任意成立，

在成立，故在上单调递减，故B错误；

选项C：当时，，

令，求导得，

当时，，函数在上单调递减，

当时，，函数在上单调递增，

在时取得最小值，即在上恒成立，

，当且仅当时，

，仅当时等号成立，故的最大值为1，故C正确；

选项D：，，

令，

当时，，

，故，函数单调递减；

当时，，，

当时，，

求导得，，

，函数单调递增，且，

在上单调递增，且，，

由零点存在定理知在上存在唯一零点，设为，

时，，单调递减，

时，，单调递增，

是在上存在唯一极小值点，故D正确．

故选：ACD．

9（2025高三·全国·专题练习）已知，若恒成立，求实数的取值范围为 .

【答案】

【分析】构造函数，求导判断单调性，求出最小值，进而求得范围.

【详解】令，求导得，

令，求导得.

当时，，此时在上单调递增，由于，

所以当时，；当时，，所以在上单调递减，在上单调递增，

所以，所以原不等式恒成立，所以符合题意；

时，原不等式矛盾，理由如下：时，，而，或；

故答案为：.

10（广东省部分学校2026届高三上学期12月联考数学试题）已知函数.

(1)求曲线在点处的切线方程；

(2)求的零点个数；

(3)探究是否存在最值，若存在，求出最值，若不存在，说明理由.

【答案】(1)

(2)零点个数为1

(3)存在，最大值为，没有最小值

【分析】（1）求导，可得，，根据导数的几何意义求切线方程；

（2）设，利用导数判断的单调性和零点，即可得的零点个数；

（3）根据（2）分析的符号，即可得的单调性和最值，结合零点代换运算求解即可.

【详解】（1）因为，，

则，，

所以切线方程为，即.

（2）设，则，

可知在上单调递减，且，，

根据零点存在定理可知在区间上存在唯一零点，即的零点个数为1.

（3）由（2）可知在上单调递减，且存在唯一零点，使得，

当 时，，则在区间上单调递增；

当时，，在上单调递减；

所以的最大值为.

因为，即，

可得，即，

则，

故的最大值为，没有最小值.

11（25-26高三上·河南郑州·月考）已知函数．

(1)若，求曲线在点处的切线方程；

(2)若（为的导函数），求函数在区间上的最大值；

(3)若函数有两个极值点，，证明：．

【答案】(1)；

(2)答案见解析；

(3)证明见解析．

【分析】（1）当时，求出切线斜率，然后得到切线方程；

（2）利用导数通过分类讨论判断函数的单调性，从而求函数的最大值；

（3）把要证结论等价转化为，结合函数的极值点再次把要证结论转化为 ，()，通过构造函数即可证明.

【详解】（1）当时，，

的定义域为．

所以，，

因此曲线在点处的切线方程为，即切线方程为：．

（2）因为，，

①当时，因为，所以，

所以函数在上单调递增，则；

②当，即时，，，

所以函数在上单调递增，则；

③当，即时，函数在上单调递增，在上单调递减，则；

④当，即时，，，函数在上单调递减，则．

综上，当时，；

当时，；

当时，.

（3）要证，只需证：，

若有两个极值点，即函数有两个零点，又，

所以是方程的两个不同实根，

即，解得，

另一方面，由，得，

从而可得，

于是．

不妨设，设，则．

因此， ．

要证，即证：，

即当时，有，

设函数，则，

所以为上的增函数．

，因此，．

于是，当时，有．

所以成立，．