三亚市2024～2025学年度第一学期高三年级学业水平诊断考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1.【答案】A

【解析】由全称命题的否定可知原命题的否定为：$\exists x\geqslant 2,\left(\frac{5}{4}\right)^{x}+\lg x\leqslant 1$,故选 A.

2.【答案】A

【解析】由$\frac{3}{z}=-1-2\mathrm{i}$,故 $z=\frac{-3}{1+2\mathrm{i}}=\frac{-3(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}$,故 $\bar{z}=-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}\mathrm{i}$,故选 A.

3.【答案】C

【解析】由已知 $\boldsymbol{a}=(x,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1)$,得 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(x,1)+3(1,-1)=(x+3,-2)$.因为 $\boldsymbol{a}\parallel(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})$,所以 $-2x=x+3$,解得 $x=-1$,故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$,故选 C.

4.【答案】C

【解析】因为 A 与 B 互斥,则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$,可得 $P(A)=P(A\cup B)-P(B)=0.5-0.3=0.2$,所以 $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.2=0.8$.故选 C.

5.【答案】C

【解析】由题意可得 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)\sin x=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sin 2x+\cos 2x-1)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}$,所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,最大值为$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}$.故选 C.

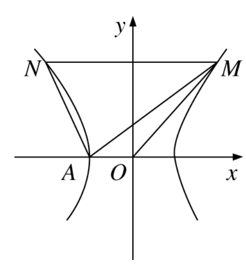
6.【答案】B

【解析】当$\triangle MAB$ 的面积最大时,$\angle AMB=\frac{\pi}{2}$,点 M 到直线 l 的距离为 $2\sqrt{2}$.设直线 l 的方程为 $y=kx$,则 $\frac{|2\sqrt{2}k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{2}$,解得 $k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$,故选 B.

7.【答案】A

【解析】由复合函数的单调性可得 $x\in(0,1]$时,$f(x)$单调递增,故可转换为函数 $h(x)=ax^2+3x+2$ 在 $x\in(1,2)$单调递增,①若 $a<0$,则对称轴 $x_0=-\frac{3}{2a}\geqslant 2$,解得$-\frac{3}{4}\leqslant a<0$;②若 $a=0$,则 $h(x)=3x+2$ 在 $x\in(1,2)$单调递增,满足题意;③若 $a>0$,则对称轴 $x_0=-\frac{3}{2a}\leqslant 1$ 恒成立,且需满足 $a+3+2\geqslant \mathrm{e}^0=1\Rightarrow a\geqslant -4$,综上$a\in\left[-\frac{3}{4},+\infty\right)$,故选 A.

8.【答案】A



【解析】设 $M(x_0,y_0)$,$x_0>a$,$y_0>0$,则 $N(-x_0,y_0)$,$A(-a,0)$,

$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则 $y_0^2=\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$,①则$\angle MAN=\angle NAx-\angle MAx=\alpha$,

所以 $\tan\alpha=\tan(\angle NAx-\angle MAx)=\frac{\tan\angle NAx-\tan\angle MAx}{1+\tan\angle NAx\cdot\tan\angle MAx}$,

$\tan\angle NAx=\frac{y_0-0}{-x_0+a}=\frac{y_0}{a-x_0}$，$\tan\angle MAx=\frac{y_0-0}{x_0+a}=\frac{y_0}{a+x_0}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\frac{y_0}{a-x_0}-\frac{y_0}{a+x_0}}{1+\frac{y_0}{a-x_0}\cdot\frac{y_0}{a+x_0}}=\frac{\frac{2x_0y_0}{a^2-x_0^2}}{1+\frac{y_0^2}{a^2-x_0^2}}$，

②，将①代入②得 $\tan\alpha=\frac{-2b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$，$\tan\beta=\tan\angle MOx=\frac{y_0}{x_0}$，因为 $\tan\alpha\tan\beta=3$，所以 $\frac{-2b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}\times\frac{y_0}{x_0}=$

$\frac{-2b^2}{a^2-b^2}=3\Rightarrow b^2=3a^2$，所以双曲线的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=2$，故选 A.

9.【答案】ABD

【解析】由题意可得 $Y\sim N(650,20^2)$，$P(Y<630)=P(Y<650-20)=P(Y>650+20)\approx0.1587>0.15$，故 C 错误，D 正确；因为 $X\sim N(540,10^2)$，所以 $P(X>550)=P(X>540+10)=P(X<540-10)\approx0.1587$，所以 $P(X>567)<P(X>550)<0.16$，故 A 正确；$P(X<550)=1-P(X>550)\approx1-0.1587=0.8413>0.84$，故 B 正确；故选 ABD.

10.【答案】BD

【解析】A.函数 $f(x)=2x^3-3x^2$，$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=1$，故当 $x\in(-\infty,0)$时 $f'(x)>0$，当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$时 $f'(x)>0$，故 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增，在区间$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $x=0$ 是 $f(x)$的极大值点，故 AC 错误；B.$\because f(x)+f(1-x)=2x^3-3x^2+2(1-x)^3-3(1-x)^2=2x^3-3x^2+2-6x+6x^2-2x^3-3+6x-3x^2=-1$，所以$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$对称，故 B 正确；D.当 $0<x<1$ 时，$-1<x^2-1<x-1<0$，而 $f(x)$在区间$(-1,0)$上单调递增，故 $f(x^2-1)<f(x-1)$，故 D 正确，故选 BD.

11.【答案】ACD

【解析】将$(1,1)$代入 C 的方程，等式两边成立，故 A 正确；对于 C 在 x 轴上方的部分，可知函数 $f(x)=\sqrt{x^3-2x+2}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2}(x^3-2x+2)^{-\frac{1}{2}}(3x^2-2)$，$f'(1)=\frac{1}{2}\neq0$，故 B 错误；过$(1,1)$作 C 的切线，由 B 选项知其斜率，则其方程为 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，将其与 C 的方程联立，得$(x-1)^2\left(x+\frac{7}{4}\right)=0$，故切线与 C 的交点的坐标为$\left(-\frac{7}{4},-\frac{3}{8}\right)$，横纵坐标均为有理数，故 C 正确；设$(x_0,y_0)$是 C 在 y 轴左边的部分上的点，显然 $x_0<0$，则其到坐标原点 O 的距离为$\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^3+x_0^2-2x_0+2}$，要使该距离大于$\sqrt{2}$，只需要 $x_0^3+x_0^2-2x_0>0$，整理得$x_0(x_0^2+x_0-2)=x_0(x_0+2)(x_0-1)$，当 $x_0=-2$ 时，y_0 不存在，可知 $x_0>-2\Rightarrow x_0+2>0$，又因为$x_0(x_0-1)>0$，故 $x_0(x_0+2)(x_0-1)>0$，故 $x_0^3+x_0^2-2x_0>0$ 成立，故 D 正确.

12.【答案】160

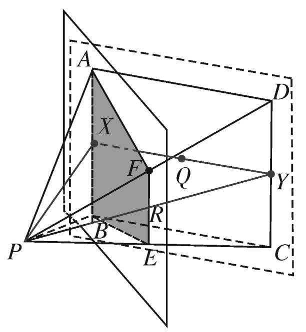
【解析】由题意知$(x^2+2y)^6$ 的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(x^2)^{6-r}(2y)^r=C_6^r2^rx^{12-2r}y^r$，令 $r=3$ 可得 x^6y^3 的系数为 $C_6^3\times2^3=160$，故答案为 160.

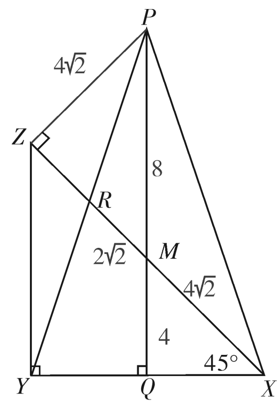
13.【答案】2

【解析】由题意可得$\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$，即$2a+b=ab$，所以$(a-1)(b-2)=ab-2a-b+2=2$，所以$\frac{2}{a-1}+\frac{1}{b-2}=\frac{(a-1)(b-2)}{a-1}+\frac{(a-1)(b-2)}{2(b-2)}=b-2+\frac{a-1}{2}=\frac{a}{2}+b-\frac{5}{2}=\left(\frac{a}{2}+b\right)\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right)-\frac{5}{2}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2$，当且仅当$\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$即$a=b=3$时等号成立，所以$\frac{2}{a-1}+\frac{1}{b-2}$的最小值为2，故答案为2.

14.【答案】72

【解析】记AC与BD的交点为Q，EF中点为R，考虑过点P与AB，CD两边中点X，Y所构成的三角形，如图所示，由侧棱长为13且底面对角线长为10，易知$PQ=12$.





由二面角定义，可知$\angle RXQ=\frac{\pi}{4}$，由题记线段XR与PQ交于点M，易知$\overrightarrow{XM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{XQ}+\frac{1}{3}\overrightarrow{XP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{XP})$，则$XM$为三角形$XYP$的中线，故$R$是$PY$的中点，故$E$，$F$分别为$PC$，$PD$的中点，在三角形$APD$中：

$|\overrightarrow{AF}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AP}^2+\overrightarrow{AD}^2+2|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos\angle DAP}=\frac{\sqrt{297}}{2}$，所以四边形$ABEF$的高$h=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{297}}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=6\sqrt{2}$，过点$P$作$PZ\perp XR$，易知$PZ$即为四棱锥$P-ABEF$的高.在$\triangle PXY$中，由正弦定理得$\frac{XR}{\frac{12}{13}}=\frac{\frac{13}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，解得$XR=6\sqrt{2}$，由$S_{\triangle PRX}=\frac{1}{2}S_{\triangle PXY}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 12\times 8=24=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}\times PZ$，解得$PZ=4\sqrt{2}$，所以$V_{P\text{-}ABEF}=\frac{1}{3}\times S_{ABEF}\times PZ=\frac{1}{3}\times 27\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=72$.

15.【解析】(1)由正弦定理可得$\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A+\sin C$，又$C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq 0$， ………………………… 3分

得到$\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$，即$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，所以$2\sin(A-\frac{\pi}{6})=1$，得到$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$， ………… 5分

又$A\in(0,\pi)$，所以$A-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$，所以$A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，解得$A=\frac{\pi}{3}$. ………………………………………… 7分

(2)由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow 4=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc\geqslant\frac{1}{4}(b+c)^2$ …………… 10分

所以 $b+c\leqslant4$，$C_{\Delta ABC}=a+b+c\leqslant6$，…………………………………………………… 12 分

当且仅当 $b=c=2$ 时取等号 …………………………………………………………………… 13 分

16.【解析】(1) $f'(x)=\dfrac{1-ax}{x}(x>0)$，

①当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无递减区间，…………………… 2 分

②当 $a>0$ 时，$0<x<\dfrac{1}{a}$，$f'(x)>0$；$x>\dfrac{1}{a}$，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，综上，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无递减区间；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. …………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $f(x)$ 有极大值，且极大值大于 a^3-2，所以 $a>0$，且 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{a}$ 处取极大值 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，

$\therefore f\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a-1>a^3-2$，即 $\ln a-1+a^3<0$，…………………………………… 9 分

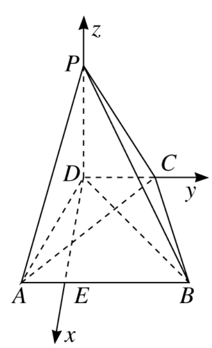
令 $g(x)=\ln x-1+x^3(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+3x^2>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $g(1)=0$，$\therefore g(x)<0$ 当且仅当 $0<x<1$ 时成立，

故 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)>a^3-2$，当且仅当 $0<a<1$ 时成立，因此 a 的取值范围是 $(0,1)$. ………………… 13 分

17.【解析】(1)过 D 作 $DE\perp AB$，垂足为 M，则 $BE=3AE=3$，$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=3$，

因为 $AB\parallel CD$，则 $DE\perp CD$，由点 P 在平面 $ABCD$ 的投影为点 D，可知 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，



如图所示，以 D 为坐标原点，DE，DC，DP 分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，…………………………………………………………………… 3 分

则 $A(3,-1,0)$，$B(3,3,0)$，$C(0,2,0)$，$D(0,0,0)$，可得 $\overrightarrow{AC}=(-3,3,0)$，$\overrightarrow{DB}=(3,3,0)$，

因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=-9+9+0=0$，则 $AC\perp BD$，…………………………………… 5 分

又因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，则 $AC\perp PD$，

且 $BD\cap PD=D$，BD，$PD\subset$ 平面 PBD，可得 $AC\perp$ 平面 PBD，…………………………… 7 分

(2)若 $PD=3$，由(1)可知 $P(0,0,3)$，可得 $\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{PA}=(3,-1,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,3,0)$，

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=3x_1-y_1-3z_1=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=-3x_1+3y_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=3$，则 $y_1=3$，$z_1=2$，可得 $\boldsymbol{m}=(3,3,2)$，…………………………………………… 10 分

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=3x_2-y_2-3z_2=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4y_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=1$,则 $y_2=0,z_2=1$,可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$,则 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5}{\sqrt{22}\times\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{11}}{22}$,…… 14 分

所以平面 PAC 与平面 PAB 夹角的余弦值为$\dfrac{5\sqrt{11}}{22}$.………………………………………… 15 分

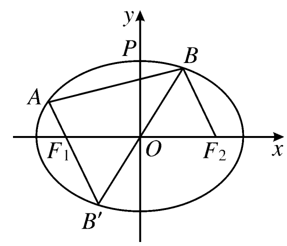
18.【解析】(1)由长轴长为 $4\sqrt{2}$,可得 $2a=4\sqrt{2}$,$a=2\sqrt{2}$.(1 分),因为点 P 上顶点,直线 PF_2 的倾斜角为 $135°$,

所以 $\mathrm{Rt}\triangle OPF_2$ 中,$\angle OF_2P=45°$,则$|OP|=|OF_2|=b=c$, ………………………………… 3 分

又 $b^2+c^2=a^2=8$,则 $b=c=2$.故 C 的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.………………………………………… 5 分

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$, ……………………………………………… 6 分

设 B 关于原点的对称点 $B'(x_3,y_3)$,如右图所示:



由对称性可知 A,F_1,B'三点共线,且$|BF_2|=|B'F_1|$.………………………… 8 分

$\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{1}{|BF_2|}=\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{1}{|B'F_1|}=\dfrac{|AB'|}{|AF_1||B'F_1|}$ ………………………… 10 分

设 AB':$x=my-2$ 代入椭圆方程整理可得$(m^2+2)y^2-4my-4=0$,……… 11 分

易知 $\Delta=32(m^2+1)>0$,且 $y_1+y_3=\dfrac{4m}{m^2+2}$,$y_1y_3=-\dfrac{4}{m^2+2}$;……………………………………… 13 分

所以$|AB'|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_3|=\sqrt{1+m^2}\dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}=\dfrac{4\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$,………………………………… 15 分

又$|AF_1||B'F_1|=\sqrt{m^2+1}|y_1|\sqrt{m^2+1}|y_3|=(m^2+1)\dfrac{4}{m^2+2}$,………………………………………… 16 分

所以$\dfrac{1}{|AF_1|}+\dfrac{1}{|BF_2|}=\dfrac{|AB'|}{|AF_1||B'F_1|}=\dfrac{\dfrac{4\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}}{\dfrac{4(m^2+1)}{m^2+2}}=\sqrt{2}$.……………………………………………… 17 分

19.【解析】(1)当 $n=1$ 时,$S_1=2(a_1-1)$,解得 $a_1=2$;……………………………………………………………… 2 分

当 $n\geqslant 2$ 时,$S_{n-1}=2(a_{n-1}-1)$,所以 $S_n-S_{n-1}=2(a_n-1)-2(a_{n-1}-1)$,……………………………… 4 分

即 $a_n=2a_{n-1}$,从而$\{a_n\}$是首项和公比均为 2 的等比数列,$a_n=2^n$. ……………………………………… 7 分

(2)(i)由 $\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{n\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{n\pi}{3}$ ………………………………………………………… 9 分

得 $2^n\cos\dfrac{n\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left[2^{n+1}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}-2^n\sin\dfrac{n\pi}{3}\right]$. ………………………………………………… 12 分

故 $T_n=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times 2^{n+1}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}-1$. ………………………………………………………………… 14 分

(ii)因为$\left|\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}\right|\in\left\{0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$,故$|T_n+1|=\left|\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{(n+1)\pi}{3}\right|a_n\leqslant a_n$.………………………… 17 分