## 4.1 数列的概念



**作业知识点1 ：数列的概念**

定义：数列是按照一定次序排列的一列数；

数列的项：数列中的每一个数叫做这个数列的项，第一项常称为首项；

数列的表示：数列的一般形式可以写成，简记.

与集合中元素的性质相比较，数列中的项也有三个性质：

①确定性：一个数在不在数列中，即一个数是不是数列中的项是确定的．(与集合相同)

②可重复性：数列中的数可以重复．(与集合不同)如数列，而由组成的集合是．

③有序性：一个数列不仅与构成数列的“数”有关，而且与这些数的排列次序有关．(与集合不同)如与代表不同的数列，而集合与却是相同的．



下列说法正确的是（    ）

A．数列4，7，3，4的首项是4

B．数列中，若，则从第2项起，各项均不等于3

C．数列3，6，8可以表示为

D．，－3，－1，1，，5，7，9，11一定能构成数列

作业**知识点2：数列的分类**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 分类标准 | 名称 | 含义 | 例子 |
| 按项的个数 | 有穷数列 | 项数有限的数列 |  |
| 无穷数列 | 项数无限的数列 |  |
| 按项的大小 | 递增数列 |  |  |
| 递减数列 |  |  |
| 常数列 | 每项都相等的数列 |  |
| 摆动数列 | 每项的大小忽大忽小的数列 |  |



已知数列的通项公式为，则数列为（    ）

A．递增数列 B．递减数列 C．常数列 D．摆动数列

作业**知识点3：通项公式**

如果数列的第项与序号之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个公式叫做这个数列的通项公式.

与是不同的概念，表示数列，而表示的是数列的第项；

数列的项与它的项数是不同的概念，数列的项是指这个数列中的某一个确定的数，它是一个函数值；而项数是指这个数在数列中的位置序号，它是自变量的值.

(3)一个数列的通项公式可以有不同的形式，比如数列，…，其通项公式可以是等.



数列的一个通项公式为（    ）

A． B． C． D．

作业**知识点4：数列与函数的关系**

数列就是定义在正整数集(或它的有限子集)上的函数，其图象是一系列有限或无限孤立的点.

如 数列与函数的比较

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 定义域 |  |  |
| 图象 |  |  |
| 增减性 | 递增数列 | 在递减，在递增 |
| 最值 | 最小项，无最大项 | 最小值，无最大值 |

日后研究数列性质可以从函数角度出发，比如单调性，最值等.



若数列的通项公式为，则关于此数列的图象叙述正确的是（    ）

A．此数列不能用图象表示

B．此数列的图象仅在第一象限

C．此数列的图象为直线

D．此数列的图象为直线上满足的一系列孤立的点

作业**知识点5：递推公式**

若已知数列的第一项(或前项)，且任一项和它的前一项(或前项)间的关系可以用一公式表示，那么这个公式叫做这个数列的递推公式.

(1) 举例：(初始条件)，(递推关系)；

.



已知数列满足，则（    ）

A．11 B．23 C．35 D．47

作业**知识点6：前n项和**

若为数列的前项和，即

则.

(1) 若已知列的前项和，可利用公式求数列通项公式，

(2)证明 若为数列的前项和，根据定义可得，，

，

故当时，；

当时，由得，

即.



已知数列满足，则数列前2025项和为（   ）

A．1012 B．1013 C．2024 D．2025

****

**题型一：数列的概念**

例1．下列说法中正确的是（   ）

A．如果一个数列不是递增数列，那么它一定是递减数列

B．数列的第项为

C．数列1，0，，与，，0，1是相同的数列

D．数列0，2，4，6，可记为

【变式1-1】以下三个结论中正确的个数为（    ）

①是数列；②不是数列；③数列的通项公式是唯一的.

A． B． C． D．

【变式1-2】下列说法正确的是（    ）

A．数列与是相同的

B．数列可以表示为

C．数列与是相同的数列

D．数列的第项为

【变式1-3】下列叙述正确的是（    ）

A．数列是递增数列

B．数列0，1，2，3，…的一个通项公式为

C．数列0，0，0，1，…是常数列

D．数列2，4，6，8与数列8，6，4，2是相同的数列

**题型二：根据数列的前几项写出数列的一个通项公式**

例2. 分别写出下列数列的一个递推关系，并求出各个数列的第7项：

(1)1，2，4，7，11，…；

(2)，2，5，8，11，…；

(3)1，，4，，16，…．

【变式2-1】数列，，，，…的第项为（    ）

A． B． C． D．

【变式2-2】已知，数列，，，…，的项数为（   ）

A． B． C．*m* D．

【变式2-3】写出以下各数列的一个通项公式，并根据你写的通项公式求出各数列的第10项.

(1)；

(2).

**题型三：通项公式的应用**

例3. 已知数列的通项公式，则（    ）

A．81 B．128 C．146 D．164

【变式3-1】已知数列的通项公式为，则（   ）

A．34 B．36 C．38 D．40

【变式3-2】已知，则数列中相等的连续两项是（    ）

A．第9项，第10项

B．第10项，第11项

C．第11项，第12项

D．第12项，第13项

【变式3-3】数列的通项公式分别为，在数列中去掉两个数列的公共项后，小于25的项中质数占比为（    ）

A． B． C． D．

**题型四：判断数列的增减性**

例4. 已知数列的各项均为正数，数列是常数列，则数列（    ）

A．是递增数列 B．是递减数列

C．先递增后递减 D．先递减后递增

【变式4-1】数列的通项公式如下，则递增数列是（    ）

A． B． C． D．

【变式4-2】已知数列满足，则“数列是递增数列”的充分不必要条件是（   ）

A． B． C． D．

【变式4-3】已知为无穷数列，若是递增数列，是递减数列，则（    ）

A．， B．，

C．， D．，

**题型五：根据数列的增减性求参数**

例5. 已知数列满足，若为递增数列，则实数的取值范围为（    ）

A． B．

C． D．

【变式5-1】已知数列的通项公式为，若是单调递增数列，则实数*t*的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【变式5-2】已知数列的通项公式是（），若数列是递增数列，则实数的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【变式5-3】已知数列的通项公式为，若是递增数列，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

**题型六：求数列中的最大（小）项**

例6. 已知数列的通项公式为，则当取得最小值时，（    ）

A．3 B．4 C．5 D．6

【变式6-1】已知数列的通项公式为，则数列的最小项是（    ）

A．第1项 B．第6项 C．第7项 D．第13项

【变式6-2】已知数列的通项公式为，则的最小值为（   ）

A．2 B． C． D．1

【变式6-3】数列的通项公式为满足：，则数列的最大项是第（   ）项．

A．6 B．7 C．8 D．9

**题型七：根据数列递推公式写出数列的项**

例7. 已知在数列中，，则（）

A． B．

C． D．

【变式7-1】数列满足，，则（   ）

A．8 B．4 C．2 D．1

【变式7-2】已知数列满足，，则（    ）

A． B．2 C．3 D．

【变式7-3】已知数列满足，，，则下列说法正确的是（    ）

A． B．

C． D．

**题型八：由递推公式求通项公式**

例8. 在数列中，，，求数列的通项公式.

【变式8-1】在数列中，若，则666是的（    ）

A．第111项 B ．第222项 C．第333项 D．第666项

【变式8-2】在数列中，，，则等于（ ）

A． B．

C． D．

【变式8-3】已知数列满足，，则使得成立的最小自然数为（   ）

A．5 B．6 C．7 D．8

**题型九：由前n项和求项**

例9. 已知数列的前项和，，则的值为（   ）

A． B． C． D．

【变式9-1】数列的前*n*项和，则（    ）

A．140 B．120 C．40 D．52

【变式9-2】设数列的前项和为．若，则（   ）

A．1 B． C．2 D．

**题型十：利用与的关系求通项公式**

例10. 记为首项为1的数列的前项和，且，则（    ）

A． B． C． D．

【变式10-1】已知数列的前项和，则数列的通项公式为（    ）

A． B．

C． D．

【变式10-2】已知数列的前项和为，且满足，则（   ）

A． B．0 C．1 D．2

【变式10-3】已知数列的前*n*项和为，且满足，，．

(1)分别求出数列中的，，的值；

(2)求数列的通项公式．



1下列结论中，正确的是（    ）

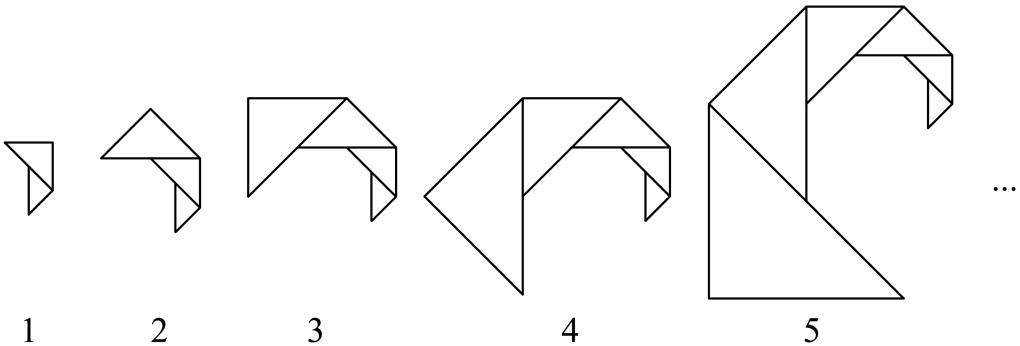
A．数列和数列是相同的数列

B．数列的通项公式的形式是唯一的

C．数列可以看作是一个定义在正整数集（或它的有限子集）上的函数

D．数列不存在通项公式

2如图，下列各图形中第一个最小的等腰直角三角形的面积都是1，后一个等腰直角三角形的斜边恰好是前一个等腰直角三角形的直角边的2倍，则第10个图形的面积为（    ）



A．1023 B．1024 C．2047 D．2048

3已知数列的通项公式为，则取到最小值时的值是（    ）

A． B． C． D．

4数列满足：，，则（    ）

A． B． C． D．

5记不超过*x*的最大整数为，如，.已知数列的通项公式，则使的正整数*n*的最大值为（    ）

A．5 B．6 C．15 D．16

6已知数列的通项，若是递增数列，则实数的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

7已知数列满足，则下列说法正确的是（    ）

A．所有项恒大于等于 B．若，则是单调递增数列

C．若是常数列，则 D．若，则是单调递增数列

8已知数列满足，设为数列的前项和，若，则（   ）

A． B． C． D．

9（多选）已知数列满足，，则（    ）

A． B．数列的最小值为

C．数列为递减数列 D．当时，*n*的最大值为8

10（多选）已知数列满足，，记数列的前项之积为，则下列说法正确的是（    ）

A． B． C． D．

11已知数列的通项公式为．

(1)计算的值；

(2)是不是该数列中的项？若是，应为第几项？若不是，说明理由．

12已知数列的前*n*项和满足．

(1)求的通项公式；

(2)若，恒成立，求实数的取值范围．

## 4.2 等差数列



**作业知识点1 ：等差数列的定义**

如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，记为.

代数形式：是常数)

（1）公差是每一项减前一项，常数指的是与无关；

（2）公差，当时，数列为常数列；当时，数列为递增数列；当时，数列为递减数列

（3））是公差为的等差数列；

是公差为的等差数列；

不是等差数列.



下列数列是等差数列的是（    ）

A．，，， B．1，，，

C．1，，1，－1 D．0，0，0，0

作业**知识点2：等差中项**

若成等差数列，则称与的等差中项，则.

证明 若成等差数列，由等差数列的定义可得，则.



已知和的等差中项是，和的等差中项是，则和的等差中项是（    ）

A． B． C． D．

**作业知识点3 ：等差数列的通项公式**

等差数列的首项为，公差为，则. (由定义与累加法可得)

(1)证明 若等差数列的首项为，公差为，

由等差数列的定义可得，，

所以,

把以上项等式累加可得,

当时，上式为，即上式当时也成立，

故.

等差数列的通项公式由等差数列的定义证明，以上证明方法为累加法.

(2)从函数的角度看等差数列的通项公式．

由等差数列的通项公式可得，

当时，是关于的一次函数；当时，是常数列.

(3)由两点确定一条直线的性质可以得出，已知等差数列的任意两项可以确定这个等差数列．若已知等差数列的通项公式，可以写出数列中的任意一项．

(4)等差数列的通项公式中共含有四个变数，即，，，，如果知道了其中的任意三个数，就可以由通项公式求出第四个数，这一求未知量的过程我们通常称之为“知三求一”．



在数列中，对任意的，，都有，且，则（    ）

A．24 B．25 C．26 D．27

作业**知识点4： 与通项公式有关基本性质**

若数列是首项为，公差为的等差数列，其中，

它具有以下性质：

；

证明 由等差数列通项公式可得，，

两式相减可得，即.

意义 求等差数列任一项或通项公式，不一定要求，可利用任一项（非即可）.

例 若等差数列中，，，则 .

解 .

；

证明 由性质可得.

意义 利用等差数列任意两项可求公差.

例 若等差数列中，，,则公差 .

解 .

若, 则；

证明 由等差数列通项公式可得

，

，

,,

即.

意义 下标和相等，其对应项的和相等.

例 ，但不一定等于。

下标成等差数列且公差为的项组成公差为的等差数列；

证明 ，得证.

例 若是等差数列，则是公差为的等差数列,均是公差为的等差数列.

数列(是常数)是公差是的等差数列；

证明 利用等差数列的定义可证.

若数列也是等差数列，则数列(为非零常数)也是等差数列；

证明 利用等差数列的定义可证.



已知为等差数列，，，则（   ）

A．6 B．5 C．12 D．8

作业**知识点5：等差数列的前项和公式**

等差数列的首项为，公差为，则其前项和为

，

(1)证明 (1)

(2)

两式相加可得，

有等差数列的性质：若， 则；

可得，

故；

又，所以.

以上方法是倒序相加法.

(2)等差数列的前项和，可写成，

当时，可看成关于的二次函数.



记为等差数列的前项和.若，则（    ）

A．12 B．24 C．36 D．48

作业**知识点6：与前项和有关的基本性质**

若数列是首项为，公差为的等差数列，前项和为，它具有以下性质：

成等差数列；

**证明**

；

即；

同理；

归纳得证.

**例** 是一等差数列的前项和，成等差数列.

.

**证明** .

**例** 是一等差数列的前项和，，.



设等差数列前项和为.若，则（    ）

A． B． C．1 D．



**题型一：等差数列的判定与证明**

例1.1下列数列中等差数列的是（    ）

A． B． C． D．

例1.2 已知数列是等差数列，下面的数列中①②③④必为等差数列的个数是（    ）

A．1 B．2 C．3 D．4

【变式1-1】数列{*an*}的通项公式为*an*＝5－3*n*，则此数列（    ）

A．是公差为－3的等差数列 B．是公差为5的等差数列

C．是首项为5的等差数列 D．是公差为*n*的等差数列

【变式1-2】已知为等差数列，则下面数列中一定是等差数列的是（    ）

A． B． C． D．

【变式1-3】若数列为等差数列，则下列说法中错误的是（    ）

A．数列，，，…，…为等差数列

B．数列，，，…，，…为等差数列

C．数列为等差数列

D．数列为等差数列

**题型二：等差数列通项公式的基本量计算**

例2. 在数列中，对任意的，，都有，且，则（    ）

A．24 B．25 C．26 D．27

【变式2-1】在等差数列 中， ， ，则 的公差为（   ）

A．1 B．2 C．3 D．4

【变式2-2】首项为的等差数列，从第5项起开始为正数，则公差的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【变式2-3】已知数列是首项为1的等差数列，且，则（    ）

A． B．或 C． D．或

**题型三：求等差中项**

例3. 已知和的等差中项是4，和的等差中项是5，则和的等差中项是（    ）

A．8 B．6 C．4.5 D．3

【变式3-1】如果三角形的三个内角的度数成等差数列，那么中间的角是多少度（    ）

A．30° B．60° C．90° D．45°

【变式3-2】方程的两根的等差中项为（    ）

A． B．

C． D．

【变式3-3】已知*a*，*b*都是实数，若*b*是*a*，1的等差中项，则的最小值为（   ）

A． B． C． D．2

**题型四：利用等差数列的性质计算**

例4. 1 已知数列为递增的等差数列，若，则的公差为（    ）

A．4 B．3 C．2 D．1

例4. 2在等差数列中，，当取得最小值时，（    ）

A．7 B．14 C．2021 D．2028

【变式4-1】已知数列为等差数列，，则（    ）

A．16 B．19 C．25 D．29

【变式4-2】在各项均为正数的等差数列中，若，则的最小值为（   ）

A． B． C．4 D．

【变式4-3】已知等差数列为递增数列，且满足，，则其通项公式为（    ）

A． B．

C． D．

**题型五：等差数列的单调性**

例5. 设是所有项都不为0的无穷等差数列，则“为递减数列”是“为递增数列”的（   ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【变式5-1】已知等差数列单调递增且满足，则的取值范围是（    ）

A． B． C． D．

【变式5-2】已知数列的首项为，对于任意的都有，则“为单调递增的数列”是“”的（    ）

A．必要不充分条件 B．充分不必要条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【变式5-3】在等差数列中，记，则数列（    ）

A．有最大项，有最小项 B．有最大项，无最小项

C．无最大项，有最小项 D．无最大项，无最小项

**题型六：求等差数列的前n项和**

例6. 已知等差数列的前项和为，若与是方程的两根，则（   ）

A．41 B．42 C．43 D．44

【变式6-1】记等差数列的前*n*项和为，若，，则（    ）

A．63 B．70

C．84 D．126

【变式6-2】设等差数列的前项和为，若，则（   ）

A．8 B．52 C．45 D．72

【变式6-3】设数列，是项数相同的等差数列，若，，，则数列的第100项为（   ）

A．1 B．0

C．100 D．10 000

**题型七：等差数列前n项和的基本量计算**

例7. 设是等差数列的前*n*项和，若，，则的公差（   ）

A．1 B．2 C．3 D．4

【变式7-1】已知等差数列的前项和为，若，，则数列的公差为（    ）

A．2 B．1 C． D．

【变式7-2】已知数列为等差数列，的前项和为，，，则（    ）

A． B． C． D．

【变式7-3】已知等差数列的前项和为，且，则（    ）

A．10 B．11 C．12 D．13

【变式7-4】已知公差为的等差数列的前项和为，若，，则下列说法错误的是（   ）

A．

B．

C．若，则的最大值为12

D．前100项中，被7除余3的有14项

**题型八：等差数列前n项和的性质及运用**

例8. 1已知等差数列的公差，前项和为，若，则（   ）

A．6 B．5 C．4 D．3

例8. 2 （多选）设等差数列的前项和为，公差为，若，，则下列结论正确的是（ ）

A． B．当时，取得最大值

C． D．使得成立的最大自然数是15

【变式8-1】已知等差数列的前项和为，若，则（    ）

A．24 B．30 C．60 D．120

【变式8-2】各项均为正数的等差数列的前*n*项和为，若，则的最大值为（   ）

A．20 B．64 C．45 D．50

【变式8-3】数列，均为等差数列，若，则（   ）

A． B． C．1 D．

**题型九： 求等差数列的前n项和的最值**

例9. 等差数列中，，．记数列前*n*项和为，下列选项正确的是（    ）

A．数列的公差为3 B．取最小值时，

C． D．数列的前10项和为50

【变式9-1】若为等差数列的前项和，，则的最小值为（   ）

A． B． C． D．

【变式9-2】已知等差数列的前项和为，若，，则使最大的的值为（    ）

A．7 B．8 C．7或8 D．8或9

【变式9-3】已知等差数列的前项和存在最大值，且，则取得最小正值时为（    ）

A．1 B．27 C．28 D．29

【变式9-4】记为等差数列的前项和，且满足，.

(1)求；

(2)是否存在最值，如果存在，求出取得最值时的值？如果不存在，请说明理由.

**题型十：等差数列的简单应用**

例10. 《算法统宗》是我国古代数学名著，由明代数学家程大位编著，它对我国民间普及珠算和数学知识起到了很大的作用．在这部著作中，许多数学问题都是以歌诀形式呈现的，如“九儿问甲歌”：一个公公九个儿，若问生年总不知，自长排来差三岁，共年二百又零七，借问长儿多少岁，各儿岁数要详推．在这个问题中，这位公公的长儿的年龄为（    ）

A．23岁 B．32岁 C．35岁 D．38岁

【变式10-1】某学校为了庆祝建校60周年，计划对学校校门的梯形花坛进行美化.计划第一排摆放12个花盆，从第二排开始每排比前一排多摆放6个花盆，梯形花坛最多摆放10排，则该校花坛铺满一共需要的花盆数是（   ）

A．380 B．390 C．400 D．600

【变式10-2】《哪吒2》的播放掀起了观影热潮，某影院欲新建一个播放厅，可以容纳1160个座位，若第一排安排20个座位，从第二排起，后一排比前一排多4个座位，则播放厅最多可以建的座位的排数为（    ）

A．24 B．22 C．20 D．18

【变式10-3】《周髀算经》中有这样一个问题：从冬至日起，依次为小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种，这十二个节气，其日影长依次成等差数列，若小寒、雨水、清明日影长之和为36尺，前八个节气日影长之和为92尺，则谷雨日影长为（ ）

A．15 B．16 C．17 D．18



1若数列的通项公式，则此数列（    ）

A．是公差为-2的等差数列 B．是公差为2的等差数列

C．是公差为3的等差数列 D．是首项为3的等差数列

2已知是公差不为0的等差数列，若，则（   ）

A．12 B．13 C．14 D．15

3已知，为和的等差中项，则的最小值为（    ）

A． B． C． D．

4已知数列是等差数列，且，则（    ）

A． B． C． D．

5已知公差为正数的等差数列，若，则等于（    ）

A．11 B．9 C．7 D．11或1

6设为等差数列的前项和，且，若，则的最小值为（    ）

A．28 B．29 C．30 D．31

7已知等差数列的前项和满足：，则数列的最小项是第（    ）项.

A．2026 B．2027 C．4048 D．4049

8（多选）设数列的前项和为，，，则下列说法正确的是（    ）

A．是等差数列

B．当或时，取得最大值

C．数列的前项和是

D．，，成等差数列，公差为

9已知无穷等差数列的各项均为正整数，且，则的最小值是 .

10设数列 的前 项和为 ， 若 .

(1)求 ， 并证明: 数列 是等差数列;

(2)求 .

11已知是等差数列的前项和，.

(1)求的通项公式；

(2)求的最值；

(3)设，求数列的前20项和.

## 4.3 等比数列



**作业知识点1 ：等比数列的定义**

如果一个数列从第二项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，那么这个数列叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，记为.

代数形式：是常数， 或 是常数，

(1) 公比是每一项与它的前一项的比，常数指的是与无关;

(2)等比数列中(否则数列会出现,不可能符合等比数列定义)；

(3) 是公比为的等比数列；

是公比为的等比数列；

不是等比数列.



已知下列各数列：①，，，；②1，，3，；③*a*，*a*，*a*，*a*；④，，，．其中一定是等比数列的是(    )．

A．①②③ B．①② C．①②④ D．①②③④

作业**知识点2：等比中项**

若成等比数列，则称与的等比中项,则；

**证明** 若成等比数列，由等比数列的定义可得，即.



若是与4的等比中项，则（    ）

A．1 B． C．2 D．4

**作业知识点3 ： 通项公式**

等比数列的首项为，公比为，则.(由定义与累乘法可得)

(1)证明 由等比数列的定义可得，，

所以,,,…,

把以上个等式累乘可得,即,

当时，，即当时上式也成立，

故.

以上的方法称之为累乘法.

(2) 通项公式告诉你：已知等比数列的首项与公比可求得任何一项

(3)等比数列的通项公式可整理为,当，且时，可以看成的指数函数型函数.比如等比数列的各点都在指数函数上.

(4)偶数项的正负、奇数项的正负相同(,故同号，即偶数项的正负相同；奇数项同理).



等比数列中，，公比，若，则（    ）

A．6 B．7 C．8 D．9

作业**知识点4：等比数列的基本性质**

设是首项为, 公比为的等比数列，其中，那么

；

证明 由等比数列通项公式可得，，

两式相除可得，即.

意义 求等比数列任一项或通项公式，不一定要求，可利用任一项（非即可）.

例 若等比数列中，，，则 .

；

证明 由性质可得.

意义 利用等比数列任意两项可求公比.

例 若等比数列中，，,则公比 .

若 则 ；

证明 由等比数列通项公式可得

，，

,,即.

意义 下标和相等，其对应项的和相等.

例 ，但不一定等于。

数列(是不为零的常数)仍是公比为的等比数列；若数列是公比为的等比数列，

则数列是公比为的等比数列；

证明 ,得证.

下标成等比数列且公比为的项组成公比为的等比数列.

证明 ,得证.



在等比数列中，是方程的两个根，则（    ）

A．4 B． C．8 D．

作业**知识点5：等比数列的前项和**

等比数列的首项为，公比为，则其前项和为

(1)证明 等比数列的首项为，公比为，则其前项和是

，

两边乘以公比得

得，

当时，；

当时，,

故等比数列的前项和为.

以上的方法称之为错位相减法.

(2)当公比时，，是的正比例函数;

当公比时，，它可变形为，设，上式可写成.由此可见，非常数列的等比数列的前项和是由关于的一个指数式与一个常数的和构成的，而指数式的系数与常数项互为相反数．

即若某数列的前项和公式为 (，且，)，则此数列一定是等比数列．



已知为递增等比数列，其前项和为，若，，则（   ）

A． B．27 C．81 D．或81

作业**知识点6：基本性质**

(1)若,则成等比数列，且公比；

(，是偶数时，)

证明 .

(2)在等比数列中，当总项数为时，.

证明 .

(3).

证明

.



记为等比数列的前项和，若，则的公比为（   ）

A．2 B． C． D．



**题型一：等比数列的判定与证明**

例1．设是等比数列，有下列四个命题：

①是等比数列；        ②是等比数列；

③是等比数列；        ④是等比数列.

其中正确命题的个数是（    ）

A．1 B．2 C．3 D．4

【变式1-1】下列数列不是等比数列的是（    ）

A．（为常数，） B．

C． D．

【变式1-2】若数列的通项公式为，则这个数列是一个（    ）

A．以2为首项，以3为公比的等比数列

B．以2为首项，以为公比的等比数列

C．以为首项，以3为公比的等比数列

D．以为首项，以为公比的等比数列

【变式1-3】已知是等比数列，下列数列一定是等比数列的是（    ）

A．（*k*∈**R**） B． C． D．

**题型二：等比数列通项公式的基本量计算**

例2. 在正项等比数列中，，且，，10成等差数列，则的值为（    ）

A． B． C．18 D．24

【变式2-1】已知数列是单调递增的等比数列，若，则正整数（    ）

A． B． C． D．

【变式2-2】在等比数列中，，，则公比的值为（    ）

A．4 B． C．2 D．

【变式2-3】已知等比数列是递增数列，且的前3项和为39，，则（   ）

A．27 B．81 C． D．

**题型三：求等比中项**

例3.已知是公差不为零的等差数列，，若，，成等比数列，则（    ）

A．11 B．12 C．13 D．14

【变式3-1】已知实数成等比数列，则（   ）

A． B． C． D．

【变式3-2】设正数满足为与的等差中项，为与的等比中项，若，则（    ）

A．4.5 B．3 C．3.5 D．4

【变式3-3】已知数列是递增的等差数列，，且是与的等比中项，则（    ）

A．9 B．11 C．13 D．15

**题型四：利用等比数列的性质计算**

例4. 1已知等比数列的各项均为正数，且，则的值为（    ）

A．3 B．6 C．9 D．18

例4. 2设是等比数列，且，，则（    ）

A．12 B．2 C．30 D．32

【变式4-1】已知数列为等比数列，，，则（   ）

A．1 B．2 C．4 D．6

【变式4-2】设各项为正数的等比数列中，，则取最小值时，等于（    ）

A． B． C． D．

【变式4-3】已知等比数列的公比*q*为整数，且，，则（    ）

A．2 B．3 C．-2 D．-3

【变式4-4】在等比数列中，，则的值为（    ）

A．48 B．72 C．144 D．192

**题型五：等比数列的指数函数特征**

例5. 设无穷等比数列的公比为，前项积为，则“有最大值”是“”的（   ）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

【变式5-1】等比数列的公比为，则“”是“”的（   ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分又不必要条件

【变式5-2】已知数列为等比数列，，公比，则数列的前项积最大时，（   ）

A． B． C． D．

【变式5-3】已知数列为等比数列，，公比．若是数列的前项积，则取得最大值时的值为（    ）

A．5 B．6 C．7 D．8

**题型六：等比数列的单调性**

例6. 数列的通项公式为，当的前*n*项积最大时，*n*为（    ）

A．2 B．3 C．4 D．5

【变式6-1】已知等比数列，则“”是“数列为递增数列”的（    ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

【变式6-2】已知等比数列，满足，则下面说法正确的是（    ）

A．若，则数列是递增数列 B．若，则数列是递减数列

C．若，则数列是递增数列 D．若，则数列是递增数列

【变式6-3】在等比数列中，，，则当取得最小值时， （    ）

A． B． C． D．

**题型七：求等比数列的前n项和**

例7. 设等比数列的前*n*项的和为，，，则（    ）

A． B． C． D．

【变式7-1】已知是等比数列的前项和，若，，则（    ）

A．1028 B．1023 C．1024 D．1025

【变式7-2】已知等比数列前项和为， 若，，则（    ）

A．128 B．255 C．256 D．511

【变式7-3】已知数列的前项和为且，则（    ）

A． B． C． D．17

**题型八：等比数列前n项和的基本量计算**

例8. 记为等比数列的前项和，若，，则（    ）．

A．10 B．13 C．9 D．27

【变式8-1】已知为等比数列的前*n*项和，若，则（   ）

A．0 B．3 C． D．12

【变式8-2】已知为等比数列前*n*项和，若，则（    ）

A．10 B．9 C．6 D．4

【变式8-3】已知等比数列的公比，记为数列的前项和，若，则 的公比为（    ）

A．2 B．1 或 2

C． D．1 或

**题型九：等比数列前n项和的性质及运用**

例9.1 等比数列，是的前项和，，则为（    ）

A．63 B．108 C．75 D．83

例9.2 已知一个项数为偶数的等比数列所有项之和为所有奇数项之和的3倍，前2项之积为8，则（   ）

A．2 B．-2 C．-1 D．2或-2

【变式9-1】已知等比数列的前*n*项和为，若，，则（   ）

A．49 B．63 C．84 D．105

【变式9-2】记为等比数列的前*n*项和，若，则（    ）

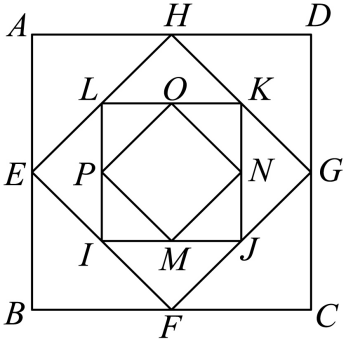
A．4 B．6 C．7 D．8

【变式9-3】记为正项等比数列的前项和，若，则（   ）

A．12 B．22 C．30 D．38

【变式9-4】已知一个等比数列的项数是是偶数，其奇数项之和1011，偶数项之和为2022，则这个数列的公比为（      ）.

A．8 B． C．4 D．2

**题型十：等比数列的简单应用**

例10. 如图，正方形的边长为，取正方形各边的中点，，，，作第2个正方形，然后再取正方形洛边的中点，，，，作第3个正方形的，依此方法一直继续下去.则前6个正方形面积和为（   ）

A． B． C． D．8

【变式10-1】云冈石窟，古称为武州山石窟寺，是世界文化遗产.若某一石窟的某处“浮雕像”共7层，每一层的“浮雕像”个数是其下一层的2倍，共有1016个“浮雕像”，这些“浮雕像”构成一幅优美的图案，若从最下层往上每一层的“浮雕像”的个数构成数列，则的值为（    ）

A．8 B．12 C．14 D．16

【变式10-2】我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题：“今有人持金出五关，前关二税一，次关三而税一，次关四而税一，次关五而税一，次关六而税一，并五关所税，适重一斤.问本持金几何？”其意思为“今有人持金出五关，第1关收税金为持金的，第2关收税金为剩余金的，第3关收税金为剩余金的，第4关收税金为剩余金的，第 5关收税金为剩余金的，5关所收税金之和恰好重1斤.问原来持金多少?”.记这个人原来持金为斤，则（    ）

A． B． C． D．

【变式10-3】近日，某网站发表了一项针对新冠肺炎疫情数据的最新分析，该研究显示，新冠病毒的中位潜伏期约4.75天，即病毒侵入人体到人体出现反应或开始呈现症状时平均4.75天；基本传染数（*R0*）达3.77，即每位患者平均传染3.77人．假如有一种细菌能够杀死新冠病毒，每个细菌在每秒钟杀死一个新冠病毒的同时自身分裂为2个，现有一个这样的细菌和500个病毒，则细菌将新冠病毒全部杀死至少需要（    ）

A．7秒钟 B．8秒钟 C．9秒钟 D．10秒钟



1已知是等差数列，则下列数列必为等比数列的是（    ）

A． B． C． D．

2正项等比数列的公比为,成等差数列，则值为（   ）

A． B．1或 C．1 D．1或

3已知等差数列的公差不为0，成等比数列，且，则公差（    ）

A．1 B．2 C．3 D．4

4已知数列为等比数列，公比为，且.若，则正整数的值是（   ）

A．4 B．5 C．6 D．7

5数列为等比数列，是它的前项和，已知，且与的等差中项为，则

A．31 B．32 C．16 D．15

6设等比数列的前项和为，若，则（　　）

A．8 B．10 C．14 D．18

7算法统宗是明朝程大位所著数学名著，其中有这样一段表述：“远看巍巍塔九层，红光点点倍加增，共灯五百一十一”，其意大致为：有一栋九层宝塔，每层悬挂的红灯数为上一层的两倍，共有盏灯，则该塔中间一层有（    ）盏灯.

A． B． C． D．

8公比为*q*的等比数列，其前*n*项和为，前*n*项积为，满足．则下列结论正确的是（    ）

A． B．的最大值为

C．的最大值为 D．

9（多选）设首项为1的数列前*n*项和为，已知，则下列结论正确的是（   ）

A．数列为等比数列 B．数列的前*n*项和

C．数列的通项公式为 D．数列不是等比数列

10已知等差数列的前项和为，且，等比数列的首项为1，若，则的值为 ．

11已知等差数列的前*n*项和为，.

(1)求的通项公式；

(2)若，求前*n*项和.

12记数列的前项和为，已知.

(1)设，证明：数列为等比数列，并求数列的通项公式；

(2)设，求数列的前项和.