

## 数 学

考生注意:

- 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

**一、单项选择题:**本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- 已知复数  $z$  在复平面内对应的点为  $(1, -1)$ , 则  $|\bar{z} + 1 + 2i| =$ 
  - A.  $\sqrt{5}$
  - B. 3
  - C.  $\sqrt{13}$
  - D. 5
- 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $a = 2, b = 3, \sin A = \frac{1}{2}$ , 则  $\sin B =$ 
  - A.  $\frac{3}{4}$
  - B.  $\frac{2}{3}$
  - C.  $\frac{1}{3}$
  - D.  $\frac{1}{4}$
- 某机构统计了 1 000 名演员的学历情况,制作出如图所示的饼状图,其中本科学历的人数为 630. 现按比例用分层随机抽样的方法从中抽取 200 人,则抽取的硕士学历的人数为
 

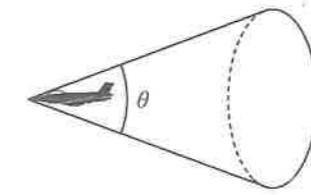
学历	百分比
博士及以上	2%
硕士	17%
专科	5%
本科	63%
高中及以下	5%

  - A. 11
  - B. 13
  - C. 22
  - D. 26
- 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比为 3,  $a_2 + a_4 = 12$ , 则  $a_5 - a_1 =$ 
  - A. 20
  - B. 24
  - C. 28
  - D. 32

5. 已知  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 且  $\tan \alpha = -2$ , 则  $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) =$

- A.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
- B.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$
- C.  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$
- D.  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

6. 当飞机超音速飞行时,声波会形成一个以飞机前端为顶点,飞机的飞行方向为轴的圆锥(如图),称为“马赫锥”. 马赫锥的轴截面顶角  $\theta$  与飞机的速度  $v$ 、音速  $c$  满足关系式  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{c}{v}$ . 若一架飞机以 2 倍音速沿直线飞行,则该飞机形成的马赫锥在距离顶点 30 m 处的截面圆面积为



- A.  $100\pi \text{ m}^2$
- B.  $300\pi \text{ m}^2$
- C.  $600\pi \text{ m}^2$
- D.  $900\pi \text{ m}^2$

7. 已知正实数  $a, b, c$  满足  $\left(\frac{1}{3}\right)^a = \log_3 a$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_3 b$ ,  $c = \log_{\frac{1}{3}} c$ , 则
 

- A.  $a < b < c$
- B.  $c < b < a$
- C.  $b < c < a$
- D.  $c < a < b$

8. 已知  $F$  是抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点, 过  $F$  且倾斜角为  $\frac{\pi}{3}$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $M, N$  两点, 与  $C$  的准线交于点  $P$ (点  $N$  在线段  $MP$  上),  $|PN| = 2$ , 则  $|MF| =$ 

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

**二、多项选择题:**本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

- 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知点  $A(-2, 0), B(2, 0)$ ,  $P$  是一个动点, 则下列说法正确的是
  - A. 若  $|PA| + |PB| = 4$ , 则点  $P$  的轨迹为椭圆
  - B. 若  $||PA| - |PB|| = 2$ , 则点  $P$  的轨迹为双曲线
  - C. 若  $|PA|^2 - |PB|^2 = 4$ , 则点  $P$  的轨迹为一条直线
  - D. 若  $|\vec{PA} + \vec{PB}| = |\vec{PA} - \vec{PB}|$ , 则点  $P$  的轨迹为圆

10. 已知函数  $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$  的一个最大值点为  $x = -\frac{\pi}{12}$ , 与之相邻的一个零点为  $x = \frac{\pi}{6}$ , 则
 

- A.  $f(x)$  的最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$
- B.  $f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$  为奇函数
- C.  $f(x)$  在  $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$  上单调递增
- D.  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{4}]$  上的值域为  $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

11. 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 点  $P$  满足  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}$ , 其中  $\lambda \in [1, +\infty)$ , 则下列说法正确的是

- A. 若  $A, B, D, A_1, P$  在同一球面上, 则  $\lambda = 1$
- B. 若  $AB \parallel$  平面  $A_1DP$ , 则  $\lambda = 2$
- C. 若点  $P$  到  $A, B, D, A_1$  四点的距离相等, 则  $\lambda = 3$
- D. 若  $A_1P \perp$  平面  $PBD$ , 则  $\lambda = \frac{3}{2}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知集合  $A = \{1, 2, 4\}$ ,  $B = \{a, a^2\}$ , 若  $A \cap B = B$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

13.  $(x - 2y + 1)^6$  的展开式中  $x^2y^3$  的系数为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1, \end{cases}$  若  $f(ax) > f(\ln x)$  对任意  $x \in (1, e)$  恒成立, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$ .

(I) 求  $a_n$ ;

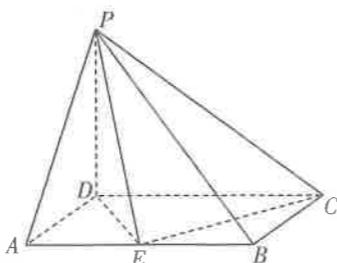
(II) 若  $b_n = a_n \times 2^{\frac{a_n}{3}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

16. (15 分)

如图, 已知四棱锥  $P - ABCD$  的体积为 8,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ , 四边形  $ABCD$  为矩形,  $E$  为棱  $AB$  的中点, 且  $\triangle PDE$  的面积为  $3\sqrt{2}$ .

(I) 求点  $B$  到平面  $PDE$  的距离;

(II) 若  $CE \perp PE$ , 求平面  $PDE$  与平面  $PBC$  的夹角的余弦值.



17. (15 分)

如果一双曲线的实轴及虚轴分别为另一双曲线的虚轴及实轴, 则这两双曲线互为“共轭双曲线”. 已知双曲线  $\frac{y^2}{m^2} - x^2 = 1 (m > 0)$  的共轭双曲线  $C$  的离心率为  $\sqrt{3}$ .

(I) 求  $C$  的方程;

(II) 若直线  $l: y = k(x - 1)$  与  $C$  的右支交于  $A, B$  两点, 且以线段  $AB$  为直径的圆与  $y$  轴相切, 求  $k^2$  的值.

18. (17 分)

某学校有甲、乙、丙三名保安, 每天由其中一人管理停车场, 相邻两天管理停车场的人不相同. 若某天是甲管理停车场, 则下一天有  $\frac{1}{2}$  的概率是乙管理停车场; 若某天是乙管理停车场, 则下一天有  $\frac{2}{3}$  的概率是丙管理停车场; 若某天是丙管理停车场, 则下一天有  $\frac{1}{3}$  的概率是甲管理停车场. 已知今年第 1 天管理停车场的是甲.

(I) 求第 4 天是甲管理停车场的概率;

(II) 求第  $n$  天是甲管理停车场的概率;

(III) 设今年甲、乙、丙管理停车场的天数分别为  $X, Y, Z$ , 判断  $E(X), E(Y), E(Z)$  的大小关系. (给出结论即可, 不需要说明理由)

19. (17 分)

已知函数  $f(x) = 2e^x - 2ax, a \in \mathbb{R}$ .

(I) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(II) 若不等式  $f(x) \geq x^2 + a^2$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.