UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO
INGENIERÍA CIVIL EN INFORMÁTICA
FACULTAD DE INGENIERÍA

Introducción al Calculo
Geometría Analítica

Secciones Cónicas

Jorge Soto
Christian Verdugo

Profesor:
Tomas Paredes
Semestre 1, 2023

26 de mayo de 2023

Índice

1. Introducción

Las secciones cónicas forman parte importante de nuestro mundo hoy en día, ya que gracias a ellas podemos describir movimientos, u objetos que son necesarios en nuestra vida cotidiana, por lo tanto el objetivo de este informe es contextualizar y describir un poco el cuando fueron descubiertas o creadas estas figuras de forma matemática, como también como es que se forman estas a base de la figura del Conoide que se explicara mas adelante dentro del informe además de exponer un código hecho en Python para resolver la problemática del puente colgante y su cantidad de cables necesarios según su largo.
Enlace vídeo [**Hazme Clic**]

2. Desarrollo

2.1. Origen de las secciones cónicas

Descubiertas aproximadamente poco después del año 600 Antes de Cristo. eran figuras conocidas en sus tiempos con distintos nombres como también bastante utilizadas, pero no fue hasta que Apolonio en el siglo III Antes de Cristo que se empezó a usar el nombre de las respectivas Cónicas como Elipse(Que significa Deficiencia) o Hipérbola(Que significa avanzar mas allá). Apolonio captó cómo a partir de la consideración de un solo cono se llega a la obtención de las tres cónicas según la inclinación diversa del plano de sección. Gracias a estos estudios y aportes iniciales se marco un antes y un después en los descubrimientos matemáticos europeos de su tiempo. Pero no fue hasta mucho después en la primera mitad del Siglo XVII que nace la Geometría Analítica gracias a los avances de Fermat y Descartes, su uso fue principalmente enfocado en la Astronomía, Arte de la Guerra, Mecánica y la Navegación.

Por lo tanto, ¿Que es una Sección Cónica?, Una superficie o sección cónica esta generada por el giro de una recta g, que llamamos generatriz, alrededor de otra recta e, eje, con el cual se corta en un punto V, vértice.

- **g:** La Generatriz
- **e:** El Eje
- **v:** El Vértice

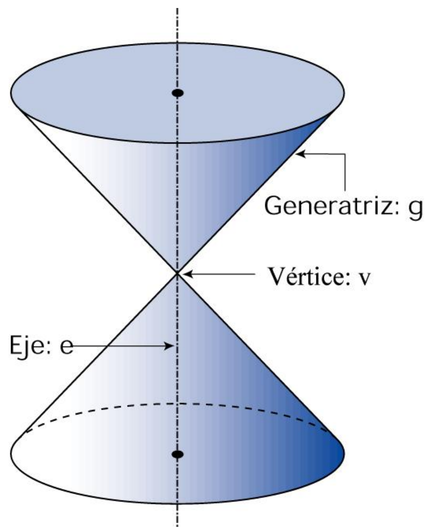

Figura 1: Sección cónica

La Figura formada por esta acción se llama Conoide. Y a partir de este se pueden formar las siguientes figuras:

2.1.1. Circunferencia

Se genera de la intersección de un cono y un plano cuando este es perpendicular al eje. El radio de la circunferencia dependerá de la altura a la que se realice el corte, dando como resultado desde un solo punto (cuando el corte se realiza en el punto medio del cono) hasta una circunferencia de radio infinito.

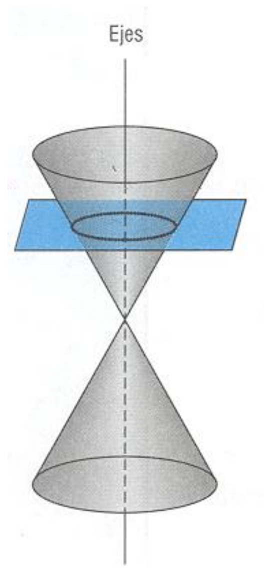

Figura 2: Circunferencia

Aplicaciones de la Circunferencia

- **Aplicación 1:** En la naturaleza para una de las ramas de la biología que estudia la edad de los arboles(Dendrocronología) quieren saber la edad de uno de estos, lo talan y miran en su tronco cuantos anillos o circunferencias tienen y el número de estos son los años de vida que tendría el árbol.

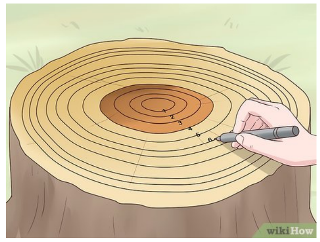

Figura 3: Anillos de un Árbol

- **Aplicación 2:** En la Industria y también en uso cotidiano uno de sus usos mas comunes que podemos encontrar es gracias a la invención de la rueda ya que con ella podemos transportarnos con facilidad ya que otras figuras geométricas no son muy óptimas para el movimiento continuo.

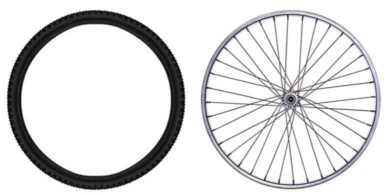

Figura 4: Circunferencia vs Llanta

- **Aplicación 3:** La Circunferencia en el Sistema Horario, vista desde un reloj análogo, este usa un circulo para dividir al día en 12 partes exactamente iguales.

Figura 5: Reloj y sus Divisiones

2.1.2. Elipse

Su generación es cuando el corte que hace el plano es aplicado con un ángulo que no sea paralelo a la generatriz y que forme con el mismo un ángulo mayor que el que forman eje y generatriz, por lo tanto su tamaño dependerá de la inclinación: a mayor inclinación, mayor será la elipse.

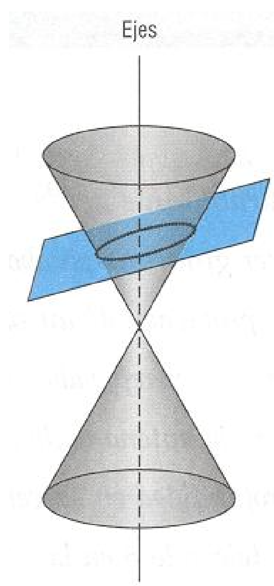

Figura 6: Obteniendo la Elipse

Aplicaciones de la Elipse

- **Aplicación 1:** El Litotriptor: es un aparato tiene la capacidad de eliminar los cálculos renales, se coloca al paciente en uno de sus focos, posteriormente se concentran una serie de ondas en su segundo foco que después serán enviados al paciente para la eliminación de dichos cálculos.Esta maquina es uno de los avances tecnológicos mas importantes de nuestra era a base de los estudios de la elipse.

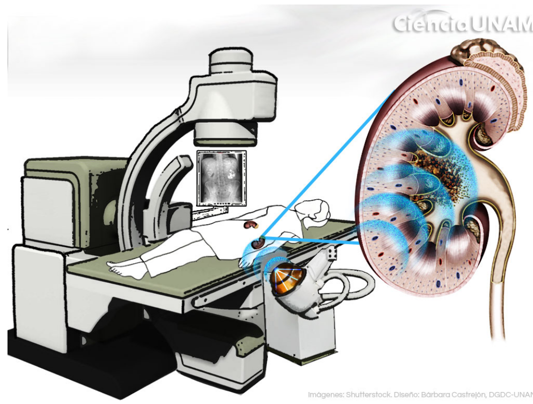

Figura 7: Litotriptor

- **Aplicación 2:**Una aplicación importante de la elipse es en la Física Astronómica con el descubrimiento de Kepler: los planetas y satélites tienen trayectorias elípticas; siendo el Sol uno de los focos, ya que en el caso de que las trayectorias fueran circulares solo existiría una estación en todo el año.

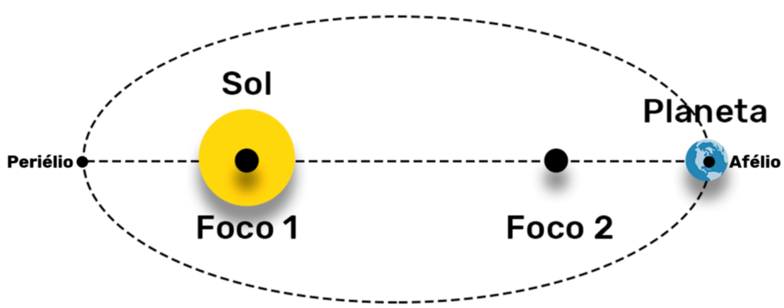

Figura 8: Orbita en torno al Sol

- **Aplicación 3:** Gracias a que sabemos que los planetas hacen trayectorias Elípticas, en la Ingeniería Aeroespacial esto se aplica a los los satélites artificiales para comunicaciones y asuntos científicos creados por el hombre que orbitan al rededor de la tierra de la misma forma que cualquier objeto astronomico.

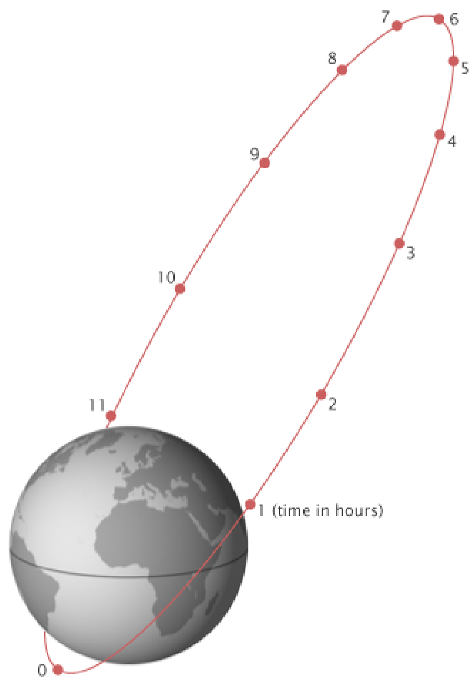

Figura 9: Orbita de un Satélite

2.1.3. Parábola

Cuando el corte se realiza con suficiente inclinación como para que el eje que lo corta sea paralelo a la generatriz,entonces habrá una parte del plano que no corte al conoide y otra que si, por lo tanto el resultado de este corte es una curva abierta o parábola.

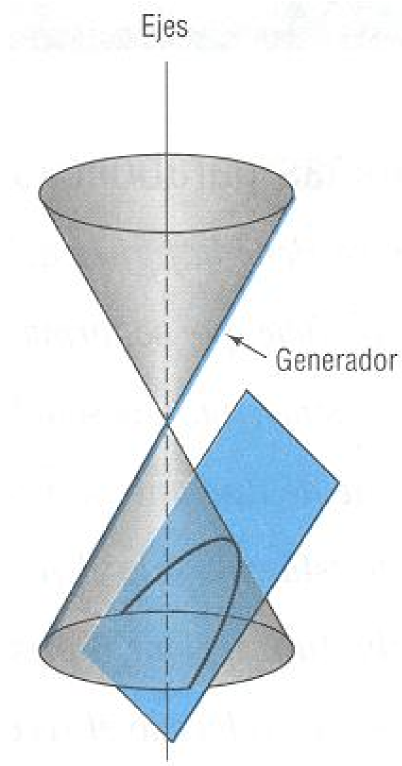

Figura 10: Obteniendo la Parábola

Aplicaciones de la Parábola

- **Aplicación 1:** Para la Radioastronomía cuando un satélite envía información hacia la Tierra, Una Antena Parabólica los recibe, Estos rayos de información que ingresan son perpendiculares a la directriz y cuando se reflejan en el plato de la antena, los rayos convergen en el foco, en donde se encuentra un receptor que decodifica la información.

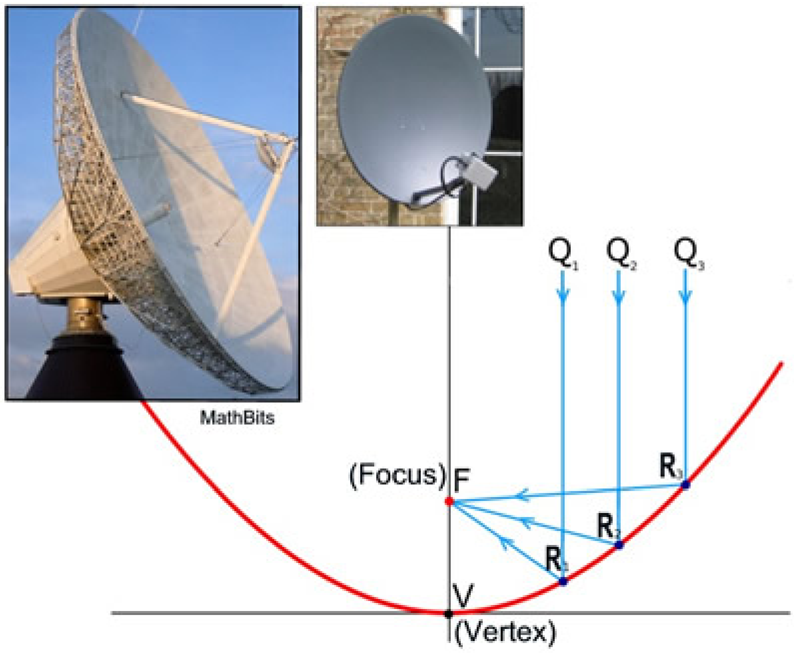

Figura 11: Rayos en una antena parabólica

- **Aplicación 2:** En la Ingeniería Civil los cables de puentes colgantes adoptan la forma parabólica. En el análisis de la curva de equilibrio de los cables, se admite que son numerosos tirantes y se puede considerar que la carga está distribuida de manera uniforme horizontalmente. Como ejemplo se encuentra el puente de San Francisco en los Estados Unidos.

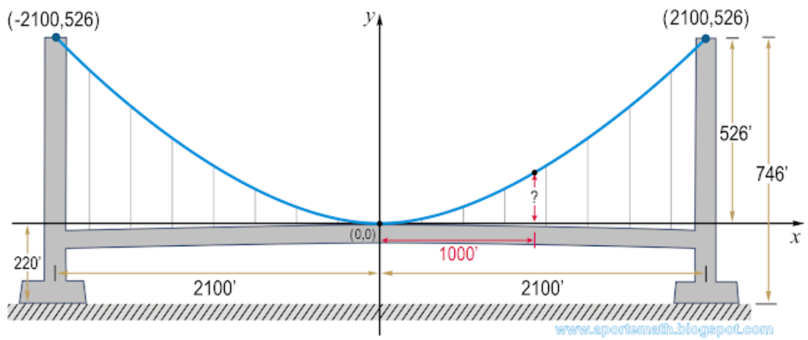

Figura 12: Puente Colgante

- **Aplicación 3:**En los Deportes cuando se efectúan lanzamientos con suficiente ángulo para que suban los objetos, estos tenderán a perder su altura gracias a la gravedad , este tipo de movimiento pueden ser descritos muy fácilmente por la parábola

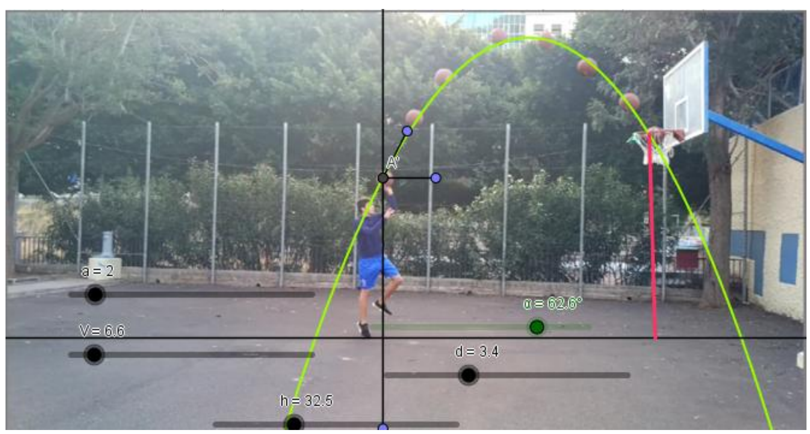

Figura 13: Lanzamiento de Balón

2.1.4. Hipérbola

Es producida cuando un plano corta al eje, formando con él un ángulo menor al que forman eje y generatriz, por lo que incide en las dos secciones de la superficie del conoide, estas curvas que se generan se prolongan infinitamente y mientras mas pequeño sea el ángulo, mas cerca estarán una de otra.

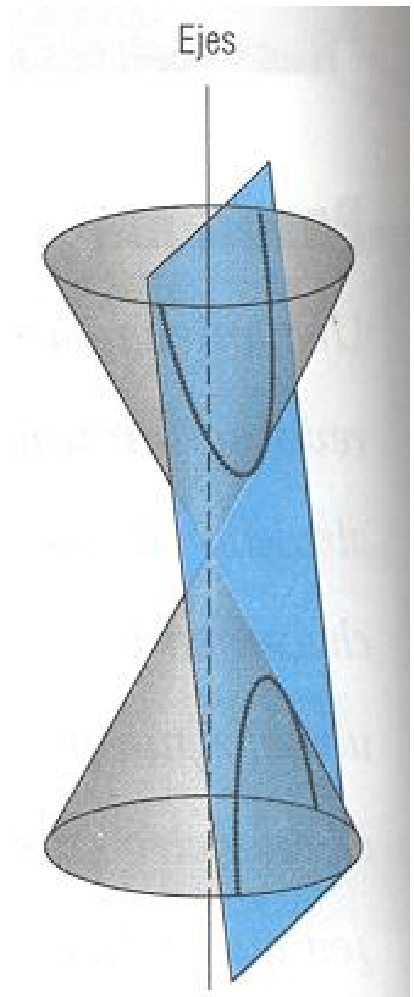

Figura 14: Obtención de la Hipérbola

Aplicaciones de la Hipérbola

- **Aplicación 1:** En la Ingeniería Nuclear con las Torres de Refrigeración de las plantas nucleares, son hechas a partir de un hiperboloide(Rotación de la hipérbola en torno a su eje transverso) y que su principal característica es que son lo suficientemente robustas para soportar el clima, pero también usan la menor cantidad de material posible.

Figura 15: Torres de Refrigeración

- **Aplicación 2:**En la Mecánica es posible formar una transmisión de engranajes a partir de engranajes hiperbólicos. Los engranajes tienen ejes inclinados y forma de reloj de arena que le dan la forma hiperbólica. Dos hiperboloides pueden transmitir movimiento entre dos ejes inclinados.

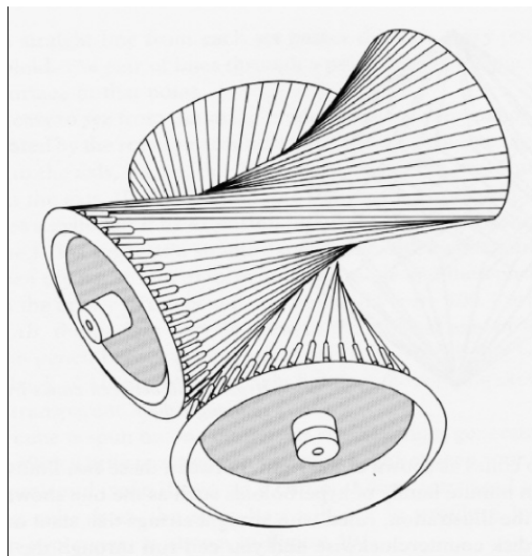

Figura 16: Engranajes Hiperbólicos

- **Aplicación 3:** En la Matemática la Hipérbola describe una relación importante: la relación inversa. Cuando un incremento en un rasgo conduce a un detrimento en otro o viceversa, la relación se puede describir como una hipérbola. Graficar una hipérbola lo muestra inmediatamente: cuando el valor de ”x.^{es} pequeño, el valor de z.^{es} grande, y viceversa. Muchas situaciones de la vida real se pueden describir con una hipérbola, incluyendo la relación entre la presión y el volumen de un gas.

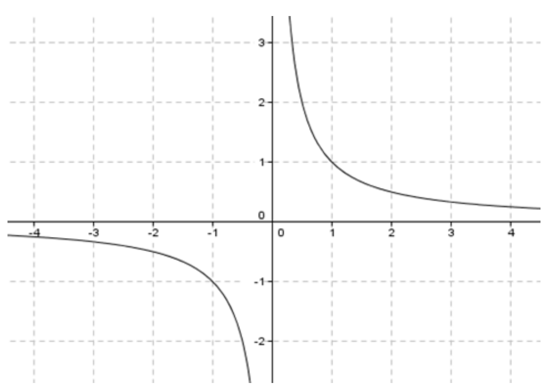

Figura 17: Relación Inversa

3. Desarrollo algebraico

Dentro de la problema se nos dan 4 valores los cuales debemos de utilizar para la realizar de un parábola, donde dichos datos son:
h: Altura, d: distancia entre torres, m: Altura mínima, n: Cantidad de apoyos(incluyen a las torres).

Debido a que la formula general de la parábola es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \tag{1}$$

Ya que vamos a considerar que esta sobre el origen en el eje x pero este tiene un movimiento en el eje y donde ese movimiento se ve representado por la altura mínima cuya en este caso esta representada por la letra m.

$$(x)^2 = 4p(y-m) \tag{2}$$

Debido a que necesitamos un valor de p, lo sacaremos a partir un punto que se nos da el cual es una de las torres debido a que el valor en el eje X es la d/2 y el valor en el eje Y corresponde a la altura la cual es h, en base a esto sacaremos el valor de p.

$$\begin{aligned}(\frac{d}{2})^2 &= 4p(h-m)\\ \frac{d^2}{4} &= 4p(h-m)\\ \frac{d^2}{16} &= p(h-m)\\ \frac{d^2}{16(h-m)} &= p\end{aligned} \tag{3}$$

Una vez obtenido el valor de p según los datos que se nos proporcionan reemplazamos todos los datos en la formula de la parábola,

$$\begin{aligned}x^2 &= 4p(y-m)\\ x^2 &= 4py - 4pm\\ x^2 + 4pm &= 4py\\ \frac{x^2+4pm}{4p} &= y\end{aligned} \tag{4}$$

De tal forma que al reemplazar el valor de p obtenido al despejarlo según los puntos que nos habían proporcionado obtenemos la siguiente ecuación:

$$y = \frac{x^2 + 4(\frac{d^2}{16(h-m)})m}{4(\frac{d^2}{16(h-m)})} \tag{5}$$

En la imagen que se encuentra a continuación se muestra la representación de los elementos que se nos proporciona para realizar el puente.

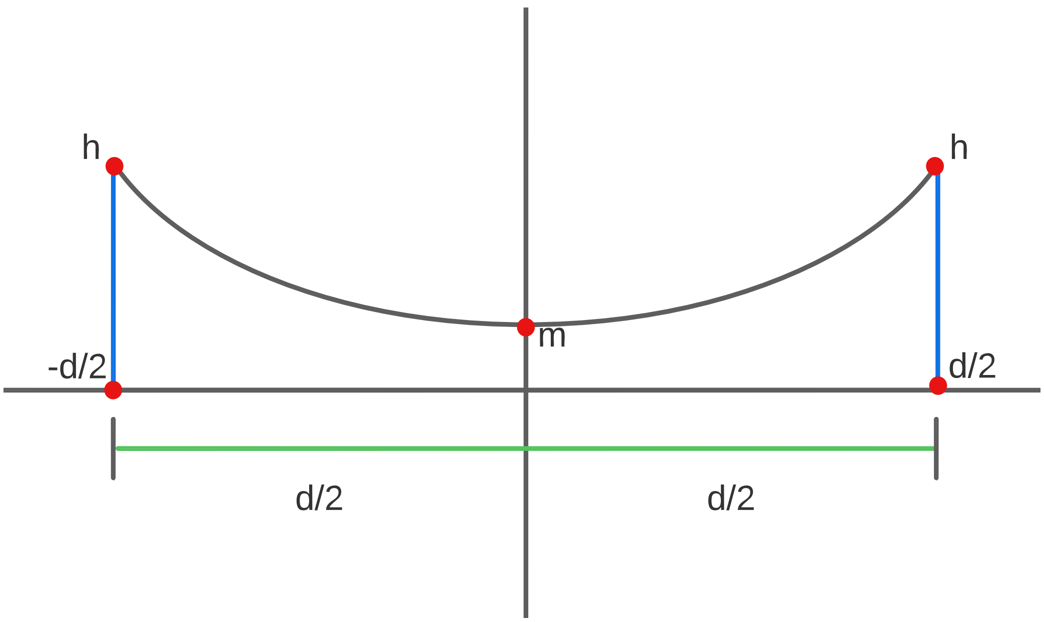

Figura 18: Representación de parábola

Para sacar la distancia de los cables en base a la cantidad que se nos proporciona, donde se incluyen los postes por lo cual este valor sera mayor a 2 por lo cual partiremos desde un extremo iremos sumando de la siguiente manera hasta llegar al final o en este caso hasta n-1:

$$\sum_{i=0}^{n-1} -\frac{d}{2} + i(\frac{d}{n-1}) \tag{6}$$

```
Escribir solo Numeros

Ingrese la altura de las Torres: 9
Ingresar la distancia de las torres: 5
Ingrese la altura minima: 3
Ingrese cantidad de apoyos: 5
La distancia entre cada cable es de 1.25
El numero Menor: 3.0
Mayor 4.5
Cantidad cable necesario: 12.0
```

Figura 19: Prueba de Código

Figura 20: Gráfica de parábola obtenida

Código de Python

```python
    import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

"""
Dentro del programa debe recibir los siguiente parametros
    h = Altura de las torres
    d = distancia de las torres
    m = altura Minima de los cables
    n = cantidad de apoyos

En Base a esos datos debe de entregar los siguientes datos
 1) Distancia entre cables de apoyos
 2) Longitud de cable mas largo y mas cortos a utilizar
 3) la longitud total de cable apoyo vertical
 4) Graficar
"""
while True:
    altura = input("Ingrese la altura de las Torres: ")
    distancia = input("Ingresar la distancia de las torres: ")
    alturaMin = input("Ingrese la altura minima: ")
    cantidad = input("Ingrese cantidad de apoyos: ")
    if(altura.isdecimal() & distancia.isdecimal() & alturaMin.isdecimal() & cantidad.isdecimal()):
        altura = int(altura)
        distancia = int(distancia)
        alturaMin = int(alturaMin)
        cantidad = int(cantidad)
        if cantidad <= 2:
            print("\nIngrese una cantidad de apoyo mayor mayor a 2\n")
        elif (altura <= 0 | alturaMin <0):
            print("\nUna de las alturas es menor a 0\n")
        elif (distancia <= 0):
            print("\nIngresar distancia mayor a 0\n")
        elif (altura <= alturaMin):
            print("\nIngrese una altura mayor a la altura minima\n")
        else:
            break
    else:
        print("\nEscribir solo Numeros\n")

def Menor_Suma(arreglo):
    menor = arreglo[1]
    mayor = arreglo[1]
    suma = 0
    for i in range(1,len(arreglo)-1):

        if menor > arreglo[i]:
            menor = arreglo[i]

        if mayor < arreglo[i]:
            mayor = arreglo[i]

        suma += arreglo[i]
    print(f"El numero Menor: {round(menor,3)}\nMayor {round(mayor,3)} \nCantidad cable necesario: {round(suma,3)}")


#altura = 9.7
#distancia = 20
#alturaMin = 0.9
#cantidad = 10

mitad = distancia/2
p = (distancia**2)/(16*(altura - alturaMin))

# Genera los puntos de X entre la mitad*-1 y la mitad, genera 100 puntos
x = np.linspace(mitad*-1,mitad,100)
y = ((x**2)+(4*p*alturaMin))/(4*p) # Se encarga de multiplicar cada X y
plt.plot(x,y)                # Asiganarlo a y en un Arreglo
                             # para luego generan la parabola en base a esas coordenadas

# Principalmente se encarga de pintar la linea horizonal de la via transitable
xHorizontal = [mitad*-1, mitad] # Donde se traza una linea de la mitad de la distancia por -1
yHorizonral = [0,0]             # Hasta la mitad en positivo, donde "y" es 0 por que no tiene altura
plt.plot(xHorizontal, yHorizonral, color="red", linestyle="-")
#-----------------------------------------------------------------------------
```

```

# Se encarga de calcular las posiciones de los cables en el plano
empezo = mitad*-1   # El punto de partida de los cables
cables = []         # Una arreglo que guardara la altura de los cables
while (empezo <= mitad):  # Se inicia un bucle desde mitad *-! hasta mitad
    xRecta = [empezo , empezo] # Todos los puntos en el x estan con el mismo valor
    y = ((empezo**2)+(4*p*alturaMin))/(4*p) # Se calculo el valor de y para ese puntos
                                            # Para saber la posicion en la parabola
    yRecta = [0, y]                         # Se asignan las posiciones en el eje y
    cables.append(y)                        # Se mete la altura en un arreglo
    plt.plot(xRecta, yRecta, 'bo', linestyle="--") # se grafica cada segmento
    empezo += distancia/(cantidad-1) # Se mueve el punto al siguiente punto de apoyo en el eje x

print(f"La distancia entre cada cable es de {round(distancia/(cantidad-1),3)}")
Menor_Suma(cables)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title("Grafico del puente")
plt.grid(True)
plt.show()
```

4. Conclusión

Gracias a la realización de este informe hemos podido encontrar quien fue la persona que logro definir secciones cónicas como tal y que gracias a los conocimientos previos de este ramo y poder complementarlo con la investigación pudimos lograr el objetivo de comprender mas a fondo estas figuras , principalmente como son formadas a base del Conoide y varias aplicaciones de estas en distintos campos de investigación o ciencia así como también de uso cotidiano, consecuentemente también aplicamos la formula de la parábola aplicando los parámetros que se nos proporcionan y sabiendo donde se utilizan cada uno de estos para poder llegar a la formula de la parábola que describe comportamiento a nuestro favor y que gracias a ellos forma parte importante para realizar el código en Python que se pudo lograr de manera exitosa y sin mayores dificultades por lo que se concluye que la actividad se realizo con éxito. Se espera que a futuro la demás actividades sean igual de completas en cuanto a investigación, aplicación de código y relación con los elementos de la vida cotidiana como lo fue este proyecto.

Referencias

9 aplicaciones de la parábola en la vida cotidiana. (s.f.). `https://www.lifeder.com/aplicaciones-parabola-vida/`.

Aplicaciones de la hipérbola - neurochispas. (s.f.). `https://www.neurochispas.com/wiki/aplicaciones-de-la-hiperbola/`

#:~:text=Una%20guitarra%20es%20un%20ejemplo,la%20forma%20de%20una%20hip%C3%A9rbola.

Geometría plana: Círculo y circunferencia: Aplicaciones. (s.f.). https://geometriaplana6.blogspot.com/p/aplicaciones.html.

Gámez, J. C. (s.f.). *Cónicas: ¿cómo se originan? – matemáticas digitales.* http://www.matematicasdigitales.com/conicas-como-se-originan/.

Origen de las secciones conicas - informe de libros - jolumato86. (s.f.). https://www.clubensayos.com/Ciencia/Origen-De-Las-Secciones-Conicas/1587778.html.

(pdf) de las secciones cÓnicas a las secciones conoÍdicas. (s.f.). https://www.researchgate.net/publication/267196918_DE_LAS_SECCIONES_CONICAS_A_LAS_SECCIONES_CONOIDICAS.

Todo sobre las conicas — superprof. (s.f.). https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/conica/conicas.html.