

# 量子场论笔记

郑元昊

复旦大学物理系

更新: 2025 年 12 月 4 日

# 目录

<b>1 绪论</b>	<b>6</b>
1.1 为什么我们需要 QFT? . . . . .	6
1.2 符号约定 . . . . .	6
<b>2 泛函基础简述</b>	<b>10</b>
2.1 泛函 . . . . .	10
2.2 变分 . . . . .	10
<b>3 量子力学基础</b>	<b>12</b>
3.1 Hilbert 空间 . . . . .	12
3.2 线性算符 . . . . .	13
3.3 Dirac 记号 . . . . .	15
3.4 反线性算符 . . . . .	16
<b>4 狹义相对论简述</b>	<b>20</b>
4.1 狹义相对论动力学技巧 . . . . .	20
<b>5 经典场论</b>	<b>22</b>
5.1 拉氏量、作用量与 Euler-Lagrange 方程 . . . . .	22
5.2 对称性与守恒量 . . . . .	23
5.3 哈密顿量 . . . . .	27
<b>6 二次量子化</b>	<b>30</b>

6.1	自由实标量场的量子化 . . . . .	30
6.2	自由复标量场量子化 . . . . .	35
6.3	两点关联函数 . . . . .	36
6.4	Wick 定理 . . . . .	44
<b>7</b>	<b>相互作用理论</b>	<b>46</b>
7.1	Feynman 黄金规则 . . . . .	46
7.2	Lehmann-Symanzik-Zimmermann 公式 . . . . .	51
7.3	Schwinger-Dyson 定理 . . . . .	54
7.4	Feynman 规则, 启动! . . . . .	55
7.4.1	位形空间的 Feynman 规则 . . . . .	56
7.4.2	动量空间的 Feynman 规则 . . . . .	60
7.5	从拉氏密度直接到动量空间 Feynman 规则 . . . . .	61
<b>8</b>	<b>Dyson 级数</b>	<b>63</b>
8.1	相互作用绘景 . . . . .	63
8.2	真空态与 Feynman 规则 . . . . .	65
<b>9</b>	<b>路径积分</b>	<b>69</b>
9.1	单粒子路径积分 . . . . .	69
9.2	场论路径积分 . . . . .	71
9.3	路径积分在统计物理中的应用 . . . . .	79
9.3.1	弱相互作用气体 . . . . .	79
9.3.2	铁磁 Ising 模型的 Landau 自由能模型 . . . . .	79

<b>10 电磁场</b>	<b>80</b>
10.1 重电磁场 (Massive) . . . . .	80
10.2 电磁场 (Massless) . . . . .	84
<b>11 标量 QED</b>	<b>88</b>
11.1 规范变换 . . . . .	88
11.2 标量 QED 的 Feynman 规则 . . . . .	89
<b>12 旋量</b>	<b>90</b>
12.1 Lorentz 群的性质 . . . . .	90
12.1.1 分解 Lorentz 群 . . . . .	95
12.1.2 不可约表示 . . . . .	96
12.2 Dirac 旋量 . . . . .	100
12.2.1 Clifford 代数 . . . . .	103
12.2.2 Dirac 旋量的二次量子化 . . . . .	106
12.3 旋量 QED . . . . .	111
12.4 Majorana 旋量 . . . . .	112
<b>13 离散变换</b>	<b>113</b>
13.1 C 变换 . . . . .	113
13.2 P 变换 . . . . .	114
13.3 T 变换 . . . . .	114
<b>A Clebsch-Gordan 系数表</b>	<b>115</b>
<b>参考文献</b>	<b>116</b>



# 1 緒論

这是我在上 2025 年秋季学期复旦大学物理系周洋老师开设的量子场论课程产生的课程笔记，主要记录了这学期我学习量子场论期间学会的所有内容以及思考过程。我补充了一些周老师没有提到或者没有讲清楚的内容，并融合了历次作业中部分有启发性的题目，从而形成了这一份笔记。

## 1.1 为什么我们需要 QFT?

量子场论是一个框架，用于纳入无限数量的量子自由度，这些自由度在时空中排列，其相互作用受局域性、对称性、幺正性和因果性约束。它是描述自然规律的语言。[\[12\]](#)

- 局域性：相互作用发生在时空的单个点上
- 对称性：物理定律在特定变换下保持不变
- 幺正性：量子事件所有可能结果的总概率为 1
- 因果性：原因先于结果，且信息传播速度不超过光速

## 1.2 符号约定

- 采用自然 Heaviside-Lorentz 单位制： $\hbar = c = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$
- 度规： $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$
- 爱因斯坦求和约定：重复指标隐含求和，并且希腊字母如  $\mu, \nu, \lambda \dots$  取 0,1,2,3，拉丁字母如  $i, j, k \dots$  取 1,2,3
- 在不影响歧义的情况下，对于标量场  $\phi$ ，其偏导  $\mu$  分量记为  $\phi_\mu = \partial_\mu \phi$
- 在不影响歧义的情况下， $p_\mu x^\mu$  类的缩并可简记为  $px$
- $\phi_{\mathbf{x}} \equiv \phi(\mathbf{x})$
- $\phi_i \equiv \phi(x_i)$
- $\delta_{xy} \equiv \delta^4(x - y)$
- $\delta_{ij} \equiv \delta^4(x_i - x_j)$
- $D_{xy} \equiv D_F(x - y)$

- $D_{ij} \equiv D_F(x_i - x_j)$
- $\langle \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \rangle \equiv \langle \Omega | \mathcal{T} \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n | \Omega \rangle$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

单位元电荷

$$e = -|e| \quad (1.2.2)$$

精细结构常数

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \quad (1.2.3)$$

作用量

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int (-m d\tau - q A_\mu dx^\mu) - \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.2.4)$$

其中,  $F_{\mu\nu}$  为电磁场张量

$$F_{\mu\nu} = dA_{\mu\nu} \quad (1.2.5)$$

$d$  为外微分算符,  $A_\mu$  为电磁四势.

展开为分量形式有:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.6a)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.6b)$$

以及有粒子动力学方程:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (1.2.7)$$

还有 Maxwell 方程组的协变形式:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \\ \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

化为矢量方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.2.9)$$

spin1/2 Pauli 矩阵:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.10)$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.11)$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.12)$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.13)$$

$$[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}] = i\epsilon_{ijk}\frac{\sigma^k}{2} \quad (1.2.14)$$

$$\{\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}\} = \frac{1}{2}\delta_{ij} \quad (1.2.15)$$

$$\sigma^i\sigma^j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma^k \quad (1.2.16)$$

spin1 Pauli 矩阵

$$S^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.17)$$

$$S^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.18)$$

$$S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.19)$$

$$[S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk}S^k \quad (1.2.20)$$

Lorentz 群变换 (见12.1节)

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \quad (1.2.21)$$

其中

$$\delta\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & v^1 & v^2 & v^3 \\ -v^1 & 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ -v^2 & \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -v^3 & -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.22)$$

Lorentz 群生成元

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \quad (1.2.23)$$

$$K^i = M^{i0} \quad (1.2.24)$$

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -K^1 & -K^2 & -K^3 \\ K^1 & 0 & J^3 & -J^2 \\ K^2 & -J^3 & 0 & J^1 \\ K^3 & J^2 & -J^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.25)$$

## 2 泛函基础简述

### 2.1 泛函

**定义 2.1 (泛函)** 泛函  $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  是定义在某个函数空间上的映射, 全体泛函组成的集合记为  $\mathcal{F}$

**例 2.1** 设  $\mathcal{F}$  是定义在区间  $[a, b]$  上的所有实值连续函数的空间, 则

$$f[\phi] = \int_a^b \phi(x) dx \quad (2.1.1)$$

是  $\mathcal{F}$  上的一个泛函

**例 2.2**

$$\delta_x[\phi] = \phi(x) \quad (2.1.2)$$

**定义 2.2 ( $\delta$  函数)**  $\delta(x)$  是满足

$$\int f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (2.1.3)$$

的函数

讨论: 数学人经常 argue 的一点是  $\delta$  函数并不是一个良定义的函数, 实际上如果要严格定义函数, 应当是将其定义为例 2.2 中的那个泛函.

**定理 2.1**

$$\int dx e^{ikx} = 2\pi\delta(k) \quad (2.1.4)$$

**定理 2.2**

$$\int_a^b f(x)\delta(g(x))dx = \sum_{i \in \{i \mid g(x_i)=0, x_i \in [a,b]\}} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} = \sum_{i \in \{i \mid g(x_i)=0\}} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \Theta(b-x)\Theta(x-a) \quad (2.1.5)$$

### 2.2 变分

**定义 2.3 (变分)** 设泛函  $f : \mathcal{F} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$

其变分

$$\frac{\delta f}{\delta \phi(x_0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f[\phi(x) + \epsilon\delta(x - x_0)] - f[\phi]}{\epsilon} \quad (2.2.1)$$

**例 2.3** 设泛函

$$f_x[\phi] = \phi(x) \quad (2.2.2)$$

则

$$\frac{\delta f_x}{\delta \phi(y)} = \delta(x - y) \quad (2.2.3)$$

**例 2.4** 设泛函

$$f[\phi] = g(\phi), \text{ 其中 } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2.4)$$

则

$$\frac{\delta f}{\delta \phi(x_0)} = \frac{\partial g}{\partial \phi} \delta(x - x_0) \quad (2.2.5)$$

**例 2.5** 设泛函

$$f[\phi] = \int g(\phi) dx, \text{ 其中 } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2.6)$$

则

$$\frac{\delta f}{\delta \phi(x_0)} = \left. \frac{\partial g}{\partial \phi} \right|_{\phi(x_0)} \quad (2.2.7)$$

**例 2.6** 设泛函

$$f[\phi] = \int g(\phi, \nabla \phi) d^3x, \text{ 其中 } g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2.8)$$

则

$$\frac{\delta f}{\delta \phi(x_0)} = \left. \left( \frac{\partial g}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial g}{\partial \phi_i} \right) \right|_{\nabla \phi(x_0)} \quad (2.2.9)$$

参考: [4]

### 3 量子力学基础

#### 3.1 Hilbert 空间

量子力学研究生活在 Hilbert 空间 [14] 的矢量, 所谓 Hilbert 空间是完备的内积空间.

**定义 3.1 (内积空间)** 复矢量空间  $V$  称为内积空间, 若存在内积  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\forall f, g, h \in V, c \in \mathbb{C}$ :

1.  $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$
2.  $(f, cg) = c(f, g)$
3.  $(f, g) = (g, f)^*$
4.  $(f, f) \geq 0$ , 且  $(f, f) = 0$  当且仅当  $f = 0$

根据定义我们有推论

$$(cf, g) = c^*(f, g) \quad (3.1.1)$$

我们可以利用内积定义任意两元素的距离

**定义 3.2 (元素距离)**

$$d(f, g) \equiv \sqrt{(f - g, f - g)} \quad (3.1.2)$$

然后可以定义矢量序列  $\{f_n\}$  的极限

**定义 3.3 (矢量序列极限)** 若  $\exists f \in V, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, d(f_n, f) < \epsilon$ , 则称  $\{f_n\}$  收敛, 并且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad (3.1.3)$$

**定义 3.4 (柯西序列)** 类似高等数学中我们学习的柯西数列, 若对于序列  $\{f_n\}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, d(f_m, f_n) < \epsilon$

在一般的内积空间中, 收敛的序列一定是柯西序列, 但是柯西序列不一定是收敛的: 其极限不一定在矢量空间内. 因此我们需要扩大矢量空间包含的范围, 使其完备

**定义 3.5 (完备性)** 若内积空间  $V$  中任意柯西序列都收敛, 则  $V$  完备

而我们研究的 Hilbert 空间就是完备的.

**定义 3.6 (Hilbert 空间)** Hilbert 空间是完备的内积空间, 记为  $\mathcal{H}$

和我们在线性代数中学习的一样, 任意矢量空间都可以定义其对偶空间.

**定义 3.7 (对偶空间)** 内积空间  $V$  的对偶空间

$$V^* \equiv \mathcal{L}(V, \mathbb{C}) \quad (3.1.4)$$

利用内积我们可以自然诱导出一个从 Hilbert 空间到对偶空间的反线性同构映射

**定义 3.8 ( $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$  的反线性同构映射)**

$$\eta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*, \eta_h \equiv (h, \cdot) \quad (3.1.5)$$

在这里我们之所以要求 Hilbert 空间而不是内积空间就是要求  $\mathcal{H}$  与  $\mathcal{H}^*$  是一样大的:  $\eta$  是反线性同构而不是同态, 若内积空间不完备, 则  $\mathcal{H}^*$  比  $\mathcal{H}$  大.

## 3.2 线性算符

**定义 3.9 (线性算符)**  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  是线性算符若

$$A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A(f_1) + c_2 A(f_2) \quad (3.2.1)$$

显然可以定义线性算符的加法与数乘, 从而构成一个矢量空间.

并且我们还可以定义线性算符间的乘法

**定义 3.10 (线性算符的乘法)** 对于线性算符  $A, B$  其乘法

$$(AB)(f) \equiv A(B(f)) \quad (3.2.2)$$

和对偶空间结合我们可以定义对偶线性算符

**定义 3.11 (对偶线性算符)** 线性算符  $A$  的对偶线性算符  $A^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{H}^*$  定义为

$$A^*(\nu)(f) \equiv \nu(Af) \quad (3.2.3)$$

**定理 3.1**

$$(A + B)^* = A^* + B^* \quad (3.2.4)$$

**证明.**

$$(A + B)^*(\nu)(f) = \nu(A(f) + \nu(B(f))) = \nu(Af) + \nu(Bf) = A^*(\nu)(f) + B^*(\nu)(f) \quad (3.2.5)$$

然后我们可以定义  $A$  的伴随算符  $A^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

**定义 3.12**

$$A^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \eta^{-1} \circ A^* \circ \eta \quad (3.2.6)$$

**定理 3.2 (伴随算符的性质)** 伴随算符满足

$$(f, Ag) = (A^\dagger f, g) \quad (3.2.7)$$

$$(A^\dagger)^\dagger = A \quad (3.2.8)$$

$$(cA)^\dagger = c^* A^\dagger \quad (3.2.9)$$

$$(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger \quad (3.2.10)$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (3.2.11)$$

**证明.**

$$(f, Ag) = \eta(f)(Ag) = (A^* \circ \eta(f))(g) = \eta[(\eta^{-1} A^* \circ \eta)(f)](g) = \eta[(A^\dagger)(f)](g) = (A^\dagger f, g) \quad (3.2.12)$$

$$(f, (A^\dagger)^\dagger g) = ((A^\dagger)^\dagger g, f)^* = (g, A^\dagger f)^* = (A^\dagger f, g) = (f, Ag) \quad (3.2.13)$$

剩下的几个证明是显然的.

### 3.3 Dirac 记号

**定义 3.13 (左右矢)** 我们记  $f \in \mathcal{H}$  为右矢, ket

$$|f\rangle \quad (3.3.1)$$

我们记  $\eta_f \in \mathcal{H}^*$  为左矢, bra

$$\langle \eta_f | \quad (3.3.2)$$

因为  $\eta$  是由内积确定的自然映射, 所以是不会引起歧义的, 所以一般我们把  $\langle \eta_f |$  直接记为  $\langle f |$

**定义 3.14 (Dirac 记号中的算符)**

$$A |\psi\rangle \equiv |A\psi\rangle \quad (3.3.3)$$

如何理解  $\langle \psi | A$  呢? 我们将其定义为

**定义 3.15**

$$\langle \psi | A \equiv (A^* \langle \psi |) \quad (3.3.4)$$

于是我们可以看到, 诸如

$$\langle \phi | A | \psi \rangle \quad (3.3.5)$$

的式子是有两种理解方式的, 并且这两个方式结果是自洽的.

$$\langle \phi | A | \psi \rangle = \langle \phi | (A | \psi \rangle) \quad (3.3.6)$$

$$\langle \phi | A | \psi \rangle = (\langle \phi | A) | \psi \rangle = (A * \langle \phi |) | \psi \rangle = \langle \phi | (A | \psi \rangle) \quad (3.3.7)$$

定理3.2的式子3.2.7可以重新写为

$$\langle \phi | A \psi \rangle = \langle A^\dagger \phi | \psi \rangle \quad (3.3.8)$$

**定义 3.16 (算符的逆)** 若  $\forall |\psi\rangle$ , 有且仅有  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}, A |\phi\rangle = |\psi\rangle$ , 则称算符  $A$  可逆, 并且记

$$\phi = A^{-1} |\psi\rangle \quad (3.3.9)$$

不难证明  $A^{-1}$  是线性的.

**定义 3.17 (幺正算符)** 若算符  $U$  满足

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad (3.3.10)$$

则称  $U$  是幺正算符.

### 3.4 反线性算符

一般在量子力学中我们考虑的都是线性算符,但是同样存在反线性算符,比如时间反演算符  $T$ . 所谓反线性就是指将定义3.9中的式(3.2.1)替换为反线性性:

**定义 3.18 (反线性算符)**  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  是反线性算符若

$$S(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1^* S(f_1) + c_2^* S(f_2) \quad (3.4.1)$$

同样可以定义反线性算符之间的加法、数乘,构成一个矢量空间.

我们还可以定义反线性算符间的乘法或者与线性算符的乘法:

**定义 3.19 ((反) 线性算符的乘法)** 对于(反)线性算符  $A, B$ ( $A, B$  的线性性或者反线性性是任意的)其乘法

$$(AB)(f) \equiv A(B(f)) \quad (3.4.2)$$

而对于复合算符的线性性与反线性有如下定理

**定理 3.3 (复合算符的(反)线性性)** 若  $A, B$  都是反线性, 则  $AB$  线性; 若  $A, B$  中有一个反线性一个线性, 则  $AB$  反线性; 若  $A, B$  都是线性则  $AB$  线性.

**证明.** 对于  $A, B$  都是反线性,  $\forall c \in \mathbb{C}$

$$ABC = Ac^*B = cAB \quad (3.4.3)$$

对于  $A$  线性,  $B$  反线性,  $\forall c \in \mathbb{C}$

$$ABC = Ac^*B = c^*AB \quad (3.4.4)$$

对于  $AB$  线性  $\forall c \in \mathbb{C}$

$$ABc = AcB = cAB \quad (3.4.5)$$

但是我们不能定义线性算符与反线性算符间的乘法, 因为若我们这么定义线性算符  $A$  与反线性算符  $S$  的乘法

$$(A + S)f \equiv A(f) + S(f) \quad (3.4.6)$$

那么考虑其作用到  $cf$  上

$$(A + S)(cf) = A(cf) + S(cf) = cA(f) + c^*S(f) \quad (3.4.7)$$

我们发现这个新的映射既不是线性的, 也不是反线性的: 它根本不满足任何线性性! 所以这个定义是不良的.

反线性算符相比于线性算符有很多不一样的性质, 我们需要小心对待. 比如与线性算符的对偶算符不同, 我们需要定义其对偶算符  $S^*$  为

**定义 3.20 (对偶线性算符)** 反线性算符  $S$  的对偶反线性算符  $S^* : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathcal{H}^*$  定义为

$$S^*(\nu)(f) \equiv \nu(Sf)^* \quad (3.4.8)$$

读者不难验证  $S^*$  也是一个反线性算符.

如何理解这个定义? 为什么在这里我们需要引入一次共轭? 这是为了让  $S^*$  作用到  $\nu$  上后的结果  $S^*\nu$  仍然是一个线性映射而不是反线性映射: 对偶矢量的定义就是线性映射, 而不是反线性映射. 即

$$S^*(\nu)(cf) = \nu(Scf)^* = (\nu(c^*Sf))^* = (c^*\nu(Sf))^* = c(\nu(Sf))^* = cS^*(\nu)(f) \quad (3.4.9)$$

然后我们可以定义反线性算符的伴随  $S^\dagger$

**定义 3.21 (伴随算符)** 反线性算符  $S^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\eta^{-1} \circ S^* \circ \eta$

可以看到这个定义是完全一样的. 但是其带来的伴随算符的性质是不同的:

**定理 3.4 (反线性算符的伴随算符的性质)** 反线性算符的伴随算符同样是一类反线性算符, 并且满足

$$(f, Sg) = (g, S^\dagger f) \quad (3.4.10)$$

$$(S^\dagger)^\dagger = S \quad (3.4.11)$$

$$(cS)^\dagger = cS^\dagger \quad (3.4.12)$$

**证明.** 首先证明反线性算符的伴随算符同样是反线性算符:

$$S^\dagger(cf) = \eta^{-1} \circ S^* \circ \eta(cf) = \eta^{-1}[S^*(c\eta(f))] = \eta^{-1}[c^*S^*(\eta(f))] = c^*\eta^{-1}[S^*(\eta(f))] = c^*S^\dagger(f) \quad (3.4.13)$$

然后直接计算可以证明后面三式

$$(f, Sg) = \eta_f(Sg) = [(S * \eta(f))(g)]^* = \{\eta [\eta^{-1} \circ S^* \circ \eta(f)](g)\}^* \quad (3.4.14)$$

$$= (S^\dagger f, g)^* = (g, S^\dagger f) \quad (3.4.15)$$

$$(f, (S^\dagger)^\dagger g) = (g, S^\dagger f) = (f, S^\dagger g) \quad (3.4.16)$$

$$(g, (cS)^\dagger f) = (f, cSg) = c(f, Sg) = c(g, S^\dagger f) = (g, cS^\dagger f) \quad (3.4.17)$$

对于  $AB$  这样的复合算符, 是否有与线性算符一样的取  $\dagger$  方式? 下面的定理指出与式(3.2.11)对反线性算符间或者线性算符与反线性算符的乘积依然是成立的.

**定理 3.5 (反线性算符的复合)** 对于线性算符或者反线性算符  $A, B$ , 其乘法  $AB$  的伴随

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (3.4.18)$$

**证明.** 若  $A, B$  都是反线性的, 根据定理3.3, 那么  $AB$  就是线性的, 从而  $(AB)^\dagger$  也是线性的, 则

$$((AB)^\dagger f, g) = (f, ABg) = (Bg, A^\dagger f) = (B^\dagger A^\dagger f, g) \quad (3.4.19)$$

若  $A, B$  中  $A$  是线性的,  $B$  是反线性的, 那么  $AB, (AB)^\dagger$  也是反线性, 于是

$$((AB)^\dagger f, g) = (ABg, f) = (Bg, A^\dagger f) = (B^\dagger A^\dagger f, g) \quad (3.4.20)$$

然后我们同样可以定义幺正的反线性算符

**定义 3.22 (反线性幺正算符)** 若反线性算符  $U$  满足

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad (3.4.21)$$

则称  $U$  是幺正算符.

## 4 狹義相對論簡述

### 4.1 狹義相對論動力學技巧

一些常用技巧 [2]:

1.  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}$
2. 使用四矢量以及不变量点积
3. 使用质心系简化计算

**定义 4.1 (Mandelstam 变量)** 对于以  $m_1, p_1, m_2, p_2$  的粒子入射, 以  $m_3, p_3$   $m_4, p_4$  的粒子出射的动力学系统

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \quad (4.1.1)$$

**定理 4.1 (s+t+u 守恒)**

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (4.1.2)$$

**证明.** 我们取质心系, 可以写出  $p_1, p_2, p_3, p_4$

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}), \quad p_2 = (E_2, -\mathbf{p}) \quad (4.1.3)$$

$$p_3 = (E_3, \mathbf{k}), \quad p_4 = (E_4, -\mathbf{k}) \quad (4.1.4)$$

于是

$$s = (E_1 + E_2)^2, \quad t = (E_3 - E_1)^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2, \quad u = (E_4 - E_1)^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 \quad (4.1.5)$$

计算可得:

$$s + t + u = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + E_4^2 - 2\mathbf{p}^2 - 2\mathbf{k}^2 + 2E_1^2 + 2E_1E_2 - 2E_1E_3 - 2E_1E_4 \quad (4.1.6)$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2E_1(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \quad (4.1.7)$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (4.1.8)$$

**定理 4.2 (质心系中  $m_1$  的能量)**

$$E_1^{\text{CM}} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \quad (4.1.9)$$

**定理 4.3 (实验室系 ( $m_2$  静止) 中  $m_1$  的能量)**

$$E_1^{\text{lab}} = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} \quad (4.1.10)$$

**定理 4.4 (质心系总能量)**

$$E_{\text{TOT}}^{\text{CM}} = \sqrt{s} \quad (4.1.11)$$

## 5 经典场论

### 5.1 拉氏量、作用量与 Euler-Lagrange 方程

**定义 5.1 (拉氏量 & 拉氏量密度)** 拉氏量

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (5.1.1)$$

其中  $\mathcal{L}$  即拉氏量密度

**定义 5.2 (作用量)** 作用量  $S$  是拉氏量密度在时空上的积分

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4x \quad (5.1.2)$$

**定理 5.1 (标量的 Euler-Lagrange 方程)**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} = 0 \quad (5.1.3)$$

**证明.** 设  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ , 则

$$\delta S = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \delta\phi_\mu \right) \quad (5.1.4)$$

对第二项分部积分, 忽略边界项, 有

$$\delta S = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \right) \delta\phi \quad (5.1.5)$$

由  $\delta S = 0$  可得 Euler-Lagrange 方程

**例 5.1** 自由粒子的拉氏量密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.1.6)$$

代入 Euler-Lagrange 方程, 有

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (5.1.7)$$

即 Klein-Gordon 方程

**定理 5.2 (矢量场的 Euler-Lagrange 方程)** 设矢量场为  $A_\mu$ , 定义  $F_{\mu\nu} = dA_{\mu\nu}$ ,  $\Pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}$ ,  $B^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$ , 那么

$$B^\mu - 2\partial_\nu \Pi^{[\nu\mu]} = 0 \quad (5.1.8)$$

**证明.**

$$\delta \mathcal{L} = \Pi^{\mu\nu} \delta dA_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu \quad (5.1.9)$$

交换  $\delta$  与外微分算子  $d$ , 并利用乘法法则有:

$$\delta \mathcal{L} = 2\partial_{[\mu} (\Pi^{\mu\nu} \delta A_{\nu]}) - 2(\partial_{[\mu} \Pi^{\mu\nu}) \delta A_{\nu]} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu \quad (5.1.10a)$$

$$= 2\partial_{[\mu} (\Pi^{\mu\nu} \delta A_{\nu]}) - 2(\partial_\nu \Pi^{[\nu\mu]}) \delta A_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu \quad (5.1.10b)$$

忽略边界项, 由  $\delta S = 0$  可得 Euler-Lagrange 方程.

**例 5.2** 电磁场的拉氏量密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad (5.1.11)$$

代入 Euler-Lagrange 方程, 有

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (5.1.12)$$

即 Maxwell 方程.

## 5.2 对称性与守恒量

在这里我们考虑连续对称性.

**定义 5.3 (连续对称性)** 连续对称性是指在某个参数  $\alpha$  下, 场的变换

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) \quad (5.2.1)$$

其中,  $\Delta$  为某一算符.

若系统具有该变换的对称性, 则运动方程应该不变.

即:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu J^\mu \quad (5.2.2)$$

**定理 5.3 (Noether 定理)** 对于存在某对称性的系统, 存在守恒流

$$j^\mu = \Pi^\mu \Delta\phi - J^\mu \quad (5.2.3)$$

**证明.**

$$\delta\mathcal{L} = \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \Delta\phi + \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\mu} \partial_\mu \Delta\phi \quad (5.2.4a)$$

$$= \alpha \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \alpha \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\mu} \right) \Delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\mu} \Delta\phi \right) \quad (5.2.4b)$$

$$= \alpha \partial_\mu (\Pi^\mu \Delta\phi) \quad (5.2.4c)$$

又因为系统存在对称性:

$$\delta\mathcal{L} = \alpha \partial_\mu J^\mu \quad (5.2.5)$$

因此:

$$\partial_\mu (\Pi^\mu \Delta\phi - J^\mu) = \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.2.6)$$

**例 5.3 (复标量场的  $U(1)$  对称性)** 考虑复标量场

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \psi^* \partial_\mu \psi - m^2 \psi^* \psi \quad (5.2.7)$$

其对称性为

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi, \quad \psi^* \rightarrow \psi'^* = e^{-i\alpha} \psi^* \quad (5.2.8)$$

不难发现,  $\mathcal{L}$  与  $\psi$  的相位无关, 因此:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + 0 \Rightarrow J^\mu = 0 \quad (5.2.9)$$

于是, 由 Noether 定理可得守恒流

$$j^\mu = i(\psi \partial^\mu \psi^* - \psi^* \partial^\mu \psi) \quad (5.2.10)$$

我们可以代入验证其守恒:

$$\partial_\mu j^\mu = i(\psi \partial^2 \psi^* - \psi^* \partial^2 \psi) \quad (5.2.11)$$

代入运动方程  $(\partial^2 + m^2)\psi = 0$

$$\partial_\mu j^\mu = i(\psi(-m^2 \psi^*) - \psi^*(-m^2 \psi)) = 0 \quad (5.2.12)$$

**例 5.4 (标量场的时空平移对称性)** 时空中有 Killing 矢量场  $\xi^\mu$ , 其满足 Killing 方程

$$\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0 \quad (5.2.13)$$

缩并有:

$$\nabla_\mu\xi^\mu = 0 \quad (5.2.14)$$

在这里,  $\Delta$  算符即 Lie 导数  $\mathcal{L}_\xi$ .

对  $\mathcal{L}$  沿着  $-\xi^\mu$  的方向进行平移, 有

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha\mathcal{L}_\xi\mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha\xi^\mu\nabla_\mu\mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha\nabla_\mu(\xi^\mu\mathcal{L}) \quad (5.2.15)$$

因此,  $J^\mu = \xi^\mu\mathcal{L}$ . 由 Noether 定理可得守恒流

$$\begin{aligned} j^\mu &= \Pi^\mu\Delta\phi - J^\mu = \Pi^\mu\xi^\nu\nabla_\nu\phi - \xi^\mu\mathcal{L} \\ &= \xi^\nu(\nabla^\mu\phi\nabla_\nu\phi - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu) \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

于是有能动张量

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \mathcal{L}g_{\mu\nu} \quad (5.2.17)$$

其满足:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.2.18)$$

由此可见, 能动量守恒完全是时空平移不变性的体现.

**例 5.5 (矢量场的时空平移对称性)** 类似例 5.4, 时空中有 Killing 矢量场  $\xi^\mu$ . 我们首先设两个辅助场:

$$\Pi^{\mu\nu} = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \quad (5.2.19)$$

$$B^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \quad (5.2.20)$$

沿着  $-\xi^\mu$  变换, 同样有:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha\xi^\mu\nabla_\mu\mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha\nabla_\mu(\xi^\mu\mathcal{L}) \quad (5.2.21)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \alpha\mathcal{L}_\xi A_\mu \quad (5.2.22)$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \alpha\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} \quad (5.2.23)$$

需要注意的是,  $\mathcal{L}_\xi$  与外微分算子  $d$  不对易, 因此

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi dA_{\mu\nu} \neq d(\mathcal{L}_\xi A)_{\mu\nu} \quad (5.2.24)$$

而

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} &= \xi^\lambda \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\lambda\nu} \nabla_\mu \xi^\lambda + F_{\mu\lambda} \nabla_\nu \xi^\lambda \\ &= \xi^\lambda \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu (F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) - \xi^\lambda \nabla_\mu F_{\lambda\nu} \\ &\quad + \nabla_\nu (F_{\mu\lambda} \xi^\lambda) - \xi^\lambda \nabla_\nu F_{\mu\lambda} \\ &= \xi^\lambda \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \xi^\lambda \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \xi^\lambda \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu (F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) + \nabla_\nu (F_{\mu\lambda} \xi^\lambda) \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

由外微分算子性质有  $\nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$ , 可知前三项为零.

因此

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = \nabla_\mu (F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) + \nabla_\nu (F_{\mu\lambda} \xi^\lambda) \quad (5.2.26)$$

于是

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \mathcal{L} &= \nabla_\mu (2\Pi^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) - F_{\mu\nu} \xi^\lambda B^\nu + B^\nu (\xi^\lambda \nabla_\lambda A_\nu + A_\lambda \nabla_\nu \xi^\lambda) \\ &= \nabla_\mu (2\Pi^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) - F_{\mu\nu} \xi^\lambda B^\nu + B^\nu \xi^\lambda \nabla_\lambda A_\nu - B^\nu \xi^\lambda \nabla_\nu A_\lambda \\ &\quad + B^\nu \nabla_\nu (A_\lambda \xi^\lambda) \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

这里我们取规范

$$\nabla_\nu B^\nu = 0 \quad (5.2.28)$$

故:

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L} = \nabla_\mu (2\Pi^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} \xi^\lambda + B^\mu A_\nu \xi^\nu) \quad (5.2.29)$$

类似地, 可以得到能动张量:

$$T_{\mu\nu} = -2\Pi_\mu^\lambda F_{\lambda\nu} + B_\mu A_\nu - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (5.2.30)$$

参考: 本人 25 年首考后写的笔记 [6](很惭愧, 现在尝试重新推导的时候卡了好久... 无奈看了当时的笔记才推出来, 真是奇怪, 明明当时也是我自己推出来的, 怎么现在一点都推不出来了呢 ==).

**例 5.6 (Dirac 场的时空平移对称性)** 在推导 Dirac 场的时空平移对称性时, 为了具有一般性, 最大的难点在于给出旋量在一般的微分同胚群作用下

的变换, 我们在此不做推导(我也不太会推导...). 根据的 Kosmann 1971 年的成果 [3], 我们有对 Dirac 旋量场  $\psi$  的 Lie 导数表达式

$$\mathcal{L}_\xi \psi = \xi^a \nabla_a \psi - \frac{1}{4} \nabla_{[a} \xi_{b]} \gamma^a \gamma^b \psi \quad (5.2.31)$$

其中  $\xi^a$  为 Killing 矢量场.

如果你不放心, 我们可以验证后面脱拽项就是对旋量的 Lorentz 变换的正确性: 对于 Minkovski 时空中, 一般的 Killing 矢量场为

$$\xi^\mu = b^\mu + \omega_\nu^\mu x^\nu \quad (5.2.32)$$

所以

$$\mathcal{L}_\xi \psi = \xi^\mu \nabla_\mu \psi + \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi \quad (5.2.33)$$

$$= \xi^\mu \nabla_\mu \psi - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi \quad (5.2.34)$$

$$= \xi^\mu \nabla_\mu \psi - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \psi \quad (5.2.35)$$

于是我们发现对于 Killing 矢量场, 拖拽项确实是对旋量的 Lorentz 变换.

然后我们尝试推导能动张量.

## 5.3 哈密顿量

**定义 5.4 (共轭动量) 共轭动量**

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (5.3.1)$$

做 Legendre 变换, 有 Hamiltonian:

$$H(\phi, \Pi, \nabla \phi) = \int d^3x \Pi \dot{\phi} - L = \int d^3x (\Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}) \quad (5.3.2)$$

定义 Hamiltonian 密度:

$$\mathcal{H}(\phi, \Pi, \nabla \phi) = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (5.3.3)$$

定义 Poisson 括号  $\{, \} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\{F, G\} = \int d^3x \left( \frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \frac{\delta G}{\delta \Pi(y)} - \frac{\delta G}{\delta \phi(y)} \frac{\delta F}{\delta \Pi(x)} \right) \quad (5.3.4)$$

### 例 5.7

$$\{\phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.3.5)$$

**证明.** 设  $F = \phi(\mathbf{x}), G = \Pi(\mathbf{y})$ , 则

$$\frac{\delta F}{\delta \phi(x)} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \frac{\delta F}{\delta \Pi(x)} = 0 \quad (5.3.6)$$

$$\frac{\delta G}{\delta \phi(x)} = 0, \quad \frac{\delta G}{\delta \Pi(x)} = \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}') \quad (5.3.7)$$

代入 Poisson 括号定义, 有

$$\{\phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{y})\} = \int d^3x' (\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}') - 0) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.3.8)$$

### 定理 5.4 (哈密顿正则方程)

$$\begin{cases} \dot{\phi}(\mathbf{x}) = \{\phi_{\mathbf{x}}, H\} = \frac{\delta H}{\delta \Pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} \\ \dot{\Pi}(\mathbf{x}) = \{\Pi_{\mathbf{x}}, H\} = -\frac{\delta H}{\delta \phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\phi_i)} \end{cases} \quad (5.3.9)$$

**证明.**

$$\begin{aligned} \delta H &= \int d^3x \left( \delta \Pi_{\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{x}} + \Pi_{\mathbf{x}} \delta \dot{\phi}_{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \Pi_{\mathbf{x}} \delta \dot{\phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i \right) \\ &= \int d^3x \left( \delta \Pi_{\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i \right) \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

分部积分并消去边缘项有:

$$\delta H = \int d^3x \left( \delta \Pi_{\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi \right) \quad (5.3.11)$$

于是可得:

$$\begin{cases} \dot{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} \\ \dot{\Pi}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\phi_i)} \end{cases} \quad (5.3.12)$$

讨论: 在转换到 Hamilton 力学的过程中, Legendre 变换给予了  $\dot{\phi}$  特殊的地位, 使得我们选定的参考系的时间轴  $t$  具有了特殊的地位, 因此破坏了洛伦兹协变性.

## 6 二次量子化

二次量子化是将场(如电磁场、电子场)本身进行量子化的框架，它将描述单粒子概率幅的经典场提升为场算符，其激发则对应粒子的产生与湮灭，从而自然地描述了粒子数可变的多粒子系统。相比之下，一次量子化中粒子是给定的，其运动(波函数)是量子的。

### 6.1 自由实标量场的量子化

1. 写下 Lagrangian
2. 得到 Hamiltonian
3. 做正则变换解耦
4. 施加量子化条件
5. 得到产生湮灭算符
6. 得到场方程

注：这里流程没按周洋讲的来，因为我略微感觉他那样子做有一点点奇怪，有些地方存在神秘的天降系数，按照这样从 Lagrangian 出发的流程会更清晰一些。写下 Lagrangian：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (6.1.1)$$

我们有 EoM：

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (6.1.2)$$

或者写成

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (6.1.3)$$

并有色散关系：

$$\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (6.1.4)$$

满足这个关系的称为 on-shell.

得到 Hamiltonian：

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\pi^2 + m^2\phi^2 + (\nabla\phi)^2) \quad (6.1.5)$$

做正则变换,有母函数

$$U = - \int \Pi(\mathbf{k}) \pi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x d^3k \quad (6.1.6)$$

因此

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \Phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \quad (6.1.7)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Pi_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \quad (6.1.8)$$

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (6.1.9)$$

$$\Pi_{\mathbf{k}} = \int \pi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x \quad (6.1.10)$$

并且有:

$$\Phi_{\mathbf{k}}^\dagger = \Phi_{-\mathbf{k}}, \quad \Pi_{\mathbf{k}}^\dagger = \Pi_{-\mathbf{k}} \quad (6.1.11)$$

可以得到解耦后的 Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \Pi_{\mathbf{k}} \Pi_{-\mathbf{k}} + (2\pi)^3 \omega^2 \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{-\mathbf{k}} \right) \quad (6.1.12)$$

其中  $\omega^2 = m^2 + k^2$

添加量子化条件:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^3(x - y) \quad (6.1.13)$$

于是有:

$$[\Phi_{\mathbf{k}}, \Pi_{\mathbf{p}}] = i\delta^3(k - p) \quad (6.1.14)$$

令:

$$a_{\mathbf{k}} = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \Phi_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega} \frac{1}{(2\pi)^3} \Pi_{\mathbf{k}}^\dagger \right) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3x e^{ikx} (\omega\phi + i\pi) \quad (6.1.15)$$

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \Phi_{\mathbf{k}}^\dagger - \frac{i}{\omega} \frac{1}{(2\pi)^3} \Pi_{\mathbf{k}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3x e^{-ikx} (\omega\phi - i\pi) \quad (6.1.16)$$

有对易子:

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \quad (6.1.17)$$

更准确地说, 对于  $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger]$ :

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] = \mathcal{V} \quad (6.1.18)$$

$\mathcal{V}$  为系统的总体积.

于是 Hamilton 可以被对角化:

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \mathcal{V}) \quad (6.1.19)$$

Fourier 逆变换可以得到:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (6.1.20)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (6.1.21)$$

最后利用时间演化算符得到场方程:

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} + a_{\mathbf{p}} e^{-ipx}) \quad (6.1.22)$$

$$\pi(x) = e^{iHt} \pi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} - a_{\mathbf{p}} e^{-ipx}) \quad (6.1.23)$$

我们可以计算所谓的真空零点能密度:

$$\frac{\langle 0 | H | 0 \rangle}{\mathcal{V}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{2} = +\infty \quad (6.1.24)$$

我们还可以定义动量算子:

$$P^i = \int \partial^0 \phi \partial^i \pi d^3 x = - \int \phi_t \phi_i d^3 x \quad (6.1.25)$$

即:

$$\mathbf{P} = - \int \phi_t \nabla \phi d^3x \quad (6.1.26)$$

$$= - \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{i\omega_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} - a_{\mathbf{p}} e^{-ipx}) \quad (6.1.27)$$

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{i\mathbf{q}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} (-a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iqx} + a_{\mathbf{q}} e^{-iqx}) \quad (6.1.28)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}\omega_{\mathbf{p}}}{2\omega_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger) \quad (6.1.29)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (6.1.30)$$

这里需要补充一点:

### 定理 6.1 (Lorentz 不变的体元)

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \quad (6.1.31)$$

是一个 Lorentz 不变量

**证明.** 考虑

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Theta(p^0) 2\pi \delta(p^2 - m^2) \quad (6.1.32)$$

可以发现其等于

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \quad (6.1.33)$$

然后我们就可以定义真空态以及 Fock 空间:

**定义 6.1 (真空态)** 真空态  $|0\rangle$  满足

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{p} \quad (6.1.34)$$

**定义 6.2 (Fock 空间)** Fock 空间为

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1} \mathcal{H}_n \quad (6.1.35)$$

其中  $\mathcal{H}_n$  为  $n$  粒子空间, 即:

$$\mathcal{H}_n = \text{span}\{a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \mid \forall \mathbf{p}_i\} \quad (6.1.36)$$

接下来我们检查自由标量场的二次量子化结果与我们的经典一次量子化结果相一致.

### 定义 6.3 (动量本征态)

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad (6.1.37)$$

$$|\mathbf{pq}\rangle = \sqrt{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle \quad (6.1.38)$$

我们不难验证:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = 2\omega_{\mathbf{p}}(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (6.1.39)$$

$$\langle \mathbf{p}' \mathbf{q}' | \mathbf{p} \mathbf{q} \rangle = 4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}(2\pi)^6 (\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') + \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{q})\delta^3(\mathbf{q}' - \mathbf{p})) \quad (6.1.40)$$

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \quad (6.1.41)$$

**定义 6.4 (位置本征态)** 定义位置产生算符:

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} \quad (6.1.42)$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} \quad (6.1.43)$$

以及位置本征态

$$|\mathbf{x}\rangle = \psi^\dagger(x) |0\rangle \quad (6.1.44)$$

我们可以发现:

$$|\mathbf{x}\rangle = \psi^\dagger(x) |0\rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ipx} |\mathbf{p}\rangle \quad (6.1.45)$$

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle = e^{ipx} \quad (6.1.46)$$

可以发现与我们在 QM 里学的一致.

## 6.2 自由复标量场量子化

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi \quad (6.2.1)$$

其中  $\psi = \phi_1 + i\phi_2$

$$\pi^\mu = \partial^\mu \psi^* \quad (6.2.2)$$

$$\pi = \pi^0 = \partial^0 \psi^* = \partial_0 \psi^* \quad (6.2.3)$$

正则变换:

$$\begin{cases} \Psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \psi_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ \Pi_{\mathbf{k}} = \int d^3x \pi_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \end{cases} \quad (6.2.4)$$

于是得到:

$$H = \int d^3k \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \Pi_{-\mathbf{k}}^\dagger \Pi_{\mathbf{k}} + (2\pi)^3 \omega_{\mathbf{p}}^2 \Psi_{-\mathbf{k}}^\dagger \Psi_{\mathbf{k}} \right) \quad (6.2.5)$$

添加正则量子化条件:

$$[\psi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\psi_{\mathbf{x}}, \psi_{\mathbf{y}}] = [\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}] = 0 \quad (6.2.6)$$

于是我们得到:

$$[\Psi_{\mathbf{p}}, \Pi_{\mathbf{q}}] = [\Psi_{\mathbf{p}}^\dagger, \Pi_{\mathbf{q}}^\dagger] = i\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [\Psi_{\mathbf{p}}, \Psi_{\mathbf{q}}] = [\Pi_{\mathbf{p}}, \Pi_{\mathbf{q}}] = 0 \quad (6.2.7)$$

设

$$a_{\mathbf{p}} = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (\Psi_{\mathbf{p}} + \frac{i}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{p}}} \Pi_{-\mathbf{p}}^\dagger) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{ipx} (\omega_{\mathbf{p}} \psi + i\pi^\dagger) \quad (6.2.8)$$

$$b_{\mathbf{p}} = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (\Psi_{-\mathbf{p}}^\dagger + \frac{i}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{p}}} \Pi_{\mathbf{p}}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-ipx} (\omega_{\mathbf{p}} \psi^\dagger + i\pi) \quad (6.2.9)$$

我们有:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \quad (6.2.10)$$

$$[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [b_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \quad (6.2.11)$$

然后可以对角化 Hamiltonian

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}}) + \mathcal{V} \quad (6.2.12)$$

然后有:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) \quad (6.2.13)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} - b_{\mathbf{p}} e^{-ipx}) \quad (6.2.14)$$

例5.3指出复标量场的  $U(1)$  对称性导致有守恒荷  $Q$

$$Q \equiv \int d^3 x J_N^0 = \int d^3 x i [(\partial^0 \psi^\dagger) \psi - (\partial^0 \psi) \psi^\dagger] \quad (6.2.15)$$

经过计算我们可以得到:

$$Q_N = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} (b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \quad (6.2.16)$$

讨论: 复标量场是双自由度的, 因此它有两个产生湮灭算子  $a, b$ .  $a, b$  分别代表正粒子和反粒子的运动模式. 而从其的  $U(1)$  对称性导出的守恒量中可以得出结论, 正粒子与反粒子数目之差为常数.

## 6.3 两点关联函数

**定义 6.5 (关联函数  $D(x - y)$ )** [7]

$$D(x - y) \equiv \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (6.3.1)$$

计算可得:

### 定理 6.2

$$D(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} e^{iqy - ipx} \langle 0 | a_p a_q^\dagger | 0 \rangle \quad (6.3.2)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.3)$$

可以发现, 这是一个 Lorentz 不变量 (更准确来说, 是  $\mathcal{P} \times \text{SO}(1, 3)$  的不变量, 由于存在  $\Theta$  它不能在  $\mathcal{T}$  下不变).

讨论: 两点关联函数的意义是什么? 不难证明这就是上一节中的  $\langle x|y \rangle$ , 也就是说, 它表示在时空点  $y$  处 (假设  $y$  更早发生) 激发一个粒子, 在时空点  $x$  处测量到它的概率密度.

我们分类讨论类时、类空间隔的关联函数  $D(x - y)$ :

类时: 我们不妨假设  $x^0 > y^0$ , 那么我们可以做 Lorentz 变换, 使得  $\mathbf{x}' = \mathbf{y}' = 0$ . 设  $t = x'^0 - y'^0$ , 则:

$$D(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-i\omega_p t'} = \int_m^{+\infty} \sqrt{\omega^2 - m^2} e^{-i\omega t'} \frac{d\omega}{(2\pi)^2} \quad (6.3.4)$$

对于  $t' \rightarrow +\infty$

$$D(x - y) \sim e^{-imt'} \quad (6.3.5)$$

类空: 我们可以做 Lorentz 变换, 使得  $x^0 = y^0 = 0$ , 并设  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ , 则:

$$D(x - y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (6.3.6)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \int_0^\pi e^{ipr \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad (6.3.7)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-i}{2(2\pi)^2} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{r} \frac{pd p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (6.3.8)$$

$$= -\frac{i}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{ipr} dp \quad (6.3.9)$$

注意到,  $p = \pm im$  是被积分函数的两个支点, 于是将积分路径改为图6.1中沿着上半部分支割线的路径. 然后可得:

$$D(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^2 r} \int_m^{+\infty} \frac{\omega e^{-\omega r}}{\sqrt{\omega^2 - m^2}} d\omega \quad (6.3.10)$$

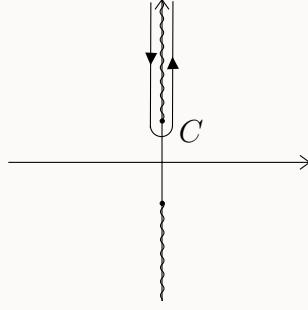


图 6.1:  $f(p) = \frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}} e^{ipr}$

对于  $r \rightarrow +\infty$

$$D(x-y) \sim e^{-mr} \quad (6.3.11)$$

我们发现, 即使是类空间隔,  $D(x-y)$  仍不为 0, 这说明  $\phi(x), \phi(y)$  在空间中存在重叠 (overlap).

讨论: 类空间隔的关联函数非零能说明这违反了因果律吗? 并不能, 因为所谓的因果律需要是指类空间隔的测量之间互相不影响, 也就是说交换这两个算子作用在态上的顺序不会影响结果. 这暗示我们或许应当计算两个算符的对易子来检验我们的理论是否违背了因果律, 而最直接的检验就是计算  $[\phi(x), \phi(y)]$ .

因此我们考虑  $\phi(x), \phi(y)$  的对易子:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = D(x-y) - D(y-x) \quad (6.3.12)$$

再次尝试对类时类空间隔分类讨论:

类空: 首先将换参考系, 使得  $x, y$  在同一三维空间中, 然后利用 Parity 算符  $\mathcal{P}$ , 显然可以使得  $D(x-y) \rightarrow D(y-x)$ , 而  $\mathcal{P}$  操作不会改变结果, 于是我们有:

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad (6.3.13)$$

类时: 由于  $[\phi(x), \phi(y)]$  不在  $\mathcal{T}$  中保持不变, 因此我们无法如类空般做到交换  $x, y$ , 因此我们不能得到  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ .

可以发现, 对易子对类空间隔一定为 0 而对类时间隔则不一定, 这正是我们想要的因果性!

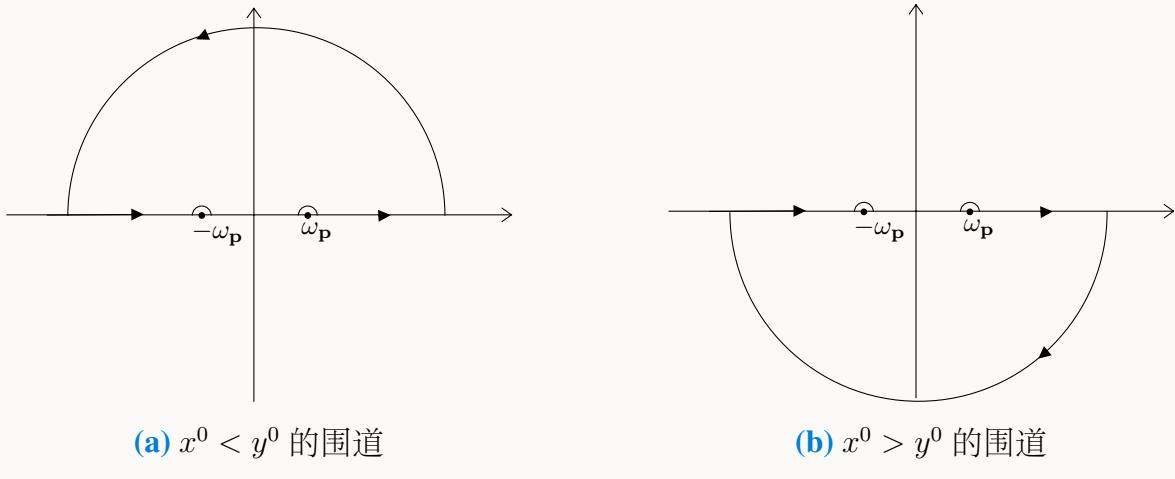


图 6.2:  $D_R(x - y)$  围道示意图

然后我们尝试进一步计算对易子

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x - y) - D(y - x) \quad (6.3.14)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \quad (6.3.15)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip(x-y)} + \frac{1}{-2\omega_p} e^{ip(x-y)} \right) \quad (6.3.16)$$

注意到对第二项做  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  换元结果不变, 于是:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left( \frac{e^{-i\omega_p(x^0-y^0)}}{2\omega_p} + \frac{e^{i\omega_p(x^0-y^0)}}{-2\omega_p} \right) \quad (6.3.17)$$

观察这个形式, 令我们想到留数定理, 这两项就是留数的相加, 我们可以将其化为:

$$\frac{e^{-i\omega_p(x^0-y^0)}}{2\omega_p} + \frac{e^{i\omega_p(x^0-y^0)}}{-2\omega_p} = \frac{1}{-2\pi i} (-2\pi i \text{Res}(\dots) - 2\pi i \text{Res}(\dots)) \quad (6.3.18)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega(x^0-y^0)}}{(\omega + \omega_p)(\omega - \omega_p)} \quad (6.3.19)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega(x^0-y^0)}}{\omega^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \quad (6.3.20)$$

$$= \int_C \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-i\omega(x^0-y^0)} \quad (6.3.21)$$

为了让大圆弧不会对积分结果产生贡献, 对于  $x^0 < y^0$  我们取围道如图6.2b; 对于  $x^0 > y^0$  我们取围道: 6.2b

于是我们可以定义新的关联函数

**定理 6.3 (推迟关联函数  $D_R(x - y)$ )** 取围道  $C$  如图6.2

$$D_R(x - y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.22)$$

或者等价于取一个无穷小正数  $\epsilon$ :

$$D_R(x - y) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p + i\epsilon)^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.23)$$

不难发现, 对于  $x^0 < y^0$ , 围道内不含有任何 pole, 故  $D_R(x - y) = 0$ , 而对于  $x^0 > y^0$ , 围道内含有 pole, 故  $D_R(x - y) = D(x - y) - D(y - x)$

于是我们发现

$$D_R(x - y) = \Theta(x^0 - y^0)[\phi(x), \phi(y)] \quad (6.3.24)$$

这令人想起电动力学中我们学过的推迟势, 故而得名.

类似地, 我们可以定义提前关联函数

**定理 6.4 (提前关联函数  $D_A(x - y)$ )** 取围道  $C$  如图6.3

$$D_A(x - y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.25)$$

或者等价于取一个无穷小正数  $\epsilon$ :

$$D_A(x - y) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p - i\epsilon)^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.26)$$

我们可以发现:

$$D_A(x - y) = -\Theta(y^0 - x^0)[\phi(x), \phi(y)] \quad (6.3.27)$$

这正与电动力学中所谓的提前势相对应.

此外, 我们还有两种取围道的方式, 由此定义两种关联函数, 也就是所谓的 Feynman 传播子.

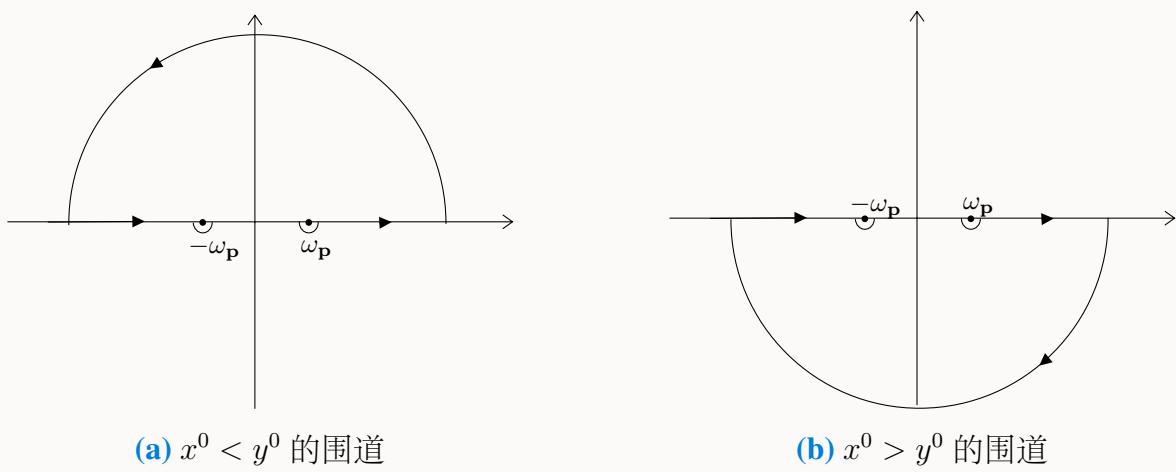


图 6.3:  $D_A(x - y)$  围道示意图

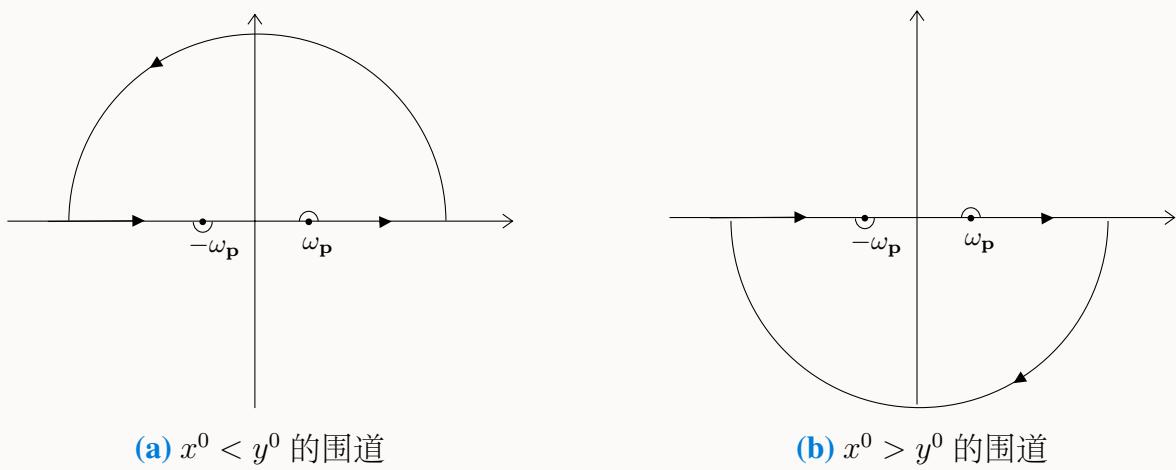


图 6.4:  $D_F(x - y)$  围道示意图

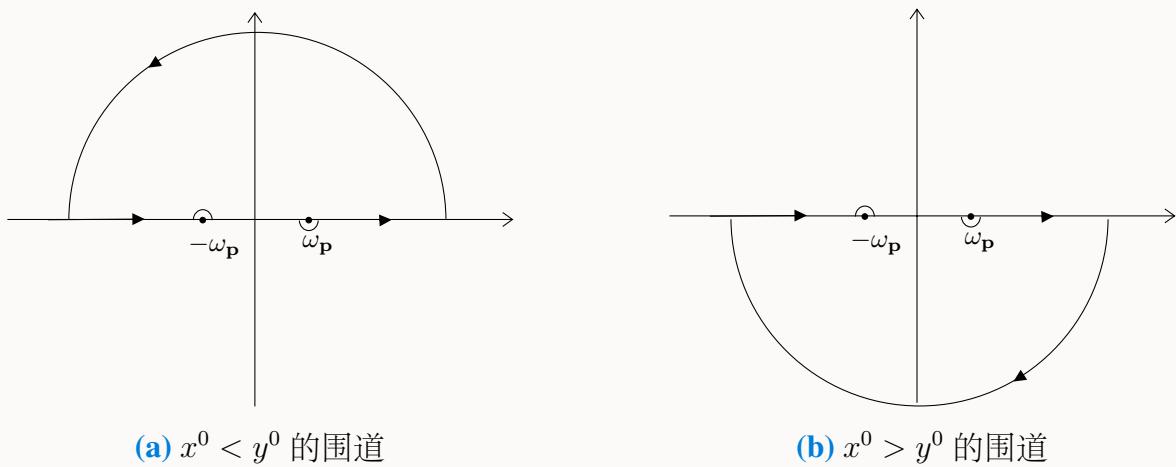


图 6.5:  $\tilde{D}_F(x - y)$  围道示意图

**定理 6.5 (Feynman 传播子  $D_F(x - y)$ )** 取围道  $C$  如图6.4

$$D_F(x - y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.28)$$

或者等价于取一个无穷小正数  $\epsilon$ :

$$D_F(x - y) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.29)$$

**定理 6.6 (共轭 Feynman 传播子  $\tilde{D}_F(x - y)$ )** 取围道  $C$  如图6.5

$$\tilde{D}_F(x - y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.30)$$

或者等价于取一个无穷小正数  $\epsilon$ :

$$\tilde{D}_F(x - y) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.31)$$

不难发现, 对于  $x^0 < y^0$  或者  $x^0 > y^0$ , 这俩关联函数都存在一个 pole, 并且可以计算发现:

$$D_F(x - y) = \Theta(x^0 - y^0) D(x - y) + \Theta(y^0 - x^0) D(y - x) \quad (6.3.32)$$

$$= \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \quad (6.3.33)$$

$$= \langle 0 | \mathcal{T} \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (6.3.34)$$

$$\tilde{D}_F(x - y) = -\Theta(x^0 - y^0) D(x - y) - \Theta(y^0 - x^0) D(y - x) \quad (6.3.35)$$

$$= -\Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle - \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \quad (6.3.36)$$

$$= -\langle 0 | \mathcal{T} \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (6.3.37)$$

其中  $\mathcal{T}$  为时间顺序算符

**定义 6.6 (时间顺序算符  $\mathcal{T}$ )** 对于一串  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的算符, 时间顺序算符即起到排序作用, 将时间上在后面发生的算符放在左边, 时间上在前面发生的算符放在右边, 相当于一个冒泡排序.

注意: 从(6.3.18)到(6.3.21)只有在一定条件下取正确的围道才成立, 并不能认为是一个任何条件下都恒等的关系. 它的作用在于启发性得导出传播子  $\frac{i}{p^2 - m^2}$ , 并由此根据不同的围道取法定义出四种不同的关联函数. 因此(6.3.22)、(6.3.25)、(6.3.28)、(6.3.30)并不能视为是从(6.3.21)直接推导得到的.

**定理 6.7 (关联函数的性质)** 这四个关联函数  $D_R(x-y)$ ,  $D_A(x-y)$ ,  $D_F(x-y)$ ,  $\tilde{D}_F(x-y)$  都是 EoM 的 Green 函数, 即:

$$\begin{aligned} (\square + m^2)D_R(x-y) &= -i\delta^4(x-y) \\ (\square + m^2)D_A(x-y) &= -i\delta^4(x-y) \\ (\square + m^2)D_F(x-y) &= -i\delta^4(x-y) \\ (\square + m^2)\tilde{D}_F(x-y) &= -i\delta^4(x-y) \end{aligned} \quad (6.3.38)$$

而  $D(x-y)$  则没有这个性质.

**证明.** 记这四种中的某个关联函数为  $D_X(x-y)$  我们从定义出发

$$D_X(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.39)$$

因此

$$\square D_X(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} (-p^2) e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.40)$$

$$m^2 D_X(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} (m^2) e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.41)$$

直接相加, 利用(2.1.4)即得:

$$(\square + m^2)D_X(x-y) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} = -i\delta^4(x-y) \quad (6.3.42)$$

而对于  $D(x-y)$

$$(\square + m^2)D(x-y) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} (p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)} \quad (6.3.43)$$

$$= m^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} e^{-ip(x-y)} \neq -i\delta^4(x-y) \quad (6.3.44)$$

讨论: 这些传播子在经典场论中对应的 EoM 的 Green 函数, 这就说明了它们的物理意义正是标量粒子的传播. 而  $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  则暗示着在 qft 中它的传播是 off-shell 的, 存在不满足色散关系的所谓”内线”粒子. 反之, 若考虑满足色散关系的实粒子, 则我们需要在  $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  后加上  $\Theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)$ , 或者使用三维体元  $\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p}$  以使其 on-shell.

## 6.4 Wick 定理

**定义 6.7 ( $\mathcal{N}$  算符)**  $\mathcal{N}$  算符可以将输入它的一串  $a_p, a_p^\dagger$  强行变成  $a_p^\dagger$  在前  $a_p$  在后的顺序. 例如:

$$\mathcal{N} \left\{ a_p a_p^\dagger a_q a_k^\dagger \right\} = a_p^\dagger a_k^\dagger a_q a_p \quad (6.4.1)$$

**定义 6.8 (Wick 收缩 (Wick contract))**

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv D_F(x-y) \quad (6.4.2)$$

**定理 6.8 (Wick 定理)**

$$\mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)] = \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) + \text{所有的 Wick 收缩}\} \quad (6.4.3)$$

其中, 所谓的”所有的 Wick” 收缩指, 任意的一对两两收缩、任意的两对两两收缩、任意的三对两两收缩等等等

比如对于  $n = 4$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)] &= \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \\ &+ \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\phi(x_4) + \overline{\phi(x_1)\phi(x_3)}\phi(x_2)\phi(x_4) \\ &+ \overline{\phi(x_1)\phi(x_4)}\phi(x_2)\phi(x_3) + \overline{\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_1)\phi(x_4) \\ &+ \overline{\phi(x_2)\phi(x_4)}\phi(x_1)\phi(x_3) + \overline{\phi(x_3)\phi(x_4)}\phi(x_1)\phi(x_2) \\ &+ \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)} \cdot \overline{\phi(x_3)\phi(x_4)} + \overline{\phi(x_1)\phi(x_3)} \cdot \overline{\phi(x_2)\phi(x_4)} \\ &+ \overline{\phi(x_1)\phi(x_4)} \cdot \overline{\phi(x_2)\phi(x_3)}\} \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

**证明.**

**引理 6.9**  $\mathcal{N}$  算符可以与  $[,]$  换序:

$$[a_{\mathbf{p}}, \mathcal{N}(\cdots)] = \mathcal{N}([a_{\mathbf{p}}, \cdots]) \quad (6.4.5)$$

**引理 6.10** 对于  $x^0 > y^0$

$$[\psi(x), \phi(y)] = [\psi(x), \psi^\dagger(y)] = D(x - y) = D_F(x - y) \quad (6.4.6)$$

不妨假设  $x_1^0 \geq x_2^0 \geq x_3^0 \geq \cdots x_n^0$  首先, 对于  $n = 2$ :

$$\mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] = \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2) + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\} \quad (6.4.7)$$

显然成立.

考虑数学归纳法, 若对  $n = k - 1$  成立, 则对  $n = k$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_k)] &= \phi(x_1)[\phi(x_2)\phi(x_3) \cdots \phi(x_k)] \\ &= (\psi(x_1) + \psi^\dagger(x_1))\mathcal{N}\{\phi(x_2)\phi(x_3) \cdots \phi(x_n) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩}\} \\ &= \mathcal{N}\{\psi^\dagger(x_1)(\phi(x_2)\phi(x_3) \cdots \phi(x_n) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩})\} \\ &\quad + \mathcal{N}\{(\phi(x_2)\phi(x_3) \cdots \phi(x_n) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩})\psi(x_1)\} + [\psi(x_1), \mathcal{N}\{\cdots\}] \\ &= \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \cdots \phi(x_n) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩}\} + \mathcal{N}\{[\psi(x_1), \cdots]\} \\ &= \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \cdots \phi(x_n) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩}\} \\ &\quad + \mathcal{N}\{\text{与}\psi(x_1)\text{收缩后的所有}(k-1)\text{Wick 收缩}\} \end{aligned}$$

最终我们合并得到:

$$\mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_k)] = \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \cdots \phi(x_n) + \text{所有的}k\text{Wick 收缩}\} \quad (6.4.8)$$

于是根据归纳公理我们证明得到了 Wick 定理.

最后补充一点, 对于 Wick 定理的证明, 我们并没有利用到任何 Free Field 的性质, 因此 Wick 定理也是可以适用于接下来的 Interaction Theory 的.

## 7 相互作用理论

在之前我们研究的都是线性没有相互作用的场论, Free Theory. 但是在自然界中, 总是存在粒子与粒子间的相互作用的, 这反映在 Lagrangian 上就是非二次项的出现. 这使得我们的方程不再是线性的波动方程, 不能再和我们二次量子化中的标准流程一样进行简正模的分解来获得最终结果了(悲). 为了能够将我们的理论拓展到相互作用上, Richard Feynman 利用微扰展开, 通过 Feynman 规则 & Feynman 图, 给予了我们的理论通过渐近展开处理相互作用的能力. 需要注意, 本节中我们使用 Heisenberger 绘景.

相互作用场论中, 真空态和自由场论不同, 为了区分我们记相互作用场论的真空态为  $|\Omega, t\rangle$ (需要注意, 因为我们在 Heisenberger 绘景下考虑, 基矢是含时的), 自由场论真空态为  $|0\rangle$ . 更具体来说,  $|\Omega, t\rangle$  满足

$$a_{\mathbf{p}}(t) |\Omega, t\rangle = 0 \quad (7.0.1)$$

或者

$$|\Omega, t\rangle = \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t iHdt} |\Omega, t_0\rangle \quad (7.0.2)$$

不过很多时候我们为了方便书写, 一般会将  $|\Omega, \pm\infty\rangle$  简记为  $|\Omega\rangle$ . 出现在算式左侧的  $\langle\Omega|$  应理解为  $\langle\Omega, +\infty|$ , 出现在右侧的  $|\Omega\rangle$  应理解为  $|\Omega, -\infty\rangle$ . 即

$$\langle\Omega|\Omega\rangle := \langle\Omega, +\infty|\Omega, -\infty\rangle = 1 \quad (7.0.3)$$

而关于真空态的具体形式我们将在下一大节给出.

### 7.1 Feynman 黄金规则

Feynman 黄金规则, 在于给予 S 矩阵元实际的物理观测效应, 也就是利用 S 矩阵得到物理的散射截面、衰变率等可观测量.

而所谓 S 算符, 其实也就是时间演化算符, 它和两个粒子态的缩并就是 S 矩阵的元素  $\langle f|S|i\rangle$ , 它的物理意义就是描述了初态  $|i\rangle$  经过时间演化, 处于终态  $|f\rangle$  的概率.

## 定义 7.1 (S 算符)

$$S = \prod_i e^{-i\Delta t H(t_i)} = \mathcal{T}\{e^{\int_{-\infty}^{+\infty} -iH dt}\} \quad (7.1.1)$$

于是

$$\langle f, t = +\infty | i, t = -\infty \rangle = \langle f | S | i \rangle = S_{fi} \quad (7.1.2)$$

需要注意的是, 这里  $|i, t = -\infty\rangle$  是指  $t = -\infty$  时的动量本征态,  $|f, t = +\infty\rangle$  是指  $t = +\infty$  时的动量本征态, 这两个本征态是不一样的  $a_p$  产生出来的.

并且由于在初末态我们的理论都近似于自由场论, 终态  $|f, t = +\infty\rangle$ , 初态  $|i, t = -\infty\rangle$  都为渐近自由态 (Asymptotic State).

**定义 7.2 (渐近自由态 (Asymptotic State))** 在  $t = +\infty, -\infty$  时在无穷远处没有互相作用的粒子即为渐近自由态. 因而渐近自由态是 on-shell 的, 并且可以利用 Free Theory 处理, 直接将  $a_p^\dagger$  作用于  $|0\rangle$  即可.

然后对于微扰理论来说,  $S$  应当非常接近 1, 互相作用项都是微扰, 因此

$$S = 1 + i\mathcal{T} \quad (7.1.3)$$

(请不要和编时算符  $\mathcal{T}$ ) 混淆.

并且定义散射振幅  $\mathcal{M}$

## 定义 7.3 (散射振幅 $\mathcal{M}$ )

$$i\mathcal{T}_{fi} = \langle f | i\mathcal{T} | i \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum p \right) \mathcal{M}_{if} \quad (7.1.4)$$

于是

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f | (1 + i\mathcal{T}) | i \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4 \left( \sum p \right) \mathcal{M}_{if} \quad (7.1.5)$$

**定义 7.4 (散射截面  $\sigma$ )** 考虑  $2 \rightarrow n$  散射, 对于某个终态, 其微分散射截面定义为

$$\Phi d\sigma = \frac{N}{T} \quad (7.1.6)$$

其中,  $\Phi = \sum_v nv$  为粒子通量 (flux),  $N$  为经过时间  $T$  后以此状态出射的粒子数

并且对于单色粒子流  $\Phi = \frac{N_{inc}v}{\mathcal{V}}$ , 其中  $\mathcal{V}$  为系统体积

**定义 7.5** 到某个散射态的概率

$$dP = \frac{N}{N_{inc}} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle \langle i|i\rangle} \quad (7.1.7)$$

其中  $N_{inc}$  为入射粒子数.

根据**定义 7.5**我们发现, 公式左边有  $d$  而右边没有, 非常不方便且丑陋, 于是我们利用这个 trick:

$$\delta^3(0)d^3p = 1 \quad (7.1.8)$$

于是

**定理 7.1**

$$dP = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle \langle i|i\rangle} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle \langle i|i\rangle} \prod_{i \in f} \delta^3(0)d^3p_i = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle \langle i|i\rangle} \prod_{i \in f} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d^3p_i \quad (7.1.9)$$

其中, 利用了式(2.1.4):

$$\delta^3(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \quad (7.1.10)$$

同样利用式(2.1.4)我们有,

$$\langle f|f\rangle = \prod_{i \in f} 2E_i \delta^3(0) = \prod_{i \in f} 2E_i \mathcal{V} \quad (7.1.11)$$

于是, 我们有

$$dP = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} \prod_f \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d^3 p_f \quad (7.1.12)$$

$$= |\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)|^2 \prod_i \frac{1}{2E_i \mathcal{V}} \prod_f \frac{1}{2E_f \mathcal{V}} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d^3 p_f \quad (7.1.13)$$

$$= |\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)|^2 \prod_i \frac{1}{2E_i \mathcal{V}} \prod_f \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3} \quad (7.1.14)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \mathcal{V} T |\mathcal{M}|^2 \prod_i \frac{1}{2E_i \mathcal{V}} \prod_f \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3} \quad (7.1.15)$$

根据

$$d\sigma = \frac{N}{T\Phi} = \frac{N\mathcal{V}}{TN_{inc}v} = \frac{\mathcal{V}}{T} dP \quad (7.1.16)$$

最后我们得到散射截面的 Feynman 黄金规则

### 定理 7.2 (散射截面的 Feynman 黄金规则)

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} d\Pi_{LIPS} \quad (7.1.17)$$

其中  $d\Pi_{LIPS}$  为 Lorentz Invariance Phase Space,

$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \quad (7.1.18)$$

类似地, 我们定义衰变率

**定义 7.6 (衰变率  $\Gamma$ )** 考虑  $1 \rightarrow n$  散射, 对于某个终态, 其微分衰变率定义为

$$d\Gamma = \frac{dP}{T} \quad (7.1.19)$$

同样对于  $1 \rightarrow n$  散射, 我们可以计算得到

$$dP = T |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{2E} d\Pi_{LIPS} \quad (7.1.20)$$

最后得到衰变率的 Feynman 黄金规则

### 定理 7.3 (衰变率的 Feynman 黄金规则)

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E} d\Pi_{LIPS} \quad (7.1.21)$$

**例 7.1 (2 → 2 散射)** 在质心系下考虑  $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$  散射, 则

$$d\sigma = \int_{p_3} \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} (2\pi)^4 \delta^4 |M|^2 \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{p_3}} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{p_4}} \quad (7.1.22)$$

$$= \int_{p_4} \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} 2\pi \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |M|^2 \frac{p_4^2 dp_4 d\Omega}{(2\pi)^3 4E_3 E_4} \quad (7.1.23)$$

设  $E_1 + E_2 = E_{CM}$ , 并且根据

$$\delta(E_{CM} - E_3 - E_4) = \delta(p_4 - p_{40}) \frac{E_3 E_4}{p_3 p_4} = \delta(p_4 - p_{40}) \frac{E_3 E_4}{p_4^2} \quad (7.1.24)$$

我们有:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64E_1 E_2} \frac{|\mathcal{M}|^2}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} \quad (7.1.25)$$

再根据

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_1} = |\mathbf{p}_i| \frac{E_{CM}}{E_1 E_2} \quad (7.1.26)$$

于是

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM} |\mathbf{p}_i|} \quad (7.1.27)$$

**例 7.2 (1 → 2 衰变)** 在质心系下考虑质量为  $M$  的粒子衰变为质量分别为  $m_1, m_2$  的粒子,  $p \rightarrow p_1 + p_2$ .

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \\ \times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) 2\pi \delta(M - E_1 - E_2) \quad (7.1.28)$$

于是

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) 2\pi \delta(M - E_1 - E_2) \quad (7.1.29)$$

$$= \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E^2} |\mathcal{M}|^2 2\pi \delta(M - 2E) \quad (7.1.30)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2 M} \int \frac{p^2 d\Omega dp}{E^2} |\mathcal{M}|^2 \delta(M - 2E) \quad (7.1.31)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2 M} \int \frac{p^2 d\Omega}{E^2} |\mathcal{M}|^2 \delta(M - 2E) \frac{E}{2p} \quad (7.1.32)$$

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{8\pi M^2} |\mathbf{p}| \quad (7.1.33)$$

其中,

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} = M \quad (7.1.34)$$

得到黄金规则之后, 那么我们接下来的任务就是计算散射振幅! 而在此之前, 我们需要两个重要的定理来作为预备.

## 7.2 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 公式

有了 Feynman 黄金规则, 我们下一步就在于计算散射振幅  $\mathcal{M}$ . 而本节的核心就在于将位置空间的关联函数与动量空间中的散射振幅连接起来, 得出 LSZ 公式:

### 定理 7.4 (LSZ 公式)

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \int d^4 x_1 i e^{-ip_1 x_1} (-p_1^2 + m^2) \cdots \int d^4 x_n i e^{ip_n x_n} (-p_n^2 + m^2) \langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle \quad (7.2.1)$$

其中, 对入射态用  $\int i e^{-ip_1 x_1} (\square + m^2)$ , 而对出射态用  $\int i e^{ip_1 x_1} (\square + m^2)$

为此, 我们尝试证明引理

### 引理 7.5

$$i \int d^4 x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}(+\infty) - a_{\mathbf{p}}(-\infty)] \quad (7.2.2)$$

**证明.** 将  $\square$  展开并分部积分有:

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = i \int d^4x e^{ipx} (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \phi \quad (7.2.3)$$

$$= i \int d^4x e^{ipx} (\partial_t^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) \phi \quad (7.2.4)$$

$$= i \int d^4x e^{ipx} (\partial_t^2 + \omega_{\mathbf{p}}^2) \phi \quad (7.2.5)$$

注意到, 如果是 free theory, 所有粒子都是 on-shell 的, 积分式就为 0. 但是对于 interacting theory, 事情就没这么简单了. 我们希望能类似 free theory 那样处理, 又该怎么办呢? 我们可以设法让这个积分只和  $t = \pm\infty$  的时候相关, 那这样子粒子之间相距无穷远, 互相之间没有 interaction, 那么自然就可以退化到 free theory, 利用 free theory 的产生湮灭算符来处理了.

于是我们尝试使用分布积分:

$$i \int d^4x e^{ipx} \partial_t^2 \phi = -i \int d^4x \partial_t e^{ipx} \partial_t \phi + i \int d^4x \partial_t [e^{ipx} \partial_t \phi] \quad (7.2.6)$$

$$= i \int d^4x \partial_t^2 e^{ipx} \phi - i \int d^4x \partial_t [\partial_t e^{ipx} \phi] + i \int d^4x \partial_t [e^{ipx} \partial_t \phi] \quad (7.2.7)$$

$$= i \int d^4x (-\omega_{\mathbf{p}}^2) e^{ipx} \phi - i \int d^4x \partial_t [\partial_t e^{ipx} \phi] + i \int d^4x \partial_t [e^{ipx} \partial_t \phi] \quad (7.2.8)$$

那么代回到原式中, 第一项正和我们在 free theory 中一样, 与  $+\omega_{\mathbf{p}}^2$  抵消了, 于是剩下

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = -i \int d^4x \partial_t [\partial_t e^{ipx} \phi] + i \int d^4x \partial_t [e^{ipx} \partial_t \phi] \quad (7.2.9)$$

将对  $t$  的积分专门拎出来, 我们有:

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = i \int d^3x e^{ipx} (\pi - i\omega_{\mathbf{p}} \phi) \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} \quad (7.2.10)$$

因为内部的式子是在  $t = \pm\infty$  时求的, 所以我们可以直接利用 free theory 的  $\phi, \pi$ (即式(6.1.22), (6.1.23)) 进行计算, 最后我们可以得到

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = \sqrt{2\omega_p} [a_p(+\infty) - a_p(-\infty)] \quad (7.2.11)$$

做分部积分我们还有等价形式

$$i \int d^4x e^{ipx} (-p^2 + m^2) \phi = \sqrt{2\omega_p} [a_p(+\infty) - a_p(-\infty)] \quad (7.2.12)$$

将这个引理取共轭我们有:

$$-i \int d^4x e^{-ipx} (-p^2 + m^2) \phi = \sqrt{2\omega_p} [a_p^\dagger(+\infty) - a_p^\dagger(-\infty)] \quad (7.2.13)$$

然后我们考虑计算  $\langle f, t = -\infty | i, t = +\infty \rangle$ ,

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \langle \Omega | \prod_{p \in f} \sqrt{2\omega_p} a_p(+\infty) \prod_{p \in i} \sqrt{2\omega_p} a_p^\dagger(-\infty) | \Omega \rangle \quad (7.2.14)$$

$$= \langle \Omega | \mathcal{T} \left\{ \prod_{p \in f} \sqrt{2\omega_p} a_p(+\infty) \prod_{p \in i} \sqrt{2\omega_p} a_p^\dagger(-\infty) \right\} | \Omega \rangle \quad (7.2.15)$$

插入时序算符  $\mathcal{T}$  后, 我们发现, 我们再添加  $a_p(+\infty), a_p^\dagger(-\infty)$  是不会影响结果的, 因为  $\mathcal{T}$  会将它们分别置于最左边和最右边, 然后和真空态缩并直接得到 0. 于是,

$$\begin{aligned} \langle f, +\infty | i, -\infty \rangle &= \langle \Omega | \mathcal{T} \prod_{p \in f} \sqrt{2\omega_p} [a_p(+\infty) - a_p(-\infty)] \\ &\quad \prod_{p \in i} \sqrt{2\omega_p} [a_p^\dagger(-\infty) - a_p^\dagger(+\infty)] | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \Omega | \mathcal{T} \prod_{p \in f} i \int d^4x_f e^{ip_f x_f} (-p_f^2 + m^2) \phi_f \\ &\quad \prod_{p \in i} i \int d^4x_i e^{-ip_i x_i} (-p_i^2 + m^2) \phi_i | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (7.2.17)$$

于是我们最终得到了 LSZ 公式:

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \int d^4x_1 i e^{-ip_1 x_1} (-p_1^2 + m^2) \cdots \int d^4x_n i e^{ip_n x_n} (-p_n^2 + m^2) \langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle \quad (7.2.18)$$

### 7.3 Schwinger-Dyson 定理

本节的核心在于通过为接下来微扰展开计算空间关联函数继而得到位置空间的 Feynman 规则做准备.

#### 定理 7.6 (Schwinger-Dyson 定理)

$$(\square_x + m^2) \langle \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle = \langle (\square_x + m^2) \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle - i \sum_j \delta_{xj} \langle \phi_1 \cdots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \cdots \phi_n \rangle \quad (7.3.1)$$

**证明.** 首先考虑  $\partial_t^2 \mathcal{T}\{\phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\}$ . 我们不妨假设  $\phi_1, \phi_2 \cdots \phi_n$  是已经按先后顺序排列好的, 即  $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n$ .

那么

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{\phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} &= (\phi_x \phi_1 \cdots \phi_n) [\Theta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] \\ &\quad + (\phi_1 \phi_x \cdots \phi_n) [\Theta(t_1 - t) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

然后

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{T}\{\phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} &= \mathcal{T}\{\partial_t \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} \\ &\quad + (\phi_x \phi_1 \cdots \phi_n) [\delta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] \\ &\quad - (\phi_1 \phi_x \cdots \phi_n) [\delta(t_1 - t) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{T}\{\partial_t \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} \\ &\quad + ([\phi_x, \phi_1] \cdots \phi_n) [\delta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

$$= \mathcal{T}\{\partial_t \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} \quad (7.3.5)$$

$$= \mathcal{T}\{\pi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} \quad (7.3.6)$$

再次求导

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \mathcal{T}\{\phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} &= \mathcal{T}\{\partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} \\ &\quad + (\pi_x \phi_1 \cdots \phi_n) [\delta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] \\ &\quad - (\phi_1 \pi_x \cdots \phi_n) [\delta(t_1 - t) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{T}\{\partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} \\ &\quad + ([\pi_x, \phi_1] \cdots \phi_n) [\delta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \tag{7.3.8}$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{T}\{\partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} \\ &\quad - i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \delta(t - t_1) (\cdots \phi_n) [\Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \tag{7.3.9}$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{T}\{\partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} \\ &\quad - i\delta_{x1} (\cdots \phi_n) [\Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{T}\{\partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n\} - i \sum_j \delta_{xj} \mathcal{T}\{\phi_1 \cdots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \cdots \phi_n\} \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

然后由于  $\nabla^2, m^2$  都作用不到只含  $t$  的  $\Theta$  上, 因此可以直接提入  $\langle \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle$  内, 于是我们最终得到

$$(\square_x + m^2) \langle \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle = \langle (\square_x + m^2) \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle - i \sum_j \delta_{xj} \langle \phi_1 \cdots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \cdots \phi_n \rangle \tag{7.3.12}$$

## 7.4 Feynman 规则, 启动!

目前, 所有的工具以及准备都已经摆在我面前了, **Feynman** 规则, 启动!

具体来说, 在本小节, 我们将考虑标量场的  $\phi^3$  理论, 即

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{g}{3!} \phi^3 \tag{7.4.1}$$

其中  $\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{3!}\phi^3$  为微扰的相互作用项.

### 7.4.1 位形空间的 Feynman 规则

我们以  $\langle\phi_1\phi_2\rangle$  为例, 继而导出位置空间的 Feynman 规则.

$$\langle\phi_1\phi_2\rangle = \int d^4x \delta_{1x} \langle\phi_x\phi_2\rangle = \int d^4xi (\square_x + m^2) D_{1x} \langle\phi_x\phi_2\rangle \quad (7.4.2)$$

$$= \int d^4xi D_{1x} (\square_x + m^2) \langle\phi_x\phi_2\rangle \quad (7.4.3)$$

$$= \int d^4x \frac{ig}{2} D_{1x} \langle\phi_x^2\phi_2\rangle - i\delta_{x2} \cdot iD_{1x} \quad (7.4.4)$$

$$= D_{12} + \frac{ig}{2} \int d^4x D_{1x} \langle\phi_x^2\phi_2\rangle \quad (7.4.5)$$

而依葫芦画瓢我们有

$$\langle\phi_x^2\phi_2\rangle = \int d^4y D_{y2} (\square_y + m^2) \langle\phi_x^2\phi_y\rangle \quad (7.4.6)$$

$$= \frac{ig}{2} \int d^4y D_{2y} \langle\phi_x^2\phi_y^2\rangle - 2i \int d^4y \delta_{xy} iD_{y2} \langle\phi_x\rangle \quad (7.4.7)$$

$$= \frac{ig}{2} \int d^4y D_{2y} \langle\phi_x^2\phi_y^2\rangle + 2D_{x2} \langle\phi_x\rangle \quad (7.4.8)$$

梅开三度

$$\langle\phi_x\rangle = \int d^4y iD_{yx} (\square_y + m^2) \langle\phi_y\rangle \quad (7.4.9)$$

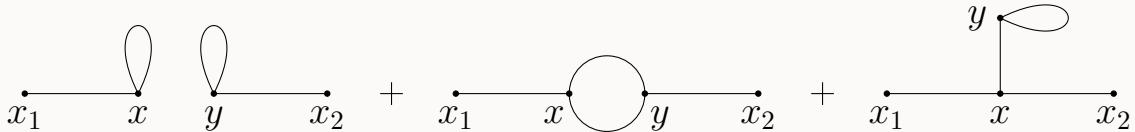
$$= \frac{ig}{2} \int d^4y D_{yx} \langle\phi_y^2\rangle \quad (7.4.10)$$

于是最后整理得

$$\langle\phi_1\phi_2\rangle = D_{12} - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \int d^4x d^4y (2D_{1x}D_{xy}D_{xy}D_{y2} + D_{1x}D_{xx}D_{yy}D_{y2} + 2D_{1x}D_{xy}D_{yy}D_{x2}) \quad (7.4.11)$$

我们可以用这个 fancy 的图来表示这些二阶贡献, 这就是 Feynman 图:

然后我们可以写下  $\phi^3$  理论在位形空间的 Feynman 规则



1. 标出所有外点
2. 标出所有内点, 一个内点写一个  $\frac{ig}{3!} \int d^4x$
3. 对所有的内线(位形空间 Feynman 图只有内线), 写下 Feynman 传播子  $D_{ij}$ , 其中  $i, j$  为内线连接的两点
4. 乘以对称数目

对称数目的计算我们可以以图 7.1 为例来讨论 [13].

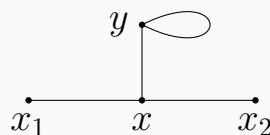


图 7.1: 一张 Feynman 图的例子

具体来说, 我们写下

$$\langle \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \rangle \quad (7.4.12)$$

$x$  有  $A_3^2 = 6$  种选择来分别连接  $x_1, x_2$ , 然后  $y$  有 3 种选择连接  $x$ , 于是总共的对称数目为 18, 乘以  $\frac{1}{(3!)^2}$  也就是  $\frac{1}{2}$ , 与我们前述的计算结果保持一致!

那么如何理解 Schwartz 上 [9] 除以对称因子的做法呢? 这本质上和我们这里介绍的乘以对称数目的方法其实是一样的. 我们考虑一个更复杂的例子 ( $\phi^4$  理论) 来详细阐述这个问题, Feynman 图如图 7.2

首先考虑顶点  $a$ , 将其分为三堆, 一堆一个连接 1, 一堆一个连接  $b$ , 再一堆两个自己连接自己, 可以得到  $C_4^1 C_3^1 C_2^2 = \frac{4!}{2}$  种分配方法.

然后再考虑顶点  $b$ , 同样将其分为三堆, 一堆一个连接  $a$ , 一堆一个连接 2, 一堆两个连接  $c$ , 可以得到  $C_4^1 C_3^1 C_2^2 = \frac{4!}{2}$  种分配方法.

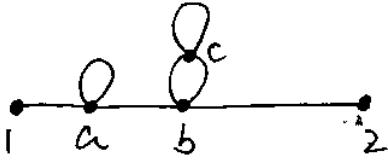


图 7.2: 一个更复杂点的 Feynman 图例子

最后考虑顶点  $c$ , 将其分为两堆, 一堆两个连接  $b$ , 一堆两个自己连接自己, 并且考虑到从  $b$  到  $c$  过来的线我们已经在  $C_2^2$  中除以了  $2!$  的对称因子, 所以可以认为它有两个不同的出口  $b1, b2$ , 然后  $c$  中选择两个按顺序分别与  $b1, b2$  连接, 于是有  $A_4^2 C_2^2 = \frac{4!}{2}$  种分配方法.

综上, 与  $\frac{1}{(4!)^3}$  相抵消, 总共剩下三个  $C_n^m$  贡献出来的对称因子  $\frac{1}{8}$ .

从这里可以看出, Schwartz 中所称的对称因子其实也就是我们在对某一个顶点  $i$  的脚分堆的过程中, 对于连接顶点  $j \neq i$  并有  $n > 1$  个脚的堆,  $n$  个脚之间没有区别所带来的需要除去的因子  $n!$ . 但是需要注意, 由于这一堆在顶点  $i$  已经除以对称因子过了, 所以我们在顶点  $j$  连接顶点  $i$  的那一堆脚中不需要再除以对称因子  $n!$  了. 因此, 总的来说, 一对各有  $n$  个脚的从  $i$  到  $j$  的脚的堆和从  $j$  到  $i$  的脚的堆, 总共贡献  $n!$  的对称因子.

细心的读者可以注意到, 在这里我们没有讨论顶点  $j = i$  也就是自己连接自己的情况. 这个问题比较微妙, 需要我们特殊考虑, 我们可以通过下面这个例子(如图7.3)来进行进一步的讨论.



图 7.3: 一个更复杂点的 Feynman 图例子

我们对顶点  $a$  进行分堆, 那么我们可以分出两堆, 每堆各两个腿, 每

堆的两个腿相互连接,由于这两堆是完全等价的,所以说我们还需要额外地除以一个对称因子  $2!$  来去掉多余的计数. 于是我们有总数目  $\frac{C_4^2 C_2^2}{2} = \frac{4!}{2 \cdot 2} = \frac{4!}{8}$ , 也就是为 8 的对称因子.

从这里我们可以看出来,对于有  $2n$ (因为是两个脚相互连接,因此一定是偶数个自己连接自己的脚)个自己连接自己的脚的顶点,其对称因子应当为  $n!2^n$ . 可以看到,比连接不同顶点的堆多贡献了一个  $2^n$  的因子.

综上所述,我们同样可以再写出 Schwartz 版的 Feynman 规则  $\phi^3$  理论在位形空间的 Feynman 规则

1. 标出所有外点
2. 标出所有内点,一个内点写一个  $ig \int d^4x$
3. 对所有的内线,写下 Feynman 传播子  $D_{ij}$ ,其中  $i, j$  为内线连接的两点
4. 除以对称因子

而以如下方式进行对称因子的计算:

1. 一对各有  $n$  个脚(这个脚可以单纯的自由传播子,也可以是存在质量重整化等的传播子)的从  $i$  到  $j$  的脚的堆和从  $j$  到  $i$  的脚的堆( $i \neq j$ ),总共贡献  $n!$  的对称因子
2.  $2n$ (因为是两个脚相互连接,因此一定是偶数个自己连接自己的脚)个自己连接自己的脚的顶点,总共贡献  $n!2^n$  的对称因子
3. 将所有的对称因子相乘即总的对称因子

一点感悟: 最大感受就是高中数学学得最烂的排列组合还在追我 ==. 写这段时,脑子里又浮现了高中数学课上香香反复告诫我们做排列组合题,先分堆再计算的情景(真的好喜欢好怀念我的高中数学老师!). 花了好多时间完全弄明白这个问题,又花了很多时间在这里详细讨论这个问题并把它写清楚... 希望能够解决大家学习 Symmetry Factor 中遇到的问题吧.

### 7.4.2 动量空间的 Feynman 规则

虽然已经有了位形空间的 Feynman 规则, 但是它并不能直接给我们散射振幅  $\mathcal{M}$ , 因此我们需要通过某种方式将动量空间与位形空间连接起来, 从而处理在动量空间中的问题. 而这个工具我们已经在提出过了, 即定理7.4: LSZ 公式. 所以, 我们直接动手吧!

首先, 利用分部积分, 我们不难得到 LSZ 公式的等价形式

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \int d^4x_1 - ie^{-ip_1x_1}(p_1^2 - m^2) \cdots \int d^4x_n - ie^{ip_nx_n}(p_n^2 - m^2) \langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle \quad (7.4.13)$$

代入我们上节的结果应当有:

$$\begin{aligned} \langle f, +\infty | i, -\infty \rangle &= \int d^4x_1 - ie^{-ip_1x_1}(p_1^2 - m^2) \cdots \int d^4x_n - ie^{ip_nx_n}(p_n^2 - m^2) \\ &\times \cdots \int \frac{d^4p'_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2_1 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip'_1(x_1 - x)} \dots \end{aligned} \quad (7.4.14)$$

对第一个  $d^4x_1$  积分可以产生一个  $\delta$  函数并干掉和外点  $x_1$  连接的内线的传播子, 从而将其变成外线

于是有

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \int d^4x e^{-i(p_1 + q_1 + \cdots)x} \int d^4y e^{-i(p_1 + q_1 + \cdots)y} \dots \quad (7.4.15)$$

$$= \int \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots (2\pi)^4 \delta^4(\sum p) \cdots \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \dots \quad (7.4.16)$$

其中  $x, y \dots$  为没有被 LSZ 干掉的内点.

然后对  $x, y \dots$  再积分, 即可获得  $\delta$  函数  $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 + \cdots)$

于是我们可以得到动量空间的 Feynman 规则 [1]

1. 标出外线  $i, f$
2. 对所有内点写下耦合常数  $ig$ , 以及能动量守恒  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p)$
3. 对所有内线写下  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
4. 将最终结果扣去一个总的能动量守恒  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p)$  以及一个多余的  $i$ , 即得到散射振幅  $\mathcal{M}_{if}$

并且我们可以发现, 对于非联通图, 我们一定会产生对于外线动量  $p$ , 类似于  $\delta^4(p)$  的结果, 而外线动量是 on-shell 的, 不能做到为 0, 因此 LSZ 还会 kill 掉全部的非联通图贡献.

## 7.5 从拉氏密度直接到动量空间 Feynman 规则

接下来我们讨论一下如何从  $\mathcal{L}$  中直接得到动量空间 Feynman 规则.

我们的核心问题在于如何获得顶点, 传播子是通过 free field 的性质就可以直接得到的. 而关于顶点, 类似于上节对对称数目的讨论, 使用直接除以对称因子的方法, 我们需要将直接出现在  $\mathcal{L}$  中的系数分别乘以  $n!$ , 其中  $n$  为某个场  $\phi$  乘的次数, 并且顶点会与  $n$  个场  $\phi$  传播子相连接. 而如果是使用乘以对称数目方式, 则内点是直接乘以  $\mathcal{L}$  中原始的系数, 然后对称数目通过类似的方式求.

这段论述可能比较抽象, 我们可以通过两个具体的例子来考虑:

### 例 7.3 ( $\phi^4$ 理论)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 \quad (7.5.1)$$

除以对称因子法:

1. 顶点因子:  $ig(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$
2.  $\phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
3. 一个顶点连接四个  $\phi$  传播子

乘以对称数目法:

1. 顶点:  $\frac{ig}{4!}(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$
2.  $\phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
3. 一个顶点连接四个  $\phi$  传播子

其中, 数对称数目时, 一个内点  $x$  对应  $\langle \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \rangle$

### 例 7.4 ( $\phi, \Phi$ 粒子耦合)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\Phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\mu}{2!}\Phi\phi\phi \quad (7.5.2)$$

除以对称因子法:

1. 顶点:  $-i\mu(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3)$
2.  $\Phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - M^2 + i\epsilon}$
3.  $\phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
4. 一个顶点连接一个  $\Phi$  传播子和两个  $\phi$  传播子

乘以对称数目法:

1. 顶点:  $-\frac{i\mu}{2!}(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3)$
2.  $\Phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - M^2 + i\epsilon}$
3.  $\phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
4. 一个顶点连接一个  $\Phi$  传播子和两个  $\phi$  传播子

其中, 数对称数目时, 一个内点  $x$  对应  $\langle \Phi_x \phi_x \phi_x \rangle$

## 8 Dyson 级数

从本节开始我们从另一种方式理解微扰展开, 即 Dyson 级数. 利用 Dyson 级数我们可以比 Schwinger Dyson 更加容易看出微扰展开的结构, 从而更直观地导出 Feynman 规则并看出对称因子. 此外, 它还可以直接给出我们一直好奇的真空态  $\Omega$  的具体表达式. 而在此之前, 我们需要首先引入一个新的绘景: 相互作用绘景 [5].

### 8.1 相互作用绘景

存在相互作用时, 我们可以将哈密顿量分为不含时的自由哈密顿量与含时的微扰作用, 即

$$H = H_0 + H'(t) \quad (8.1.1)$$

. 在这里我们认为微扰含时是因为我们做了个绝热近似: 在  $t = \pm\infty$  的时候关掉微扰相互作用, 这样子我们的场论就是严格的自由场论, 然后随着时间演化绝热地开启  $H'$ .

在 Heisenberger 绘景中, 我们甚至无法写出  $\phi$  的具体表达式, 这是让我们头疼的地方. 相互作用绘景的 Motivation 就是让算符的含时形式和自由场一样:

$$\phi_I(\mathbf{x}, t) = e^{iH_0 t} \phi(\mathbf{x}) e^{-iH_0 t} \quad (8.1.2)$$

那么这样子我们还需要量子态也存在时间的演化, 设

$$|\psi_I, t\rangle = U(t, t_0) |\psi\rangle \quad (8.1.3)$$

根据

$$\langle \phi_I, t | O_I | \psi_I, t \rangle := \langle \phi_S, t | O | \psi_S, t \rangle \quad (8.1.4)$$

, 其中

$$|\psi_S, t\rangle = S(t, t_0) |\psi\rangle, S(t, t_0) = \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t -iH dt} \quad (8.1.5)$$

$|\psi_S, t\rangle$  为 Schoedinger 绘景下的态矢,  $S(t, t_0)$  为 Schoedinger 绘景下的态矢量的时间演化算符.

这样我们有

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} S(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t -iH dt} \quad (8.1.6)$$

然后我们发现  $U$  满足微分方程

$$i \frac{dU}{dt} = -H_0 U + e^{iH_0 t} H \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t -iH dt} \quad (8.1.7)$$

$$= e^{iH_0 t} H' \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t -iH dt} \quad (8.1.8)$$

$$= H'_I U \quad (8.1.9)$$

注意到,  $U$  的解为

$$U = \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t -iH'_I dt} \quad (8.1.10)$$

从而我们将  $U$  写为了更紧凑的形式.

进一步地, 我们将  $e^{\int_{t_0}^t -iH'_I dt}$  展开, 就得到了 Dyson 级数:

### 定理 8.1 (Dyson 级数)

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t H'_I(z) dz + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{t_0}^t dz \int_{t_0}^z dw H'_I(z) H'_I(w) + \dots \quad (8.1.11)$$

最后, 我们可以总结三个不同绘景下算符、基矢、以及态的时间演化算符的关系

绘景	算符	基矢	时间演化算符
Schoedinger	$O_S = O$	$ \alpha_S\rangle =  \alpha\rangle$	$S(t, t_0) = \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t -iH dt}$
Heisenberger	$O_H(t) = S_{tt_0}^\dagger O S_{tt_0}$	$ \alpha_H, t\rangle = S_{tt_0}^\dagger  \alpha\rangle$	1
相互作用	$O_I(t) = e^{iH_0 t} O e^{-iH_0 t}$	$ \alpha_I, t\rangle = U_{tt_0}^\dagger  \alpha\rangle$	$U(t, t_0) = \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t -iH'_I dt}$

表 8.1: 三种绘景下算符、基矢、时间演化算符的关系

此外, 还有

$$O_H = U^\dagger O_I U \quad (8.1.12)$$

## 8.2 真空态与 Feynman 规则

在上一大节中, 虽然我们引入了真空态, 但是我们并没有给出真空态的具体表达式. 在本节中, 利用 Dyson 级数, 我们可以得到真空态的具体形式 [10].

为了得到其具体表达式, 我们希望它和自由场的真空态  $|0\rangle$  建立联系. 由于我们做了绝热近似, 在  $t = \pm\infty$  时就是自由场, 所以说我们有

$$|\Omega, \pm\infty\rangle = |0\rangle \quad (8.2.1)$$

我们指出, Heisenberger 绘景下的真空态和相互作用绘景下的真空态基矢只差一个相位, 即

$$|\Omega_H, t\rangle = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} S_{tt_0}^\dagger |0\rangle \quad (8.2.2)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U_{tt_0}^\dagger e^{iH_0(t-t_0)} |0\rangle \quad (8.2.3)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} e^{iE_0(t-t_0)} U_{tt_0}^\dagger |0\rangle \quad (8.2.4)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} e^{iE_0(t-t_0)} |\Omega_I, t\rangle \quad (8.2.5)$$

, 其中  $E_0$  为真空能量. 或者我们可以直接验证

$$a_p(t) |\Omega_I, t\rangle = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} S_{tt_0}^\dagger a_p S_{tt_0} U_{tt_0}^\dagger |0\rangle \quad (8.2.6)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} S_{tt_0}^\dagger a_p e^{iH_0(t-t_0)} |0\rangle \quad (8.2.7)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} e^{iE_0(t-t_0)} S_{tt_0}^\dagger a_p |0\rangle \quad (8.2.8)$$

$$= 0 \quad (8.2.9)$$

. 由于 Heisenberger 绘景下和相互作用绘景的真空态只差相位因子, 所以一般来说, 我们会将 Heisenberger 绘景下的真空态基矢也都乘以这个相位因子  $e^{-iE_0(t-t_0)}$ , 从而让 Heisenberger 绘景下的真空态基矢与相互作用绘景下的真空态基矢相同, 从而将它们都简记为

$$|\Omega, t\rangle = |\Omega_I, t\rangle = U^\dagger(t, -\infty) |\Omega, -\infty\rangle = U^\dagger(t, -\infty) |0\rangle \quad (8.2.10)$$

于是我们得到

$$|\Omega, +\infty\rangle = U^\dagger(+\infty, -\infty) |0\rangle \quad (8.2.11)$$

, 它满足

$$\langle \Omega, +\infty | \Omega, +\infty \rangle = 1 \quad (8.2.12)$$

然而, 根据式(7.0.3), 我们要求

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = \langle \Omega, +\infty | \Omega, -\infty \rangle = 0 \quad (8.2.13)$$

. 我们却发现

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = \langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle \quad (8.2.14)$$

$$= \langle 0 | \left( 1 + (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} H'_I(t) dz + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{t_0}^z dw H'_I(z) H'_I(w) + \dots \right) | 0 \rangle \quad (8.2.15)$$

$$= \langle 0 | \left( 1 + (-i) \int d^4x \mathcal{H}'_I + \frac{(-i)^2}{2!} \int d^4x d^4y \mathcal{H}'_I(x) \mathcal{H}'_I(y) + \dots \right) | 0 \rangle \quad (8.2.16)$$

若我们考虑  $\phi^3$  理论, 即

$$\mathcal{H}'_I = -\frac{g}{3!} \phi_I^3 \quad (8.2.17)$$

, 于是有

$$\begin{aligned} \langle \Omega, +\infty | \Omega, -\infty \rangle &= 1 + \frac{ig}{3!} \int d^3x \langle \phi_I(x) \phi_I(x) \phi_I(x) \rangle_0 \\ &\quad + \left( \frac{ig}{3!} \right)^2 \int d^3x d^3y \langle \phi_I(x) \phi_I(x) \phi_I(x) \phi_I(y) \phi_I(y) \phi_I(y) \rangle_0 + \dots \end{aligned} \quad (8.2.18)$$

, 其中

$$\langle \dots \rangle_0 := \langle 0 | \mathcal{T} \dots | 0 \rangle \quad (8.2.19)$$

注意到, 这里的缩并都完全是自由场的缩并 (相互作用绘景下的  $\phi_I$  就是自由场在 Heisenberger 绘景下的  $\phi_0$ ). 然后利用 Wick 定理可以把这些缩并写为自由场传播子  $D_F$  的乘积与求和. 并且这个求和同样可以用 Feynman 图写出, 即真空图:

$$\langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle = 1 + \text{---} + \text{---} + \cdots \quad (8.2.20)$$

我们发现这个值并不为 0, 即

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = \langle \Omega, +\infty | \Omega, -\infty \rangle = \langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle \neq 0 \quad (8.2.21)$$

, 这和式(7.0.3)的要求不一致, 因此, 我们还需要进一步重新定义

$$|\Omega, +\infty\rangle = \frac{U^\dagger(+\infty, -\infty)}{\langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle} |0\rangle \quad (8.2.22)$$

从而, 我们有结论

$$\langle \Omega | \dots | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | U(+\infty, -\infty) \mathcal{T} \dots | 0 \rangle}{\langle 0 | U(+\infty, -\infty) | 0 \rangle} \quad (8.2.23)$$

并且根据

$$\begin{aligned} \langle 0 | U(+\infty, -\infty) \mathcal{T} \dots | 0 \rangle &= \Theta(\dots) \dots \langle 0 | U(+\infty, -\infty) \phi(x_1) \dots | 0 \rangle + \dots \\ &\quad (8.2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \Theta(\dots) \dots \langle 0 | U(+\infty, -\infty) U(-\infty, t_1) \phi_I(x_1) U(t_1, -\infty) \dots | 0 \rangle + \dots \\ &\quad (8.2.25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \Theta(\dots) \dots \langle 0 | U(+\infty, t_1) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \phi_I(x_2) \dots | 0 \rangle + \dots \\ &\quad (8.2.26) \end{aligned}$$

$$= \langle 0 | \mathcal{T} e^{\int d^4x - i\mathcal{H}'_I} \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots | 0 \rangle \quad (8.2.27)$$

所以最终我们有

$$\langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | \mathcal{T} e^{\int d^4x - i\mathcal{H}'_I} \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{T} e^{\int d^4x - i\mathcal{H}'_I} | 0 \rangle} \quad (8.2.28)$$

这个式子全都只含有自由场算子及其缩并,因此是完全可以直接计算的.

以  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle$  为例展开我们有

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \frac{\text{——} + \text{——} \text{——} + \text{——} \text{——} + \cdots}{1 + \text{——} + \text{——} + \cdots} \quad (8.2.29)$$

注意到,如果我们将分母展开,我们可以将所有与真空图乘积的图抵消掉,于是有最终结果

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \text{——} + \text{——} \text{——} + \text{——} \text{——} + \cdots \quad (8.2.30)$$

这与我们使用 [Schwinger-Dyson 定理](#)展开得到的式([7.4.11](#))完全是一致的.

# 9 路径积分

在本节我们介绍另外一种导出 Feynman 规则的方法, 也就是 Feynman 所提出的路径积分方法. 需要注意, 本节我们的推导基于 Heisenberger 绘景.

## 9.1 单粒子路径积分

我们首先考虑经典量子力学中的路径积分表述. 所谓路径积分, 就是考虑粒子在所有可能传播路径的贡献, 然后将它们加起来. 这听起来是一个疯狂的想法, 但是我们在经典物理中可以找到一个简单的 Motivation: 双缝干涉实验. 我们知道基尔霍夫衍射公式, 它将边界态的所有点发出的光线求和, 从而得到光场分布, 如果我们再进一步, 考虑光线的所有贡献路径, 那么就是路径积分.

考虑传播子  $\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle$ , 在 Schodinger 绘景下, 可以表示为

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-i \int_{t_i}^{t_f} dt H(t)} | x_i \rangle \quad (9.1.1)$$

.

我们将这个积分过程进行拆分, 分为  $N + 1$  个部分, 有

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-i \Delta t H(t_n)} e^{-i \Delta t H(t_{n-1})} \dots e^{-i \Delta t H(t_1)} e^{-i \Delta t H(t_i)} | x_i \rangle \quad (9.1.2)$$

然后插入恒等算符

$$\int dx |x\rangle \langle x| = 1 \quad (9.1.3)$$

得到

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle &= \int dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \langle x_f | e^{-i \Delta t H(t_n)} k e t x_n \\ &\quad \langle x_n | e^{-i \Delta t H(t_{n-1})} | x_{n-1} \rangle \langle x_{n-1} | \dots e^{-i \Delta t H(t_1)} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-i \Delta t H(t_i)} | x_i \rangle \end{aligned} \quad (9.1.4)$$

然后尝试计算

$$\langle x_{j+1} | e^{-i \Delta t H(t_j)} | x_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} \langle x_{j+1} | p \rangle \langle p | e^{-i \Delta t (\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t_j))} | x_j \rangle \quad (9.1.5)$$

因为  $\Delta t \approx 0$ ,

$$e^{-i\Delta t(\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x},t_j))} \approx 1 - i\Delta t(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t)) \quad (9.1.6)$$

所以

$$\langle p | e^{-i\Delta t(\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x},t_j))} | x_j \rangle \approx \langle p | (1 - i\Delta t(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}, t))) | x_j \rangle \quad (9.1.7)$$

$$= \langle p | (1 - i\Delta t(\frac{p^2}{2m} + V(x_j, t_j))) | x_j \rangle \quad (9.1.8)$$

$$\approx \langle p | e^{-i\Delta t(\frac{p^2}{2m}+V(x_j,t_j))} | x_j \rangle \quad (9.1.9)$$

再代入

$$\langle x | p \rangle = e^{ipx} \quad (9.1.10)$$

于是

$$\langle x_{j+1} | e^{-i\Delta t H(t_j)} | x_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-i\frac{p^2}{2m}\Delta t + ip(x_{j+1}-x_j)\Delta t} e^{-iV(x_j, t_j)\Delta t} \quad (9.1.11)$$

$$(9.1.12)$$

再根据 Gaussian 积分公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-Ax^2+Bx} = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}} \quad (9.1.13)$$

我们得到最终结果

$$\langle p | e^{-i\Delta t(\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(\hat{x},t_j))} | x_j \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \Delta t}} e^{i\Delta t(\frac{1}{2m}(\frac{x_{j+1}-x_j}{\Delta t})^2 - V(x_j, t_j))} \quad (9.1.14)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \Delta t}} e^{i\Delta t L(x_{j+1}, x_j, t_j)} \quad (9.1.15)$$

所以我们得出结论

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \Delta t} \right)^{\frac{N+1}{2}} \int dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 e^{i \sum_{j=0}^N \Delta t L(x_{j+1}, x_j, t_j)} \quad (9.1.16)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \Delta t} \right)^{\frac{N+1}{2}} \int dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 e^{i S[x]} \quad (9.1.17)$$

$$= \int \mathcal{D}x e^{i S[x]} \quad (9.1.18)$$

## 9.2 场论路径积分

为了能够应用 QM 中的路径积分, 我们首先对 QM 与 QFT 中的基本元素有如下类比 .

QM	QFT
$\hat{x} x\rangle = x x\rangle$	$\hat{\phi}(x) \phi\rangle = \phi(x) \phi\rangle$
$\hat{p} p\rangle = p p\rangle$	$\hat{\pi}(x) \pi\rangle = \pi(x) \pi\rangle$
$\langle \mathbf{p} \mathbf{x}\rangle = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$	$\langle \pi \phi\rangle = e^{-i\int d^3x \pi(x)\phi(x)}$
$\langle x_f, t_f   x_i, t_i \rangle$	$\langle \Omega, t_f   \Omega, t_i \rangle$

表 9.1: QM 与 QFT 中路径积分需要用到的基本元素类比

设拉氏量

$$L = \int d^3x \left( \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - V(\phi) \right) \quad (9.2.1)$$

做 Legdren 变换于是可以得到 Hamiltonian

$$H = \int d^3x \left( \frac{1}{2}\pi^2 + V(\phi) \right) \quad (9.2.2)$$

.

然后我们对真空振幅进行完全类似的操作, 可以得到

$$\langle \Omega, t_f | \Omega, t_i \rangle = \langle \Omega | e^{-i\Delta t H(t_n)} e^{-i\Delta t H(t_{n-1})} \dots e^{-i\Delta t H(t_1)} e^{-i\Delta t H(t_i)} |\Omega\rangle \quad (9.2.3)$$

插入积分, 但是需要注意, 这里我们是直接对一个时间切片  $t_j$  下的场  $\phi(\mathbf{x}, t_j)$  空间分布的枚举, 这个枚举本身就是一个路径积分  $\int \mathcal{D}\phi_j$ , 所以我们有

$$\begin{aligned} \langle \Omega, t_f | \Omega, t_i \rangle &= N \int \mathcal{D}\phi_n \mathcal{D}\phi_{n-1} \dots \mathcal{D}\phi_1 \langle \Omega | e^{-i\Delta t H(t_n)} |\phi_n\rangle \\ &\quad \langle \phi_n | e^{-i\Delta t H(t_{n-1})} |\phi_{n-1}\rangle \dots \langle \phi_1 | e^{-i\Delta t H(t_i)} |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (9.2.4)$$

其中  $N$  为一个归一化系数.

完全类似地, 我们考虑计算  $\langle \phi_{j+1} | e^{-i\Delta t H(t_j)} | \phi_j \rangle$  的结果, 继续插入一个单位算子

$$N \int \mathcal{D}\pi_j |\pi_j\rangle \langle \pi_j| = 1 \quad (9.2.5)$$

于是

$$\langle \phi_{j+1} | e^{-i\Delta t H(t_j)} | \phi_j \rangle = \int \mathcal{D}\pi_j \langle \phi_{j+1} | \pi_j \rangle \langle \pi_j | e^{-i\Delta t H(t_j)} | \phi_j \rangle \quad (9.2.6)$$

这还是一个 Gaussian 积分, 我们可以计算得到

$$\int \mathcal{D}\pi_j \langle \phi_{j+1} | \pi_j \rangle \langle \pi_j | e^{-i\Delta t H(t_j)} | \phi_j \rangle = N e^{i\Delta t \left\{ \int d^3x \left( \frac{(\phi_{j+1}(x) - \phi_j(x))}{2\Delta t^2} - V(\phi_j) \right) \right\}} \quad (9.2.7)$$

其中  $N$  还是某一归一化系数.

于是我们可以得到完全类似 QM 中的路径积分表达式

$$\langle \Omega, t_f | \Omega, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \quad (9.2.8)$$

然后我们考虑这个式子的含义

$$N \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi(\mathbf{x}_j, t_j) \quad (9.2.9)$$

其中  $\mathbf{x}_j, t_j$  为某一个时空点.

如果我们返回到路径积分的表达式中, 这也就是在切片  $t_j$  中插入一个  $\phi(\mathbf{x}_j, t_j)$ (如我们用红色高亮标出的部分)

$$\begin{aligned} N \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi(\mathbf{x}_j, t_j) &= N \int \mathcal{D}\phi_n \mathcal{D}\phi_{n-1} \cdots \mathcal{D}\phi_1 \\ &\quad \langle \Omega | e^{-i\Delta t H(t_n)} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | e^{-i\Delta t H(t_{n-1})} | \phi_{n-1} \rangle \\ &\quad \cdots \langle \phi_{j+1} | e^{-i\Delta t H(t_j)} \phi_j(\mathbf{x}_j, t_j) | \phi_j \rangle \cdots \langle \phi_1 | e^{-i\Delta t H(t_i)} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

而这个等于

$$\langle \phi_{j+1} | e^{-i\Delta t H(t_j)} \phi(\mathbf{x}_j) | \phi_j \rangle \quad (9.2.11)$$

还原到整体的表达式中即

$$N \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi(\mathbf{x}_j, t_j) = N \int \mathcal{D}\phi_n \mathcal{D}\phi_{n-1} \cdots \mathcal{D}\phi_1$$

$$\langle \Omega | e^{-i\Delta t H(t_n)} |\phi_n\rangle \langle \phi_n| e^{-i\Delta t H(t_{n-1})} |\phi_{n-1}\rangle$$

$$\cdots \langle \phi_{j+1} | e^{-i\Delta t H(t_j)} \phi(\mathbf{x}_j) |\phi_j\rangle \cdots \langle \phi_1| e^{-i\Delta t H(t_i)} |\Omega\rangle$$
(9.2.12)

$$= \langle \Omega | e^{-i\Delta t H(t_n)} \cdots e^{-i\Delta t H(t_j)} \phi(\mathbf{x}_j) e^{-i\Delta t H(t_{j-1})} \cdots e^{-i\Delta t H(t_i)} |\Omega\rangle$$
(9.2.13)

$$= \langle \Omega | e^{-i(t_f-t_j)H} \phi(\mathbf{x}_j) e^{-i(t_j-t_i)H} |\Omega\rangle$$
(9.2.14)

$$= \langle \Omega | e^{-it_f H} (e^{it_j H} \phi(\mathbf{x}_j) e^{-it_j H}) e^{it_i H} |\Omega\rangle$$
(9.2.15)

$$= \langle \Omega, t_f | \phi(x_j) | \Omega, t_i \rangle$$
(9.2.16)

如果是插入两个  $\phi$ , 即

$$N \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi(\mathbf{x}_i, t_i) \phi(\mathbf{x}_j, t_j)$$
(9.2.17)

. 与前面同理, 我们可以预料也就是在我们上面的式子中以先后顺序插入  $\phi(\mathbf{x}_i), \phi(\mathbf{x}_j)$ , 这样转换到最后算子的表达式中, 应当有结果

$$N \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi(\mathbf{x}_i, t_i) \phi(\mathbf{x}_j, t_j) = \langle \Omega, t_f | \mathcal{T}\{\phi(x_i)\phi(x_j)\} | \Omega, t_i \rangle$$
(9.2.18)

而考虑归一化系数, 因为我们需要

$$N \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} = \langle \Omega, t_f | \Omega, t_i \rangle = 1$$
(9.2.19)

所以

$$N = \frac{1}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}$$
(9.2.20)

于是, 我们可以得到结论

$$\langle \Omega, t_f | \mathcal{T}\{\phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_n)\} | \Omega, t_i \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi(x_1)\phi(x_2) \cdots \phi(x_n)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}$$
(9.2.21)

或者记为简写形式

$$\langle \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}} \quad (9.2.22)$$

这个式子与我们通过 Dyson 级数得到的式(8.2.28)非常相似, 待会我们将会看到, 它们的具体展开形式是完全一样的.

所以现在我们知道通过计算路径积分, 可以直接得到真空期望. 但是留这给我们一个问题:

$$\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n = ? \quad (9.2.23)$$

我们可以从统计物理中获取灵感. 这个路径积分的式子与统计物理中计算物理量期望的形式极像:

$$\langle Q \rangle = \frac{\int dQ e^{-\beta H} Q}{\int dQ e^{-\beta H}} \quad (9.2.24)$$

在统计物理中我们可以引入配分函数

$$Z = \int dQ e^{-\beta H'} \quad (9.2.25)$$

其中

$$H' = H + JQ \quad (9.2.26)$$

于是可以写为

$$\langle Q \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial J} \Big|_{J=0} \quad (9.2.27)$$

那么类似地, 我们也给我们的路径积分引入配分函数

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi] + i \int d^4x J(x) \phi(x)} \quad (9.2.28)$$

其中  $J$  为一个外加的源项,  $Z$  是关于  $J$  的泛函. 那么我们同样可以写出

$$\langle \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \rangle = \frac{(-i)^n}{Z[0]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (9.2.29)$$

那么剩下的问题就是如何计算配分函数. 一般来说, 配分函数并不能解析计算, 我们需要引入微扰展开. 但是对于自由场, 我们是可以将其解析算出的.

比如考虑实自由场

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2 = -\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (9.2.30)$$

我们定义内积

$$\langle f, g \rangle := \int d^4x f(x)g(x) \quad (9.2.31)$$

. 定义算子

$$K := (\square + m^2) \quad (9.2.32)$$

. 不难发现它在我们定义的内积以及边界条件 ( $\mathbf{x} \rightarrow \infty, \phi \rightarrow \infty, t \rightarrow \pm\infty, \partial_t\phi \rightarrow 0$ ) 下, 是自伴随的

$$\langle f, Kg \rangle = \langle Kf, g \rangle \quad (9.2.33)$$

那么  $\exp$  中的指数就可以写为

$$S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x) = -\frac{1}{2} \langle \phi, K\phi \rangle + \langle J, \phi \rangle \quad (9.2.34)$$

考慮配平方

$$\langle \phi - K^{-1}J, K(\phi - K^{-1}J) \rangle = \langle \phi - K^{-1}J, K\phi - J \rangle \quad (9.2.35)$$

$$= \langle \phi, K\phi \rangle + \langle K^{-1}J, J \rangle - \langle K^{-1}J, K\phi \rangle - \langle \phi, J \rangle \quad (9.2.36)$$

$$= \langle \phi, K\phi \rangle + \langle K^{-1}J, J \rangle - \langle KK^{-1}J, \phi \rangle - \langle \phi, J \rangle \quad (9.2.37)$$

$$= \langle \phi, K\phi \rangle - 2\langle \phi, J \rangle + \langle K^{-1}J, J \rangle \quad (9.2.38)$$

于是我们发现

$$S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x) = -\frac{1}{2} \langle \phi - K^{-1}J, K(\phi - K^{-1}J) \rangle + \frac{1}{2} \langle K^{-1}J, J \rangle \quad (9.2.39)$$

于是我们可以将配分函数写为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i(-\frac{1}{2}\langle \phi - K^{-1}J, K(\phi - K^{-1}J) \rangle + \frac{1}{2}\langle K^{-1}J, J \rangle)} \quad (9.2.40)$$

$$= e^{\frac{i}{2}\langle K^{-1}J, J \rangle} \int \mathcal{D}\phi e^{i(-\frac{1}{2}\langle \phi - K^{-1}J, K(\phi - K^{-1}J) \rangle)} \quad (9.2.41)$$

做积分换元

$$\phi \rightarrow \phi + K^{-1}J \quad (9.2.42)$$

则有

$$Z[J] = e^{\frac{i}{2}\langle K^{-1}J, J \rangle} \int \mathcal{D}\phi e^{i(-\frac{1}{2}\langle \phi, K\phi \rangle)} \quad (9.2.43)$$

$$= Z[0]e^{\frac{i}{2}\langle K^{-1}J, J \rangle} \quad (9.2.44)$$

而根据

$$(\square + m^2)D_F(x - y) = -i\delta^4(x - y) \quad (9.2.45)$$

得

$$(K^{-1}J)(x) = \int d^4y iD_F(x - y)J(y) \quad (9.2.46)$$

所以

$$Z[J] = Z[0]e^{-\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)D_F(x-y)J(y)} \quad (9.2.47)$$

由于配分函数是无所谓前面的常数系数的, 所以最终我们可以有结论

$$Z[J] = e^{-\frac{1}{2}\int d^4x d^4y J(x)D_F(x-y)J(y)} \quad (9.2.48)$$

我们可以验证对  $Z[J]$  取变分确实有我们预期的结果

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = (-i)^2 \frac{1}{Z[0]} \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Big|_{J=0} = D_F(x_1 - x_2) \quad (9.2.49)$$

为了与接下来的相互作用理论做区分, 我们记自由场的配分函数  $Z[J]$  为  $Z_0[J]$ .

然后我们继续考虑  $\phi^3$  理论, 即相互作用拉氏量

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi + \frac{g}{3!}\phi^3 \quad (9.2.50)$$

我们可以写出配分函数

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x [-\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi + J\phi + \frac{g}{3!}\phi^3]} \quad (9.2.51)$$

$$= \int \mathcal{D}\phi e^{i\int d^4x [-\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi + J\phi]} e^{\frac{ig}{3!} \int d^4x \phi^3} \quad (9.2.52)$$

, 然后发现这个配分函数不能解析求解. 但是若  $g \ll 1$ , 相互作用项可以做微扰展开, 即

$$e^{\frac{ig}{3!} \int d^4x \phi^3} \approx 1 + \frac{ig}{3!} \int d^4x \phi^3(x) + \left( \frac{ig}{3!} \right)^2 \int d^4x d^4y \phi^3(x) \phi^3(y) + \dots \quad (9.2.53)$$

于是可以微扰地计算配分函数

$$\begin{aligned} Z[J] &\approx \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [-\frac{1}{2}\phi(\square + m^2)\phi + J\phi]} \left( 1 + \frac{ig}{3!} \int d^4x \phi^3(x) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{ig}{3!} \right)^2 \int d^4x d^4y \phi^3(x) \phi^3(y) + \dots \right) \end{aligned} \quad (9.2.54)$$

. 可以发现, 微扰的相互作用配分函数就是自由配分函数以及对自由配分函数的配分的和, 即

$$Z[J] \approx Z_0[J] + \frac{ig}{3!} (-i) \int d^4x \frac{\delta^3 Z_0}{\delta J(x)^3} + \left( \frac{ig}{3!} \right)^2 (-i)^2 \int d^4x d^4y \frac{\delta^6 Z_0}{\delta J(x)^3 \delta J(y)^3} + \dots \quad (9.2.55)$$

于是我们可以计算  $n$  点关联函数

$$\langle \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \rangle = \frac{(-i)^n}{Z[J]} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (9.2.56)$$

$$= \frac{Z_0}{Z} \frac{(-i)^n}{Z[J]} \frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} \quad (9.2.57)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Z_0}{Z} \left[ \langle \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \rangle_0 + \frac{ig}{3!} \int d^4x \langle \phi_x^3 \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \rangle_0 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{ig}{3!} \right)^2 \int d^4x d^4y \langle \phi_x^3 \phi_y^3 \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \rangle_0 + \dots \right] \end{aligned} \quad (9.2.58)$$

其中  $\langle \cdots \rangle_0$  表示在自由场理论下的真空期望值

$$\langle \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \rangle_0 := \langle 0 | \mathcal{T}\{\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n\} | 0 \rangle \quad (9.2.59)$$

. 我们发现, 对于相互作用理论的微扰展开,  $n$  点关联函数即自由理论的关联函数以及其更高阶关联函数的积分的和.

剩下的任务就是计算

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 + \frac{ig}{3!} \left( \frac{-i}{Z_0} \right) \int d^4x \frac{\delta^3 Z_0}{\delta J(x)^3} + \left( \frac{ig}{3!} \right)^2 \left( \frac{(-i)^2}{Z_0} \right) \int d^4x d^4y \frac{\delta^6 Z_0}{\delta J(x)^3 \delta J(y)^3} + \dots \quad (9.2.60)$$

$$= \langle 0|0 \rangle_0 + \frac{ig}{3!} \int d^4x \langle \phi_x^3 \rangle_0 + \left( \frac{ig}{3!} \right)^2 \int d^4x d^4y \langle \phi_x^3 \phi_y^3 \rangle_0 + \dots \quad (9.2.61)$$

我们可以用 Feynman 图来表示这些项, 于是有:

$$\frac{Z}{Z_0} = 1 + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \quad (9.2.62)$$

, 从而将多点关联函数写为 (在这里我们以两点关联函数为例)

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \frac{\text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots}{1 + \text{---} + \text{---} + \dots} \quad (9.2.63)$$

注意到, 如果我们将分母展开, 我们可以将所有与真空图乘积的图抵消掉, 于是有最终结果

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \quad (9.2.64)$$

注意到, 如果我们将分母展开, 我们可以将所有与真空图乘积的图抵消掉, 于是有最终结果

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots \quad (9.2.65)$$

可以发现, 在这里我们的具体展开与推导都和 Dyson 级数的推导方式完全一样. 至此为止, 三种处理相互作用体系的微扰方法: Schwinger-Dyson 定理, Dyson 级数以及路径积分我们都介绍完毕了, 从最终的结果上看, 它们都殊途同归, 得到了完全一致的结果.

## 9.3 路径积分在统计物理中的应用

在上节中我们看到, 路径积分具有和和统计物理配分函数完全类似的形式, 更确切地说, 其实从本质上来说, 对于相互作用体系, 统计物理的微扰处理方法和路径积分的做法完全是一样的, 只是将  $iS$  替换为了  $-\beta H$  罢了, 本质上都是对一个场的路径积分. 于是在这里, 我想给出两个统计物理中的例子 [8][11], 用来说明路径积分在统计物理中处理相互作用体系的作用, 并给出完全类似的 Feynman 规则.

### 9.3.1 弱相互作用气体

### 9.3.2 铁磁 Ising 模型的 Landau 自由能模型

# 10 电磁场

## 10.1 重电磁场 (Massive)

我们有拉格朗日量

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu \quad (10.1.1)$$

其中  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \Rightarrow A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$

于是我们得到 EoM:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (10.1.2)$$

将  $\partial_\nu$  作用到 EoM, 并且因为  $F^{\mu\nu}$  反称,  $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ , 我们得到:

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (10.1.3)$$

于是我们可以得到 Proca 方程

$$(\partial^2 + m^2)A^\nu = 0 \quad (10.1.4)$$

正则共轭

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.1.5)$$

即  $\Pi^{00} = 0$ ,  $\Pi^{0i} = E^i$

然后我们有

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu \quad (10.1.6)$$

做 Legendre 变换, 得到哈密顿密度

$$\mathcal{H} = \Pi^0_i \dot{A}^i - \mathcal{L} = -\Pi^{0i} \partial_t A^i - \mathcal{L} \quad (10.1.7)$$

$$= -\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \quad (10.1.8)$$

$$= -\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{A}^2 \quad (10.1.9)$$

根据

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) - \phi \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (10.1.10)$$

以及 EoM

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -m^2 \phi \quad (10.1.11)$$

我们最终得到

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \mathbf{E})^2 + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{A}^2 \quad (10.1.12)$$

然后我们尝试量子化, 利用正则量子化关系

$$[A_{\mathbf{x}}^i, \Pi_{\mathbf{y}}^{0j}] = [A_{\mathbf{x}}^i, E_{\mathbf{y}}^j] = i\delta^{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -ig^{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (10.1.13)$$

我们做 Fourier 变换, 得到

$$A^\mu = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=1}^3 \left( \epsilon_\lambda^\mu a_{\lambda\mathbf{p}} e^{-ipx} + \epsilon_\lambda^{\mu*} a_{\lambda\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \quad (10.1.14)$$

$$E^\mu = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=1}^3 \left( (p^\mu \epsilon_\lambda^{0*} - p^0 \epsilon_\lambda^{\mu*}) a_{\lambda\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} - (p^\mu \epsilon_\lambda^0 - p^0 \epsilon_\lambda^\mu) a_{\lambda\mathbf{p}} e^{-ipx} \right) \quad (10.1.15)$$

于是有对易子:

$$[a_{\lambda\mathbf{p}}, a_{\lambda'\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\lambda\lambda'} \quad (10.1.16)$$

此外, 我们还可以得到

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -m^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_{\lambda} \left( \epsilon_{\lambda}^0 a_{\lambda p}^{\dagger} e^{ipx} + \epsilon_{\lambda}^0 a_{\lambda p} e^{-ipx} \right) \quad (10.1.17)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} i \sum_{\lambda} \left( (\mathbf{p} \times \epsilon_{\lambda}) a_{\lambda p}^{\dagger} e^{ipx} - (\mathbf{p} \times \epsilon_{\lambda}) a_{\lambda p} e^{-ipx} \right) \quad (10.1.18)$$

于是经过艰苦卓绝的爆算, 我们得到

$$H = \int d^3 x \frac{1}{2} (E^2 + B^2 + m^2 A^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \mathbf{E})^2) \quad (10.1.19)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} (\dots) \quad (10.1.20)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} (-m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 + \omega^2 \delta_{\lambda \lambda'} - m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 \\ + \mathbf{p}^2 \delta_{\lambda \lambda'} + 2m^2 \epsilon_{\lambda'}^0 \epsilon_{\lambda}^0 + m^2 \delta_{\lambda \lambda'}) (a_{\lambda p}^{\dagger} a_{\lambda' p} + a_{\lambda' p} a_{\lambda p}^{\dagger}) \quad (10.1.21)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_p \sum_{\lambda} \left( a_{\lambda p}^{\dagger} a_{\lambda p} + \frac{1}{2} \mathcal{V} \right) \quad (10.1.22)$$

(感兴趣的可以见图10.1的手动具体计算过程)

写出  $H$  后, 我们尝试通过计算其 Green 函数继而得到重电磁场传播子.

在傅里叶空间, 我们有方程:

$$(-p^2 + m^2) g_{\mu\nu} \tilde{A}^{\mu} = \tilde{J}_{\nu} \quad (10.1.23)$$

于是

$$\tilde{A}^{\mu} = \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2} \tilde{J}_{\nu} = \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2} \int d^4 y J_{\nu} e^{ipy} \quad (10.1.24)$$

最终我们得到:

$$A^{\mu} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{A}^{\mu} e^{-ipx} = \int d^4 y \left( \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \right) J_{\nu} \quad (10.1.25)$$

$\int \vec{p} \cdot d\vec{p} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''}$

$$H = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2m} \sum_{\lambda} W_p (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda \vec{p}}^- + \frac{1}{2} U)$$

proof:  $\vec{A} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2m} \sum_{\lambda} (\vec{\epsilon}_{\lambda} \alpha_{\lambda \vec{p}}^+ e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \vec{\epsilon}_{\lambda}^* \alpha_{\lambda \vec{p}}^- e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}})$

$$\nabla \cdot \vec{E}' = -m^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2m} \sum_{\lambda} (\epsilon_{\lambda}^0 \alpha_{\lambda \vec{p}}^+ e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} + \epsilon_{\lambda}^0 \alpha_{\lambda \vec{p}}^- e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}})$$

$$\vec{E} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2m} \frac{1}{i} \sum_{\lambda} [(\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda}^0 - W \vec{\epsilon}_{\lambda}) \alpha_{\lambda \vec{p}}^+ e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} - (\vec{p} \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda}^0 - W \vec{\epsilon}_{\lambda}) \alpha_{\lambda \vec{p}}^- e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}]$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2m} \frac{1}{i} \sum_{\lambda} [(\vec{p} \times \vec{\epsilon}_{\lambda}) \alpha_{\lambda \vec{p}}^+ e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} - (\vec{p} \times \vec{\epsilon}_{\lambda}) \alpha_{\lambda \vec{p}}^- e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}]$$

$$H = \int d^3 x \frac{1}{2} [E^2 + B^2 + m^2 A^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \vec{E})^2]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2m} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} \left\{ \begin{aligned} & - (m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 + W^2 \delta_{\lambda \lambda'}) (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda' \vec{p}}^+ + \alpha_{\lambda \vec{p}}^- \alpha_{\lambda' \vec{p}}^-) \\ & - (-\vec{p}^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 - W^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 + 2W^2 \delta_{\lambda \lambda'}) (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda' \vec{p}}^+ + \alpha_{\lambda \vec{p}}^- \alpha_{\lambda' \vec{p}}^-) \\ & - (m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 - \vec{p}^2 \delta_{\lambda \lambda'}) (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda' \vec{p}}^+ + \alpha_{\lambda \vec{p}}^- \alpha_{\lambda' \vec{p}}^-) \\ & - (m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 - \vec{p}^2 \delta_{\lambda \lambda'}) (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda' \vec{p}}^+ + \alpha_{\lambda \vec{p}}^- \alpha_{\lambda' \vec{p}}^-) \\ & + m^2 (\epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 + \delta_{\lambda \lambda'}) (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda' \vec{p}}^+ + \alpha_{\lambda \vec{p}}^- \alpha_{\lambda' \vec{p}}^-) + m^2 (\epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 + \delta_{\lambda \lambda'}) (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda' \vec{p}}^+ + \alpha_{\lambda \vec{p}}^- \alpha_{\lambda' \vec{p}}^-) \\ & + m^2 (\epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0) (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda' \vec{p}}^+ + \alpha_{\lambda \vec{p}}^- \alpha_{\lambda' \vec{p}}^-) + m^2 (\epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 + \delta_{\lambda \lambda'}) (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda' \vec{p}}^+ + \alpha_{\lambda \vec{p}}^- \alpha_{\lambda' \vec{p}}^-) \end{aligned} \right\}$$

Campus

No. \_\_\_\_\_ Date \_\_\_\_\_

—,  $m^2 \vec{p}^2$  cancel each other:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2m} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} \sum_{\lambda''} (-m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 + W^2 \delta_{\lambda \lambda'} - m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda''}^0 + \vec{p}^2 \delta_{\lambda \lambda''} + 2m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda''}^0 + m^2 \delta_{\lambda \lambda''}) (O^+ O^- + O^- O^+)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2m} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} (2W^2 \delta_{\lambda \lambda'}) (O^+ O^- + O^- O^+)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} W_p \sum_{\lambda} (\alpha_{\lambda \vec{p}}^+ \alpha_{\lambda \vec{p}}^- + \frac{1}{2} U)$$

图 10.1: 手算过程

于是有 Green 函数:

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (10.1.26)$$

因此传播子为:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (10.1.27)$$

## 10.2 电磁场 (Massless)

为了得到电磁场的二次量子化结果,自然的想法就是对电磁场取  $m \rightarrow 0$  的结果. 然而这会面临一个问题: 电磁场的  $A^\mu$  具有规范不变性, 即  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$  不改变其物理意义, 进过规范变换  $\partial_\mu A^\mu$  也不一定为 0. 这使得我们对电磁场的描述存在冗余自由度, 这的一个直接结果就是电磁场只有两个极化方向而不是重电磁场的三个.

于是, 为了能够正确得处理自由度, 消除冗余, 我们引入 Lorenz 规范:

$$\nabla_\mu A^\mu = 0 \quad (10.2.1)$$

但是故事并没有结束, 我们仍然可以通过满足  $\partial^2 \Lambda = 0$  的  $\Lambda$  来进行规范, 因此我们可以进一步地取  $\partial_0 \Lambda = -A_0 = -\varphi$ , 从而使得  $\varphi = 0$ .

这样 Lorenz 规范就退化成了 Coulomb 规范:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (10.2.2)$$

引入正则量子化条件:

$$[a_{\mathbf{p}r}, a_{\mathbf{q}s}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (10.2.3)$$

于是我们就可以二次量子化  $\mathbf{A}$  了

$$\mathbf{A} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_{r=1}^2 (\epsilon_r a_{\mathbf{p}r} e^{-ipx} + \epsilon_r^* a_{\mathbf{p}r}^\dagger e^{ipx}) \quad (10.2.4)$$

从而有

$$\mathbf{E} = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \sum_{r=1}^2 (\epsilon_r a_{\mathbf{p}r} e^{-ipx} - \epsilon_r^* a_{\mathbf{p}r}^\dagger e^{ipx}) \quad (10.2.5)$$

然后有对易子

$$[A_{\mathbf{x}}^i, E_{\mathbf{y}}^j] = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \sum_r \epsilon_r^i(\mathbf{p}) \epsilon_r^j(\mathbf{p}) \quad (10.2.6)$$

$$= i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left( \delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\mathbf{p}^2} \right) \quad (10.2.7)$$

$$= i \delta_{\mathbf{tr}}^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (10.2.8)$$

这里我们可能会有疑问, 为什么这不能按照我们一般的正则量子化的方法, 让

$$[A_{\mathbf{x}}^i, E_{\mathbf{y}}^j] = i \delta^{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (10.2.9)$$

这是因为根据我们的 Coulomb 规范,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 因此

$$[\partial_i A^i, E^j] = 0 \quad (10.2.10)$$

然而代入上面的对易关系, 我们会发现

$$[\partial_i A_{\mathbf{x}}^i, E_{\mathbf{y}}^j] = i \partial^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \neq 0 \quad (10.2.11)$$

这个正则量子化条件是不自洽的! 这里的原因还是因为无质量的电磁场存在规范冗余, 导致我们丢失了一个“物理的”极化方向.

而由  $a, a^\dagger$  写出的正则量子化条件, 我们可以验证它可以保证

$$[\partial_i A^i, E^j] = i \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} i p^i (\delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\mathbf{p}^2}) \quad (10.2.12)$$

$$= - \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (p^j - \frac{\mathbf{p}^2 p^j}{\mathbf{p}^2}) \quad (10.2.13)$$

$$= 0 \quad (10.2.14)$$

接着下一个任务就是给出光子的传播子了. 我们从 EoM 开始:

$$(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu = J_\mu \quad (10.2.15)$$

换到傅里叶空间, 我们有

$$(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)\tilde{A}^\nu = \tilde{J}_\mu \quad (10.2.16)$$

似乎只要求出  $-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu$  的逆矩阵就好了...?

然而不难发现,  $-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu$  是奇异的:  $g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$  就是在度规张量在类光面上的诱导度规, 它的秩仅有 2, 根本不可能找到逆.

一个自然的想法是, 引入一个参数  $\xi$  来使得它有逆, 即:

$$(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \rightarrow (-p^2 g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})p_\mu p_\nu) \quad (10.2.17)$$

这样我们就能对  $(-p^2 g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})p_\mu p_\nu)$  求逆了:

$$-\frac{g^{\mu\lambda} + (\xi - 1)p^\mu p^\lambda/p^2}{p^2}(-p^2 g_{\lambda\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})p_\lambda p_\nu) \quad (10.2.18)$$

也就是说我们想要 EoM 变为:

$$(g_{\mu\nu}\partial^2 - (1 - \frac{1}{\xi})\partial_\mu\partial_\nu)A^\nu = J_\mu \quad (10.2.19)$$

这里我仍然不理解为什么规范变换可以改变 EoM...

为了得到这样的 EoM, 我们可以在拉氏量中加入一个规范项:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - J_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (10.2.20)$$

这样子就能得到要求的 EoM, 并且注意到, 做规范变换  $A'^\mu = A^\mu + \partial_\mu$ , 其中

$$\partial^2\partial_\nu\Lambda = \frac{\xi' - \xi}{\xi}\partial_\nu\partial_\mu A^\mu \quad (10.2.21)$$

或者也可以写成

$$\partial^2 \partial_\nu \Lambda = \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \partial_\nu \partial_\mu A'^\mu \quad (10.2.22)$$

$A'^\mu$  的 EoM 就变成:

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 + (\frac{1}{\xi'} - 1) \partial_\mu \partial_\nu) A'^\mu = J_\nu \quad (10.2.23)$$

由此可见,  $\xi$  的不同取值其实就对应不同的规范, 并且 Lorenz 规范就是  $\xi = 0$ : 这时  $\frac{1}{\xi}$  变为无穷大, 为了满足 EoM, 我们必须要求  $\partial_\mu A^\mu = 0$

于是, 这样我们就可以得到 Green 函数:

$$G_{\mu\nu}(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left( -\frac{g_{\mu\nu} + (\xi - 1)p_\mu p_\nu / p^2}{p^2} \right) e^{-ip(x-y)} \quad (10.2.24)$$

从而得到光子传播子:

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} + (\xi - 1)p_\mu p_\nu / p^2)}{p^2 + i\epsilon} \quad (10.2.25)$$

所以说, 对于 Lorenz 规范,  $\xi = 0$ , 传播子为:

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2)}{p^2 + i\epsilon} \quad (10.2.26)$$

在这里我们介绍一个更为常见并且简单的规范: Feynman 规范, 它的  $\xi = 1$ , 于是在 Feynman 规范下, 传播子为:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \quad (10.2.27)$$

# 11 标量 QED

## 11.1 规范变换

我们知道, 复标量场  $\psi$  有  $U(1)$  对称性, 这是一个全局变换. 但是在一  
个局域的  $U(1)$  变换  $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$ , 即我们新定义的一个规范变换下并不具有  
不变性. 但我们希望能够通过某些构造使其有这一不变性.

于是我们让  $A_\mu$  作为联络, 新定义对  $\psi$  的微分算符:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (11.1.1)$$

并且在  $U(1)$  规范变换下,  $A_\mu, \psi$  以如下方式变换:

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (11.1.2)$$

$$\psi' = \psi e^{i\alpha} \quad (11.1.3)$$

不难发现

$$D'_\mu\psi' = (\partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha)(\psi e^{i\alpha}) = e^{i\alpha}(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi = e^{i\alpha}D_\mu\psi \quad (11.1.4)$$

所以如果构造一个电磁场与标量场  $\phi$  耦合的拉氏密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + D_\mu\psi(D^\mu\psi)^* - m^2\psi\psi^* \quad (11.1.5)$$

, 则其有  $U(1)$  规范不变性.

我们可以给他写为更显式的形式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^* - m^2\psi\psi^* + ieA_\mu(\psi\partial^\mu\psi^* - \psi^*\partial^\mu\psi - ie\psi\psi^*A^\mu) \quad (11.1.6)$$

我们可以写出 EoM

$$\begin{cases} (\partial^2 + m^2)\psi = -2ieA_\mu\partial^\mu\psi + e^2\psi A_\mu A^\mu \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = ie(\psi\partial^\nu\psi^* - \psi^*\partial^\nu\psi - 2ie\psi\psi^*A^\nu) \end{cases} \quad (11.1.7)$$

于是我们可以得到电流:

$$J^\nu = ie(\psi \partial^\nu \psi^* - \psi^* \partial^\nu \psi - 2ie\psi\psi^* A^\nu) \quad (11.1.8)$$

并且,如果我们再次做全局  $U(1)$  变换,我们可以再次得到这一守恒流:

$$J^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \frac{\delta \psi}{\delta \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^*} \frac{\delta \psi^*}{\delta \alpha} \quad (11.1.9)$$

$$= i(\psi \partial^\nu \psi^* - \psi^* \partial^\nu \psi - 2e\psi\psi^* A^\nu) \quad (11.1.10)$$

于是,就从对规范不变性的追求中,我们得到了标量 QED.

## 11.2 标量 QED 的 Feynman 规则

# 12 旋量

## 12.1 Lorentz 群的性质

我们首先考虑对矢量的 Lorentz 变换.

**定义 12.1 (Lorentz 变换)** Lorentz 变换为一种保内积的变换:

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (12.1.1)$$

使得

$$\bar{x}^\mu \bar{x}_\mu = x^\mu x_\mu \quad (12.1.2)$$

**定理 12.1 (Lorentz 变换的性质)**

$$\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho = g_{\sigma\rho} \quad (12.1.3)$$

**证明.**

$$\bar{x}^2 = g_{\mu\nu} \bar{x}^\mu \bar{x}^\nu = x^\sigma (\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho) x^\rho = x^\sigma g_{\sigma\rho} x^\rho \quad (12.1.4)$$

于是我们可以有如下推论:

**定理 12.2 (Lorentz 变换的逆矩阵)**

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu \quad (12.1.5)$$

**证明.** 由 12.1 可得

$$g^{\rho\beta} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} g^{\rho\beta} = \delta^\beta{}_\sigma \quad (12.1.6)$$

即:

$$\Lambda_\nu{}^\beta \Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\beta{}_\sigma \quad (12.1.7)$$

于是可以得证.

**定义 12.2 ( $\delta\omega^\mu{}_\nu$ )** 对于无穷小 Lorentz 变换  $\Lambda^\mu{}_\nu$ , 定义

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu \quad (12.1.8)$$

通过(12.1)可以发现  $\delta\omega_{\mu\nu}$  是反称的. 并且我们还可以进一步写成矩阵形式

$$\delta\omega^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} 0 & v^1 & v^2 & v^3 \\ v^1 & 0 & \theta^3 & -\theta^2 \\ v^2 & -\theta^3 & 0 & \theta^1 \\ v^3 & \theta^2 & -\theta^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.1.9)$$

其中,  $v^i$  为参考系间的相对速度,  $\theta^i$  为沿着  $i$  轴旋转的角度. 或者写为降指标后的结果

$$\delta\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & v^1 & v^2 & v^3 \\ -v^1 & 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ -v^2 & \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -v^3 & -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.1.10)$$

于是我们还可以进一步写出 Lorentz 变换的显式形式

$$\begin{cases} \delta x^0 = \beta^i x^i \\ \delta x^i = \beta^i x^0 - \epsilon_{ijk} \theta^j x^k \end{cases} \quad (12.1.11)$$

### 定理 12.3 ( $\delta\omega_{\mu\nu}$ 的性质)

$$\delta\omega_{\mu\nu} = \delta\omega_{[\mu\nu]} \quad (12.1.12)$$

然后我们想要把 Lorentz 变换的操作抽象化, 一般化, 将其提升到群表示论的高度, 于是我们有一个用抽象的 Lorentz 变换参数  $\omega_{\mu\nu}$  表示的对某一个对象进行的 Lorentz 变换, 这成为 Lorentz 群的一个表示.

### 定义 12.3 (无穷小 Lorentz 群变换的表示 $U(\Lambda)$ )

$$U(1 + \delta\omega) = 1 - \frac{i}{2} \delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (12.1.13)$$

其中,  $M^{\mu\nu} = M^{[\mu\nu]}$ , 是某一个算符

以此我们有有限 Lorentz 群变换的表示

$$U(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \quad (12.1.14)$$

**定理 12.4 (结合律)** 作为群表示, 我们要求  $U$  满足:

$$U(\Lambda\Lambda') = U(\Lambda)U(\Lambda') \quad (12.1.15)$$

根据定理12.2, 定理12.4, 定义12.2, 我们要求  $U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) = U(\Lambda^{-1})U(\Lambda')U(\Lambda)$ , 于是有12.5:

### 定理 12.5

$$U_{\Lambda}^{-1}M^{\mu\nu}U_{\Lambda} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}M^{\rho\sigma} \quad (12.1.16)$$

**证明.**

$$U_{\Lambda}^{-1}U_{\Lambda'}U_{\Lambda} = 1 - \frac{i}{2}\delta\omega'_{\mu\nu}U_{\Lambda}^{-1}M^{\mu\nu}U_{\Lambda} \quad (12.1.17)$$

$$U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) = U(1 + \Lambda^{-1}\omega'\Lambda) = 1 - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\delta\omega'\Lambda)_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \quad (12.1.18)$$

计算  $(\Lambda^{-1}\delta\omega'\Lambda)^{\mu}_{\nu}$

$$(\Lambda^{-1}\delta\omega'\Lambda)^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\sigma}_{\mu}\delta\omega'^{\sigma}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu} \quad (12.1.19)$$

于是

$$(\Lambda^{-1}\delta\omega'\Lambda)_{\mu\nu} = \Lambda^{\sigma}_{\mu}\delta\omega'^{\sigma}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu} \quad (12.1.20)$$

因此

$$U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) = U(1 + \Lambda^{-1}\omega'\Lambda) = 1 - \frac{i}{2}\Lambda^{\sigma}_{\mu}\delta\omega'^{\sigma}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu}M^{\mu\nu} \quad (12.1.21)$$

将(12.1.17)与(12.1.21)取等我们有

$$\delta\omega'^{\rho}_{\sigma}U_{\Lambda}^{-1}M^{\rho\sigma}U_{\Lambda} = \Lambda^{\sigma}_{\mu}\delta\omega'^{\sigma}_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu}M^{\mu\nu} \quad (12.1.22)$$

于是

$$U_{\Lambda}^{-1}M^{\mu\nu}U_{\Lambda} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}M^{\rho\sigma} \quad (12.1.23)$$

进一步展开我们可以得到

### 定理 12.6 ( $M^{\mu\nu}$ 的对易子)

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(-g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\sigma\nu}M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}) \quad (12.1.24)$$

**证明.** 展开

$$(1 + \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta})M^{\mu\nu}(1 - \frac{i}{2}\delta\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}) = (\delta^{\mu}_{\rho} + \delta\omega^{\mu}_{\rho})(\delta^{\nu}_{\sigma} + \delta\omega^{\nu}_{\sigma})M^{\rho\sigma} \quad (12.1.25)$$

化简整理得到

$$\frac{i}{2}\delta\omega_{\rho\sigma}[M^{\rho\sigma}, M^{\mu\nu}] = \delta\omega_{\rho\sigma}(M^{\mu\sigma}g^{\rho\nu} - M^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}) \quad (12.1.26)$$

于是

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = 2i(g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}) + A^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (12.1.27)$$

其中  $A^{\mu\nu\rho\sigma} = A^{\nu\mu\rho\sigma}$ ,  $A^{\mu\nu\rho\sigma} = A^{\mu\nu\sigma\rho}$ .

交换  $\mu, \nu$ :

$$[M^{\nu\mu}, M^{\rho\sigma}] = 2i(g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\rho\mu}M^{\nu\sigma}) + A^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (12.1.28)$$

注意到  $M^{\mu\nu}$  反称, (12.1.27)+(12.1.28) 得到:

$$A^{\mu\nu\rho\sigma} = -i(g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \quad (12.1.29)$$

于是可得

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(-g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\sigma\nu}M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}) \quad (12.1.30)$$

#### 定义 12.4 (Lorentz 群生成元)

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \Rightarrow M^{ij} = \epsilon_{ijk}J^k \quad (12.1.31)$$

$$K^i = M^{i0} \quad (12.1.32)$$

写为矩阵形式就是

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -K^1 & -K^2 & -K^3 \\ K^1 & 0 & J^3 & -J^2 \\ K^2 & -J^3 & 0 & J^1 \\ K^3 & J^2 & -J^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.1.33)$$

然后我们可以将无穷小 Lorentz 群表示写为

$$1 + i\theta^i J^i + i\beta^i K^i \quad (12.1.34)$$

有限大的写为

$$e^{i\theta^i J^i + i\beta^i K^i} \quad (12.1.35)$$

然后我们有

### 定理 12.7 (Lorentz 群生成元的对易关系)

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk}J^k \quad (12.1.36)$$

$$[J^i, K^j] = i\epsilon_{ijk}K^k \quad (12.1.37)$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon_{ijk}J^k \quad (12.1.38)$$

注意, 在这里我们都认为是具体指标的计算, 因此不关心上下标的问题: 矢量就是上标, 体元就是下标, 从而避免 (+—) 度规三维部分升降指标会多出负号的恼人特性.

**证明.**

$$[J^i, J^j] = \frac{1}{4}\epsilon_{iml}\epsilon_{jnp}M^{ml}M^{np} \quad (12.1.39)$$

$$= \frac{1}{4}\epsilon_{iml}\epsilon_{jnp} \cdot 2i(g^{mp}M^{ln} + g^{lm}M^{mp}) \quad (12.1.40)$$

$$= -\frac{i}{2}\epsilon_{iml}\epsilon_{jnp}(\delta_{mp}M^{ln} + \delta_{ln}M^{mp}) \quad (12.1.41)$$

$$= -i\epsilon_{mli}\epsilon_{mjn}M^{ln} \quad (12.1.42)$$

$$= -i(\delta_{lj}\delta_{in} - \delta_{ln}\delta_{ij})M^{ln} \quad (12.1.43)$$

$$= iM^{ij} \quad (12.1.44)$$

$$= i\epsilon_{ijk}J^k \quad (12.1.45)$$

$$[J^i, K^j] = \frac{1}{2}\epsilon_{imn} \cdot 2i(g^{m0}M^{nj} + g^{nj}M^{m0}) \quad (12.1.46)$$

$$= i\epsilon_{imn}(-\delta_{nj})M^{m0} \quad (12.1.47)$$

$$= i\epsilon_{ijk}M^{k0} \quad (12.1.48)$$

$$= i\epsilon_{ijk}K^k \quad (12.1.49)$$

$$[K^i, K^j] = [M^{i0}, M^{j0}] \quad (12.1.50)$$

$$= -ig^{00}M^{ij} \quad (12.1.51)$$

$$= -iM^{ij} \quad (12.1.52)$$

$$= -i\epsilon_{ijk}J^k \quad (12.1.53)$$

### 12.1.1 分解 Lorentz 群

正如我们在定义12.4中看到的那样, 洛伦兹群有六个生成元, 从而将 Lorentz 变换表示为:

$$\Lambda = e^{i\theta_i J^i + i\beta_i K^i} \quad (12.1.54)$$

并且定理12.7, 有对易关系

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J^k \quad (12.1.55)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K^k \quad (12.1.56)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J^k \quad (12.1.57)$$

或者写为一个张量形式

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -K^1 & -K^2 & -K^3 \\ K^1 & 0 & J^3 & -J^2 \\ K^2 & -J^3 & 0 & J^1 \\ K^3 & J^2 & -J^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.1.58)$$

并且根据定理12.6我们有:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(-g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\sigma\nu}M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}) \quad (12.1.59)$$

于是

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \quad (12.1.60)$$

我们设

$$J_i^\pm = \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i) \quad (12.1.61)$$

也就是:

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J}^+ + \mathbf{J}^- \\ \mathbf{K} = i(\mathbf{J}^- - \mathbf{J}^+) \end{cases} \quad (12.1.62)$$

于是有对易关系

$$\begin{cases} [J_i^+, J_j^+] = i\epsilon_{ijk}J^{+k} \\ [J_i^-, J_j^-] = i\epsilon_{ijk}J^{-k} \\ [J_i^+, J_j^-] = 0 \end{cases} \quad (12.1.63)$$

我们发现,  $\mathbf{J}^\pm$  是解耦的, 而它们分别满足  $\mathfrak{su}(2)$  的 Lie 代数关系!

于是我们得到结论

$$\mathfrak{so}(1, 3) = \mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2) \quad (12.1.64)$$

因此, 我们可以将 Lorentz 群的不可约表示用两个半整数  $(m, n)$  表示, 分别代表两个  $\mathfrak{su}(2)$  部分的角量子数.

于是我们发现不可约表示  $(m, n)$  的维度为  $(2m + 1)(2n + 1)$ .

## 12.1.2 不可约表示

**例 12.1 ((0, 0) 型)** 其维度为 1, 并且其是 Lorentz 不变的. 因此我们指出  $(0, 0)$  型就是标量.

**例 12.2 (( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ) 型)** 其维度为 4, 并且我们有生成元

$$J^{+i} = J^{-i} = \frac{\sigma^i}{2} \quad (12.1.65)$$

于是我们有

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\sigma \otimes 1 + 1 \otimes \frac{1}{2}\sigma, \mathbf{K} = i \left( 1 \otimes \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sigma \otimes 1 \right) \quad (12.1.66)$$

(千万不要直接将两个  $\frac{1}{2}\sigma$  相加, 因为它们是分别作用到不同的旋量部分的)

考虑两旋量  $\xi, \eta$ , 我们用矩阵  $\xi\eta^T\sigma^2$  表示这两旋量的张量积.(为什么这里这么奇怪地在最后插入一个  $\sigma^2$ ? 原因在于只有  $\sigma^{T2} = -\sigma^2 \neq \sigma^2$ , 如果没有这个  $\sigma^2$  就会使得接下来的变换规则非常奇怪)

而  $\mathbf{J}, \mathbf{K}$  对其的作用为

$$\mathbf{J}(\xi\eta^T) = \frac{1}{2}(\sigma\xi\eta^T\sigma^2 + \xi\eta^T\sigma^T\sigma^2) \quad (12.1.67)$$

$$\mathbf{K}(\xi\eta^T) = \frac{i}{2}(-\sigma\xi\eta^T\sigma^2 + \xi\eta^T\sigma^T\sigma^2) \quad (12.1.68)$$

需要注意, 这里出现了  $\sigma^T$ , 而

$$\sigma^{iT} = \sigma^i, i = 0, 1, 3 \quad (12.1.69)$$

$$\sigma^{2T} = -\sigma^2 \quad (12.1.70)$$

我们设

$$\xi\eta^T\sigma^2 = V^\mu\bar{\sigma}_\mu \quad (12.1.71)$$

(注意这里, 因为单纯  $\xi\eta^T\sigma^2$  的秩为 1, 我们要表示任意的旋量其实需要多个  $\xi\eta^T\sigma^2$  做线性组合. 但是因为线性性使得对于单个  $\xi\eta^T\sigma^2$  成立的对于它们的线性组合式子也仍然成立, 所以这里出于书写简便性的考虑我们就不妨写一个  $\xi\eta^T\sigma^2$  来表示  $V^\mu\bar{\sigma}_\mu$ )

计算可以发现

$$J^2(V^\mu\bar{\sigma}_\mu) = \frac{1}{2}(\sigma^2V^\mu\bar{\sigma}_\mu + V^\mu\bar{\sigma}_\mu\sigma^2\sigma^{2T}\sigma^2) \quad (12.1.72)$$

$$= \frac{1}{2}V^\mu(\sigma^2\bar{\sigma}_\mu - \bar{\sigma}_\mu\sigma^2) \quad (12.1.73)$$

$$= i\bar{\sigma}_j\epsilon_{j2i}V^i \quad (12.1.74)$$

并且对于  $k \neq 2$ , 我们不难计算得到

$$J^k(V^\mu\bar{\sigma}_\mu) = i\bar{\sigma}_j\epsilon_{jki}V^i \quad (12.1.75)$$

整理结果有, 对于  $k = 1, 2, 3$

$$J^k(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) = i\bar{\sigma}_j \epsilon_{jki} V^i \quad (12.1.76)$$

同理我们有

$$K^i(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) = \frac{i}{2}(-\sigma^k V^\mu \bar{\sigma}_\mu + V^\mu \bar{\sigma}_\mu \sigma^2 \sigma^{kT} \sigma^2) \quad (12.1.77)$$

于是我们可以计算得到

$$K^k(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) = -i(V^k \bar{\sigma}_0 + V^0 \bar{\sigma}_k) \quad (12.1.78)$$

所以我们发现, 对于  $V^\mu \bar{\sigma}_\mu$  做无穷小 Lorentz 变换有

$$\delta(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) = \Lambda_{\theta^i, \beta^i}(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) - V^\mu \bar{\sigma}_\mu \quad (12.1.79)$$

$$= i\theta^k J^k(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) + i\beta^k K^k(V^\mu \bar{\sigma}_m u) \quad (12.1.80)$$

$$= -\bar{\sigma}_j \epsilon_{jki} \theta^k V^i + \beta^k (V^k \bar{\sigma}_0 + V^0 \bar{\sigma}_k) \quad (12.1.81)$$

对照(12.1.11)这符合 Lorentz 群作用下矢量的变换, 因此我们指出,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  其实代表的就是 4 矢量.

**例 12.3 ( $(0, \frac{1}{2})$  型-右手 Weyl 旋量)** 其维度为 2. 于是我们可以将其记为  $\psi_R$ , 是一个二维列向量. 根据生成元

$$\begin{cases} \mathbf{J}^- = 0 \\ \mathbf{J}^+ = \frac{\sigma}{2} \end{cases} \quad (12.1.82)$$

我们有得到 Lorentz 变换的群作用

$$\psi_R = e^{\frac{1}{2}(i\theta^i \sigma^i + \beta^i \sigma^i)} \psi_R \quad (12.1.83)$$

对无穷小 Lorentz 变换有

$$\delta \psi_R = \frac{1}{2}(i\theta^j + \beta^j) \sigma^j \psi_R \quad (12.1.84)$$

我们计算发现

$$\delta(\psi_R^\dagger \psi_R) = \beta^i \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R \quad (12.1.85)$$

$$\delta(\psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R) = -\epsilon_{ijk} \theta^j \psi_R^\dagger \sigma^k \psi_R + \beta^i \psi_R^\dagger \psi_R \quad (12.1.86)$$

如果我们将它们组合为  $(\psi_R^\dagger \psi_R, \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R)^T$ , 可以发现这正是矢量的 Lorentz 变换形式. 因此我们发现了一个 4 矢量

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \quad (12.1.87)$$

, 其中

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.1.88)$$

从这里我们也可以体会到所谓”旋量是矢量开平方根”的说法的道理: 我们将两个旋量组合在一起, 就能乘出一个矢量.

**例 12.4 (( $\frac{1}{2}, 0$ ) 型-左手 Weyl 旋量)** 其维度为 2. 于是我们可以将其记为  $\psi_L$ , 是一个二维列向量. 生成元为

$$\begin{cases} \mathbf{J}^- = \frac{\sigma}{2} \\ \mathbf{J}^+ = 0 \end{cases} \quad (12.1.89)$$

我们有得到 Lorentz 变换的群作用

$$\psi_L = e^{\frac{1}{2}(i\theta^i \sigma^i - \beta^i \sigma^i)} \psi_R \quad (12.1.90)$$

对无穷小 Lorentz 变换有

$$\delta \psi_L \frac{1}{2}(i\theta^j - \beta^j) \sigma^j \psi_R \quad (12.1.91)$$

我们定义  $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)^T$ , 并计算发现

$$\delta(\psi_L^\dagger \psi_L) = -\beta^i \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L = \beta^i \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^i \psi_L \quad (12.1.92)$$

$$\delta(\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^i \psi_L) = -\sigma_{ijk} \theta^j \psi_L^\dagger \sigma^k \psi_L + \beta^i \psi_L^\dagger \psi_L \quad (12.1.93)$$

于是我们发现

$$\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \quad (12.1.94)$$

是一个 4 矢量

进一步地, 我们还可以发现

$$\delta(\psi_L^\dagger \psi_R) = \delta(\psi_R^\dagger \psi_L) = 0 \quad (12.1.95)$$

于是  $\psi_L^\dagger \psi_R, \psi_R^\dagger \psi_L$  是 Lorentz 标量.

再计算

$$\delta(\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R) \quad (12.1.96)$$

根据

$$\delta(\partial_\mu) = \partial'_\mu - \partial_\mu \quad (12.1.97)$$

即

$$\delta(\partial_0) = -\beta^i \partial_i \quad (12.1.98)$$

$$\delta(\partial_i) = -\beta^i \partial_0 + \epsilon_{kji} \theta^j \partial_k \quad (12.1.99)$$

我们有

$$\delta(\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R) = 0 \quad (12.1.100)$$

这个结论对于  $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L$  同样成立.

所以我们发现

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R, \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \quad (12.1.101)$$

是 Lorentz 标量.

## 12.2 Dirac 旋量

利用上一节中我们组合出来的标量, 我们可以构造一个 Lagrangian

$$\mathcal{L} = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + i\psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R) \quad (12.2.1)$$

我们将  $\psi_L, \psi_R$  拼到一起

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (12.2.2)$$

然后构造

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (12.2.3)$$

定义

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger) \quad (12.2.4)$$

就有

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi \quad (12.2.5)$$

其中

$$\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial^\mu \quad (12.2.6)$$

并且从矩阵形式我们注意到

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (12.2.7)$$

以及

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad (12.2.8)$$

利用

$$\gamma^0 \gamma^0 = g^{00} = 1, \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i \quad (12.2.9)$$

我们可以将式(12.2.8)写为更紧凑的形式

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (12.2.10)$$

在下一节12.2.1中我们将会看到一般化的对于  $\gamma^\mu$  性质的讨论.

接着我们继续考虑 Dirac 旋量, 我们可以从 Lagrangian 中得到 EoM:

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (12.2.11)$$

这是一个一阶的 PDE, 似乎与预期中的 Klein-Gordan 方程不符? 我们可以将其左乘  $(i\cancel{\partial} + m)$ , 得到

$$(i\cancel{\partial} + m)(i\cancel{\partial} - m)\psi = (-\partial^2 - m^2)\psi = 0 \quad (12.2.12)$$

于是我们发现, 将其解耦为二阶 PDE 后, 它仍然是满足 Klein-Gordan 方程的, 从而具有我们所预期的色散关系

$$\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (12.2.13)$$

关于 EoM 的讨论我们见 12.2.2 节, 在那我们将会详细地讨论 Dirac 方程的解, 并将其二次量子化.

然后我们尝试获得 Dirac 旋量的 Lorentz 变换及其生成元. 我们首先直接考虑  $\psi$  的变换:

$$\delta\psi = \begin{pmatrix} \delta\psi_L \\ \delta\psi_R \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\theta^i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \psi + \frac{1}{2}v^i \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \psi \quad (12.2.14)$$

考虑到

$$[\gamma^j, \gamma^k] = -[\sigma^j, \sigma^k] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -i\epsilon_{jkl}\sigma^l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.2.15)$$

即

$$\epsilon_{ijk}[\gamma^j, \gamma^k] = -2i\sigma^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.2.16)$$

还有

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \gamma^i\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\bar{\sigma}^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \quad (12.2.17)$$

即

$$[\gamma^i, \gamma^0] = -2 \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \quad (12.2.18)$$

于是

$$\delta\psi = i\epsilon_{ijk}\theta^i\left(\frac{i}{4}[\gamma^j, \gamma^k]\right)\psi + iv^i\left(\frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^0]\right) \quad (12.2.19)$$

$$= -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\left(\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right) \quad (12.2.20)$$

所以我们发现,

### 定义 12.5 (Dirac 旋量生成元)

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (12.2.21)$$

对 Dirac 旋量, Lorentz 变换为

$$\psi \rightarrow \Lambda_s \psi, \Lambda_s = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} \quad (12.2.22)$$

并且有旋转与 Boost 生成元

$$J^i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} S^{jk} = \frac{i}{8} \epsilon_{ijk} [\gamma^j, \gamma^k] \quad (12.2.23)$$

$$K^i = S^{i0} = \frac{i}{4} [\gamma^i, \gamma^0] \quad (12.2.24)$$

$$\psi \rightarrow \Lambda_s \psi, \Lambda_s = e^{i\theta \cdot \mathbf{J} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}} \quad (12.2.25)$$

并且我们可以验证  $S^{\mu\nu}$  满足定理 12.6: 首先计算对易子

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}) \quad (12.2.26)$$

所以

$$[S^{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = \frac{i}{4} ([S^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma] - [S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma \gamma^\rho]) \quad (12.2.27)$$

$$= \frac{i}{4} (\gamma^\rho [S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] [S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] \gamma^\sigma - \gamma^\sigma [S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] - [S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] \gamma^\rho) \quad (12.2.28)$$

于是可得

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(-g^{\mu\rho} S^{\nu\sigma} - g^{\sigma\nu} S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} S^{\nu\rho} + g^{\rho\nu} S^{\mu\sigma}) \quad (12.2.29)$$

#### 12.2.1 Clifford 代数

上一节中, 我们定义出来的  $\gamma^\mu$  有其独特的代数结构, 本节我们将它抽象出来, 提升到代数的角度研究  $\gamma^\mu$ .

**定义 12.6 (Clifford 代数)** Clifford 代数即满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (12.2.30)$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (12.2.31)$$

的代数.

**定义 12.7 (Slash)** 对于矢量  $A^\mu$ , 其 slash

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu \quad (12.2.32)$$

**定理 12.8** 我们有如下常见 Clifford 代数结论

$$\not{p}\not{p} = p^2 \quad (12.2.33)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \quad (12.2.34)$$

$$\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = -2\not{p} \quad (12.2.35)$$

$$\gamma^\mu \not{p} \not{q} \gamma_\mu = 4pq \quad (12.2.36)$$

**证明.**

$$\not{p}\not{p} = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p^2 \quad (12.2.37)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \gamma_\mu \gamma_\nu g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4 \quad (12.2.38)$$

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma^\alpha p_\alpha \gamma_\mu = (2g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\mu) p_\alpha \gamma_\mu = 2\not{p} - 4\not{p} = -2\not{p} \quad (12.2.39)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu &= \gamma^\mu \gamma^\alpha p_\alpha q^\beta \gamma_\beta \gamma_\mu = (2g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\mu)(2g_{\beta\mu} - \gamma_\mu \gamma_\beta) p_\alpha p^\beta \\ &= 4pq - 2\not{p}\not{q} - 2\not{q}\not{p} + 4\not{p}\not{q} = 4pq \end{aligned} \quad (12.2.40)$$

**定理 12.9**

$$\Lambda_s^{-1} \gamma^\mu \Lambda_s = \Lambda_v^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (12.2.41)$$

其中  $\Lambda_v$  即  $\omega$  对应的对矢量的 Lorentz 变换矩阵.

**证明.** 考虑无穷小 Lorentz 变换.

$$\Lambda_s = (1 - \frac{1}{2}i\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}), \quad \Lambda_s^{-1} = (1 + \frac{1}{2}i\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}) \quad (12.2.42)$$

于是

$$\Lambda_s^{-1} \gamma^\mu \Lambda_s = (1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}) \gamma^\mu (1 - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta}) \quad (12.2.43)$$

$$= \gamma^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta} [S^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] \quad (12.2.44)$$

利用式(12.2.26)我们有

$$\Lambda_s^{-1} \gamma^\mu \Lambda_s = \gamma^\mu - \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (\gamma^\alpha g^{\beta\mu} - \gamma^\beta g^{\alpha\mu}) \quad (12.2.45)$$

$$= \gamma^\mu + \frac{1}{2} \omega_{\beta\alpha} g^{\beta\mu} \gamma^\alpha + \frac{1}{2} \theta_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} \gamma^\beta \quad (12.2.46)$$

$$= \gamma^\mu + \omega^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (12.2.47)$$

$$= (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) \gamma^\nu \quad (12.2.48)$$

$$= (\Lambda_v)^\mu_\nu \gamma^\nu \quad (12.2.49)$$

其中

$$(\Lambda_v)^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad (12.2.50)$$

即矢量的 Lorentz 变换.

### 定理 12.10

$$\gamma^0 \Lambda_s^\dagger \gamma^0 = \Lambda_s^{-1} \quad (12.2.51)$$

**证明.** 我们求生成元的共轭

$$S^{\mu\nu\dagger} = -\frac{i}{4} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)^\dagger \quad (12.2.52)$$

$$= -\frac{i}{4} (\gamma^{\nu\dagger} \gamma^{\mu\dagger} - \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{\nu\dagger}) \quad (12.2.53)$$

$$= \frac{i}{4} (\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0) \quad (12.2.54)$$

$$= \gamma^0 S^{\mu\nu} \gamma^0 \quad (12.2.55)$$

然后由于  $\gamma^0 \gamma^0 = 1$ , 所以  $\gamma^0$  可以从  $\Lambda_s^\dagger$  的两边拎入指数中:

$$\gamma^0 \Lambda_s^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu\dagger}} \gamma^0 = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \gamma^0 S^{\mu\nu\dagger} \gamma^0} = e^{\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}} = \Lambda_s^{-1} \quad (12.2.56)$$

**定理 12.11**  $\bar{\psi}\psi$  是 Lorentz 标量,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  是 Lorentz 矢量,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$  是 Lorentz 张量.

证明.

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rightarrow \psi^\dagger \Lambda_s^\dagger \gamma^0 \Lambda_s \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \Lambda_s^{-1} \Lambda_s \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi \quad (12.2.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi \rightarrow \psi^\dagger \Lambda_s^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Lambda_s \psi = \psi^\dagger \Lambda_s^{-1} \gamma^\mu \Lambda_s \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (\Lambda_v)^\mu{}_\nu \psi = (\Lambda_v)^\mu{}_\nu \gamma^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (12.2.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^\nu \psi &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu \psi \rightarrow \psi^\dagger \Lambda_s^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu \Lambda_s \psi = \psi^\dagger \Lambda_s^{-1} \gamma^\mu \Lambda_s \Lambda_s^{-1} \gamma^\nu \Lambda_s \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (\Lambda_v)^\mu{}_\alpha \gamma^\alpha (\Lambda_v)^\nu{}_\beta \gamma^\beta \psi = (\Lambda_v)^\mu{}_\alpha (\Lambda_v)^\nu{}_\beta \bar{\psi} \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi \end{aligned} \quad (12.2.59)$$

## 12.2.2 Dirac 旋量的二次量子化

首先是第一步, 解 EoM. 设在 Weyl 基底下一个一般的解为  $(\psi_L \psi_R)^T$ , 于是 EoM 可以写为

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \quad (12.2.60)$$

在动量空间中有

$$\sigma^\mu p_\mu \psi_R = (E - \sigma \cdot \mathbf{p}) \psi_R = m \psi_L \quad (12.2.61)$$

$$\bar{\sigma}^\mu p_\mu \psi_L = (E + \sigma \cdot \mathbf{p}) \psi_L = m \psi_R \quad (12.2.62)$$

对于零质量 Fermion, 这个方程是解耦的:

$$\sigma^\mu p_\mu \psi_R = (E - \sigma \cdot \mathbf{p}) \psi_R = 0 \quad (12.2.63)$$

$$\bar{\sigma}^\mu p_\mu \psi_L = (E + \sigma \cdot \mathbf{p}) \psi_L = 0 \quad (12.2.64)$$

### 定义 12.8 (螺旋度)

$$H = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|p|} \quad (12.2.65)$$

可以发现

$$H\psi_R = \psi_R \quad (12.2.66)$$

$$H\psi_L = -\psi_L \quad (12.2.67)$$

$$(12.2.68)$$

可见,  $\psi_R, \psi_L$  分别是螺旋度的本征矢. 这里螺旋度的物理意义就是, 自旋指向和运动方向的夹角. 在这里我们发现, Weyl 旋量的左右手其实分别就是自旋方向和运动方向分别是左手螺旋和右手螺旋的关系.

我们一般认为中微子的  $m \approx 0$ , 所以中微子是具有固定的手型. 由于我们世界 Parity 的破缺, 导致自然界中其实基本上只存在左手中微子.

一般性的讨论结束, 我们开始从 EoM 中寻求可以拿来正则量子化的解. 设正能解  $\psi = u^s e^{-ipx}$ , 负能解  $\psi = v^s e^{ipx}$

对于  $u^s$

$$(\not{p} - m)u^s = 0 \quad (12.2.69)$$

在 Weyl 基底中即

$$\begin{pmatrix} -m & p^\mu \sigma_\mu \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu & -m \end{pmatrix} u^s = 0 \quad (12.2.70)$$

根据

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = p^i p^j \sigma^i \sigma^j = p^i p^j (\delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma^k) = p^i p^i = \mathbf{p}^2 \quad (12.2.71)$$

然后

$$(p \cdot \boldsymbol{\sigma})(p \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = (p^0 \sigma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})(p^0 \sigma^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (12.2.72)$$

$$= (p^0)^2 - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2 = p^2 = m^2 \quad (12.2.73)$$

即 (都是算数平方根, 取正根, 这里没有负根的情况)

$$\sqrt{(p \cdot \boldsymbol{\sigma})(p \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}})} = \sqrt{m^2} = m \quad (12.2.74)$$

我们可以计算验证

$$\begin{pmatrix} -m & p^\mu \sigma_\mu \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m\sqrt{p\sigma} \zeta_s + p\sigma\sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \\ p\bar{\sigma}\sqrt{p\sigma} \zeta_s - m\sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix} \quad (12.2.75)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \left( -m + \sqrt{(p\bar{\sigma})(p\sigma)} \right) \zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \left( \sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})} - m \right) \zeta_s \end{pmatrix} = 0 \quad (12.2.76)$$

所以

$$u^s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix} \quad (12.2.77)$$

是 EoM 的解.

对于  $v^s$  同理, 它满足

$$(\not{p} + m)v^s = 0 \quad (12.2.78)$$

可以验证

$$v^s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \eta_s \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix} \quad (12.2.79)$$

是满足 EoM 的解.

然后我们取正交基底张成  $u^s, v^s$  的解空间, 即我们取  $\zeta_1, \zeta_2$  以及  $\eta_1, \eta_2$  满足

$$\zeta_r^\dagger \zeta_s = \delta_{rs}, \eta_r^\dagger \eta_s = \delta_{rs} \quad (12.2.80)$$

然后取  $\zeta_s, \eta_s$  分别代入  $u^s, v^s$  得到  $u^s, v^s$  的解空间的基底.

我们可以验证正交性

$$\bar{u}^r u^s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_r^\dagger & \sqrt{p\sigma} \zeta_s^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix} = m\delta^{rs} + m\delta^{rs} = 2m\delta^{rs} \quad (12.2.81)$$

$$\bar{v}^r v^s = \begin{pmatrix} -\sqrt{p\bar{\sigma}} \eta_r^\dagger & \sqrt{p\sigma} \eta_s^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \eta_s \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix} = -m\delta^{rs} - m\delta^{rs} = -2m\delta^{rs} \quad (12.2.82)$$

$$\bar{u}^r v^s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}}\zeta_r^\dagger & \sqrt{p\sigma}\zeta_r^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\eta_s \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}}\eta_s \end{pmatrix} = 0 \quad (12.2.83)$$

于是

### 定理 12.12

$$\bar{u}^r u^s = -\bar{v}^r v^s = 2m\delta_{rs}, \bar{u}^r v^s = \bar{v}^r u^s = 0 \quad (12.2.84)$$

### 定理 12.13

$$\sum_s u^s \bar{u}^s = \not{p} + m \quad (12.2.85)$$

$$\sum_s v^s \bar{v}^s = \not{p} - m \quad (12.2.86)$$

**证明.** 根据  $\zeta_1, \zeta_2$  是  $\mathbb{C}^2$  上的完备正交基底, 所以

$$\sum_s \zeta_s \zeta_s^\dagger = 1 \quad (12.2.87)$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_s u^s \bar{u}^s &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}}\zeta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}}\zeta_s^\dagger & \sqrt{p\sigma}\zeta_s^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})}\zeta_s \zeta_s^\dagger & p\sigma \zeta_s \zeta_s^\dagger \\ p\bar{\sigma} \zeta_s \zeta_s^\dagger & \sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})}\zeta_s \zeta_s^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m & p\sigma \\ p\bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = p\gamma + m = \not{p} + m \end{aligned} \quad (12.2.88)$$

$$\begin{aligned} \sum_s v^s \bar{v}^s &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma}\eta_s \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}}\eta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{p\bar{\sigma}}\eta_s^\dagger & \sqrt{p\sigma}\eta_s^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \sum_s \begin{pmatrix} -\sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})}\eta_s \eta_s^\dagger & p\sigma \eta_s \eta_s^\dagger \\ p\bar{\sigma} \eta_s \eta_s^\dagger & -\sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})}\eta_s \eta_s^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -m & p\sigma \\ p\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} = p\gamma - m = \not{p} - m \end{aligned} \quad (12.2.89)$$

## 定理 12.14

$$\bar{u}^s \gamma^\mu u_{s'} = 2p^\mu \delta_{ss'} \quad (12.2.90)$$

$$\bar{v}^s \gamma^\mu v_{s'} = 2p^\mu \delta_{ss'} \quad (12.2.91)$$

**证明.** 根据 Dirac 方程

$$\not{p} u^s = m u^s \quad (12.2.92)$$

$$\bar{u}^s \not{p} = m \bar{u}^s \quad (12.2.93)$$

于是

$$2m\bar{u}^s \gamma^\mu u_{s'} = \bar{u}^s \not{p} \gamma^\mu u_{s'} + \bar{u}^s \gamma^\mu \not{p} u_{s'} = p_\nu \bar{u}^s \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} u_{s'} = 2p^\mu \cdot 2m \delta_{ss'} = 4mp^\mu \delta_{ss'} \quad (12.2.94)$$

所以

$$\bar{u}^s \gamma^\mu u_{s'} = 2p^\mu \delta_{ss'} \quad (12.2.95)$$

同理

$$\bar{v}^s \gamma^\mu v_{s'} = 2p^\mu \delta_{ss'} \quad (12.2.96)$$

注: 但需要注意  $\bar{u}^s \gamma^\mu v_{s'} \neq 0$

因为考虑

$$2m\bar{u}^s \gamma^\mu v_{s'} = \bar{u}^s \not{p} \gamma^\mu v_{s'} - \bar{u}^s \gamma^\mu \not{p} v_{s'} = \bar{u}^s p_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\mu] v_{s'} \neq 0 \quad (12.2.97)$$

接下来由于涉及到对易子的问题, 为了能够区分对易子的乘法顺序以及做乘法的方式 (内积还是外积), 我们对  $\gamma, \psi$  引入指标:

$$\psi \rightarrow \psi_A \quad (12.2.98)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}^A \quad (12.2.99)$$

$$\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu{}_A{}^B \quad (12.2.100)$$

$$\not{p} \rightarrow \not{p}_A{}^B \quad (12.2.101)$$

那么

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}^A\psi_A = \psi_A\bar{\psi}^A \quad (12.2.102)$$

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \psi_A\bar{\psi}^B = \bar{\psi}^B\psi_A \quad (12.2.103)$$

于是我们开始将 Dirac 场量子化

$$\psi_A = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_s (u_A^s a_p^s e^{-ipx} + v_A^s b_p^{s\dagger} e^{ipx}) \quad (12.2.104)$$

$$\bar{\psi}^A = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_s (\bar{u}^{sA} a_p^{s\dagger} e^{ipx} + \bar{v}^{sA} b_p^s e^{-ipx}) \quad (12.2.105)$$

然后我们尝试计算两点关联函数

$$\langle 0 | \psi_A(y) \bar{\psi}^B(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \frac{\not{p}_A^B + m}{2\omega_p} e^{ip(x-y)} \quad (12.2.106)$$

$$= (-i\not{\partial}_A^B + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{ip(x-y)} \quad (12.2.107)$$

$$\langle 0 | \bar{\psi}^B(x) \psi_A(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \frac{\not{p}_A^B - m}{2\omega_p} e^{ip(x-y)} \quad (12.2.108)$$

$$= (i\not{\partial}_A^B - m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip(x-y)} \quad (12.2.109)$$

考虑 Fermion 的反交换性, 我们定义

$$\mathcal{T} \{ \psi_A(y) \bar{\psi}^B(x) \} \equiv \psi_A(y) \bar{\psi}^B(x) \Theta(y^0 - x^0) - \bar{\psi}^B(x) \psi_A(y) \Theta(x^0 - y^0) \quad (12.2.110)$$

于是可得 Feynman 传播子

$$\langle \psi_A(y) \bar{\psi}^B(x) \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_A^B + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ip(x-y)} \quad (12.2.111)$$

## 12.3 旋量 QED

然后我们尝试和电磁场耦合. 同样考虑局部  $U(1)$  规范变换, 即

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha} \psi \quad (12.3.1)$$

设

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (12.3.2)$$

让局域  $U(1)$  规范变换对  $A_\mu$  满足

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (12.3.3)$$

则

$$D_\mu(e^{-i\alpha}\psi) = e^{-i\alpha}D_\mu\psi \quad (12.3.4)$$

于是根据最小耦合原理我们可以得到 Lagrangian

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^2 \quad (12.3.5)$$

即

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu - m)\psi - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (12.3.6)$$

于是我们发现电流项

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (12.3.7)$$

## 12.4 Majorana 旋量

## 13 离散变换

在本节我们尝试讨论对场的三种幺正离散变换, 即  $C, P, T$  变换. 所谓的  $C$ , 其实就是电荷共轭 (Charge Conjugate), 就是指将粒子变为反粒子, 反转其的所有量子荷 (比如电荷, 但还包括轻子数、重子数等所有性质). 而  $P$  就是大名鼎鼎的宇称 (Parity), 就是指  $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$  的镜像变换.  $T$  则是时间反演 (Time reversal), 也就是将对象的运动过程反演:  $t \rightarrow -t$ .

### 13.1 C 变换

$C$  变换就是取反粒子, 若我们有一个粒子态  $|p\rangle$ , 我们将  $C$  作用在它上面, 根据要求我们有:

$$C|p\rangle = |\bar{p}\rangle \quad (13.1.1)$$

其中  $|\bar{p}\rangle$  即  $|p\rangle$  的反粒子态.

而这也正是说

$$Cb_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad (13.1.2)$$

$$Ca_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle = b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad (13.1.3)$$

在  $b_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}}^\dagger$  与  $|0\rangle$  间插入  $C^\dagger c$ , 我们有

$$Cb_{\mathbf{p}}^\dagger C^\dagger C |0\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad (13.1.4)$$

$$Ca_{\mathbf{p}}^\dagger C^\dagger C |0\rangle = b_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad (13.1.5)$$

这暗示我们

$$Cb_{\mathbf{p}}^\dagger C^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger \quad (13.1.6)$$

$$Ca_{\mathbf{p}}^\dagger C^\dagger = b_{\mathbf{p}}^\dagger \quad (13.1.7)$$

然后我们以实标量场、复标量场、Dirac 旋量场为例讨论  $C$  的具体作用.

**例 13.1 (实标量场的电荷共轭)** 由于实标量场只有一组产生湮灭算符, 它自己就是自己的反粒子,  $C$  变换对其不起作用, 于是我们有

$$C = 1 \quad (13.1.8)$$

**例 13.2 (复标量场的电荷共轭)** 直接套用结论我们有

$$C\psi(x)C^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ipx} + b_p^\dagger e^{ipx}) = \psi^\dagger(x) \quad (13.1.9)$$

$$C\pi(x)C^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} i\sqrt{\frac{\omega_p}{2}} (b_p^\dagger e^{ipx} - a_p e^{-ipx}) = \pi^\dagger(x) \quad (13.1.10)$$

**例 13.3 (Dirac 旋量的电荷共轭)** 直接利用结论我们有

$$C\psi_A C^\dagger = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \sum_s (u_A^s b_p^s e^{-ipx} + v_A^s a_p^{s\dagger} e^{ipx}) \quad (13.1.11)$$

我们想要将其写为与  $\psi^*$ (注意, 这里如果是  $\psi^\dagger$  那么就变成行向量了, 结构不同, 而  $\psi^*$  则只是取共轭, 也就是将  $a, b$  取  $\dagger$ , 给  $u, v$  取  $*$  却不取  $\dagger$ ) 有关的东西, 那么我们就需要获得  $u$  与  $v$  之间的关系.

## 13.2 P 变换

## 13.3 T 变换

# A Clebsch-Gordan 系数表

34. Clebsch-Gordan coefficients 010001-1

## 34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

		Notation:	$\begin{matrix} J & J & \dots \\ M & M & \dots \end{matrix}$
		Coefficients	$\begin{matrix} m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{matrix}$
$1/2 \times 1/2$	$\begin{matrix} 1 \\ +1 \\ 1/2+1/2 \\ 1 \\ 1/2-1/2 \end{matrix}$	$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$	$\begin{matrix} 5/2 \\ 5/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 3/2+3/2 \end{matrix}$
$1/2 \times 1/2$	$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1/2-1/2 \\ 1/2+1/2 \\ -1/2-1/2 \end{matrix}$	$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$	$\begin{matrix} 2 \times 1/2 \\ +2+1/2 \\ +2-1/2 \\ 1/2+1/2 \\ 1/2-1/2 \end{matrix}$
$1 \times 1/2$	$\begin{matrix} 3/2 \\ +3/2 \\ 1 \\ +1/2+1/2 \\ 0+1/2 \end{matrix}$	$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$	$\begin{matrix} 1/2-1/2 \\ 0+1/2 \\ 3/5-2/5 \\ 0-1/2 \\ -1+1/2 \end{matrix}$
$1 \times 1/2$	$\begin{matrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2+1/2 \\ 2/3-1/3 \end{matrix}$	$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$	$\begin{matrix} 3/2 \times 1/2 \\ +3/2+1/2 \\ +3/2-1/2 \\ 1/2+1/2 \\ 3/4-3/4 \end{matrix}$
$2 \times 1$	$\begin{matrix} 3 \\ +3 \\ 1 \\ +2 \\ +2+1 \end{matrix}$	$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$	$\begin{matrix} 2 \\ +2 \\ 1 \\ +1 \\ 1 \end{matrix}$
$1 \times 1$	$\begin{matrix} 2 \\ +2 \\ 2 \\ 1 \\ +1+1 \end{matrix}$	$3/2 \times 1$	$\begin{matrix} 2 \\ +3/2+1 \\ +3/2-1/2 \\ 1/2+1/2 \\ 3/4-1/4 \end{matrix}$
$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$	$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$	$\langle j_1 j_2 m_1 m_2   j_1 j_2 JM \rangle$	$= (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1   j_2 j_1 JM \rangle$
$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$		$d_{0,0}^1 = \cos \theta$	$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$
$2 \times 3/2$	$\begin{matrix} 7/2 \\ +7/2 \\ 7/2 \\ 5/2 \\ +2+3/2 \\ 1 \\ +5/2+5/2 \end{matrix}$	$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$	$d_{1,1,1}^{1/2} = \frac{1+\cos \theta}{2}$
$2 \times 2$	$\begin{matrix} 4 \\ +4 \\ 4 \\ 3 \\ +3 \\ 1 \\ +2+1 \end{matrix}$	$d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$	$d_{1,0,0}^{1/2} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$
$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1+\cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$		$d_{1,-1,-1}^{1/2} = \frac{1-\cos \theta}{2}$	
$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1+\cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$d_{2,2,2}^2 = \left( \frac{1+\cos \theta}{2} \right)^2$	$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$	
$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1-\cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$	$d_{2,1,1}^2 = -\frac{1+\cos \theta}{2} \sin \theta$	$d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$	
$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1-\cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$d_{2,0,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$	$d_{1,1,1}^2 = \frac{1+\cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$	
$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$	$d_{2,-1,1}^2 = -\frac{1-\cos \theta}{2} \sin \theta$	$d_{1,0,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$	
$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$	$d_{2,-2,0}^2 = \left( \frac{1-\cos \theta}{2} \right)^2$	$d_{1,-1,1}^2 = \frac{1-\cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$	$d_{0,0,0}^2 = \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

图 A.1: Clebsch-Gordan 系数表

## 参考文献

- [1] David J. Griffiths(王青译). 粒子物理导论. 机械工业出版社, 2021. Chap. 6, pp. 153–155.
- [2] David J. Griffiths(王青译). 粒子物理导论. 机械工业出版社, 2021. Chap. 3, pp. 74–81.
- [3] Y Kosmann. “Dérivées de Lie des spineurs”. In: *Annali di Matematica* 91 (1971), pp. 317–395.
- [4] Tom Lancaster and Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. 世界图书出版公司, 2023, pp. 10–17.
- [5] Tom Lancaster and Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. 世界图书出版公司, 2023, pp. 167–169.
- [6] Link. “Noether 定理”. In: 知乎 (2025). URL: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/19149112768>.
- [7] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *Introduction to Quantum Field Theory*. 世界图书出版公司, 2018. Chap. 2, pp. 27–33.
- [8] Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Thermal Physics*. Pearson Education Inc., 2022, pp. 246–254.
- [9] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014. Chap. 7, pp. 82–83.
- [10] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014, pp. 87–89.
- [11] 刘川. 热力学与统计物理. 北京大学出版社, 2022, pp. 142–150.
- [12] 周洋. *QM Review and Lecture*. 复旦大学量子场论 PHYS60022.01 课程讲义, 2025.
- [13] 東雲正樹. “谁能通俗解释下，费曼图是如何做出来的呢？” In: 知乎 (2025). URL: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/2460633052>.
- [14] 梁灿彬. 微分几何入门与广义相对论 (中册). 科学出版社, 2009. Chap. 附录 B, pp. 196–221.

## 致谢

非常无比感谢我最喜欢的钱禹琛劳师无微不至的答疑解惑以及阅读评价, 平均每天帮我解决两个问题! 感谢黄海洋学长的指导以及纠错、谭骐忠同学的纠错.