

# 量子场论笔记

郑元昊

复旦大学物理系

更新：2025 年 11 月 24 日

# 目录

|          |                                      |           |
|----------|--------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>绪论</b>                            | <b>5</b>  |
| 1.1      | Why QFT? . . . . .                   | 5         |
| 1.2      | 符号约定 . . . . .                       | 5         |
| <b>2</b> | <b>数学基础</b>                          | <b>9</b>  |
| 2.1      | 泛函 . . . . .                         | 9         |
| 2.2      | $\delta$ 函数 . . . . .                | 9         |
| 2.3      | 变分 . . . . .                         | 9         |
| <b>3</b> | <b>狭义相对论动力学技巧</b>                    | <b>11</b> |
| <b>4</b> | <b>经典场论</b>                          | <b>13</b> |
| 4.1      | 拉氏量、作用量与 Euler-Lagrange 方程 . . . . . | 13        |
| 4.2      | 对称性与守恒量 . . . . .                    | 14        |
| 4.3      | 哈密顿量 . . . . .                       | 18        |
| <b>5</b> | <b>二次量子化</b>                         | <b>20</b> |
| 5.1      | 自由实标量场的量子化 . . . . .                 | 20        |
| 5.2      | 自由复标量场量子化 . . . . .                  | 25        |
| 5.3      | 两点关联函数 . . . . .                     | 26        |
| 5.4      | Wick 定理 . . . . .                    | 34        |
| <b>6</b> | <b>相互作用理论</b>                        | <b>36</b> |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 6.1      | Feynman 黄金规则 . . . . .                   | 36        |
| 6.2      | Lehmann-Symanzik-Zimmermann 公式 . . . . . | 40        |
| 6.3      | Schwinger-Dyson 定理 . . . . .             | 43        |
| 6.4      | Feynman 规则, 启动! . . . . .                | 44        |
| 6.4.1    | 位形空间的 Feynman 规则 . . . . .               | 45        |
| 6.4.2    | 动量空间的 Feynman 规则 . . . . .               | 49        |
| 6.5      | 从拉氏密度直接到动量空间 Feynman 规则 . . . . .        | 50        |
| <b>7</b> | <b>电磁场</b>                               | <b>52</b> |
| 7.1      | 重电磁场 (Massive) . . . . .                 | 52        |
| 7.2      | 电磁场 (Massless) . . . . .                 | 56        |
| <b>8</b> | <b>标量 QED</b>                            | <b>60</b> |
| 8.1      | 规范变换 . . . . .                           | 60        |
| 8.2      | 标量 QED 的 Feynman 规则 . . . . .            | 61        |
| <b>9</b> | <b>旋量</b>                                | <b>62</b> |
| 9.1      | Lorentz 群 . . . . .                      | 62        |
| 9.2      | 分解 Lorentz 群 . . . . .                   | 67        |
| 9.3      | 不可约表示 . . . . .                          | 68        |
| 9.4      | Dirac 旋量 . . . . .                       | 72        |
| 9.5      | Clifford 代数 . . . . .                    | 75        |
| 9.6      | Dirac 旋量的二次量子化 . . . . .                 | 78        |
| 9.7      | C,P,T 变换 . . . . .                       | 83        |

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| 9.8 旋量 QED . . . . .        | 84        |
| 9.9 Majorana 旋量 . . . . .   | 84        |
| <b>A Clebsch-Gordan 系数表</b> | <b>85</b> |
| <b>参考文献</b>                 | <b>86</b> |
| <b>致谢</b>                   | <b>87</b> |

# 1 绪论

## 1.1 Why QFT?

QFT is a framework for incorporating an infinite number of quantum degrees of freedom, arranged in spacetime, with the interactions constrained by locality, symmetry, unitarity, and causality. And it is the language of the laws of nature.[7]

- Locality: interactions occur at single points in spacetime
- Symmetry: the laws of physics are invariant under certain transformations
- Unitarity: the total probability of all possible outcomes of a quantum event is 1
- Causality: cause precedes effect, and information cannot travel faster than light

## 1.2 符号约定

- 采用自然 Heaviside-Lorentz 单位制:  $\hbar = c = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$
- 度规:  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$
- 爱因斯坦求和约定: 重复指标隐含求和, 并且希腊字母如  $\mu, \nu, \lambda \dots$  取 0,1,2,3, 拉丁字母如  $i, j, k \dots$  取 1,2,3
- 在不影响歧义的情况下, 对于标量场  $\phi$ , 其偏导  $\mu$  分量记为  $\phi_\mu = \partial_\mu \phi$
- 在不影响歧义的情况下,  $p_\mu x^\mu$  类的缩并可简记为  $px$
- $\phi_{\mathbf{x}} \equiv \phi(\mathbf{x})$
- $\phi_i \equiv \phi(x_i)$
- $\delta_{xy} \equiv \delta^4(x - y)$
- $\delta_{ij} \equiv \delta^4(x_i - x_j)$
- $D_{xy} \equiv D_F(x - y)$
- $D_{ij} \equiv D_F(x_i - x_j)$
- $\langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \rangle \equiv \langle \Omega | \mathcal{T} \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n | \Omega \rangle$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

单位元电荷

$$e = -|e| \quad (1.2.2)$$

精细结构常数

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \quad (1.2.3)$$

作用量

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int (-m d\tau - q A_\mu dx^\mu) - \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (1.2.4)$$

其中,  $F_{\mu\nu}$  为电磁场张量

$$F_{\mu\nu} = dA_{\mu\nu} \quad (1.2.5)$$

$d$  为外微分算符,  $A_\mu$  为电磁四势.

展开为分量形式有:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.6a)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.6b)$$

以及有粒子动力学方程:

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (1.2.7)$$

还有 Maxwell 方程组的协变形式:

$$\begin{cases} \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \\ \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

化为矢量方程组:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases} \quad (1.2.9)$$

spin1/2 Pauli 矩阵:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.10)$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.11)$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.12)$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.13)$$

$$\left[ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\sigma^k}{2} \quad (1.2.14)$$

$$\left\{ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right\} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (1.2.15)$$

$$\sigma^i \sigma^j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma^k \quad (1.2.16)$$

spin1 Pauli 矩阵

$$S^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.17)$$

$$S^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.18)$$

$$S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2.19)$$

$$[S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk}S^k \quad (1.2.20)$$

Lorentz 群变换 (见9.1节)

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \quad (1.2.21)$$

其中

$$\delta\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & v^1 & v^2 & v^3 \\ -v^1 & 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ -v^2 & \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -v^3 & -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.22)$$

Lorentz 群生成元

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \quad (1.2.23)$$

$$K^i = M^{i0} \quad (1.2.24)$$

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -K^1 & -K^2 & -K^3 \\ K^1 & 0 & J^3 & -J^2 \\ K^2 & -J^3 & 0 & J^1 \\ K^3 & J^2 & -J^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2.25)$$



## 2 数学基础

### 2.1 泛函

**定义 2.1 (泛函)** 泛函  $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  是定义在某个函数空间上的映射, 全体泛函组成的集合记为  $\mathcal{F}$

**例 2.1** 设  $\mathcal{F}$  是定义在区间  $[a, b]$  上的所有实值连续函数的空间, 则

$$f[\phi] = \int_a^b \phi(x) dx \quad (2.1.1)$$

是  $\mathcal{F}$  上的一个泛函

### 2.2 $\delta$ 函数

**定义 2.2 ( $\delta$  函数)**  $\delta(x)$  是满足

$$\int f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (2.2.1)$$

的函数

**定理 2.1**

$$\int dx e^{ikx} = 2\pi \delta(k) \quad (2.2.2)$$

**定理 2.2**

$$\int_a^b f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_{i \in \{i \mid g(x_i)=0, x_i \in [a, b]\}} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} = \sum_{i \in \{i \mid g(x_i)=0\}} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \Theta(b-x) \Theta(x-a) \quad (2.2.3)$$

### 2.3 变分

**定义 2.3 (变分)** 设泛函  $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$

其变分

$$\frac{\delta f}{\delta \phi(x_0)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f[\phi(x) + \epsilon \delta(x - x_0)] - f[\phi]}{\epsilon} \quad (2.3.1)$$

**例 2.2** 设泛函

$$f[\phi] = \phi \quad (2.3.2)$$

则

$$\frac{\delta f}{\delta \phi(x_0)} = \delta(x - x_0) \quad (2.3.3)$$

**例 2.3** 设泛函

$$f[\phi] = g(\phi), \text{ 其中 } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3.4)$$

则

$$\frac{\delta f}{\delta \phi(x_0)} = \frac{\partial g}{\partial \phi} \delta(x - x_0) \quad (2.3.5)$$

**例 2.4** 设泛函

$$f[\phi] = \int g(\phi) dx, \text{ 其中 } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3.6)$$

则

$$\frac{\delta f}{\delta \phi(x_0)} = \left. \frac{\partial g}{\partial \phi} \right|_{\phi(x_0)} \quad (2.3.7)$$

**例 2.5** 设泛函

$$f[\phi] = \int g(\phi, \nabla \phi) d^3x, \text{ 其中 } g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.3.8)$$

则

$$\frac{\delta f}{\delta \phi(x_0)} = \left( \frac{\partial g}{\partial \phi} - \partial_i \frac{\partial g}{\partial \phi_i} \right) \Big|_{\nabla \phi(x_0)} \quad (2.3.9)$$

参考: [3]

### 3 狭义相对论动力学技巧

一些常用技巧 [2]:

1.  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E}$
2. 使用四矢量以及不变量点积
3. 使用质心系简化计算

**定义 3.1 (Mandelstam 变量)** 对于以  $m_1, p_1, m_2, p_2$  的粒子入射, 以  $m_3, p_3, m_4, p_4$  的粒子出射的动力学系统

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \quad (3.0.1)$$

**定理 3.1 (s+t+u 守恒)**

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (3.0.2)$$

**证明.** 我们取质心系, 可以写出  $p_1, p_2, p_3, p_4$

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}), \quad p_2 = (E_2, -\mathbf{p}) \quad (3.0.3)$$

$$p_3 = (E_3, \mathbf{k}), \quad p_4 = (E_4, -\mathbf{k}) \quad (3.0.4)$$

于是

$$s = (E_1 + E_2)^2, \quad t = (E_3 - E_1)^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2, \quad u = (E_4 - E_1)^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 \quad (3.0.5)$$

计算可得:

$$s + t + u = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + E_4^2 - 2\mathbf{p}^2 - 2\mathbf{k}^2 + 2E_1^2 + 2E_1E_2 - 2E_1E_3 - 2E_1E_4 \quad (3.0.6)$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2E_1(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \quad (3.0.7)$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (3.0.8)$$

定理 3.2 (质心系中  $m_1$  的能量)

$$E_1^{\text{CM}} = \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \quad (3.0.9)$$

定理 3.3 (实验室系 ( $m_2$  静止) 中  $m_1$  的能量)

$$E_1^{\text{lab}} = \frac{s - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} \quad (3.0.10)$$

定理 3.4 (质心系总能量)

$$E_{\text{TOT}}^{\text{CM}} = \sqrt{s} \quad (3.0.11)$$

## 4 经典场论

### 4.1 拉氏量、作用量与 Euler-Lagrange 方程

**定义 4.1 (拉氏量 & 拉氏量密度)** 拉氏量

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (4.1.1)$$

其中  $\mathcal{L}$  即拉氏量密度

**定义 4.2 (作用量)** 作用量  $S$  是拉氏量密度在时空上的积分

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4x \quad (4.1.2)$$

**定理 4.1 (标量的 Euler-Lagrange 方程)**

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} = 0 \quad (4.1.3)$$

**证明.** 设  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ , 则

$$\delta S = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \delta\phi_\mu \right) \quad (4.1.4)$$

对第二项分部积分, 忽略边界项, 有

$$\delta S = \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\mu} \right) \delta\phi \quad (4.1.5)$$

由  $\delta S = 0$  可得 Euler-Lagrange 方程

**例 4.1** 自由粒子的拉氏量密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (4.1.6)$$

代入 Euler-Lagrange 方程, 有

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (4.1.7)$$

即 Klein-Gordon 方程

**定理 4.2 (矢量场的 Euler-Lagrange 方程)** 设矢量场为  $A_\mu$ , 定义  $F_{\mu\nu} = dA_{\mu\nu}$ ,  $\Pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}$ ,  $B^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$ , 那么

$$B^\mu - 2\partial_\nu \Pi^{[\nu\mu]} = 0 \quad (4.1.8)$$

**证明.**

$$\delta \mathcal{L} = \Pi^{\mu\nu} \delta dA_{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu \quad (4.1.9)$$

交换  $\delta$  与外微分算子  $d$ , 并利用乘法法则有:

$$\delta \mathcal{L} = 2\partial_{[\mu}(\Pi^{\mu\nu} \delta A_{\nu]}) - 2(\partial_{[\mu} \Pi^{\mu\nu}) \delta A_{\nu]} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu \quad (4.1.10a)$$

$$= 2\partial_{[\mu}(\Pi^{\mu\nu} \delta A_{\nu]}) - 2(\partial_\nu \Pi^{[\nu\mu]}) \delta A_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu \quad (4.1.10b)$$

忽略边界项, 由  $\delta S = 0$  可得 Euler-Lagrange 方程.

**例 4.2** 电磁场的拉氏量密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad (4.1.11)$$

代入 Euler-Lagrange 方程, 有

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (4.1.12)$$

即 Maxwell 方程.

## 4.2 对称性与守恒量

在这里我们考虑连续对称性.

**定义 4.3 (连续对称性)** 连续对称性是指在某个参数  $\alpha$  下, 场的变换

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) \quad (4.2.1)$$

其中,  $\Delta$  为某一算符.

若系统具有该变换的对称性, 则运动方程应该不变.

即:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu J^\mu \quad (4.2.2)$$

**定理 4.3 (Noether 定理)** 对于存在某对称性的系统, 存在守恒流

$$j^\mu = \Pi^\mu \Delta\phi - J^\mu \quad (4.2.3)$$

**证明.**

$$\delta\mathcal{L} = \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \Delta\phi + \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\mu} \partial_\mu \Delta\phi \quad (4.2.4a)$$

$$= \alpha \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \alpha \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\mu} \right) \Delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\mu} \Delta\phi \right) \quad (4.2.4b)$$

$$= \alpha \partial_\mu (\Pi^\mu \Delta\phi) \quad (4.2.4c)$$

又因为系统存在对称性:

$$\delta\mathcal{L} = \alpha \partial_\mu J^\mu \quad (4.2.5)$$

因此:

$$\partial_\mu (\Pi^\mu \Delta\phi - J^\mu) = \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (4.2.6)$$

**例 4.3 (复标量场的  $U(1)$  对称性)** 考虑复标量场

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \psi^* \partial_\mu \psi - m^2 \psi^* \psi \quad (4.2.7)$$

其对称性为

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi, \quad \psi^* \rightarrow \psi'^* = e^{-i\alpha} \psi^* \quad (4.2.8)$$

不难发现,  $\mathcal{L}$  与  $\psi$  的相位无关, 因此:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + 0 \Rightarrow J^\mu = 0 \quad (4.2.9)$$

于是, 由 Noether 定理可得守恒流

$$j^\mu = i(\psi \partial^\mu \psi^* - \psi^* \partial^\mu \psi) \quad (4.2.10)$$

我们可以代入验证其守恒:

$$\partial_\mu j^\mu = i(\psi \partial^2 \psi^* - \psi^* \partial^2 \psi) \quad (4.2.11)$$

代入运动方程  $(\partial^2 + m^2)\psi = 0$

$$\partial_\mu j^\mu = i(\psi(-m^2 \psi^*) - \psi^*(-m^2 \psi)) = 0 \quad (4.2.12)$$

**例 4.4 (标量场的时空平移对称性)** 时空中有 Killing 矢量场  $\xi^\mu$ , 其满足 Killing 方程

$$\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0 \quad (4.2.13)$$

缩并有:

$$\nabla_\mu \xi^\mu = 0 \quad (4.2.14)$$

在这里,  $\Delta$  算符即 Lie 导数  $\mathcal{L}_\xi$ .

对  $\mathcal{L}$  沿着  $-\xi^\mu$  的方向进行平移, 有

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \mathcal{L}_\xi \mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha \xi^\mu \nabla_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha \nabla_\mu (\xi^\mu \mathcal{L}) \quad (4.2.15)$$

因此,  $J^\mu = \xi^\mu \mathcal{L}$ . 由 Noether 定理可得守恒流

$$\begin{aligned} j^\mu &= \Pi^\mu \Delta \phi - J^\mu = \Pi^\mu \xi^\nu \nabla_\nu \phi - \xi^\mu \mathcal{L} \\ &= \xi^\nu (\nabla^\mu \phi \nabla_\nu \phi - \mathcal{L} \delta^\mu_\nu) \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

于是有能动张量

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \mathcal{L} g_{\mu\nu} \quad (4.2.17)$$

其满足:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.2.18)$$

由此可见, 能动量守恒完全是时空平移不变性的体现.

**例 4.5 (矢量场的时空平移对称性)** 类似 4.4, 时空中有 Killing 矢量场  $\xi^\mu$ . 我们首先设两个辅助场:

$$\Pi^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \quad (4.2.19)$$

$$B^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \quad (4.2.20)$$

沿着  $-\xi^\mu$  变换, 同样有:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha \xi^\mu \nabla_\mu \mathcal{L} = \mathcal{L} + \alpha \nabla_\mu (\xi^\mu \mathcal{L}) \quad (4.2.21)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \alpha \mathcal{L}_\xi A_\mu \quad (4.2.22)$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} + \alpha \mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} \quad (4.2.23)$$



需要注意的是,  $\mathcal{L}_\xi$  与外微分算子  $d$  不对易, 因此

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = \mathcal{L}_\xi dA_{\mu\nu} \neq d(\mathcal{L}_\xi A)_{\mu\nu} \quad (4.2.24)$$

而

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} &= \xi^\lambda \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + F_{\lambda\nu} \nabla_\mu \xi^\lambda + F_{\mu\lambda} \nabla_\nu \xi^\lambda \\ &= \xi^\lambda \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \nabla_\mu (F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) - \xi^\lambda \nabla_\mu F_{\lambda\nu} \\ &\quad + \nabla_\nu (F_{\mu\lambda} \xi^\lambda) - \xi^\lambda \nabla_\nu F_{\mu\lambda} \\ &= \xi^\lambda \nabla_\lambda F_{\mu\nu} + \xi^\lambda \nabla_\mu F_{\nu\lambda} + \xi^\lambda \nabla_\nu F_{\lambda\mu} + \nabla_\mu (F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) + \nabla_\nu (F_{\mu\lambda} \xi^\lambda) \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

由外微分算子性质有  $\nabla_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$ , 可知前三项为零.

因此

$$\mathcal{L}_\xi F_{\mu\nu} = \nabla_\mu (F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) + \nabla_\nu (F_{\mu\lambda} \xi^\lambda) \quad (4.2.26)$$

于是

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \mathcal{L} &= \nabla_\mu (2\Pi^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) - F_{\mu\nu} \xi^\lambda B^\nu + B^\nu (\xi^\lambda \nabla_\lambda A_\nu + A_\lambda \nabla_\nu \xi^\lambda) \\ &= \nabla_\mu (2\Pi^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} \xi^\lambda) - F_{\mu\nu} \xi^\lambda B^\nu + B^\nu \xi^\lambda \nabla_\lambda A_\nu - B^\nu \xi^\lambda \nabla_\nu A_\lambda \\ &\quad + B^\nu \nabla_\nu (A_\lambda \xi^\lambda) \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

这里我们取规范

$$\nabla_\nu B^\nu = 0 \quad (4.2.28)$$

故:

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L} = \nabla_\mu (2\Pi^{\mu\nu} F_{\lambda\nu} \xi^\lambda + B^\mu A_\nu \xi^\nu) \quad (4.2.29)$$

类似地, 可以得到能动张量:

$$T_{\mu\nu} = -2\Pi_\mu^\lambda F_{\lambda\nu} + B_\mu A_\nu - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (4.2.30)$$

参考: 本人 25 年首考后写的笔记 [4](很惭愧, 现在尝试重新推导的时候卡了好久... 无奈看了当时的笔记才推出来, 真是奇怪, 明明当时也是我自己推出来的, 怎么现在一点都推不出来了呢 ==).

### 4.3 哈密顿量

**定义 4.4 (共轭动量)** 共轭动量

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (4.3.1)$$

做 Legendre 变换, 有 Hamiltonian:

$$H(\phi, \Pi, \nabla \phi) = \int d^3x \Pi \dot{\phi} - L = \int d^3x (\Pi \dot{\phi} - \mathcal{L}) \quad (4.3.2)$$

定义 Hamiltonian 密度:

$$\mathcal{H}(\phi, \Pi, \nabla \phi) = \Pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (4.3.3)$$

定义 Poisson 括号  $\{, \} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\{F, G\} = \int d^3x \left( \frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \frac{\delta G}{\delta \Pi(y)} - \frac{\delta G}{\delta \phi(y)} \frac{\delta F}{\delta \Pi(x)} \right) \quad (4.3.4)$$

**例 4.6**

$$\{\phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{y})\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.3.5)$$

**证明.** 设  $F = \phi(\mathbf{x}), G = \Pi(\mathbf{y})$ , 则

$$\frac{\delta F}{\delta \phi(x)} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \frac{\delta F}{\delta \Pi(x)} = 0 \quad (4.3.6)$$

$$\frac{\delta G}{\delta \phi(x)} = 0, \quad \frac{\delta G}{\delta \Pi(x)} = \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}') \quad (4.3.7)$$

代入 Poisson 括号定义, 有

$$\{\phi(\mathbf{x}), \Pi(\mathbf{y})\} = \int d^3x' (\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}') - 0) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.3.8)$$

**定理 4.4 (哈密顿正则方程)**

$$\begin{cases} \dot{\phi}(\mathbf{x}) = \{\phi_{\mathbf{x}}, H\} = \frac{\delta H}{\delta \Pi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} \\ \dot{\Pi}(\mathbf{x}) = \{\Pi_{\mathbf{x}}, H\} = -\frac{\delta H}{\delta \phi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\phi_i)} \end{cases} \quad (4.3.9)$$

证明.

$$\begin{aligned}\delta H &= \int d^3x \left( \delta \Pi_{\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{x}} + \Pi_{\mathbf{x}} \delta \dot{\phi}_{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \Pi_{\mathbf{x}} \delta \dot{\phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i \right) \\ &= \int d^3x \left( \delta \Pi_{\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i \right)\end{aligned}\quad (4.3.10)$$

分部积分并消去边缘项有:

$$\delta H = \int d^3x \left( \delta \Pi_{\mathbf{x}} \dot{\phi}_{\mathbf{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi \right) \quad (4.3.11)$$

于是可得:

$$\begin{cases} \dot{\phi}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi} \\ \dot{\Pi}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\phi_i)} \end{cases} \quad (4.3.12)$$

讨论: 在转换到 Hamilton 力学的过程中, Legendre 变换给予了  $\dot{\phi}$  特殊的地位, 使得我们选定的参考系的时间轴  $t$  具有了特殊的地位, 因此破坏了洛伦兹协变性.

## 5 二次量子化

二次量子化是将场 (如电磁场、电子场) 本身进行量子化的框架, 它将描述单粒子概率幅的经典场提升为场算符, 其激发则对应粒子的产生与湮灭, 从而自然地描述了粒子数可变的多粒子系统. 相比之下, 一次量子化中粒子是给定的, 其运动 (波函数) 是量子的.

### 5.1 自由实标量场的量子化

1. 写下 Lagrangian
2. 得到 Hamiltonian
3. 做正则变换解耦
4. 施加量子化条件
5. 得到产生湮灭算符
6. 得到场方程

注: 这里流程没按周洋讲的来, 因为我略微感觉他那样子做有一点点奇怪, 有些地方存在神秘的天降系数, 按照这样从 Lagrangian 出发的流程会更清晰一些. 写下 Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.1.1)$$

我们有 EoM:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (5.1.2)$$

或者写成

$$(\square + m^2) \phi = 0 \quad (5.1.3)$$

并有色散关系:

$$\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (5.1.4)$$

满足这个关系的称为 on-shell.

得到 Hamiltonian:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\pi^2 + m^2 \phi^2 + (\nabla \phi)^2) \quad (5.1.5)$$

做正则变换, 有母函数

$$U = - \int \Pi(\mathbf{k}) \pi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x d^3k \quad (5.1.6)$$

因此

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \Phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k \quad (5.1.7)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Pi_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3k \quad (5.1.8)$$

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x \quad (5.1.9)$$

$$\Pi_{\mathbf{k}} = \int \pi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x \quad (5.1.10)$$

并且有:

$$\Phi_{\mathbf{k}}^\dagger = \Phi_{-\mathbf{k}}, \quad \Pi_{\mathbf{k}}^\dagger = \Pi_{-\mathbf{k}} \quad (5.1.11)$$

可以得到解耦后的 **Hamiltonian**:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \Pi_{\mathbf{k}} \Pi_{-\mathbf{k}} + (2\pi)^3 \omega^2 \Phi_{\mathbf{k}} \Phi_{-\mathbf{k}} \right) \quad (5.1.12)$$

其中  $\omega^2 = m^2 + k^2$

添加量子化条件:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.1.13)$$

于是有:

$$[\Phi_{\mathbf{k}}, \Pi_{\mathbf{p}}] = i\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \quad (5.1.14)$$

令:

$$a_{\mathbf{k}} = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \Phi_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\omega} \frac{1}{(2\pi)^3} \Pi_{\mathbf{k}}^\dagger \right) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3x e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\omega \phi + i\pi) \quad (5.1.15)$$

$$a_{\mathbf{k}}^\dagger = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \Phi_{\mathbf{k}}^\dagger - \frac{i}{\omega} \frac{1}{(2\pi)^3} \Pi_{\mathbf{k}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\omega \phi - i\pi) \quad (5.1.16)$$

有对易子:

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \quad (5.1.17)$$

更准确地说, 对于  $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger]$ :

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger] = \mathcal{V} \quad (5.1.18)$$

$\mathcal{V}$  为系统的总体积.

于是 **Hamiltonian** 可以被对角化:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \mathcal{V}) \quad (5.1.19)$$

**Fourier** 逆变换可以得到:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (5.1.20)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}) \quad (5.1.21)$$

最后利用时间演化算符得到场方程:

$$\phi(x) = e^{iHt} \phi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} + a_{\mathbf{p}} e^{-ipx}) \quad (5.1.22)$$

$$\pi(x) = e^{iHt} \pi(\mathbf{x}) e^{-iHt} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} - a_{\mathbf{p}} e^{-ipx}) \quad (5.1.23)$$

我们可以计算所谓的真空零点能密度:

$$\frac{\langle 0 | H | 0 \rangle}{\mathcal{V}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{2} = +\infty \quad (5.1.24)$$

我们还可以定义动量算子:

$$P^i = \int \partial^0 \phi \partial^i \pi d^3x = - \int \phi_t \phi_i d^3x \quad (5.1.25)$$

即:

$$\mathbf{P} = - \int \phi_t \nabla \phi d^3x \quad (5.1.26)$$

$$= - \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{i\omega_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} - a_{\mathbf{p}} e^{-ipx}) \quad (5.1.27)$$

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{i\mathbf{q}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} (-a_{\mathbf{q}}^\dagger e^{iqx} + a_{\mathbf{q}} e^{-iqx}) \quad (5.1.28)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{p}\omega_{\mathbf{p}}}{2\omega_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger) \quad (5.1.29)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (5.1.30)$$

这里需要补充一点:

**定理 5.1 (Lorentz 不变的体元)**

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \quad (5.1.31)$$

是一个 Lorentz 不变量

**证明.** 考虑

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Theta(p^0) 2\pi \delta(p^2 - m^2) \quad (5.1.32)$$

可以发现其等于

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} \quad (5.1.33)$$

然后我们就可以定义真空态以及 Fock 空间:

**定义 5.1 (真空态)** 真空态  $|0\rangle$  满足

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{p} \quad (5.1.34)$$

**定义 5.2 (Fock 空间)** Fock 空间为

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1} \mathcal{H}_n \quad (5.1.35)$$

其中  $\mathcal{H}_n$  为  $n$  粒子空间, 即:

$$\mathcal{H}_n = \text{span}\{a_{\mathbf{p}_1}^\dagger a_{\mathbf{p}_2}^\dagger \cdots a_{\mathbf{p}_n}^\dagger |0\rangle \mid \forall \mathbf{p}_i\} \quad (5.1.36)$$

接下来我们检查自由标量场的二次量子化结果与我们的经典一次量子化结果相一致.

**定义 5.3 (动量本征态)**

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle \quad (5.1.37)$$

$$|\mathbf{p}\mathbf{q}\rangle = \sqrt{4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle \quad (5.1.38)$$

我们不难验证:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = 2\omega_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (5.1.39)$$

$$\langle \mathbf{p}'\mathbf{q}' | \mathbf{p}\mathbf{q} \rangle = 4\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{q}} (2\pi)^6 (\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') + \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{q})\delta^3(\mathbf{q}' - \mathbf{p})) \quad (5.1.40)$$

$$\mathbf{P} |\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \quad (5.1.41)$$

**定义 5.4 (位置本征态)** 定义位置产生算符:

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} \quad (5.1.42)$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} \quad (5.1.43)$$

以及位置本征态

$$|\mathbf{x}\rangle = \psi^\dagger(x) |0\rangle \quad (5.1.44)$$

我们可以发现:

$$|\mathbf{x}\rangle = \psi^\dagger(x) |0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ipx} |\mathbf{p}\rangle \quad (5.1.45)$$

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{x} \rangle = e^{ipx} \quad (5.1.46)$$

可以发现与我们在 QM 里学的一致.



## 5.2 自由复标量场量子化

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - m^2 \psi^* \psi \quad (5.2.1)$$

其中  $\psi = \phi_1 + i\phi_2$

$$\pi^\mu = \partial^\mu \psi^* \quad (5.2.2)$$

$$\pi = \pi^0 = \partial^0 \psi^* = \partial_0 \psi^* \quad (5.2.3)$$

正则变换:

$$\begin{cases} \Psi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \psi_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ \Pi_{\mathbf{k}} = \int d^3x \pi_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.2.4)$$

于是得到:

$$H = \int d^3k \left( \frac{1}{(2\pi)^3} \Pi_{-\mathbf{k}}^\dagger \Pi_{\mathbf{k}} + (2\pi)^3 \omega_{\mathbf{p}}^2 \Psi_{-\mathbf{k}}^\dagger \Psi_{\mathbf{k}} \right) \quad (5.2.5)$$

添加正则量子化条件:

$$[\psi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad [\psi_{\mathbf{x}}, \psi_{\mathbf{y}}] = [\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}] = 0 \quad (5.2.6)$$

于是我们得到:

$$[\Psi_{\mathbf{p}}, \Pi_{\mathbf{q}}] = [\Psi_{\mathbf{p}}^\dagger, \Pi_{\mathbf{q}}^\dagger] = i\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [\Psi_{\mathbf{p}}, \Psi_{\mathbf{q}}] = [\Pi_{\mathbf{p}}, \Pi_{\mathbf{q}}] = 0 \quad (5.2.7)$$

设

$$a_{\mathbf{p}} = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left( \Psi_{\mathbf{p}} + \frac{i}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{p}}} \Pi_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{ipx} (\omega_{\mathbf{p}} \psi + i\pi^\dagger) \quad (5.2.8)$$

$$b_{\mathbf{p}} = (2\pi)^3 \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \left( \Psi_{-\mathbf{p}}^\dagger + \frac{i}{(2\pi)^3 \omega_{\mathbf{p}}} \Pi_{\mathbf{p}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \int d^3x e^{-ipx} (\omega_{\mathbf{p}} \psi^\dagger + i\pi) \quad (5.2.9)$$

我们有:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \quad (5.2.10)$$

$$[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}] = [b_{\mathbf{p}}^\dagger, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = 0 \quad (5.2.11)$$

然后可以对角化 Hamiltonian

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} + \mathcal{V}) \quad (5.2.12)$$

然后有:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) \quad (5.2.13)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} i \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} - b_{\mathbf{p}} e^{-ipx}) \quad (5.2.14)$$

例4.3指出复标量场的  $U(1)$  对称性导致有守恒荷  $Q$

$$Q \equiv \int d^3x J_N^0 = \int d^3x i [(\partial^0 \psi^\dagger) \psi - (\partial^0 \psi) \psi^\dagger] \quad (5.2.15)$$

经过计算我们可以得到:

$$Q_N = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}) \quad (5.2.16)$$

讨论: 复标量场是双自由度的, 因此它有两个产生湮灭算子  $a, b$ .  $a, b$  分别代表正粒子和反粒子的运动模式. 而从其的  $U(1)$  对称性导出的守恒量中可以得出结论, 正粒子与反粒子数目之差为常数.

## 5.3 两点关联函数

定义 5.5 (关联函数  $D(x - y)$  [5])

$$D(x - y) \equiv \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (5.3.1)$$

计算可得:

### 定理 5.2

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{q}}}} e^{iqy-ipx} \langle 0|a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{q}}^\dagger|0\rangle \quad (5.3.2)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \quad (5.3.3)$$

可以发现, 这是一个 Lorentz 不变量 (更准确来说, 是  $\mathcal{P} \times \text{SO}(1, 3)$  的不变量, 由于存在  $\Theta$  它不能在  $\mathcal{T}$  下不变).

讨论: 两点关联函数的意义是什么? 不难证明这就是上一节中的  $\langle x|y\rangle$ , 也就是说, 它表示在时空点  $y$  处 (假设  $y$  更早发生) 激发一个粒子, 在时空点  $x$  处测量到它的概率密度.

我们分类讨论类时、类空间隔的关联函数  $D(x-y)$ :

类时: 我们不妨假设  $x^0 > y^0$ , 那么我们可以做 Lorentz 变换, 使得  $\mathbf{x}' = \mathbf{y}' = 0$ . 设  $t = x'^0 - y'^0$ , 则:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t'} = \int_m^{+\infty} \sqrt{\omega^2 - m^2} e^{-i\omega t'} \frac{d\omega}{(2\pi)^2} \quad (5.3.4)$$

对于  $t' \rightarrow +\infty$

$$D(x-y) \sim e^{-imt'} \quad (5.3.5)$$

类空: 我们可以做 Lorentz 变换, 使得  $x^0 = y^0 = 0$ , 并设  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ , 则:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \quad (5.3.6)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \int_0^\pi e^{ipr \cos \theta} \sin \theta d\theta \quad (5.3.7)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{-i}{2(2\pi)^2} \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{r} \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (5.3.8)$$

$$= -\frac{i}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} e^{ipr} dp \quad (5.3.9)$$

注意到,  $p = \pm im$  是被积分函数的两个支点, 于是将积分路径改为图5.1中沿着上半部分支割线的路径. 然后可得:

$$D(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^2 r} \int_m^{+\infty} \frac{\omega e^{-\omega r}}{\sqrt{\omega^2 - m^2}} d\omega \quad (5.3.10)$$

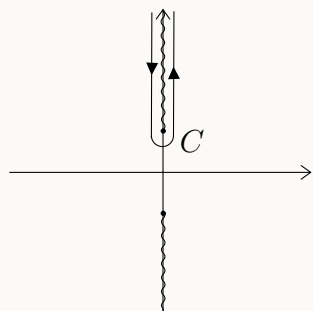


图 5.1:  $f(p) = \frac{p}{\sqrt{p^2+m^2}}e^{ipr}$

对于  $r \rightarrow +\infty$

$$D(x-y) \sim e^{-mr} \quad (5.3.11)$$

我们发现,即使是类空间隔,  $D(x-y)$  仍不为 0, 这说明  $\phi(x), \phi(y)$  在空间中存在重叠 (overlap).

讨论: 类空间隔的关联函数非零能说明这违反了因果律吗? 并不能, 因为所谓的因果律需要是指类空间隔的测量之间互相不影响, 也就是说交换这两个算子作用在态上的顺序不会影响结果. 这暗示我们或许应当计算两个算符的对易子来检验我们的理论是否违背了因果律, 而最直接的检验就是计算  $[\phi(x), \phi(y)]$ .

因此我们考虑  $\phi(x), \phi(y)$  的对易子:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = D(x-y) - D(y-x) \quad (5.3.12)$$

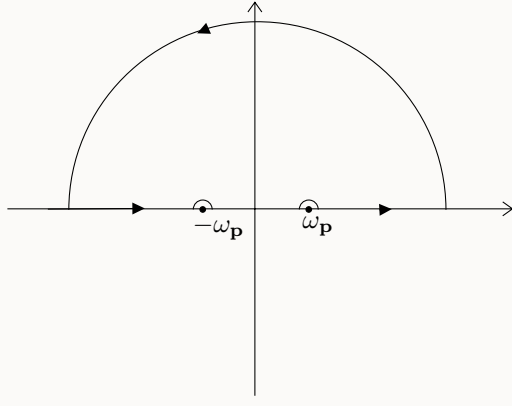
再次尝试对类时类空间隔分类讨论:

类空: 首先将换参考系, 使得  $x, y$  在同一三维空间中, 然后利用 **Parity** 算符  $\mathcal{P}$ , 显然可以使得  $D(x-y) \rightarrow D(y-x)$ , 而  $\mathcal{P}$  操作不会改变结果, 于是我们有:

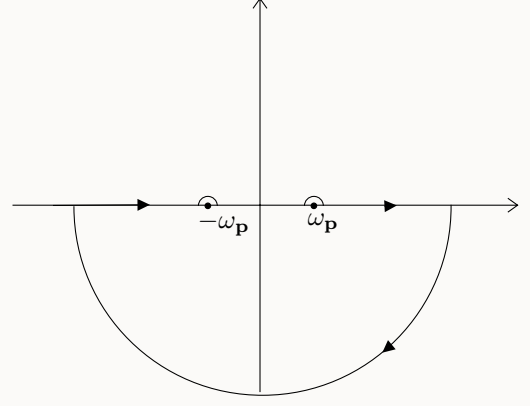
$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad (5.3.13)$$

类时: 由于  $[\phi(x), \phi(y)]$  不在  $\mathcal{T}$  中保持不变, 因此我们无法如类空般做到交换  $x, y$ , 因此我们不能得到  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ .

可以发现, 对易子对类空间隔一定为 0 而对类时间隔则不一定, 这正是我们想要的因果性!



(a)  $x^0 < y^0$  的围道



(b)  $x^0 > y^0$  的围道

图 5.2:  $D_R(x - y)$  围道示意图

然后我们尝试进一步计算对易子

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x - y) - D(y - x) \quad (5.3.14)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} (e^{-ip(x-y)} - e^{ip(x-y)}) \quad (5.3.15)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip(x-y)} + \frac{1}{-2\omega_p} e^{ip(x-y)} \right) \quad (5.3.16)$$

注意到对第二项做  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  换元结果不变, 于是:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \left( \frac{e^{-i\omega_p(x^0 - y^0)}}{2\omega_p} + \frac{e^{i\omega_p(x^0 - y^0)}}{-2\omega_p} \right) \quad (5.3.17)$$

观察这个形式, 令我们想到留数定理, 这两项就是留数的相加, 我们可以将其化为:

$$\frac{e^{-i\omega_p(x^0 - y^0)}}{2\omega_p} + \frac{e^{i\omega_p(x^0 - y^0)}}{-2\omega_p} = \frac{1}{-2\pi i} (-2\pi i \text{Res}(\dots) - 2\pi i \text{Res}(\dots)) \quad (5.3.18)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega(x^0 - y^0)}}{(\omega + \omega_{\mathbf{p}})(\omega - \omega_{\mathbf{p}})} \quad (5.3.19)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_C d\omega \frac{e^{-i\omega(x^0 - y^0)}}{\omega^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \quad (5.3.20)$$

$$= \int_C \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-i\omega(x^0 - y^0)} \quad (5.3.21)$$

为了让大圆弧不会对积分结果产生贡献, 对于  $x^0 < y^0$  我们取围道如图5.2b; 对于  $x^0 > y^0$  我们取围道: 5.2b

于是我们可以定义新的关联函数

**定理 5.3 (推迟关联函数  $D_R(x - y)$ )** 取围道  $C$  如图5.2

$$D_R(x - y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (5.3.22)$$

或者等价于取一个无穷小正数  $\epsilon$ :

$$D_R(x - y) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p + i\epsilon)^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (5.3.23)$$

不难发现, 对于  $x^0 < y^0$ , 围道内不含有任何 pole, 故  $D_R(x - y) = 0$ , 而对于  $x^0 > y^0$ , 围道内含有 pole, 故  $D_R(x - y) = D(x - y) - D(y - x)$

于是我们发现

$$D_R(x - y) = \Theta(x^0 - y^0) [\phi(x), \phi(y)] \quad (5.3.24)$$

这令人想起电动力学中我们学过的推迟势, 故而得名.

类似地, 我们可以定义提前关联函数

**定理 5.4 (提前关联函数  $D_A(x - y)$ )** 取围道  $C$  如图5.3

$$D_A(x - y) \equiv \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (5.3.25)$$

或者等价于取一个无穷小正数  $\epsilon$ :

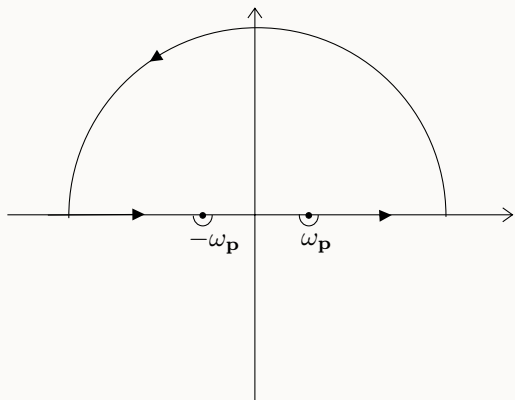
$$D_A(x - y) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p - i\epsilon)^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (5.3.26)$$

我们可以发现:

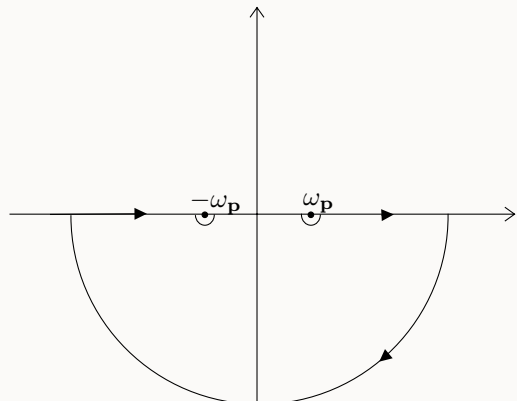
$$D_A(x - y) = -\Theta(y^0 - x^0) [\phi(x), \phi(y)] \quad (5.3.27)$$

这正与电动力学中所谓的提前势相对应.

此外, 我们还有两种取围道的方式, 由此定义两种关联函数, 也就是所谓的 Feynman 传播子.

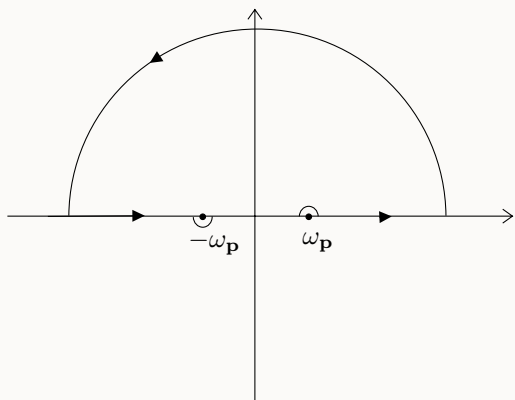


(a)  $x^0 < y^0$  的围道

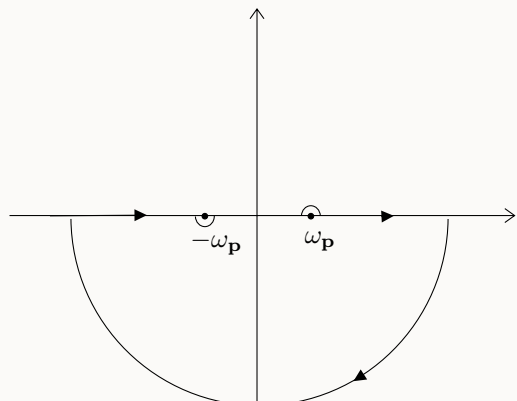


(b)  $x^0 > y^0$  的围道

图 5.3:  $D_A(x - y)$  围道示意图

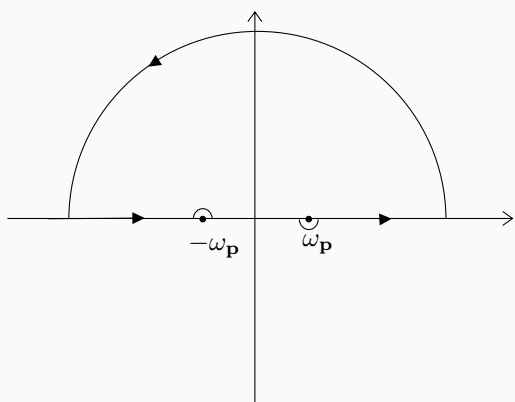


(a)  $x^0 < y^0$  的围道

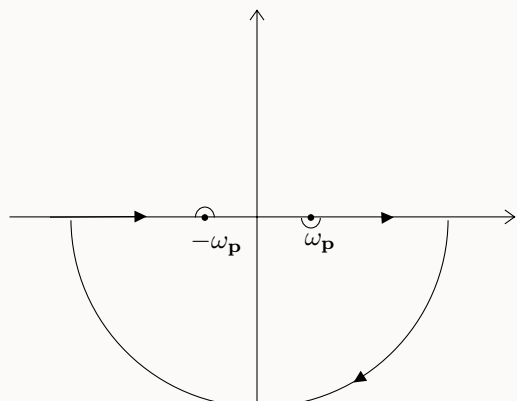


(b)  $x^0 > y^0$  的围道

图 5.4:  $D_F(x - y)$  围道示意图



(a)  $x^0 < y^0$  的围道



(b)  $x^0 > y^0$  的围道

图 5.5:  $\tilde{D}_F(x - y)$  围道示意图

**定理 5.5 (Feynman 传播子  $D_F(x-y)$ )** 取围道  $C$  如图 5.4

$$D_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (5.3.28)$$

或者等价于取一个无穷小正数  $\epsilon$ :

$$D_F(x-y) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (5.3.29)$$

**定理 5.6 (共轭 Feynman 传播子  $\tilde{D}_F(x-y)$ )** 取围道  $C$  如图 5.5

$$\tilde{D}_F(x-y) \equiv \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (5.3.30)$$

或者等价于取一个无穷小正数  $\epsilon$ :

$$\tilde{D}_F(x-y) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (5.3.31)$$

不难发现, 对于  $x^0 < y^0$  或者  $x^0 > y^0$ , 这俩关联函数都存在一个 pole, 并且可以计算发现:

$$D_F(x-y) = \Theta(x^0 - y^0) D(x-y) + \Theta(y^0 - x^0) D(y-x) \quad (5.3.32)$$

$$= \Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \quad (5.3.33)$$

$$= \langle 0 | \mathcal{T} \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (5.3.34)$$

$$\tilde{D}_F(x-y) = -\Theta(x^0 - y^0) D(x-y) - \Theta(y^0 - x^0) D(y-x) \quad (5.3.35)$$

$$= -\Theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle - \Theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \quad (5.3.36)$$

$$= -\langle 0 | \mathcal{T} \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (5.3.37)$$

其中  $\mathcal{T}$  为时间顺序算符

**定义 5.6 (时间顺序算符  $\mathcal{T}$ )** 对于一串  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的算符, 时间顺序算符即起到排序作用, 将时间上在后面发生的算符放在左边, 时间上在前面发生的算符放在右边, 相当于一个冒泡排序.



注意: 从(5.3.18)到(5.3.21)只有在一定条件下取正确的围道才成立, 并不能认为是一个任何条件下都恒等的关系. 它的作用在于启发性地导出传播子  $\frac{i}{p^2-m^2}$ , 并由此根据不同的围道取法定义出四种不同的关联函数. 因此(5.3.22)、(5.3.25)、(5.3.28)、(5.3.30)并不能视为是从(5.3.21)直接推导得到的.

**定理 5.7 (关联函数的性质)** 这四个关联函数  $D_R(x-y)$ ,  $D_A(x-y)$ ,  $D_F(x-y)$ ,  $\tilde{D}_F(x-y)$  都是 EoM 的 Green 函数, 即:

$$\begin{aligned}(\square + m^2)D_R(x-y) &= -i\delta^4(x-y) \\(\square + m^2)D_A(x-y) &= -i\delta^4(x-y) \\(\square + m^2)D_F(x-y) &= -i\delta^4(x-y) \\(\square + m^2)\tilde{D}_F(x-y) &= -i\delta^4(x-y)\end{aligned}\tag{5.3.38}$$

而  $D(x-y)$  则没有这个性质.

**证明.** 记这四种中的某个关联函数为  $D_X(x-y)$  我们从定义出发

$$D_X(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)}\tag{5.3.39}$$

因此

$$\square D_X(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} (-p^2) e^{-ip(x-y)}\tag{5.3.40}$$

$$m^2 D_X(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} (m^2) e^{-ip(x-y)}\tag{5.3.41}$$

直接相加, 利用(2.2.2)即得:

$$(\square + m^2)D_X(x-y) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} = -i\delta^4(x-y)\tag{5.3.42}$$

而对于  $D(x-y)$

$$(\square + m^2)D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} (p^2 + m^2) e^{-ip(x-y)}\tag{5.3.43}$$

$$= m^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} e^{-ip(x-y)} \neq -i\delta^4(x-y)\tag{5.3.44}$$

讨论: 这些传播子在经典场论中对应的就是 EoM 的 Green 函数, 这就说明了它们的物理意义正是标量粒子的传播. 而  $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  则暗示着在 qft 中它的传播是 off-shell 的, 存在不满足色散关系的所谓”内线”粒子. 反之, 若考虑满足色散关系的实粒子, 则我们需要在  $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$  后加上  $\Theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)$ , 或者使用三维体元  $\frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p}$  以使其 on-shell.

## 5.4 Wick 定理

**定义 5.7 ( $\mathcal{N}$  算符)**  $\mathcal{N}$  算符可以将输入它的一串  $a_p, a_p^\dagger$  强行变成  $a_p^\dagger$  在前  $a_p$  在后的顺序. 例如:

$$\mathcal{N} \{a_p a_p^\dagger a_q a_k^\dagger\} = a_p^\dagger a_k^\dagger a_q a_p \quad (5.4.1)$$

**定义 5.8 (Wick 收缩 (Wick contract))**

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv D_F(x - y) \quad (5.4.2)$$

**定理 5.8 (Wick 定理)**

$$\mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)] = \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) + \text{所有的 Wick 收缩}\} \quad (5.4.3)$$

其中, 所谓的”所有的 Wick”收缩指, 任意的一对两两收缩、任意的两对两两收缩、任意的三对两两收缩等等等

比如对于  $n = 4$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)] = & \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \\ & + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\phi(x_3)\phi(x_4) + \overline{\phi(x_1)\phi(x_3)}\phi(x_2)\phi(x_4) \\ & + \overline{\phi(x_1)\phi(x_4)}\phi(x_2)\phi(x_3) + \overline{\phi(x_2)\phi(x_3)}\phi(x_1)\phi(x_4) \\ & + \overline{\phi(x_2)\phi(x_4)}\phi(x_1)\phi(x_3) + \overline{\phi(x_3)\phi(x_4)}\phi(x_1)\phi(x_2) \\ & + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)} \cdot \overline{\phi(x_3)\phi(x_4)} + \overline{\phi(x_1)\phi(x_3)} \cdot \overline{\phi(x_2)\phi(x_4)} \\ & + \overline{\phi(x_1)\phi(x_4)} \cdot \overline{\phi(x_2)\phi(x_3)}\} \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

**证明.**

**引理 5.9**  $\mathcal{N}$  算符可以与  $[\cdot, \cdot]$  换序:

$$[a_{\mathbf{p}}, N(\cdots)] = N([a_{\mathbf{p}}, \cdots]) \quad (5.4.5)$$

**引理 5.10** 对于  $x^0 > y^0$

$$[\psi(x), \phi(y)] = [\psi(x), \psi^\dagger(y)] = D(x - y) = D_F(x - y) \quad (5.4.6)$$

不妨假设  $x_1^0 \geq x_2^0 \geq x_3^0 \geq \cdots x_n^0$  首先, 对于  $n = 2$ :

$$\mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)] = \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2) + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)}\} \quad (5.4.7)$$

显然成立.

考虑数学归纳法, 若对  $n = k - 1$  成立, 则对  $n = k$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_k)] &= \phi(x_1) [\phi(x_2)\phi(x_3)\cdots\phi(x_k)] \\ &= (\psi(x_1) + \psi^\dagger(x_1))\mathcal{N}\{\phi(x_2)\phi(x_3)\cdots\phi(x_k) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩}\} \\ &= \mathcal{N}\{\psi^\dagger(x_1)(\phi(x_2)\phi(x_3)\cdots\phi(x_k) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩})\} \\ &\quad + \mathcal{N}\{(\phi(x_2)\phi(x_3)\cdots\phi(x_k) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩})\psi(x_1)\} + [\psi(x_1), \mathcal{N}\{\cdots\}] \\ &= \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\cdots\phi(x_k) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩}\} + \mathcal{N}\{[\psi(x_1), \cdots]\} \\ &= \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\cdots\phi(x_k) + \text{所有的}(k-1)\text{Wick 收缩}\} \\ &\quad + \mathcal{N}\{\text{与}\psi(x_1)\text{收缩后的所有}(k-1)\text{Wick 收缩}\} \end{aligned}$$

最终我们合并得到:

$$\mathcal{T}[\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_k)] = \mathcal{N}\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\cdots\phi(x_k) + \text{所有的}k\text{Wick 收缩}\} \quad (5.4.8)$$

于是根据归纳公理我们证明得到了 Wick 定理.

最后补充一点, 对于 Wick 定理的证明, 我们并没有利用到任何 Free Field 的性质, 因此 Wick 定理也是可以适用于接下来的 Interaction Theory 的.

## 6 相互作用理论

在之前我们研究的都是线性没有相互作用的场论, Free Theory. 但是在自然界中, 总是存在粒子与粒子间的相互作用的, 这反映在 Lagrangian 上就是非二次项的出现. 这是得我们的方程不再是线性的波动方程, 不能再和我们二次量子化中的标准流程一样进行简正模的分解来获得最终结果了 (悲). 为了能够将我们的理论拓展到相互作用上, Richard Feynman 利用微扰展开, 通过 Feynman 规则 & Feynman 图, 给予了我们的理论通过渐近展开处理相互作用的能力.

而在本节中, 我们将考虑标量场的  $\phi^3$  理论, 即

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g}{3!}\phi^3 \quad (6.0.1)$$

其中  $\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{3!}\phi^3$  为微扰的相互作用项.

### 6.1 Feynman 黄金规则

Feynman 黄金规则, 在于给予 S 矩阵元实际的物理观测效应, 也就是利用 S 矩阵得到物理的散射截面、衰变率等可观测量.

而所谓 S 算符, 其实也就是时间演化算符, 它和两个粒子态的缩并就是 S 矩阵的元素  $\langle f|S|i\rangle$ , 它的物理意义就是描述了初态  $|i\rangle$  经过时间演化, 处于终态  $|f\rangle$  的概率.

#### 定义 6.1 (S 算符)

$$S = e^{\int_{-\infty}^{+\infty} -iH dt} \quad (6.1.1)$$

于是

$$\langle f, t = +\infty | i, t = -\infty \rangle = \langle f | S | i \rangle = S_{fi} \quad (6.1.2)$$

其中终态  $|f\rangle$ , 初态  $|i\rangle$  都为渐近自由态 (Asymptotic State).

**定义 6.2 (渐近自由态 (Asymptotic State))** 在  $t = +\infty, -\infty$  时在无穷远处没有互相作用的粒子即为渐近自由态. 因而渐近自由态是 on-shell 的, 并且可以利用 Free Theory 处理, 直接将  $a_p^\dagger$  作用于  $|0\rangle$  即可.

然后对于微扰理论来说,  $S$  应当非常接近 1, 互相作用项都是微扰, 因此

$$S = 1 + iT \quad (6.1.3)$$

(请不要和编时算符  $\mathcal{T}$ ) 混淆.

并且定义散射振幅  $\mathcal{M}$

**定义 6.3 (散射振幅  $\mathcal{M}$ )**

$$iT_{fi} = \langle f|i\mathcal{T}|i\rangle = i(2\pi)^4\delta^4\left(\sum p\right)\mathcal{M}_{if} \quad (6.1.4)$$

于是

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|(1 + iT)|i\rangle = i(2\pi)^4\delta^4\left(\sum p\right)\mathcal{M}_{if} \quad (6.1.5)$$

**定义 6.4 (散射截面  $\sigma$ )** 考虑  $2 \rightarrow n$  散射, 对于某个终态, 其微分散射截面定义为

$$\Phi d\sigma = \frac{N}{T} \quad (6.1.6)$$

其中,  $\Phi = \sum_v nv$  为粒子通量 (flux),  $N$  为经过时间  $T$  后以此状态出射的粒子数

并且对于单色粒子流  $\Phi = \frac{N_{inc}v}{V}$ , 其中  $V$  为系统体积

**定义 6.5** 到某个散射态的概率

$$dP = \frac{N}{N_{inc}} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} \quad (6.1.7)$$

其中  $N_{inc}$  为入射粒子数.

根据定义 6.5 我们发现, 公式左边有  $d$  而右边没有, 非常不方便且丑陋, 于是我们利用这个 **trick**:

$$\delta^3(0)d^3p = 1 \quad (6.1.8)$$

于是

**定理 6.1**

$$dP = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} \prod_{i \in f} \delta^3(0)d^3p_i = \frac{|\langle f|S|i\rangle|^2}{\langle f|f\rangle\langle i|i\rangle} \prod_{i \in f} \frac{V}{(2\pi)^3}d^3p_i \quad (6.1.9)$$

其中, 利用了式(2.2.2):

$$\delta^3(0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \quad (6.1.10)$$

同样利用式(2.2.2)我们有,

$$\langle f|f \rangle = \prod_{i \in f} 2E_i \delta^3(0) = \prod_{i \in f} 2E_i \mathcal{V} \quad (6.1.11)$$

于是, 我们有

$$dP = \frac{|\langle f|S|i \rangle|^2}{\langle f|f \rangle \langle i|i \rangle} \prod_f \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d^3p_f \quad (6.1.12)$$

$$= |\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)|^2 \prod_i \frac{1}{2E_i \mathcal{V}} \prod_f \frac{1}{2E_f \mathcal{V}} \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} d^3p_f \quad (6.1.13)$$

$$= |\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p)|^2 \prod_i \frac{1}{2E_i \mathcal{V}} \prod_f \frac{d^3p_f}{2E_f (2\pi)^3} \quad (6.1.14)$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \mathcal{V} T |\mathcal{M}|^2 \prod_i \frac{1}{2E_i \mathcal{V}} \prod_f \frac{d^3p_f}{2E_f (2\pi)^3} \quad (6.1.15)$$

根据

$$d\sigma = \frac{N}{T\Phi} = \frac{N\mathcal{V}}{TN_{inc}v} = \frac{\mathcal{V}}{T} dP \quad (6.1.16)$$

最后我们得到散射截面的 Feynman 黄金规则

### 定理 6.2 (散射截面的 Feynman 黄金规则)

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} d\Pi_{LIPS} \quad (6.1.17)$$

其中  $d\Pi_{LIPS}$  为 Lorentz Invariance Phase Space,

$$d\Pi_{LIPS} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p) \prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \quad (6.1.18)$$

类似地, 我们定义衰变率

**定义 6.6 (衰变率  $\Gamma$ )** 考虑  $1 \rightarrow n$  散射, 对于某个终态, 其微分衰变率定义为

$$d\Gamma = \frac{dP}{T} \quad (6.1.19)$$

同样对于  $1 \rightarrow n$  散射, 我们可以计算得到

$$dP = T |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{2E} d\Pi_{LIPS} \quad (6.1.20)$$

最后得到衰变率的 Feynman 黄金规则

**定理 6.3 (衰变率的 Feynman 黄金规则)**

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E} d\Pi_{LIPS} \quad (6.1.21)$$

**例 6.1 ( $2 \rightarrow 2$  散射)** 在质心系下考虑  $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$  散射, 则

$$d\sigma = \int_{p_3} \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} (2\pi)^4 \delta^4 |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}_3}} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}_4}} \quad (6.1.22)$$

$$= \int_{p_4} \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} 2\pi \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2 \frac{p_4^2 dp_4 d\Omega}{(2\pi)^3 4E_3 E_4} \quad (6.1.23)$$

设  $E_1 + E_2 = E_{CM}$ , 并且根据

$$\delta(E_{CM} - E_3 - E_4) = \delta(p_4 - p_{40}) \frac{E_3 E_4}{p_3 p_4} = \delta(p_4 - p_{40}) \frac{E_3 E_4}{p_4^2} \quad (6.1.24)$$

我们有:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{1}{64E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} |\mathcal{M}|^2 \quad (6.1.25)$$

再根据

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|}{E_1} = |\mathbf{p}_i| \frac{E_{CM}}{E_1 E_2} \quad (6.1.26)$$

于是

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 E_{CM} |\mathbf{p}_i|} \quad (6.1.27)$$

**例 6.2 ( $1 \rightarrow 2$  衰变)** 在质心系下考虑质量为  $M$  的粒子衰变为质量分别为  $m_1, m_2$  的粒子,  $p \rightarrow p_1 + p_2$ .

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2M} \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \\ &\quad \times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) 2\pi \delta(M - E_1 - E_2) \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

于是

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2M} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \\ &\quad \times |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) 2\pi \delta(M - E_1 - E_2) \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

$$= \frac{1}{2M} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E^2} |\mathcal{M}|^2 2\pi \delta(M - 2E) \quad (6.1.30)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2 M} \int \frac{p^2 d\Omega dp}{E^2} |\mathcal{M}|^2 \delta(M - 2E) \quad (6.1.31)$$

$$= \frac{1}{32\pi^2 M} \int \frac{p^2 d\Omega}{E^2} |\mathcal{M}|^2 \delta(M - 2E) \frac{E}{2p} \quad (6.1.32)$$

$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{8\pi M^2} |\mathbf{p}| \quad (6.1.33)$$

其中,

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} = M \quad (6.1.34)$$

得到黄金规则之后, 那么我们接下来的任务就是计算散射振幅! 而在此之前, 我们需要两个重要的定理来作为预备.

## 6.2 Lehmann-Symanzik-Zimmermann 公式

有了 Feynman 黄金规则, 我们下一步就在于计算散射振幅  $\mathcal{M}$ . 而本节的核心就在于将位置空间的关联函数与动量空间中的散射振幅连接起来, 得出 LSZ 公式:

### 定理 6.4 (LSZ 公式)

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \int d^4x_1 i e^{-ip_1 x_1} (\square_1 + m^2) \cdots \int d^4x_n i e^{ip_n x_n} (\square_n + m^2) \langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle \quad (6.2.1)$$

其中, 对入射态用  $\int i e^{-ip_1 x_1} (\square + m^2)$ , 而对出射态用  $\int i e^{ip_1 x_1} (\square + m^2)$



为此, 我们尝试证明引理

### 引理 6.5

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}(+\infty) - a_{\mathbf{p}}(-\infty)] \quad (6.2.2)$$

**证明.** 将  $\square$  展开并分部积分有:

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = i \int d^4x e^{ipx} (\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \phi \quad (6.2.3)$$

$$= i \int d^4x e^{ipx} (\partial_t^2 + \mathbf{p}^2 + m^2) \phi \quad (6.2.4)$$

$$= i \int d^4x e^{ipx} (\partial_t^2 + \omega_{\mathbf{p}}^2) \phi \quad (6.2.5)$$

注意到, 如果是 **free theory**, 所有粒子都是 **on-shell** 的, 积分式就为 0. 但是对于 **interacting theory**, 事情就没这么简单了. 我们希望能类似 **free theory** 那样处理, 又该怎么办呢? 我们可以设法让这个积分只和  $t = \pm\infty$  的时候相关, 那这样子粒子之间相距无穷远, 互相之间没有 **interaction**, 那么自然就可以退化到 **free theory**, 利用 **free theory** 的产生湮灭算符来处理了.

于是我们尝试使用分布积分:

$$i \int d^4x e^{ipx} \partial_t^2 \phi = -i \int d^4x \partial_t e^{ipx} \partial_t \phi + i \int d^4x \partial_t [e^{ipx} \partial_t \phi] \quad (6.2.6)$$

$$= i \int d^4x \partial_t^2 e^{ipx} \phi - i \int d^4x \partial_t [\partial_t e^{ipx} \phi] + i \int d^4x \partial_t [e^{ipx} \partial_t \phi] \quad (6.2.7)$$

$$= i \int d^4x (-\omega_{\mathbf{p}}^2) e^{ipx} \phi - i \int d^4x \partial_t [\partial_t e^{ipx} \phi] + i \int d^4x \partial_t [e^{ipx} \partial_t \phi] \quad (6.2.8)$$

那么代回到原式中, 第一项正和我们在 **free theory** 中一样, 与  $+\omega_{\mathbf{p}}^2$  抵消了, 于是剩下

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = -i \int d^4x \partial_t [\partial_t e^{ipx} \phi] + i \int d^4x \partial_t [e^{ipx} \partial_t \phi] \quad (6.2.9)$$

将对  $t$  的积分专门拎出来, 我们有:

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = i \int d^3x e^{ipx} (\pi - i\omega_{\mathbf{p}} \phi) \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty} \quad (6.2.10)$$

因为内部的式子是在  $t = \pm\infty$  时求的, 所以我们可以直接利用 free theory 的  $\phi, \pi$  (即式(5.1.22), (5.1.23)) 进行计算, 最后我们可以得到

$$i \int d^4x e^{ipx} (\square + m^2) \phi = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}(+\infty) - a_{\mathbf{p}}(-\infty)] \quad (6.2.11)$$

将这个引理取共轭我们有:

$$-i \int d^4x e^{-ipx} (\square + m^2) \phi = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}^\dagger(+\infty) - a_{\mathbf{p}}^\dagger(-\infty)] \quad (6.2.12)$$

然后我们考虑计算  $\langle f, t = -\infty | i, t = +\infty \rangle$ ,

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \langle \Omega | \prod_{p \in f} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}(+\infty) \prod_{p \in i} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger(-\infty) | \Omega \rangle \quad (6.2.13)$$

$$= \langle \Omega | \mathcal{T} \left\{ \prod_{p \in f} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}(+\infty) \prod_{p \in i} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger(-\infty) \right\} | \Omega \rangle \quad (6.2.14)$$

插入时序算符  $\mathcal{T}$  后, 我们发现, 我们再添加  $a_{\mathbf{p}}(+\infty), a_{\mathbf{p}}^\dagger(-\infty)$  是不会影响结果的, 因为  $\mathcal{T}$  会将它们分别置于最左边和最右边, 然后和真空态缩并直接得到 0. 于是,

$$\begin{aligned} \langle f, +\infty | i, -\infty \rangle &= \langle \Omega | \mathcal{T} \prod_{p \in f} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}(+\infty) - a_{\mathbf{p}}(-\infty)] \\ &\quad \prod_{p \in i} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}^\dagger(-\infty) - a_{\mathbf{p}}^\dagger(+\infty)] | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \Omega | \mathcal{T} \prod i \int d^4x_f e^{ip_f x_f} (\square_f + m^2) \phi_f \\ &\quad \prod i \int d^4x_i e^{-ip_i x_i} (\square_i + m^2) \phi_i | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

于是我们最终得到了 LSZ 公式:

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \int d^4x_1 i e^{-ip_1 x_1} (\square_1 + m^2) \cdots \int d^4x_n i e^{ip_n x_n} (\square_n + m^2) \langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle \quad (6.2.17)$$

## 6.3 Schwinger-Dyson 定理

本节的核心在于通过为接下来微扰展开计算空间关联函数继而得到位置空间的 Feynman 规则做准备.

### 定理 6.6 (Schwinger-Dyson 定理)

$$(\square_x + m^2) \langle \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle = \langle (\square_x + m^2) \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle - i \sum_j \delta_{xj} \langle \phi_1 \cdots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \cdots \phi_n \rangle \quad (6.3.1)$$

**证明.** 首先考虑  $\partial_t^2 \mathcal{T} \{ \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \}$ . 我们不妨假设  $\phi_1, \phi_2 \cdots \phi_n$  是已经按先后顺序排列好的, 即  $t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n$ .

那么

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \{ \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} &= (\phi_x \phi_1 \cdots \phi_n) [\Theta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] \\ &\quad + (\phi_1 \phi_x \cdots \phi_n) [\Theta(t_1 - t) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

然后

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{T} \{ \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} &= \mathcal{T} \{ \partial_t \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} \\ &\quad + (\phi_x \phi_1 \cdots \phi_n) [\delta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] \\ &\quad - (\phi_1 \phi_x \cdots \phi_n) [\delta(t_1 - t) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{T} \{ \partial_t \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} \\ &\quad + ([\phi_x, \phi_1] \cdots \phi_n) [\delta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

$$= \mathcal{T} \{ \partial_t \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} \quad (6.3.5)$$

$$= \mathcal{T} \{ \pi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} \quad (6.3.6)$$

再次求导

$$\begin{aligned}\partial_t^2 \mathcal{T} \{ \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} &= \mathcal{T} \{ \partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} \\ &\quad + (\pi_x \phi_1 \cdots \phi_n) [\delta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] \\ &\quad - (\phi_1 \pi_x \cdots \phi_n) [\delta(t_1 - t) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots\end{aligned}\quad (6.3.7)$$

$$\begin{aligned}&= \mathcal{T} \{ \partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} \\ &\quad + ([\pi_x, \phi_1] \cdots \phi_n) [\delta(t - t_1) \Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots\end{aligned}\quad (6.3.8)$$

$$\begin{aligned}&= \mathcal{T} \{ \partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} \\ &\quad - i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \delta(t - t_1) (\cdots \phi_n) [\Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots\end{aligned}\quad (6.3.9)$$

$$\begin{aligned}&= \mathcal{T} \{ \partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} \\ &\quad - i \delta_{x1} (\cdots \phi_n) [\Theta(t - t_2) \cdots \Theta(t - t_n)] + \cdots\end{aligned}\quad (6.3.10)$$

$$\begin{aligned}&= \mathcal{T} \{ \partial_t^2 \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \} - i \sum_j \delta_{xj} \mathcal{T} \{ \phi_1 \cdots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \cdots \phi_n \}\end{aligned}\quad (6.3.11)$$

然后由于  $\nabla^2, m^2$  都作用不到只含  $t$  的  $\Theta$  上, 因此可以直接提入  $\langle \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle$  内, 于是我们最终得到

$$(\square_x + m^2) \langle \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle = \langle (\square_x + m^2) \phi_x \phi_1 \cdots \phi_n \rangle - i \sum_j \delta_{xj} \langle \phi_1 \cdots \phi_{j-1} \phi_{j+1} \cdots \phi_n \rangle\quad (6.3.12)$$

## 6.4 Feynman 规则, 启动!

目前, 所有的工具以及准备都已经摆在我们面前了, 我们还有什么理由停下来? **Feynman 规则, 启动!** (此时配合经典门酱表情)

### 6.4.1 位形空间的 Feynman 规则

我们以  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle$  为例, 继而导出位置空间的 Feynman 规则.

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = \int d^4x \delta_{1x} \langle \phi_x \phi_2 \rangle = \int d^4x i(\square_x + m^2) D_{1x} \langle \phi_x \phi_2 \rangle \quad (6.4.1)$$

$$= \int d^4x i D_{1x} (\square_x + m^2) \langle \phi_x \phi_2 \rangle \quad (6.4.2)$$

$$= \int d^4x \frac{ig}{2} D_{1x} \langle \phi_x^2 \phi_2 \rangle - i \delta_{x2} \cdot i D_{1x} \quad (6.4.3)$$

$$= D_{12} + \frac{ig}{2} \int d^4x D_{1x} \langle \phi_x^2 \phi_2 \rangle \quad (6.4.4)$$

而依葫芦画瓢我们有

$$\langle \phi_x^2 \phi_2 \rangle = \int d^4y i D_{y2} (\square_y + m^2) \langle \phi_x^2 \phi_y \rangle \quad (6.4.5)$$

$$= \frac{ig}{2} \int d^4y D_{2y} \langle \phi_x^2 \phi_y^2 \rangle - 2i \int d^4y \delta_{xy} i D_{y2} \langle \phi_x \rangle \quad (6.4.6)$$

$$= \frac{ig}{2} \int d^4y D_{2y} \langle \phi_x^2 \phi_y^2 \rangle + 2 D_{x2} \langle \phi_x \rangle \quad (6.4.7)$$

梅开三度

$$\langle \phi_x \rangle = \int d^4y i D_{yx} (\square_y + m^2) \langle \phi_y \rangle \quad (6.4.8)$$

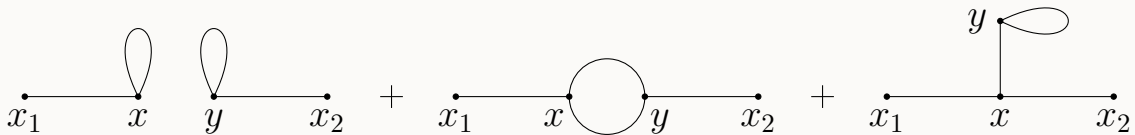
$$= \frac{ig}{2} \int d^4y D_{yx} \langle \phi_y^2 \rangle \quad (6.4.9)$$

于是最后整理得

$$\langle \phi_1 \phi_2 \rangle = D_{12} - \left(\frac{g}{2}\right)^2 \int d^4x d^4y (2 D_{1x} D_{xy} D_{xy} D_{y2} + D_{1x} D_{xx} D_{yy} D_{y2} + 2 D_{1x} D_{xy} D_{yy} D_{x2}) \quad (6.4.10)$$

我们可以用这个 fancy 的图来表示这些二阶贡献, 这就是 Feynman 图:

然后我们可以写下  $\phi^3$  理论在位形空间的 Feynman 规则



1. 标出所有外点
2. 标出所有内点, 一个内点写一个  $\frac{ig}{3!} \int d^4x$
3. 对所有的内线 (位形空间 Feynman 图只有内线), 写下 Feynman 传播子  $D_{ij}$ , 其中  $i, j$  为内线连接的两点
4. 乘以对称数目

对称数目的计算我们可以以图6.1为例来讨论 [8].

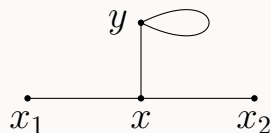


图 6.1: 一张 Feynman 图的例子

具体来说, 我们写下

$$\langle \phi_x \phi_x \phi_x \phi_y \phi_y \phi_y \rangle \quad (6.4.11)$$

$x$  有  $A_3^2 = 6$  种选择来分别连接  $x_1, x_2$ , 然后  $y$  有 3 种选择连接  $x$ , 于是总共的对称数目为 18, 乘以  $\frac{1}{(3!)^2}$  也就是  $\frac{1}{2}$ , 与我们前述的计算结果保持一致!

那么如何理解 Schwartz 上 [6] 除以对称因子的做法呢? 这本质上和我们这里介绍的乘以对称数目的方法其实是一样的. 我们考虑一个更复杂的例子 ( $\phi^4$  理论) 来详细阐述这个问题, Feynman 图如图6.2

首先考虑顶点  $a$ , 将其分为三堆, 一堆一个连接 1, 一堆一个连接  $b$ , 再一堆两个自己连接自己, 可以得到  $C_4^1 C_3^1 C_2^2 = \frac{4!}{2}$  种分配方法.

然后再考虑顶点  $b$ , 同样将其分为三堆, 一堆一个连接  $a$ , 一堆一个连接 2, 一堆两个连接  $c$ , 可以得到  $C_4^1 C_3^1 C_2^2 = \frac{4!}{2}$  种分配方法.

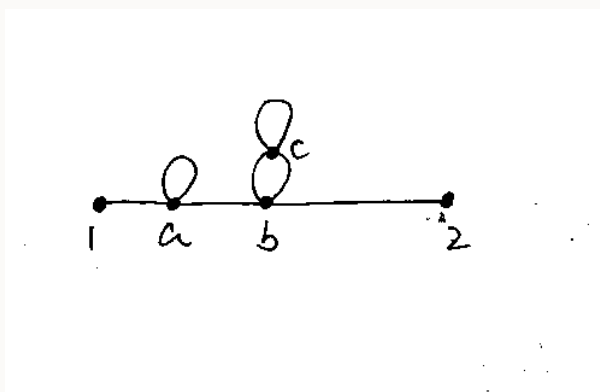


图 6.2: 一个更复杂点的 Feynman 图例子

最后考虑顶点  $c$ , 将其分为两堆, 一堆两个连接  $b$ , 一堆两个自己连接自己, 并且考虑到从  $b$  到  $c$  过来的线我们已经在  $C_2^2$  中除掉了  $2!$  的对称因子, 所以可以认为它有两个不同的出口  $b_1, b_2$ , 然后  $c$  中选择两个按顺序分别与  $b_1, b_2$  连接, 于是有  $A_4^2 C_2^2 = \frac{4!}{2}$  种分配方法.

综上, 与  $\frac{1}{(4!)^3}$  相抵消, 总共剩下三个  $C_n^m$  贡献出来的对称因子  $\frac{1}{8}$ .

从这里可以看出, Schwartz 中所称的对称因子其实也就是我们在对某一个顶点  $i$  的分堆的过程中, 对于连接顶点  $j \neq i$  并有  $n > 1$  个脚的堆,  $n$  个脚之间没有区别所带来的需要除去的因子  $n!$ . 但是需要注意, 由于这一堆在顶点  $i$  已经除以对称因子过了, 所以我们在顶点  $j$  连接顶点  $i$  的那一堆脚中不需要再除以对称因子  $n!$  了. 因此, 总的来说, 一对各有  $n$  个脚的从  $i$  到  $j$  的脚的堆和从  $j$  到  $i$  的脚的堆, 总共贡献  $n!$  的对称因子.

细心的读者可以注意到, 在这里我们没有讨论顶点  $j = i$  也就是自己连接自己的情况. 这个问题比较微妙, 需要我们特殊考虑, 我们可以通过下面这个例子 (如图 6.3) 来进行进一步的讨论.

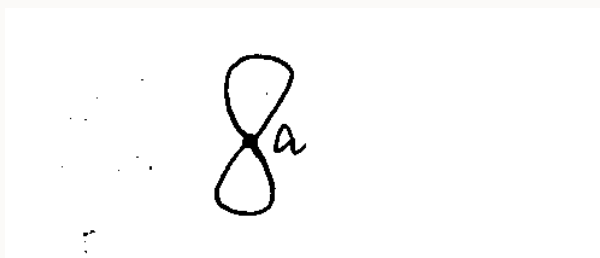


图 6.3: 一个更复杂点的 Feynman 图例子

我们对顶点  $a$  进行分堆, 那么我们可以分出两堆, 每堆各两个腿, 每

堆的两个腿相互连接, 由于这两堆是完全等价的, 所以说我们还需要额外地除以一个对称因子  $2!$  来去掉多余的计数. 于是我们有总数目  $\frac{C_4^2 C_2^2}{2} = \frac{4!}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{4!}{8}$ , 也就是为 8 的对称因子.

从这里我们可以看出来, 对于有  $2n$  (因为是两个脚相互连接, 因此一定是偶数个自己连接自己的脚) 个自己连接自己的脚的顶点, 其对称因子应当为  $n!2^n$ . 可以看到, 比连接不同顶点的堆多贡献了一个  $2^n$  的因子.

综上所述, 我们同样可以再写出 Schwartz 版的 Feynman 规则  $\phi^3$  理论在位形空间的 Feynman 规则

1. 标出所有外点
2. 标出所有内点, 一个内点写一个  $ig \int d^4x$
3. 对所有的内线, 写下 Feynman 传播子  $D_{ij}$ , 其中  $i, j$  为内线连接的两点
4. 除以对称因子

而以如下方式进行对称因子的计算:

1. 一对各有  $n$  个脚的从  $i$  到  $j$  的脚的堆和从  $j$  到  $i$  的脚的堆 ( $i \neq j$ ), 总共贡献  $n!$  的对称因子
2.  $2n$  (因为是两个脚相互连接, 因此一定是偶数个自己连接自己的脚) 个自己连接自己的脚的顶点, 总共贡献  $n!2^n$  的对称因子
3. 将所有的对称因子相乘即总的对称因子

一点感悟: 最大感受就是高中数学学得最烂的排列组合还在追我 ==. 写这段时, 脑子里又浮现了高中数学课上香香反复告诫我们做排列组合题, 先分堆再计算的情景 (真的好喜欢好怀念我的高中数学老师!). 花了好多时间完全弄明白这个问题, 又花了很多时间在这里详细讨论这个问题并把它写清楚... 希望能够解决大家学习 Symmetry Factor 中遇到的问题吧.



### 6.4.2 动量空间的 Feynman 规则

虽然已经有了位形空间的 Feynman 规则,但是它并不能直接给我们散射振幅  $\mathcal{M}$ , 因此我们需要通过某种方式将动量空间与位形空间连接起来, 从而处理在动量空间中的问题. 而这个工具我们已经在提出过了, 即定理6.4: LSZ 公式. 所以, 我们直接动手吧!

首先, 利用分部积分, 我们不难得到 LSZ 公式的等价形式

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \int d^4x_1 -ie^{-ip_1x_1}(p_1^2 - m^2) \cdots \int d^4x_n -ie^{ip_nx_n}(p_n^2 - m^2) \langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle \quad (6.4.12)$$

代入我们上节的结果应当有:

$$\begin{aligned} \langle f, +\infty | i, -\infty \rangle &= \int d^4x_1 -ie^{-ip_1x_1}(p_1^2 - m^2) \cdots \int d^4x_n -ie^{ip_nx_n}(p_n^2 - m^2) \\ &\quad \times \cdots \int \frac{d^4p'_1}{(2\pi)^4} \frac{i}{p'^2_1 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip'_1(x_1 - x)} \cdots \end{aligned} \quad (6.4.13)$$

对第一个  $d^4x_1$  积分可以产生一个  $\delta$  函数并干掉和外点  $x_1$  连接的内线的传播子, 从而将其变成外线

于是有

$$\langle f, +\infty | i, -\infty \rangle = \int d^4x e^{-i(p_1 + q_1 + \cdots)x} \int d^4y e^{-i(p_1 + q_1 + \cdots)y} \cdots \quad (6.4.14)$$

$$= \int \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \cdots (2\pi)^4 \delta^4(\sum p) \cdots \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \cdots \quad (6.4.15)$$

其中  $x, y \cdots$  为没有被 LSZ 干掉的内点.

然后对  $x, y \cdots$  再积分, 即可获得  $\delta$  函数  $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 + \cdots)$

于是我们可以得到动量空间的 Feynman 规则 [1]

1. 标出外线  $i, f$
2. 对所有内点写下耦合常数  $ig$ , 以及能动量守恒  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p)$
3. 对所有内线写下  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
4. 将最终结果扣去一个总的能动量守恒  $(2\pi)^4 \delta^4(\sum p)$  以及一个多余的  $i$ , 即得到散射振幅  $\mathcal{M}_{if}$

并且我们可以发现, 对于非联通图, 我们一定会产生对于外线动量  $p$ , 类似于  $\delta^4(p)$  的结果, 而外线动量是 on-shell 的, 不能做到为 0, 因此 LSZ 还会 kill 掉全部的非联通图贡献.

## 6.5 从拉氏密度直接到动量空间 Feynman 规则

接下来我们讨论一下如何从  $\mathcal{L}$  中直接得到动量空间 Feynman 规则.

我们的核心问题在于如何获得顶点, 传播子是通过 free field 的性质就可以直接得到的. 而关于顶点, 类似于上节对对称数目的讨论, 使用直接除以对称因子的方法, 我们需要将直接出现在  $\mathcal{L}$  中的系数分别乘以  $n!$ , 其中  $n$  为某个场  $\phi$  乘的次数, 并且顶点会与  $n$  个场  $\phi$  传播子相连接. 而如果是使用乘以对称数目的方式, 则内点是直接乘以  $\mathcal{L}$  中原始的系数, 然后对对称数目通过类似的方式求.

这段论述可能比较抽象, 我们可以通过两个具体的例子来考虑:

### 例 6.3 ( $\phi^4$ 理论)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 \quad (6.5.1)$$

除以对称因子法:

1. 顶点因子:  $ig(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$
2.  $\phi$  传播子:  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
3. 一个顶点连接四个  $\phi$  传播子

乘以对称数目法:

1. 顶点:  $\frac{ig}{4!}(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$
2.  $\phi$  传播子:  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
3. 一个顶点连接四个  $\phi$  传播子

其中, 数对称数目时, 一个内点  $x$  对应  $\langle \phi_x \phi_x \phi_x \phi_x \rangle$

### 例 6.4 ( $\phi, \Phi$ 粒子耦合)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2}M^2 \Phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{\mu}{2!}\Phi \phi \phi \quad (6.5.2)$$

除以对称因子法:

1. 顶点:  $-i\mu(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3)$
2.  $\Phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - M^2 + i\epsilon}$
3.  $\phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
4. 一个顶点连接一个  $\Phi$  传播子和两个  $\phi$  传播子

乘以对称数目法:

1. 顶点:  $-\frac{i\mu}{2!}(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3)$
2.  $\Phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - M^2 + i\epsilon}$
3.  $\phi$  传播子:  $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$
4. 一个顶点连接一个  $\Phi$  传播子和两个  $\phi$  传播子

其中, 数对称数目时, 一个内点  $x$  对应  $\langle \Phi_x \phi_x \phi_x \rangle$

## 7 电磁场

### 7.1 重电磁场 (Massive)

我们有拉格朗日量

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (7.1.1)$$

其中  $A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \Rightarrow A_\mu = (\phi, -\mathbf{A})$

于是我们得到 **EoM**:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (7.1.2)$$

将  $\partial_\nu$  作用到 **EoM**, 并且因为  $F^{\mu\nu}$  反称,  $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ , 我们得到:

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (7.1.3)$$

于是我们可以得到 **Proca** 方程

$$(\partial^2 + m^2)A^\nu = 0 \quad (7.1.4)$$

正则共轭

$$\Pi^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.1.5)$$

即  $\Pi^{00} = 0, \Pi^{0i} = E^i$

然后我们有

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (7.1.6)$$

做 Legendre 变换, 得到哈密顿密度

$$\mathcal{H} = \Pi^0 \dot{A}^i - \mathcal{L} = -\Pi^{0i} \partial_t A^i - \mathcal{L} \quad (7.1.7)$$

$$= -\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \quad (7.1.8)$$

$$= -\mathbf{E} \cdot \partial_t \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{A}^2 \quad (7.1.9)$$

根据

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\phi \mathbf{E}) - \phi \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (7.1.10)$$

以及 EoM

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -m^2 \phi \quad (7.1.11)$$

我们最终得到

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \mathbf{E})^2 + \frac{1}{2} m^2 \mathbf{A}^2 \quad (7.1.12)$$

然后我们尝试量子化, 利用正则量子化关系

$$[A_{\mathbf{x}}^i, \Pi_{\mathbf{y}}^{0j}] = [A_{\mathbf{x}}^i, E_{\mathbf{y}}^j] = i\delta^{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -ig^{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.1.13)$$

我们做 Fourier 变换, 得到

$$A^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=1}^3 \left( \epsilon_\lambda^\mu a_{\lambda\mathbf{p}} e^{-ipx} + \epsilon_\lambda^{\mu*} a_{\lambda\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} \right) \quad (7.1.14)$$

$$E^\mu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda=1}^3 \left( (p^\mu \epsilon_\lambda^{0*} - p^0 \epsilon_\lambda^{\mu*}) a_{\lambda\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx} - (p^\mu \epsilon_\lambda^0 - p^0 \epsilon_\lambda^\mu) a_{\lambda\mathbf{p}} e^{-ipx} \right) \quad (7.1.15)$$

于是有对易子:

$$[a_{\lambda\mathbf{p}}, a_{\lambda'\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\lambda\lambda'} \quad (7.1.16)$$

此外,我们还可以得到

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -m^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{\lambda} \left( \epsilon_{\lambda}^0 a_{\lambda\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ipx} + \epsilon_{\lambda}^0 a_{\lambda\mathbf{p}} e^{-ipx} \right) \quad (7.1.17)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} i \sum_{\lambda} \left( (\mathbf{p} \times \epsilon_{\lambda}) a_{\lambda\mathbf{p}}^{\dagger} e^{ipx} - (\mathbf{p} \times \epsilon_{\lambda}) a_{\lambda\mathbf{p}} e^{-ipx} \right) \quad (7.1.18)$$

于是经过艰苦卓绝的爆算, 我们得到

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} (E^2 + B^2 + m^2 A^2 + \frac{1}{m^2} (\nabla \cdot \mathbf{E})^2) \quad (7.1.19)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} (\cdots) \quad (7.1.20)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \sum_{\lambda} \sum_{\lambda'} (-m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 + \omega^2 \delta_{\lambda\lambda'} - m^2 \epsilon_{\lambda}^0 \epsilon_{\lambda'}^0 + \mathbf{p}^2 \delta_{\lambda\lambda'} + 2m^2 \epsilon_{\lambda'}^0 \epsilon_{\lambda}^0 + m^2 \delta_{\lambda\lambda'}) (a_{\lambda\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\lambda'\mathbf{p}} + a_{\lambda'\mathbf{p}} a_{\lambda\mathbf{p}}^{\dagger}) \quad (7.1.21)$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \sum_{\lambda} \left( a_{\lambda\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\lambda\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \mathcal{V} \right) \quad (7.1.22)$$

(感兴趣的可以见图7.1的手动具体计算过程)

写出  $H$  后, 我们尝试通过计算其 **Green** 函数继而得到重电磁场传播子.

在傅里叶空间, 我们有方程:

$$(-p^2 + m^2) g_{\mu\nu} \tilde{A}^{\mu} = \tilde{J}_{\nu} \quad (7.1.23)$$

于是

$$\tilde{A}^{\mu} = \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2} \tilde{J}_{\nu} = \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2} \int d^4y J_{\nu} e^{ipy} \quad (7.1.24)$$

最终我们得到:

$$A^{\mu} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{A}^{\mu} e^{-ipx} = \int d^4y \left( \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \right) J_{\nu} \quad (7.1.25)$$

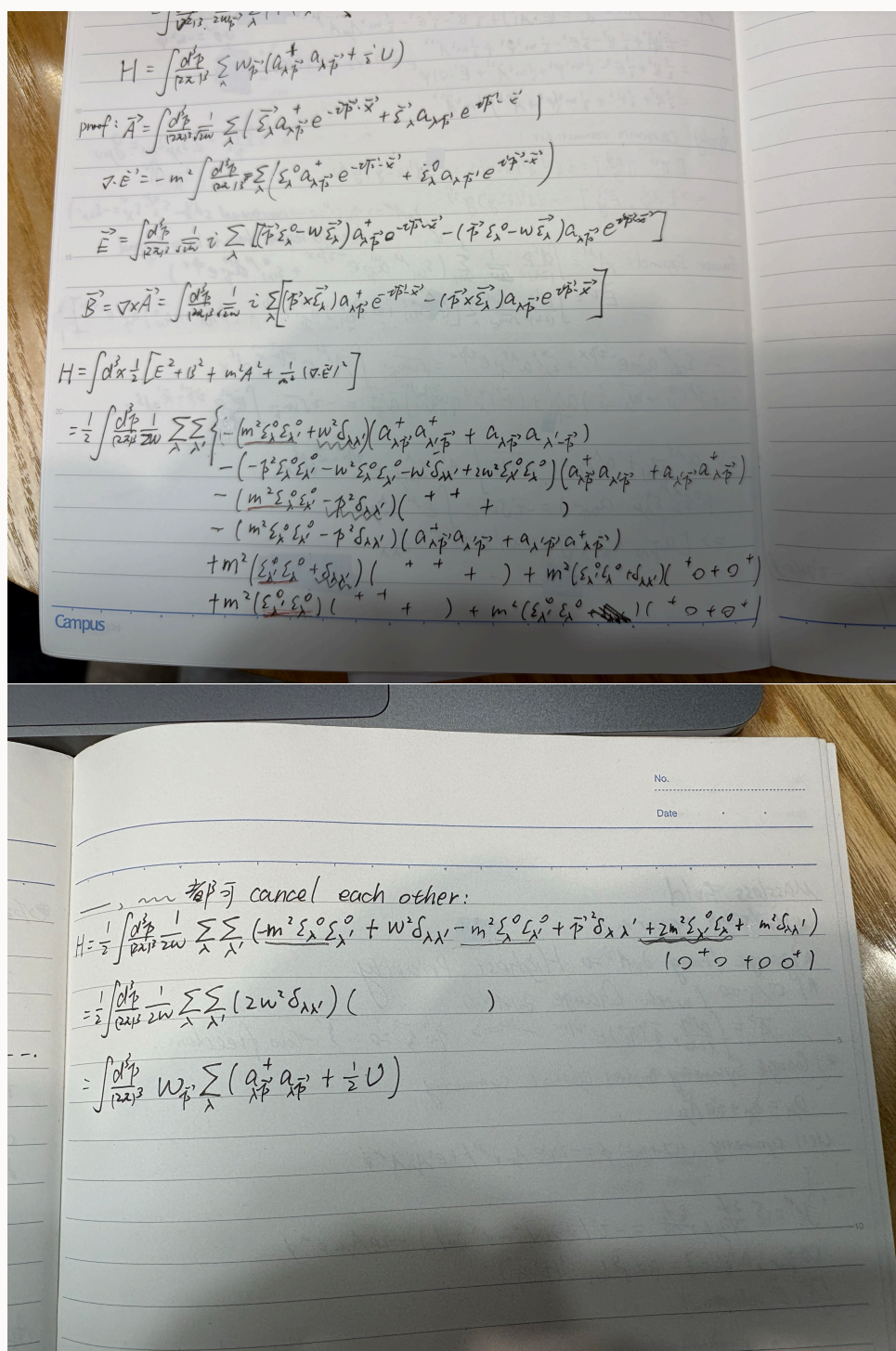


图 7.1: 手算过程



于是有 Green 函数:

$$G_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-g^{\mu\nu}}{p^2 - m^2} e^{-ip(x-y)} \quad (7.1.26)$$

因此传播子为:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.1.27)$$

## 7.2 电磁场 (Massless)

为了得到电磁场的二次量子化结果,自然的想法就是对电磁场取  $m \rightarrow 0$  的结果. 然而这会面临一个问题: 电磁场的  $A^\mu$  具有规范不变性, 即  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$  不改变其物理意义, 进过规范变换  $\partial_\mu A^\mu$  也不一定为 0. 这使得我们对电磁场的描述存在冗余自由度, 这的一个直接结果就是电磁场只有两个极化方向而不是重电磁场的三个.

于是, 为了能够正确地处理自由度, 消除冗余, 我们引入 Lorenz 规范:

$$\nabla_\mu A^\mu = 0 \quad (7.2.1)$$

但是故事并没有结束, 我们仍然可以通过满足  $\partial^2 \Lambda = 0$  的  $\Lambda$  来进行规范, 因此我们可以进一步地取  $\partial_0 \Lambda = -A_0 = -\varphi$ , 从而使得  $\varphi = 0$ .

这样 Lorenz 规范就退化成了 Coulomb 规范:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (7.2.2)$$

引入正则量子化条件:

$$[a_{\mathbf{p}r}, a_{\mathbf{q}s}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \quad (7.2.3)$$

于是我们就可以二次量子化  $\mathbf{A}$  了

$$\mathbf{A} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=1}^2 (\epsilon_r a_{\mathbf{p}r} e^{-ipx} + \epsilon_r^* a_{\mathbf{p}r}^\dagger e^{ipx}) \quad (7.2.4)$$



从而有

$$\mathbf{E} = -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} \sum_{r=1}^2 (\epsilon_r a_{\mathbf{p}r} e^{-ipx} - \epsilon_r^* a_{\mathbf{p}r}^\dagger e^{ipx}) \quad (7.2.5)$$

然后有对易子

$$[A_{\mathbf{x}}^i, E_{\mathbf{y}}^j] = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \sum_r \epsilon_r^i(\mathbf{p}) \epsilon_r^j(\mathbf{p}) \quad (7.2.6)$$

$$= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} (\delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\mathbf{p}^2}) \quad (7.2.7)$$

$$= i\delta_{\text{tr}}^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.2.8)$$

这里我们可能会有疑问, 为什么这不能按照我们一般的正则量子化的方法, 让

$$[A_{\mathbf{x}}^i, E_{\mathbf{y}}^j] = i\delta^{ij}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.2.9)$$

这是因为根据我们的 Coulomb 规范,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , 因此

$$[\partial_i A^i, E^j] = 0 \quad (7.2.10)$$

然而代入上面的对易关系, 我们会发现

$$[\partial_i A_{\mathbf{x}}^i, E_{\mathbf{y}}^j] = i\partial^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \neq 0 \quad (7.2.11)$$

这个正则量子化条件是不自洽的! 这里的原因还是因为无质量的电磁场存在规范冗余, 导致我们丢失了一个”物理的”极化方向.

而由  $a, a^\dagger$  写出的正则量子化条件, 我们可以验证它可以保证

$$[\partial_i A^i, E^j] = i \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} i p^i (\delta^{ij} - \frac{p^i p^j}{\mathbf{p}^2}) \quad (7.2.12)$$

$$= -\frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} (p^j - \frac{\mathbf{p}^2 p^j}{\mathbf{p}^2}) \quad (7.2.13)$$

$$= 0 \quad (7.2.14)$$

接着下一个任务就是给出光子的传播子了. 我们从 **EoM** 开始:

$$(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)A^\nu = J_\mu \quad (7.2.15)$$

换到傅里叶空间, 我们有

$$(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu)\tilde{A}^\nu = \tilde{J}_\mu \quad (7.2.16)$$

似乎只要求出  $-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu$  的逆矩阵就好了...?

然而不难发现,  $-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu$  是奇异的:  $g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$  就是在度规张量在类光面上的诱导度规, 它的秩仅有 2, 根本不可能找到逆.

一个自然的想法是, 引入一个参数  $\xi$  来使得它有逆, 即:

$$(-p^2 g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu) \rightarrow (-p^2 g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})p_\mu p_\nu) \quad (7.2.17)$$

这样我们就能对  $(-p^2 g_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})p_\mu p_\nu)$  求逆了:

$$-\frac{g^{\mu\lambda} + (\xi - 1)p^\mu p^\lambda / p^2}{p^2}(-p^2 g_{\lambda\nu} + (1 - \frac{1}{\xi})p_\lambda p_\nu) \quad (7.2.18)$$

也就是说我们想要 **EoM** 变为:

$$(g_{\mu\nu}\partial^2 - (1 - \frac{1}{\xi})\partial_\mu\partial_\nu)A^\nu = J_\mu \quad (7.2.19)$$

这里我仍然不理解为什么规范变换可以改变 **EoM**...

为了得到这样的 **EoM**, 我们可以在拉氏量中加入一个规范项:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - J_\mu A^\mu - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (7.2.20)$$

这样子就能得到要求的 **EoM**, 并且注意到, 做规范变换  $A'^\mu = A^\mu + \partial_\mu$ , 其中

$$\partial^2 \partial_\nu \Lambda = \frac{\xi' - \xi}{\xi} \partial_\nu \partial_\mu A^\mu \quad (7.2.21)$$

或者也可以写成

$$\partial^2 \partial_\nu \Lambda = \frac{\xi' - \xi}{\xi'} \partial_\nu \partial_\mu A'^\mu \quad (7.2.22)$$

$A'^\mu$  的 **EoM** 就变成:

$$(g_{\mu\nu} \partial^2 + (\frac{1}{\xi'} - 1) \partial_\mu \partial_\nu) A'^\mu = J_\nu \quad (7.2.23)$$

由此可见,  $\xi$  的不同取值其实就对应不同的规范, 并且 **Lorenz** 规范就是  $\xi = 0$ : 这时  $\frac{1}{\xi}$  变为无穷大, 为了满足 **EoM**, 我们必须要求  $\partial_\mu A^\mu = 0$

于是, 这样我们就可以得到 **Green** 函数:

$$G_{\mu\nu}(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left( -\frac{g_{\mu\nu} + (\xi - 1) p_\mu p_\nu / p^2}{p^2} \right) e^{-ip(x-y)} \quad (7.2.24)$$

从而得到光子传播子:

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} + (\xi - 1) p_\mu p_\nu / p^2)}{p^2 + i\epsilon} \quad (7.2.25)$$

所以说, 对于 **Lorenz** 规范,  $\xi = 0$ , 传播子为:

$$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2)}{p^2 + i\epsilon} \quad (7.2.26)$$

在这里我们介绍一个更为常见并且简单的规范: **Feynman** 规范, 它的  $\xi = 1$ , 于是在 **Feynman** 规范下, 传播子为:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \quad (7.2.27)$$

## 8 标量 QED

### 8.1 规范变换

我们知道, 复标量场  $\psi$  有  $U(1)$  对称性, 这是一个全局变换. 但是在一个局域的  $U(1)$  变换  $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$ , 即我们新定义的一个规范变换下并不具有不变性. 但我们希望能够通过某些构造使其有这一不变性.

于是我们让  $A_\mu$  作为联络, 新定义对  $\psi$  的微分算符:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (8.1.1)$$

并且在  $U(1)$  规范变换下,  $A_\mu, \psi$  以如下方式变换:

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (8.1.2)$$

$$\psi' = \psi e^{i\alpha} \quad (8.1.3)$$

不难发现

$$D'_\mu\psi' = (\partial_\mu + ieA'_\mu - i\partial_\mu\alpha)(\psi e^{i\alpha}) = e^{i\alpha}(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi = e^{i\alpha}D_\mu\psi \quad (8.1.4)$$

所以如果构造一个电磁场与标量场  $\phi$  耦合的拉氏密度

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + D_\mu\psi(D^\mu\psi)^* - m^2\psi\psi^* \quad (8.1.5)$$

, 则其有  $U(1)$  规范不变性.

我们可以给他写为更显式的形式

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 + \partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^* - m^2\psi\psi^* + ieA_\mu(\psi\partial^\mu\psi^* - \psi^*\partial^\mu\psi - ie\psi\psi^*A^\mu) \quad (8.1.6)$$

我们可以写出 EoM

$$\begin{cases} (\partial^2 + m^2)\psi = -2ieA_\mu\partial^\mu\psi + e^2\psi A_\mu A^\mu \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = ie(\psi\partial^\nu\psi^* - \psi^*\partial^\nu\psi - 2ie\psi\psi^*A^\nu) \end{cases} \quad (8.1.7)$$

于是我们可以得到电流:

$$J^\nu = ie(\psi \partial^\nu \psi^* - \psi^* \partial^\nu \psi - 2ie\psi\psi^* A^\nu) \quad (8.1.8)$$

并且, 如果我们再次做全局  $U(1)$  变换, 我们可以再次得到这一守恒流:

$$J^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi} \frac{\delta \psi}{\delta \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^*} \frac{\delta \psi^*}{\delta \alpha} \quad (8.1.9)$$

$$= i(\psi \partial^\nu \psi^* - \psi^* \partial^\nu \psi - 2e\psi\psi^* A^\nu) \quad (8.1.10)$$

于是, 就从对规范不变性的追求中, 我们得到了标量 QED.

## 8.2 标量 QED 的 Feynman 规则

## 9 旋量

### 9.1 Lorentz 群

我们首先考虑对矢量的 Lorentz 变换.

**定义 9.1 (Lorentz 变换)** Lorentz 变换为一种保内积的变换:

$$\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (9.1.1)$$

使得

$$\bar{x}^\mu \bar{x}_\mu = x^\mu x_\mu \quad (9.1.2)$$

**定理 9.1 (Lorentz 变换的性质)**

$$\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho = g_{\sigma\rho} \quad (9.1.3)$$

**证明.**

$$\bar{x}^2 = g_{\mu\nu} \bar{x}^\mu \bar{x}^\nu = x^\sigma (\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\rho) x^\rho = x^\sigma g_{\sigma\rho} x^\rho \quad (9.1.4)$$

于是我们可以有如下推论:

**定理 9.2 (Lorentz 变换的逆矩阵)**

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu \quad (9.1.5)$$

**证明.** 由 9.1 可得

$$g^{\rho\beta} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} g^{\rho\beta} = \delta^\beta{}_\sigma \quad (9.1.6)$$

即:

$$\Lambda_\nu{}^\beta \Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\beta{}_\sigma \quad (9.1.7)$$

于是可以得证.

**定义 9.2 ( $\delta\omega^\mu{}_\nu$ )** 对于无穷小 Lorentz 变换  $\Lambda^\mu{}_\nu$ , 定义

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu \quad (9.1.8)$$

通过(9.1)可以发现  $\delta\omega_{\mu\nu}$  是反称的. 并且我们还可以进一步写成矩阵形式

$$\delta\omega^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & v^1 & v^2 & v^3 \\ v^1 & 0 & \theta^3 & -\theta^2 \\ v^2 & -\theta^3 & 0 & \theta^1 \\ v^3 & \theta^2 & -\theta^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1.9)$$

其中,  $v^i$  为参考系间的相对速度,  $\theta^i$  为沿着  $i$  轴旋转的角度. 或者写为降指标后的结果

$$\delta\omega_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & v^1 & v^2 & v^3 \\ -v^1 & 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ -v^2 & \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -v^3 & -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1.10)$$

于是我们还可以进一步写出 Lorentz 变换的显式形式

$$\begin{cases} \delta x^0 = \beta^i x^i \\ \delta x^i = \beta^i x^0 - \epsilon_{ijk} \theta^j x^k \end{cases} \quad (9.1.11)$$

### 定理 9.3 ( $\delta\omega_{\mu\nu}$ 的性质)

$$\delta\omega_{\mu\nu} = \delta\omega_{[\mu\nu]} \quad (9.1.12)$$

然后我们想要把 Lorentz 变换的操作抽象化, 一般化, 将其提升到群表示论的高度, 于是我们有一个用抽象的 Lorentz 变换参数  $\omega_{\mu\nu}$  表示的对某一个对象进行的 Lorentz 变换, 这成为 Lorentz 群的一个表示.

### 定义 9.3 (无穷小 Lorentz 群变换的表示 $U(\Lambda)$ )

$$U(\mathbf{1} + \delta\omega) = \mathbf{1} - \frac{i}{2} \delta\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (9.1.13)$$

其中,  $M^{\mu\nu} = M^{[\mu\nu]}$ , 是某一个算符

以此我们有有限 Lorentz 群变换的表示

$$U(\omega) = e^{-\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}} \quad (9.1.14)$$

**定理 9.4 (结合律)** 作为群表示, 我们要求  $U$  满足:

$$U(\Lambda\Lambda') = U(\Lambda)U(\Lambda') \quad (9.1.15)$$

根据定理9.2, 定理9.4, 定义9.2, 我们要求  $U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) = U(\Lambda^{-1})U(\Lambda')U(\Lambda)$ , 于是有9.5:

**定理 9.5**

$$U_{\Lambda}^{-1}M^{\mu\nu}U_{\Lambda} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}M^{\rho\sigma} \quad (9.1.16)$$

**证明.**

$$U_{\Lambda}^{-1}U_{\Lambda'}U_{\Lambda} = 1 - \frac{i}{2}\delta\omega'_{\mu\nu}U_{\Lambda}^{-1}M^{\mu\nu}U_{\Lambda} \quad (9.1.17)$$

$$U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) = U(1 + \Lambda^{-1}\omega'\Lambda) = 1 - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\delta\omega'\Lambda)_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \quad (9.1.18)$$

计算  $(\Lambda^{-1}\delta\omega'\Lambda)^{\mu}_{\nu}$

$$(\Lambda^{-1}\delta\omega'\Lambda)^{\mu}_{\nu} = \Lambda^{\sigma}_{\rho}\delta\omega'^{\rho}_{\sigma}\Lambda^{\mu}_{\nu} \quad (9.1.19)$$

于是

$$(\Lambda^{-1}\delta\omega'\Lambda)_{\mu\nu} = \Lambda^{\sigma}_{\mu}\delta\omega'_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu} \quad (9.1.20)$$

因此

$$U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda) = U(1 + \Lambda^{-1}\omega'\Lambda) = 1 - \frac{i}{2}\Lambda^{\sigma}_{\mu}\delta\omega'_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu}M^{\mu\nu} \quad (9.1.21)$$

将(9.1.17)与(9.1.21)取等我们有

$$\delta\omega'_{\rho\sigma}U_{\Lambda}^{-1}M^{\rho\sigma}U_{\Lambda} = \Lambda^{\sigma}_{\mu}\delta\omega'_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}_{\nu}M^{\mu\nu} \quad (9.1.22)$$

于是

$$U_{\Lambda}^{-1}M^{\mu\nu}U_{\Lambda} = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}M^{\rho\sigma} \quad (9.1.23)$$

进一步展开我们可以得到

**定理 9.6 ( $M^{\mu\nu}$  的对易子)**

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(-g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\sigma\nu}M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}) \quad (9.1.24)$$

**证明.** 展开

$$(1 + \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta})M^{\mu\nu}(1 - \frac{i}{2}\delta\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}) = (\delta^{\mu}_{\rho} + \delta\omega^{\mu}_{\rho})(\delta^{\nu}_{\sigma} + \delta\omega^{\nu}_{\sigma})M^{\rho\sigma} \quad (9.1.25)$$



化简整理得到

$$\frac{i}{2}\delta\omega_{\rho\sigma}[M^{\rho\sigma}, M^{\mu\nu}] = \delta\omega_{\rho\sigma}(M^{\mu\sigma}g^{\rho\nu} - M^{\rho\nu}g^{\mu\sigma}) \quad (9.1.26)$$

于是

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = 2i(g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}) + A^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (9.1.27)$$

其中  $A^{\mu\nu\rho\sigma} = A^{\nu\mu\rho\sigma}$ ,  $A^{\mu\nu\rho\sigma} = A^{\mu\nu\sigma\rho}$ .

交换  $\mu, \nu$ :

$$[M^{\nu\mu}, M^{\rho\sigma}] = 2i(g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\rho\mu}M^{\nu\sigma}) + A^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (9.1.28)$$

注意到  $M^{\mu\nu}$  反称, (9.1.27)+(9.1.28)得到:

$$A^{\mu\nu\rho\sigma} = -i(g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \quad (9.1.29)$$

于是可得

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(-g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\sigma\nu}M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}) \quad (9.1.30)$$

#### 定义 9.4 (Lorentz 群生成元)

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \Rightarrow M^{ij} = \epsilon_{ijk}J^k \quad (9.1.31)$$

$$K^i = M^{i0} \quad (9.1.32)$$

写为矩阵形式就是

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -K^1 & -K^2 & -K^3 \\ K^1 & 0 & J^3 & -J^2 \\ K^2 & -J^3 & 0 & J^1 \\ K^3 & J^2 & -J^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.1.33)$$

然后我们可以将无穷小 Lorentz 群表示写为

$$1 + i\theta^i J^i + i\beta^i K^i \quad (9.1.34)$$

有限大的写为

$$e^{i\theta^i J^i + i\beta^i K^i} \quad (9.1.35)$$

然后我们有

**定理 9.7 (Lorentz 群生成元的对易关系)**

$$[J^i, J^j] = i\epsilon_{ijk} J^k \quad (9.1.36)$$

$$[J^i, K^j] = i\epsilon_{ijk} K^k \quad (9.1.37)$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon_{ijk} J^k \quad (9.1.38)$$

注意, 在这里我们都认为是具体指标的计算, 因此不关心上下标的问题: 矢量就是上标, 体元就是下标, 从而避免 (+—) 度规三维部分升降指标会多出负号的恼人特性.

**证明.**

$$[J^i, J^j] = \frac{1}{4}\epsilon_{iml}\epsilon_{jnp}M^{ml}M^{np} \quad (9.1.39)$$

$$= \frac{1}{4}\epsilon_{iml}\epsilon_{jnp} \cdot 2i(g^{mp}M^{ln} + g^{lm}M^{mp}) \quad (9.1.40)$$

$$= -\frac{i}{2}\epsilon_{iml}\epsilon_{jnp}(\delta_{mp}M^{ln} + \delta_{ln}M^{mp}) \quad (9.1.41)$$

$$= -i\epsilon_{mli}\epsilon_{mjn}M^{ln} \quad (9.1.42)$$

$$= -i(\delta_{lj}\delta_{in} - \delta_{ln}\delta_{ij})M^{ln} \quad (9.1.43)$$

$$= iM^{ij} \quad (9.1.44)$$

$$= i\epsilon_{ijk}J^k \quad (9.1.45)$$

$$[J^i, K^j] = \frac{1}{2}\epsilon_{imn} \cdot 2i(g^{m0}M^{nj} + g^{nj}M^{m0}) \quad (9.1.46)$$

$$= i\epsilon_{imn}(-\delta_{nj})M^{m0} \quad (9.1.47)$$

$$= i\epsilon_{ijk}M^{k0} \quad (9.1.48)$$

$$= i\epsilon_{ijk}K^k \quad (9.1.49)$$

$$[K^i, K^j] = [M^{i0}, M^{j0}] \quad (9.1.50)$$

$$= -ig^{00}M^{ij} \quad (9.1.51)$$

$$= -iM^{ij} \quad (9.1.52)$$

$$= -i\epsilon_{ijk}J^k \quad (9.1.53)$$

## 9.2 分解 Lorentz 群

正如我们在定义9.4中看到的那样, 洛伦兹群有六个生成元, 从而将 Lorentz 变换表示为:

$$\Lambda = e^{i\theta_i J^i + i\beta_i K^i} \quad (9.2.1)$$

并且定理9.7, 有对易关系

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J^k \quad (9.2.2)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K^k \quad (9.2.3)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J^k \quad (9.2.4)$$

或者写为一个张量形式

$$M^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -K^1 & -K^2 & -K^3 \\ K^1 & 0 & J^3 & -J^2 \\ K^2 & -J^3 & 0 & J^1 \\ K^3 & J^2 & -J^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.5)$$

并且根据定理9.6我们有:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(-g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\sigma\nu}M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} + g^{\rho\nu}M^{\mu\sigma}) \quad (9.2.6)$$

于是

$$\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \quad (9.2.7)$$

我们设

$$J_i^\pm = \frac{1}{2}(J_i \pm iK_i) \quad (9.2.8)$$

也就是:

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J}^+ + \mathbf{J}^- \\ \mathbf{K} = i(\mathbf{J}^- - \mathbf{J}^+) \end{cases} \quad (9.2.9)$$

于是有对易关系

$$\begin{cases} [J_i^+, J_j^+] = i\epsilon_{ijk}J^{+k} \\ [J_i^-, J_j^-] = i\epsilon_{ijk}J^{-k} \\ [J_i^+, J_j^-] = 0 \end{cases} \quad (9.2.10)$$

我们发现,  $\mathbf{J}^\pm$  是解耦的, 而它们分别满足  $\mathfrak{su}(2)$  的 Lie 代数关系!

于是我们得到结论

$$\mathfrak{so}(1, 3) = \mathfrak{su}(2) \otimes \mathfrak{su}(2) \quad (9.2.11)$$

因此, 我们可以将 Lorentz 群的不可约表示用两个半整数  $(m, n)$  表示, 分别代表两个  $\mathfrak{su}(2)$  部分的角量子数.

于是我们发现不可约表示  $(m, n)$  的维度为  $(2m + 1)(2n + 1)$ .

### 9.3 不可约表示

**例 9.1 ((0, 0) 型)** 其维度为 1, 并且其是 Lorentz 不变的. 因此我们指出 (0, 0) 型就是标量.

**例 9.2 (( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ ) 型)** 其维度为 4, 并且我们有生成元

$$J^{+i} = J^{-i} = \frac{\sigma^i}{2} \quad (9.3.1)$$

于是我们有

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\sigma \otimes 1 + 1 \otimes \frac{1}{2}\sigma, \mathbf{K} = i \left( 1 \otimes \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sigma \otimes 1 \right) \quad (9.3.2)$$

(千万不要直接将两个  $\frac{1}{2}\sigma$  相加, 因为它们是分别作用到不同的旋量部分的)

考虑两旋量  $\xi, \eta$ , 我们用矩阵  $\xi\eta^T\sigma^2$  表示这两旋量的张量积.(为什么这里这么奇怪地在最后插入一个  $\sigma^2$ ? 原因在于只有  $\sigma^{T2} = -\sigma^2 \neq \sigma^2$ , 如果没有这个  $\sigma^2$  就会使得接下来的变换规则非常奇怪)

而  $\mathbf{J}, \mathbf{K}$  对其的作用为

$$\mathbf{J}(\xi\eta^T) = \frac{1}{2}(\sigma\xi\eta^T\sigma^2 + \xi\eta^T\sigma^T\sigma^2) \quad (9.3.3)$$

$$\mathbf{K}(\xi\eta^T) = \frac{i}{2}(-\sigma\xi\eta^T\sigma^2 + \xi\eta^T\sigma^T\sigma^2) \quad (9.3.4)$$

需要注意到, 这里出现了  $\sigma^T$ , 而

$$\sigma^{iT} = \sigma^i, i = 0, 1, 3 \quad (9.3.5)$$

$$\sigma^{2T} = -\sigma^2 \quad (9.3.6)$$

我们设

$$\xi\eta^T\sigma^2 = V^\mu\bar{\sigma}_\mu \quad (9.3.7)$$

(注意这里, 因为单纯  $\xi\eta^T\sigma^2$  的秩为 1, 我们要表示任意的旋量其实需要多个  $\xi\eta^T\sigma^2$  做线性组合. 但是因为线性性使得对于单个  $\xi\eta^T\sigma^2$  成立的对于它们的线性组合式子也仍然成立, 所以这里出于书写简便性的考虑我们就不妨写一个  $\xi\eta^T\sigma^2$  来表示  $V^\mu\bar{\sigma}_\mu$ )

计算可以发现

$$J^2(V^\mu\bar{\sigma}_\mu) = \frac{1}{2}(\sigma^2V^\mu\bar{\sigma}_\mu + V^\mu\bar{\sigma}_\mu\sigma^2\sigma^{2T}\sigma^2) \quad (9.3.8)$$

$$= \frac{1}{2}V^\mu(\sigma^2\bar{\sigma}_\mu - \bar{\sigma}_\mu\sigma^2) \quad (9.3.9)$$

$$= i\bar{\sigma}_j\epsilon_{j2i}V^i \quad (9.3.10)$$

并且对于  $k \neq 2$ , 我们不难计算得到

$$J^k(V^\mu\bar{\sigma}_\mu) = i\bar{\sigma}_j\epsilon_{jki}V^i \quad (9.3.11)$$

整理结果有, 对于  $k = 1, 2, 3$

$$J^k(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) = i \bar{\sigma}_j \epsilon_{jki} V^i \quad (9.3.12)$$

同理我们有

$$K^i(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) = \frac{i}{2}(-\sigma^k V^\mu \bar{\sigma}_\mu + V^\mu \bar{\sigma}_\mu \sigma^2 \sigma^{kT} \sigma^2) \quad (9.3.13)$$

于是我们可以计算得到

$$K^k(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) = -i(V^k \bar{\sigma}_0 + V^0 \bar{\sigma}_k) \quad (9.3.14)$$

所以我们发现, 对于  $V^\mu \bar{\sigma}_\mu$  做无穷小 Lorentz 变换有

$$\delta(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) = \Lambda_{\theta^i, \beta^i}(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) - V^\mu \bar{\sigma}_\mu \quad (9.3.15)$$

$$= i\theta^k J^k(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) + i\beta^k K^k(V^\mu \bar{\sigma}_\mu) \quad (9.3.16)$$

$$= -\bar{\sigma}_j \epsilon_{jki} \theta^k V^i + \beta^k (V^k \bar{\sigma}_0 + V^0 \bar{\sigma}_k) \quad (9.3.17)$$

对照(9.1.11)这符合 Lorentz 群作用下矢量的变换, 因此我们指出,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  其实代表的就是 4 矢量.

**例 9.3 ((0,  $\frac{1}{2}$ ) 型-右手 Weyl 旋量)** 其维度为 2. 于是我们可以将其记为  $\psi_R$ , 是一个二维列向量. 根据生成元

$$\begin{cases} \mathbf{J}^- = 0 \\ \mathbf{J}^+ = \frac{\sigma}{2} \end{cases} \quad (9.3.18)$$

我们有得到 Lorentz 变换的群作用

$$\psi_R = e^{\frac{1}{2}(i\theta^i \sigma^i + \beta^i \sigma^i)} \psi_R \quad (9.3.19)$$

对无穷小 Lorentz 变换有

$$\delta\psi_R = \frac{1}{2}(i\theta^j + \beta^j)\sigma^j \psi_R \quad (9.3.20)$$

我们计算发现

$$\delta(\psi_R^\dagger \psi_R) = \beta^i \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R \quad (9.3.21)$$

$$\delta(\psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R) = -\epsilon_{ijk} \theta^j \psi_R^\dagger \sigma^k \psi_R + \beta^i \psi_R^\dagger \psi_R \quad (9.3.22)$$

如果我们将它们组合为  $(\psi_R^\dagger \psi_R, \psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R)^T$ , 可以发现这正是矢量的 Lorentz 变换形式. 因此我们发现了一个 4 矢量

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \quad (9.3.23)$$

, 其中

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.3.24)$$

从这里我们也可以体会到所谓”旋量是矢量开平方根”的说法的道理: 我们将两个旋量组合在一起, 就能乘出一个矢量.

**例 9.4 (( $\frac{1}{2}, 0$ ) 型-左手 Weyl 旋量)** 其维度为 2. 于是我们可以将其记为  $\psi_L$ , 是一个二维列向量. 生成元为

$$\begin{cases} \mathbf{J}^- = \frac{\sigma}{2} \\ \mathbf{J}^+ = 0 \end{cases} \quad (9.3.25)$$

我们有得到 Lorentz 变换的群作用

$$\psi_L = e^{\frac{1}{2}(i\theta^i \sigma^i - \beta^i \sigma^i)} \psi_R \quad (9.3.26)$$

对无穷小 Lorentz 变换有

$$\delta \psi_L \frac{1}{2} (i\theta^j - \beta^j) \sigma^j \psi_R \quad (9.3.27)$$

我们定义  $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)^T$ , 并计算发现

$$\delta(\psi_L^\dagger \psi_L) = -\beta^i \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L = \beta^i \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^i \psi_L \quad (9.3.28)$$

$$\delta(\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^i \psi_L) = -\sigma_{ijk} \theta^j \psi_L^\dagger \sigma^k \psi_L + \beta^i \psi_L^\dagger \psi_L \quad (9.3.29)$$

于是我们发现

$$\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L \quad (9.3.30)$$

是一个 4 矢量

进一步地, 我们还可以发现

$$\delta(\psi_L^\dagger \psi_R) = \delta(\psi_R^\dagger \psi_L) = 0 \quad (9.3.31)$$

于是  $\psi_L^\dagger \psi_R, \psi_R^\dagger \psi_L$  是 Lorentz 标量.

再计算

$$\delta(\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R) \quad (9.3.32)$$

根据

$$\delta(\partial_\mu) = \partial'_\mu - \partial_\mu \quad (9.3.33)$$

即

$$\delta(\partial_0) = -\beta^i \partial_i \quad (9.3.34)$$

$$\delta(\partial_i) = -\beta^i \partial_0 + \epsilon_{kji} \theta^j \partial_k \quad (9.3.35)$$

我们有

$$\delta(\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R) = 0 \quad (9.3.36)$$

这个结论对于  $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L$  同样成立.

所以我们发现

$$\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R, \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \quad (9.3.37)$$

是 Lorentz 标量.

## 9.4 Dirac 旋量

利用上一节中我们组合出来的标量, 我们可以构造一个 Lagrangian

$$\mathcal{L} = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R) \quad (9.4.1)$$

我们将  $\psi_L, \psi_R$  拼到一起

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (9.4.2)$$



然后构造

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (9.4.3)$$

定义

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger) \quad (9.4.4)$$

就有

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi \quad (9.4.5)$$

其中

$$\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu \quad (9.4.6)$$

并且从矩阵形式我们注意到

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (9.4.7)$$

以及

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \quad (9.4.8)$$

利用

$$\gamma^0 \gamma^0 = g^{00} = 1, \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^i \quad (9.4.9)$$

我们可以将式(9.4.8)写为更紧凑的形式

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (9.4.10)$$

在下一节9.5中我们将会看到一般化的对于  $\gamma^\mu$  性质的讨论.

接着我们继续考虑 Dirac 旋量, 我们可以从 Lagrangian 中得到 EoM:

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (9.4.11)$$

这是一个一阶的 PDE, 似乎与预期中的 Klein-Gordon 方程不符? 我们可以将其左乘  $(i\cancel{\partial} + m)$ , 得到

$$(i\cancel{\partial} + m)(i\cancel{\partial} - m)\psi = (-\partial^2 - m^2)\psi = 0 \quad (9.4.12)$$

于是我们发现, 将其解耦为二阶 PDE 后, 它仍然是满足 Klein-Gordon 方程的, 从而具有我们所预期的色散关系

$$\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \quad (9.4.13)$$

关于 EoM 的讨论我们见 9.6 节, 在那我们将会详细地讨论 Dirac 方程的解, 并将其二次量子化.

然后我们尝试获得 Dirac 旋量的 Lorentz 变换及其生成元. 我们首先直接考虑  $\psi$  的变换:

$$\delta\psi = \begin{pmatrix} \delta\psi_L \\ \delta\psi_R \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\theta^i \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \psi + \frac{1}{2}v^i \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \psi \quad (9.4.14)$$

考虑到

$$[\gamma^j, \gamma^k] = -[\sigma^j, \sigma^k] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -i\epsilon_{jkl}\sigma^l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.4.15)$$

即

$$\epsilon_{ijk}[\gamma^j, \gamma^k] = -2i\sigma^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.4.16)$$

还有

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \gamma^i\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\bar{\sigma}^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \quad (9.4.17)$$

即

$$[\gamma^i, \gamma^0] = -2 \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \quad (9.4.18)$$

于是

$$\delta\psi = i\epsilon_{ijk}\theta^i \left(\frac{i}{4}[\gamma^j, \gamma^k]\right)\psi + iv^i \left(\frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^0]\right) \quad (9.4.19)$$

$$= -\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} \left(\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\right) \quad (9.4.20)$$

所以我们发现,

### 定义 9.5 (Dirac 旋量生成元)

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (9.4.21)$$

对 Dirac 旋量, Lorentz 变换为

$$\psi \rightarrow \Lambda_s \psi, \Lambda_s = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} \quad (9.4.22)$$

并且有旋转与 Boost 生成元

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}S^{jk} = \frac{i}{8}\epsilon_{ijk}[\gamma^j, \gamma^k] \quad (9.4.23)$$

$$K^i = S^{i0} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^0] \quad (9.4.24)$$

$$\psi \rightarrow \Lambda_s \psi, \Lambda_s = e^{i\theta \cdot \mathbf{J} + i\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}} \quad (9.4.25)$$

并且我们可以验证  $S^{\mu\nu}$  满足定理9.6: 首先计算对易子

$$[S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\mu\rho}) \quad (9.4.26)$$

所以

$$[S^{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = \frac{i}{4}([S^{\mu\nu}, \gamma^\rho \gamma^\sigma] - [S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma \gamma^\rho]) \quad (9.4.27)$$

$$= \frac{i}{4}(\gamma^\rho [S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] [S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] \gamma^\sigma - \gamma^\sigma [S^{\mu\nu}, \gamma^\rho] - [S^{\mu\nu}, \gamma^\sigma] \gamma^\rho) \quad (9.4.28)$$

于是可得

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(-g^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} - g^{\sigma\nu}S^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}S^{\nu\rho} + g^{\rho\nu}S^{\mu\sigma}) \quad (9.4.29)$$

## 9.5 Clifford 代数

上一节中, 我们定义出来的  $\gamma^\mu$  有其独特的代数结构, 本节我们将它抽象出来, 提升到代数的角度研究  $\gamma^\mu$ .

**定义 9.6 (Clifford 代数)** Clifford 代数即满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (9.5.1)$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (9.5.2)$$

的代数.

**定义 9.7 (Slash)** 对于矢量  $A^\mu$ , 其 slash

$$\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu \quad (9.5.3)$$

**定理 9.8** 我们有如下常见 Clifford 代数结论

$$\not{p}\not{p} = p^2 \quad (9.5.4)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \quad (9.5.5)$$

$$\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = -2\not{p} \quad (9.5.6)$$

$$\gamma^\mu \not{p} \not{q} \gamma_\mu = 4pq \quad (9.5.7)$$

**证明.**

$$\not{p}\not{p} = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) p_\mu p_\nu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p^2 \quad (9.5.8)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = \gamma_\mu \gamma_\nu g^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4 \quad (9.5.9)$$

$$\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = \gamma^\mu \gamma^\alpha p_\alpha \gamma_\mu = (2g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\mu) p_\alpha \gamma_\mu = 2\not{p} - 4\not{p} = -2\not{p} \quad (9.5.10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu &= \gamma^\mu \gamma^\alpha p_\alpha q^\beta \gamma_\beta \gamma_\mu = (2g^{\mu\alpha} - \gamma^\alpha \gamma^\mu)(2g_{\beta\mu} - \gamma_\mu \gamma_\beta) p_\alpha q^\beta \\ &= 4pq - 2\not{p}\not{q} - 2\not{q}\not{p} + 4\not{p}\not{q} = 4pq \end{aligned} \quad (9.5.11)$$

**定理 9.9**

$$\Lambda_s^{-1} \gamma^\mu \Lambda_s = \Lambda_v^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (9.5.12)$$

其中  $\Lambda_v$  即  $\omega$  对应的对矢量的 Lorentz 变换矩阵.

**证明.** 考虑无穷小 Lorentz 变换.

$$\Lambda_s = (1 - \frac{1}{2}i\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}), \Lambda_s^{-1} = (1 + \frac{1}{2}i\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}) \quad (9.5.13)$$

于是

$$\Lambda_s^{-1} \gamma^\mu \Lambda_s = (1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}) \gamma^\mu (1 - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}) \quad (9.5.14)$$

$$= \gamma^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[S^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] \quad (9.5.15)$$

利用式(9.4.26)我们有

$$\Lambda_s^{-1}\gamma^\mu\Lambda_s = \gamma^\mu - \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(\gamma^\alpha g^{\beta\mu} - \gamma^\beta g^{\alpha\mu}) \quad (9.5.16)$$

$$= \gamma^\mu + \frac{1}{2}\omega_{\beta\alpha}g^{\beta\mu}\gamma^\alpha + \frac{1}{2}\theta_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}\gamma^\beta \quad (9.5.17)$$

$$= \gamma^\mu + \omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu \quad (9.5.18)$$

$$= (\delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu)\gamma^\nu \quad (9.5.19)$$

$$= (\Lambda_v)^\mu{}_\nu\gamma^\nu \quad (9.5.20)$$

其中

$$(\Lambda_v)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (9.5.21)$$

即矢量的 Lorentz 变换.

### 定理 9.10

$$\gamma^0\Lambda_s^\dagger\gamma^0 = \Lambda_s^{-1} \quad (9.5.22)$$

**证明.** 我们求生成元的共轭

$$S^{\mu\nu\dagger} = -\frac{i}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)^\dagger \quad (9.5.23)$$

$$= -\frac{i}{4}(\gamma^{\nu\dagger}\gamma^{\mu\dagger} - \gamma^{\mu\dagger}\gamma^{\nu\dagger}) \quad (9.5.24)$$

$$= \frac{i}{4}(\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0 - \gamma^0\gamma^\nu\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0) \quad (9.5.25)$$

$$= \gamma^0 S^{\mu\nu} \gamma^0 \quad (9.5.26)$$

然后由于  $\gamma^0\gamma^0 = 1$ , 所以  $\gamma^0$  可以从  $\Lambda_s^\dagger$  的两边拎入指数中:

$$\gamma^0\Lambda_s^\dagger\gamma^0 = \gamma^0 e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu\dagger}}\gamma^0 = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\gamma^0 S^{\mu\nu\dagger}\gamma^0} = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} = \Lambda_s^{-1} \quad (9.5.27)$$

**定理 9.11**  $\bar{\psi}\psi$  是 Lorentz 标量,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  是 Lorentz 矢量,  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi$  是 Lorentz 张量.

证明.

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rightarrow \psi^\dagger \Lambda_s^\dagger \gamma^0 \Lambda_s \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \Lambda_s^{-1} \Lambda_s \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = \bar{\psi}\psi \quad (9.5.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^\mu \psi &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi \rightarrow \psi^\dagger \Lambda_s^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Lambda_s \psi = \psi^\dagger \Lambda_s^{-1} \gamma^\mu \Lambda_s \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (\Lambda_v)^\mu{}_\nu \psi = (\Lambda_v)^\mu{}_\nu \gamma^\nu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (9.5.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^\nu \psi &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu \psi \rightarrow \psi^\dagger \Lambda_s^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^\nu \Lambda_s \psi = \psi^\dagger \Lambda_s^{-1} \gamma^\mu \Lambda_s \Lambda_s^{-1} \gamma^\nu \Lambda_s \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (\Lambda_v)^\mu{}_\alpha \gamma^\alpha (\Lambda_v)^\nu{}_\beta \gamma^\beta \psi = (\Lambda_v)^\mu{}_\alpha (\Lambda_v)^\nu{}_\beta \bar{\psi}\gamma^\alpha \gamma^\beta \psi \end{aligned} \quad (9.5.30)$$

## 9.6 Dirac 旋量的二次量子化

首先是第一步, 解 EoM. 设在 Weyl 基底下一个一般的解为  $(\psi_L \psi_R)^T$ , 于是 EoM 可以写为

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu \partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0 \quad (9.6.1)$$

在动量空间中有

$$\sigma^\mu p_\mu \psi_R = (E - \sigma \cdot \mathbf{p}) \psi_R = m \psi_L \quad (9.6.2)$$

$$\bar{\sigma}^\mu p_\mu \psi_L = (E + \sigma \cdot \mathbf{p}) \psi_L = m \psi_R \quad (9.6.3)$$

对于零质量 Fermion, 这个方程是解耦的:

$$\sigma^\mu p_\mu \psi_R = (E - \sigma \cdot \mathbf{p}) \psi_R = 0 \quad (9.6.4)$$

$$\bar{\sigma}^\mu p_\mu \psi_L = (E + \sigma \cdot \mathbf{p}) \psi_L = 0 \quad (9.6.5)$$

**定义 9.8 (螺旋度)**

$$H = \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (9.6.6)$$

可以发现

$$H\psi_R = \psi_R \quad (9.6.7)$$

$$H\psi_L = -\psi_L \quad (9.6.8)$$

$$(9.6.9)$$

可见,  $\psi_R, \psi_L$  分别是螺旋度的本征矢. 这里螺旋度的物理意义就是, 自旋指向和运动方向的夹角. 在这里我们发现, Weyl 旋量的左右手其实分别就是自旋方向和运动方向分别是左手螺旋和右手螺旋的关系.

我们一般认为中微子的  $m \approx 0$ , 所以中微子是具有固定的手型. 由于我们世界 **Parity** 的破缺, 导致自然界中其实基本上只存在左手中微子.

一般性的讨论结束, 我们开始从 **EoM** 中寻求可以拿来正则量子化的解. 设正能解  $\psi = u^s e^{-ipx}$ , 负能解  $\psi = v^s e^{ipx}$

对于  $u^s$

$$(\not{p} - m)u^s = 0 \quad (9.6.10)$$

在 Weyl 基底中即

$$\begin{pmatrix} -m & p^\mu \sigma_\mu \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu & -m \end{pmatrix} u^s = 0 \quad (9.6.11)$$

根据

$$(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = p^i p^j \sigma^i \sigma^j = p^i p^j (\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma^k) = p^i p^i = \mathbf{p}^2 \quad (9.6.12)$$

然后

$$(p \cdot \boldsymbol{\sigma})(p \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = (p^0 \sigma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})(p^0 \sigma^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (9.6.13)$$

$$= (p^0)^2 - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p})^2 = p^2 = m^2 \quad (9.6.14)$$

即 (都是算数平方根, 取正根, 这里没有负根的情况)

$$\sqrt{(p \cdot \boldsymbol{\sigma})(p \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}})} = \sqrt{m^2} = m \quad (9.6.15)$$

我们可以计算验证

$$\begin{pmatrix} -m & p^\mu \sigma_\mu \\ p^\mu \bar{\sigma}_\mu & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m\sqrt{p\sigma} \zeta_s + p\sigma \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \\ p\bar{\sigma} \sqrt{p\sigma} \zeta_s - m\sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix} \quad (9.6.16)$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \left( -m + \sqrt{(p\bar{\sigma})(p\sigma)} \right) \zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \left( \sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})} - m \right) \zeta_s \end{pmatrix} = 0 \quad (9.6.17)$$

所以

$$u^s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix} \quad (9.6.18)$$

是 **EoM** 的解.

对于  $v^s$  同理, 它满足

$$(\not{p} + m)v^s = 0 \quad (9.6.19)$$

可以验证

$$v^s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \eta_s \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix} \quad (9.6.20)$$

是满足 **EoM** 的解.

然后我们取正交基底张成  $u^s, v^s$  的解空间, 即我们取  $\zeta_1, \zeta_2$  以及  $\eta_1, \eta_2$  满足

$$\zeta_r^\dagger \zeta_s = \delta_{rs}, \eta_r^\dagger \eta_s = \delta_{rs} \quad (9.6.21)$$

然后取  $\zeta_s, \eta_s$  分别代入  $u^s, v^s$  得到  $u^s, v^s$  的解空间的基底.

我们可以验证正交性

$$\bar{u}^r u^s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_r^\dagger & \sqrt{p\sigma} \zeta_r^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix} = m\delta^{rs} + m\delta^{rs} = 2m\delta^{rs} \quad (9.6.22)$$

$$\bar{v}^r v^s = \begin{pmatrix} -\sqrt{p\bar{\sigma}} \eta_r^\dagger & \sqrt{p\sigma} \eta_r^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \eta_s \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix} = -m\delta^{rs} - m\delta^{rs} = -2m\delta^{rs} \quad (9.6.23)$$

$$\bar{u}^r v^s = \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_r^\dagger & \sqrt{p\sigma} \zeta_r^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \eta_s \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix} = 0 \quad (9.6.24)$$



于是

**定理 9.12**

$$\bar{u}^r u^s = -\bar{v}^r v^s = 2m\delta_{rs}, \bar{u}^r v^s = \bar{v}^r u^s = 0 \quad (9.6.25)$$

**定理 9.13**

$$\sum_s u^s \bar{u}^s = \not{p} + m \quad (9.6.26)$$

$$\sum_s v^s \bar{v}^s = \not{p} - m \quad (9.6.27)$$

**证明.** 根据  $\zeta_1, \zeta_2$  是  $\mathbb{C}^2$  上的完备正交基底, 所以

$$\sum_s \zeta_s \zeta_s^\dagger = 1 \quad (9.6.28)$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_s u^s \bar{u}^s &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \zeta_s \\ \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p\bar{\sigma}} \zeta_s^\dagger & \sqrt{p\sigma} \zeta_s^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})} \zeta_s \zeta_s^\dagger & p\sigma \zeta_s \zeta_s^\dagger \\ p\bar{\sigma} \zeta_s \zeta_s^\dagger & \sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})} \zeta_s \zeta_s^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m & p\sigma \\ p\bar{\sigma} & m \end{pmatrix} = p\gamma + m = \not{p} + m \end{aligned} \quad (9.6.29)$$

$$\begin{aligned} \sum_s v^s \bar{v}^s &= \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p\sigma} \eta_s \\ -\sqrt{p\bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{p\bar{\sigma}} \eta_s^\dagger & \sqrt{p\sigma} \eta_s^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \sum_s \begin{pmatrix} -\sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})} \eta_s \eta_s^\dagger & p\sigma \eta_s \eta_s^\dagger \\ p\bar{\sigma} \eta_s \eta_s^\dagger & -\sqrt{(p\sigma)(p\bar{\sigma})} \eta_s \eta_s^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -m & p\sigma \\ p\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix} = p\gamma - m = \not{p} - m \end{aligned} \quad (9.6.30)$$

**定理 9.14**

$$\bar{u}^s \gamma^\mu u_{s'} = 2p^\mu \delta_{ss'} \quad (9.6.31)$$

$$\bar{v}^s \gamma^\mu v_{s'} = 2p^\mu \delta_{ss'} \quad (9.6.32)$$

**证明.** 根据 Dirac 方程

$$\not{p}u^s = mu^s \quad (9.6.33)$$

$$\bar{u}^s \not{p} = m\bar{u}^s \quad (9.6.34)$$

于是

$$2m\bar{u}^s \gamma^\mu u_{s'} = \bar{u}^s \not{p} \gamma^\mu u_{s'} + \bar{u}^s \gamma^\mu \not{p} u_{s'} = p_\nu \bar{u}^s \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} u_{s'} = 2p^\mu \cdot 2m\delta_{ss'} = 4mp^\mu \delta_{ss'} \quad (9.6.35)$$

所以

$$\bar{u}^s \gamma^\mu u_{s'} = 2p^\mu \delta_{ss'} \quad (9.6.36)$$

同理

$$\bar{v}^s \gamma^\mu v_{s'} = 2p^\mu \delta_{ss'} \quad (9.6.37)$$

注: 但需要注意  $\bar{u}^s \gamma^\mu v_{s'} \neq 0$

因为考虑

$$2m\bar{u}^s \gamma^\mu v_{s'} = \bar{u}^s \not{p} \gamma^\mu v_{s'} - \bar{u}^s \gamma^\mu \not{p} v_{s'} = \bar{u}^s p_\nu [\gamma^\nu, \gamma^\mu] v_{s'} \neq 0 \quad (9.6.38)$$

接下来由于涉及到对易子的问题, 为了能够区分对易子的乘法顺序以及做乘法的方式 (内积还是外积), 我们对  $\gamma, \psi$  引入指标:

$$\psi \rightarrow \psi_A \quad (9.6.39)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}^A \quad (9.6.40)$$

$$\gamma^\mu \rightarrow \gamma^\mu_A{}^B \quad (9.6.41)$$

$$\not{p} \rightarrow \not{p}_A{}^B \quad (9.6.42)$$

那么

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}^A \psi_A = \psi_A \bar{\psi}^A \quad (9.6.43)$$

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow \psi_A \bar{\psi}^B = \bar{\psi}^B \psi_A \quad (9.6.44)$$

于是我们开始将 Dirac 场量子化

$$\psi_A = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s (u_A^s a_{\mathbf{p}}^s e^{-ipx} + v_A^s b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} e^{ipx}) \quad (9.6.45)$$

$$\bar{\psi}^A = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \sum_s (\bar{u}^{sA} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} e^{ipx} + \bar{v}^{sA} b_{\mathbf{p}}^s e^{-ipx}) \quad (9.6.46)$$

然后我们尝试计算两点关联函数

$$\langle 0 | \psi_A(y) \bar{\psi}^B(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{\not{p}_A^B + m}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \quad (9.6.47)$$

$$= (-i\not{\partial}_A^B + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \quad (9.6.48)$$

$$\langle 0 | \bar{\psi}^B(x) \psi_A(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} \frac{\not{p}_A^B - m}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{ip(x-y)} \quad (9.6.49)$$

$$= (i\not{\partial}_A^B - m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip(x-y)} \quad (9.6.50)$$

考虑 Fermion 的反交换性, 我们定义

$$\mathcal{T} \{ \psi_A(y) \bar{\psi}^B(x) \} \equiv \psi_A(y) \bar{\psi}^B(x) \Theta(y^0 - x^0) - \bar{\psi}^B(x) \psi_A(y) \Theta(x^0 - y^0) \quad (9.6.51)$$

于是可得 Feynman 传播子

$$\langle \psi_A(y) \bar{\psi}^B(x) \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}_A^B + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ip(x-y)} \quad (9.6.52)$$

## 9.7 C,P,T 变换

在本节我们尝试讨论对场的  $C, P, T$  变换.

首先是  $P$  变换: 我们定义  $P$  变换为

## 9.8 旋量 QED

然后我们尝试和电磁场耦合. 同样考虑局部  $U(1)$  规范变换, 即

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi \quad (9.8.1)$$

设

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (9.8.2)$$

让局域  $U(1)$  规范变换对  $A_\mu$  满足

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad (9.8.3)$$

则

$$D_\mu(e^{-i\alpha}\psi) = e^{-i\alpha}D_\mu\psi \quad (9.8.4)$$

于是根据最小耦合原理我们可以得到 **Lagrangian**

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^2 \quad (9.8.5)$$

即

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu - m)\psi - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (9.8.6)$$

于是我们发现电流项

$$J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (9.8.7)$$

## 9.9 Majorana 旋量

# A Clebsch-Gordan 系数表

## 34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND $d$ FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over every coefficient, e.g., for  $-8/15$  read  $-\sqrt{8/15}$ .

|       |       | $J$          | $J$ | ... |
|-------|-------|--------------|-----|-----|
|       |       | $M$          | $M$ | ... |
| $m_1$ | $m_2$ |              |     |     |
| $m_1$ | $m_2$ | Coefficients |     |     |
| .     | .     |              |     |     |
| .     | .     |              |     |     |
| .     | .     |              |     |     |

$$\begin{aligned}
 Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\
 Y_1^1 &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\
 Y_2^0 &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \\
 Y_2^1 &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi} \\
 Y_2^2 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}
 \end{aligned}$$

$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$ 
 $d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$

$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$

$d_{0,0}^1 = \cos \theta$ 
 $d_{1/2,1/2}^1 = \cos \frac{\theta}{2}$ 
 $d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ 
 $d_{1/2,-1/2}^1 = -\sin \frac{\theta}{2}$ 
 $d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$ 
 $d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$

$d_{3/2,3/2}^3 = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ 
 $d_{3/2,1/2}^3 = -\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2}$ 
 $d_{3/2,-1/2}^3 = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$ 
 $d_{3/2,-3/2}^3 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$ 
 $d_{1/2,1/2}^3 = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ 
 $d_{1/2,-1/2}^3 = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$

$d_{2,2}^2 = \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2$ 
 $d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$ 
 $d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$ 
 $d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$ 
 $d_{2,-2}^2 = \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2$

$d_{1,1}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$ 
 $d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$ 
 $d_{1,-1}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$ 
 $d_{0,0}^2 = \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

**Figure 34.1:** The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

图 A.1: Clebsch-Gordan 系数表

## 参考文献

- [1] David J. Griffiths(王青译). 粒子物理导论. 机械工业出版社, 2021. Chap. 6, pp. 153–155.
- [2] David J. Griffiths(王青译). 粒子物理导论. 机械工业出版社, 2021. Chap. 3, pp. 74–81.
- [3] Tom Lancaster and Stephen J. Blundell. *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. 世界图书出版公司, 2023.
- [4] Link. “Noether 定理”. In: 知乎 (2025). URL: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/19149112768>.
- [5] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *Introduction to Quantum Field Theory*. 世界图书出版公司, 2018. Chap. 2, pp. 27–33.
- [6] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014. Chap. 7, pp. 82–83.
- [7] 周洋. *QM Review and Lecture*. 复旦大学量子场论 PHYS60022.01 课程讲义, 2025.
- [8] 東雲正樹. “谁能通俗解释下，费曼图是如何做出来的呢?” In: 知乎 (2025). URL: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/2460633052>.

## 致谢

感谢黄海洋学长的指导以及纠错、谭骐忠同学的纠错.