2020
ok

جامعة الملك سعود
كلية العلـــــــوم
قسم الرياضيـــــات

تمارين 151 ريض
نظرية الرسومات
GRAPH THEORY
(5.5)
الأشجار

(خواص أساسية & أشجار التقصي)

TREES - BASIC PROBERIES
&
SEARCH TREES

Malek Zein AL-Abidin

1440 هـ
2018

الأشجار- خواص أساسية

TREES - BASIC PROBERIES

مقدمة: الأشجار عائلة من الرسومات البسيطة التركيب والتي لها مجال واسع من التطبيقات العملية، منها على سبيل المثال

- إيجاد عدد بعض الأنماط من المركبات الكيميائية .
- إنشاء خوارزميات فعالة لإيجاد معلومة معينة في قائمة البيانات .
- إنشاء شبكات بأقل تكلفة ممكنة .
- إنشاء شفرات فعالة في تصنيف و فرز و إرسال البيانات .
- ترتيب هرمية الموظفين في المؤسسات الكبيرة .
- ترتيب الملفات في الحواسيب .

forest → has no cycles

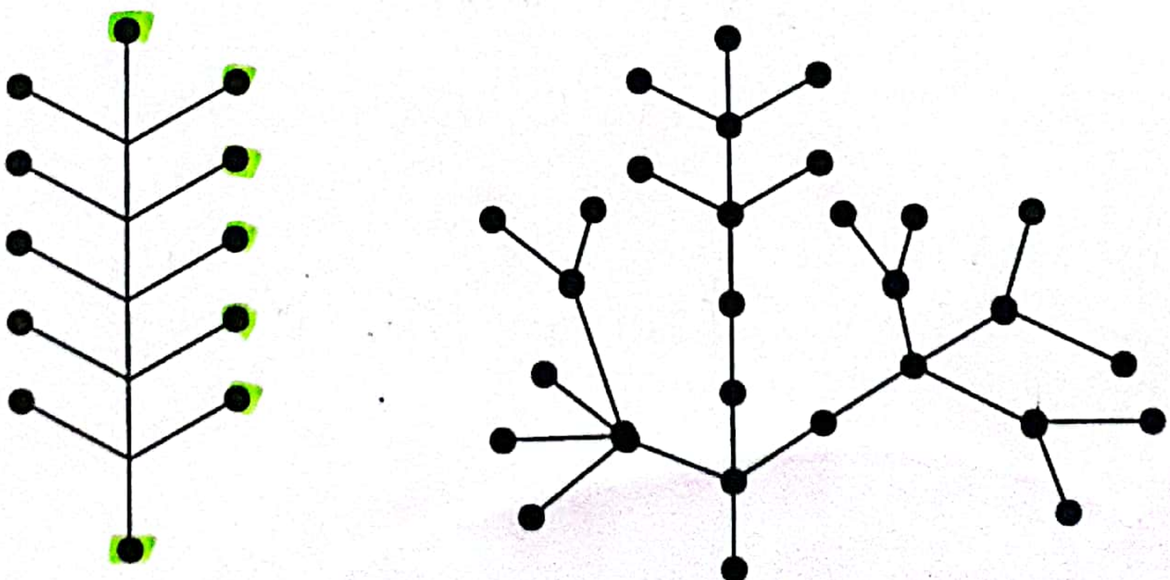
تعريف(1) : ليكن $G = (V, E)$ رسماً بسيطاً . نقول إن G غابة (*forest*) إذا كان G لا يحتوي على دورات .

تعريف (2) : ليكن $G = (V, E)$ رسماً بسيطاً . نقول إن G شجرة (*tree*) إذا كان G مترابطاً و لا يحتوي على دورات .

T: (1) has no cycles (2) Connected

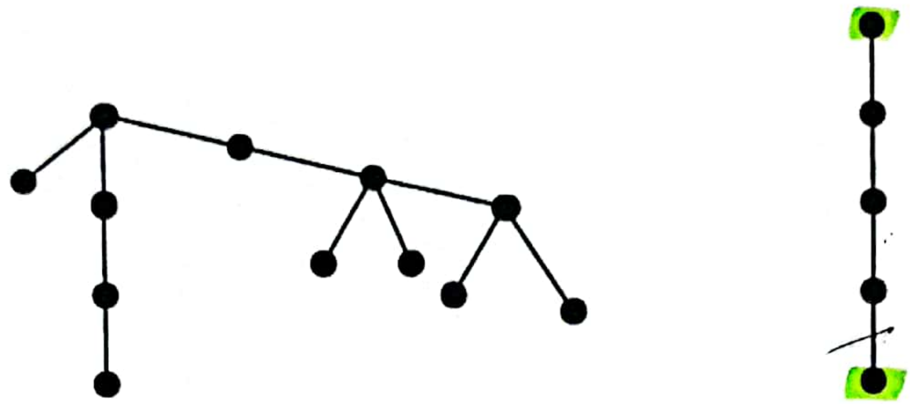
مثال (1) :

الشكل أدناه يبين لنا غابة تحتوي على أشجار:



T_1 T_2

forest



من الشكل أعلاه يتبين لنا أن الغابة هي مجموعة من الأشجار غير مترابطة .

مبرهنة(1) : إذا كانت $T = (V , E)$ شجرة حيث $|V| > 1$ فإنه يوجد على الأقل رأسان في T درجة كل منهما تساوي 1 .

مبرهنة(2) : لكل عدد صحيح $n \geq 1$ ، كل شجرة T عدد رؤوسها n $|V|=n$ يكون عدد أضلاعها $|E|= n - 1$

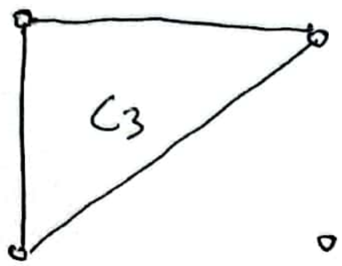
مبرهنة(3) : ليكن $T = (V , E)$ رسماً مترابطاً حيث $|V| = n$. عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا كان $|E| = n - 1$.

مبرهنة(4) : ليكن $T = (V , E)$ رسماً لا يحتوي على دورات بحيث $|V| = n$. عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا كان $|E| = n - 1$.

مبرهنة(5) : ليكن $T = (V , E)$ رسماً مترابطاً . عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا كان كل ضلع في T جسراً .

مبرهنة(6) : ليكن $T = (V , E)$ رسماً بسيطاً . عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا وجد ممر وحيد من x إلى y لكل $x , y \in V$ ، $x \neq y$.

مبرهنة(7) : ليكن $T = (V , E)$ رسماً . عندئذ، T شجرة إذا و فقط إذا كان T لا تحتوي على دورات و كان T يحقق الشرط التالي : إن إضافة ضلع جديد إلى E تجعلنا نحصل على رسم يحتوي على دورة وحيدة .



– G –

$|V| = 4$, $|E| = 3 = 4 - 1 = |V| - 1$

But not a tree.

has cycle C_3 and not connected

ملاحظة

Theorem: مبرهنة

T is a tree $\Rightarrow |E| = |V| - 1$;

(6) Exam. إذا كانت $T = (V, E)$ شجرة حيث $|V| > 1$ فأثبت أن T رسم ثنائي التجزئة .

Q6. Let $T=(V,E)$ be a tree where $|V| > 1$, Show that T is a bipartite graph .

$\because$ T is a tree $\Rightarrow$ T has no cycles $\Rightarrow \therefore$ T has no odd cycles $\Rightarrow \therefore$ T is a bipartite graph.

---

(7) إذا كان G رسماً لا يحتوي على دورات و عدد رؤوسه n و عدد مركباته k فأثبت أن عدد اضلاعه $n-k$

Q7. Let G be a graph that does not contain cycles and the number of vertices is n and the number of its components is k. Prove that the number of edges is n-k.

الإثبات :

(8) أي من الرسومات $K_{m,n}$ شجرة ؟ و لماذا؟

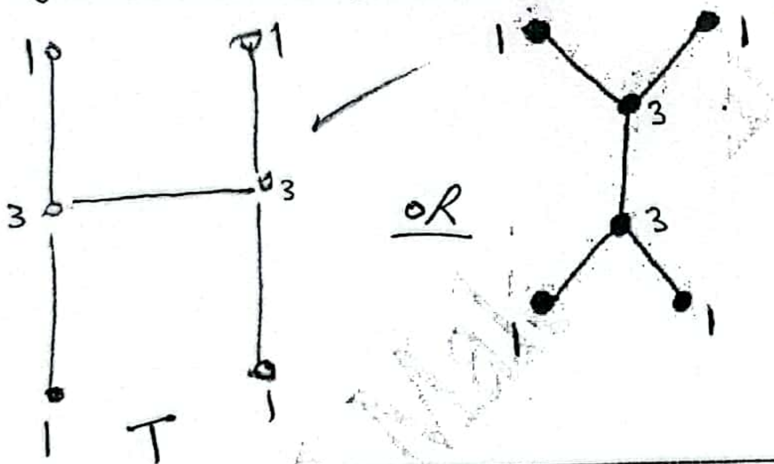
Q8. Which of the graphs $K_{m,n}$ are trees? Explain the answer.

$m=1$ or $n=1 \Rightarrow K_{1,n} \cong T$

Cause $K_{1,n}$ connected have no cycles, otherwise have cycles;

(9) هل يوجد شجرة متتالية درجاتها : 1 ، 1 ، 1 ، 1 ، 3 ، 3 ؟ علل إجابتك .

Q9. Is there a tree with the given degree sequence : 1, 1, 1, 1, 3, 3? Explain the answer.



(10) ليكن $G=(V,E)$ رسماً مترابطاً . نقول إن G وحيد الدورات إذا احتوى على دورة واحدة فقط . أثبت أن G وحيد الدورات إذا و فقط إذا كان $|V|=|E|$.

#8]

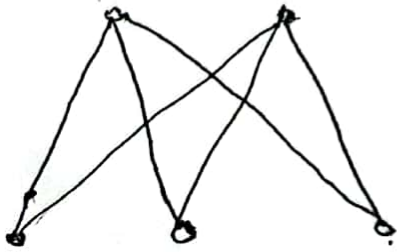
$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{1,4}$

$\therefore K_{1,n}$ is a tree

Connected and has no cycles

$K_{2,2}$

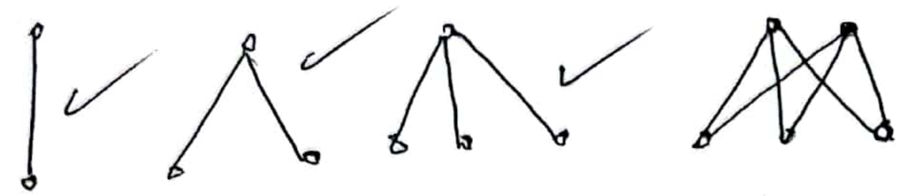
has cycles.



$K_{2,3}$

has cycles

Q 8



$K_{1,1}$ $K_{1,2}$ $K_{1,3}$ $K_{2,3}$ not a tree has cycles

Trees

must Be: $m=1$ or $n=1$

Connected & has no cycles

$$\Downarrow$$

$$K_{1,n} \cong T.$$

(11) بين صحة أو خطأ كل واحدة من العبارات التالية مع التعليل:

Q11. Decide whether the statement is true or false ,with explanation.

(أ) كل رسم غير بسيط يحتوي على دورة .

Each non-simle graph contains a cycle

(ب)كل رسم تام ثنائي التجزئة .

Each complete graph is a bipartite

(ج)كل رسم منتظم من النوع واحد شجرة .

Each regular graph with degree 1 is a tree

(د)الرسم المتمم لكل شجرة هو شجرة .

The complementary graph of each tree ia also tree .

---

(12) أوجد العدد الصحيح k إذا علمت أنه توجد شجرة متتالية درجات رؤوسها $1,1,1,1,2,2,k,2k$

Q12. Find the integer k if you know that there is a tree with the given degree sequence $1,1,1,1,2,2,k,2k$

Sol. $\because$ T is a tree $\Rightarrow |E| = |V| - 1$ (مبرهنة).

$$\boxed{\sum_{i=1}^{8} \deg v_i = 2|E|}$$

$\Rightarrow 1+1+1+1+2+2+k+2k = 2|E|$

$8+3k = 2|E| \Rightarrow |E| = 4 + \frac{3}{2}k$

$\Rightarrow 4 + \frac{3}{2}k = 8 - 1 = 7$

$\frac{3}{2}k = 3 \Rightarrow \boxed{k = 2}$ ✓

(13) ارسم كل الغابات غير المتماثلة التي عدد رؤوس كل منها 4 .

Q13. Draw all ***nonisomorphic*** forests with a number of vertices each 4.

---

(14) جد مع التعليل، عدد رؤوس الشجرة التي فيها درجة أحد الرؤوس 31 و درجة كل رأس آخر 1 .

Q14. Find The number of vertices of a tree with the degree of a vertex 31 and the degree of each other vertex is 1. Explain the answer?

Let: $|V| = x+1 \Rightarrow |E| = |V| - 1 = x$

$\sum \deg v_i = 1(31) + x(1) = 2|E| = 2x$

$\Rightarrow x = 31 \Rightarrow \therefore |V| = 31 + 1 = \boxed{32}$

---

(15) إذا كانت T شجرة درجات رؤوسها هي : $1,1,1,1,3,d$ فأوجد قيمة d ؟

Q15. Find the integer d if you know that there is a tree with the given degree sequence : *1,1,1,1,3,d*

Sol. $\because T$ is a tree $\Rightarrow \therefore |E| = |V| - 1 \quad (*)$

?

$\sum_{i=1}^{6} \deg v_i = 2|E| \Rightarrow 1+1+1+1+3+d = 2|E|$

$\Rightarrow 7+d = 2|E| \Rightarrow |E| = \frac{7+d}{2}$.

Subst. into $(*)$ $\Rightarrow \frac{7+d}{2} = 6 - 1 = 5 \Rightarrow 7+d = 10 \Rightarrow \boxed{d=3}$

Scanned with CamScanner

$\#12^{(*)}$

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E|$$

$$1+1+1+1+2+2+K+2K = 2|E|.$$

$$8+3K = 2|E|$$

$$\underbrace{|E| = 4+\tfrac{3}{2}K}.$$

$$\because G \trianglelefteq T \Rightarrow |E| = |V|-1.$$

$$4+\tfrac{3}{2}K = 8-1 = 7$$

$$\tfrac{\cancel{3}}{2}K = \cancel{3} \Rightarrow \frac{K}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{K=2}$$

$\#14$

$$|V| = 1+X \Rightarrow |E| = |V|-1 = X.$$

degree $=31$ degree $=1$.

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E| \Rightarrow 1(31)+X(1) = 2X$$

$$\Rightarrow 2X - X = 31 \Rightarrow \boxed{X=31}$$

$$|V| = 1+31 = \boxed{32}$$

Scanned with CamScanner

(16) إذا كانت T شجرة تحتوي بالضبط 20 رأساً درجة كل واحد منها 2 و x رأساً درجة كل واحد منها 1 ، فأوجد x .

Q16. Let T be a tree contains exactly 20 vertices the degree of each of them is 2 and x vertices the degree of each of them is 1. find x ?

$\because$ T is a tree $\Rightarrow$ $|E| = |V| - 1$ $\because |V| = 20 + x$.

$= 19 + x$

$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E|$

$20(2) + x(1) = 2|E|$

$40 + x = 2|E| \Rightarrow |E| = 20 + \frac{x}{2}$

$20 + \frac{x}{2} = 19 + x$

$\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

(17) إذا كانت T شجرة درجات رؤوسها هي : $1,1,1,1,4,d,d,d$ فأوجد قيمة d ؟

Q17. Find the integer d if you know that there is a tree with the given degree sequence : $1,1,1,1,4,d,d,d$

H.w.

(18)

أي من التقارير التالية خاطئ :

(أ) $K_{3,3}$ رسم منتظم (ب) $K_{3,3}$ ليس شجرة (ج) $K_{3,3}$ رسم مترابط (د) متمم $K_{3,3}$ رسم غير منتظم

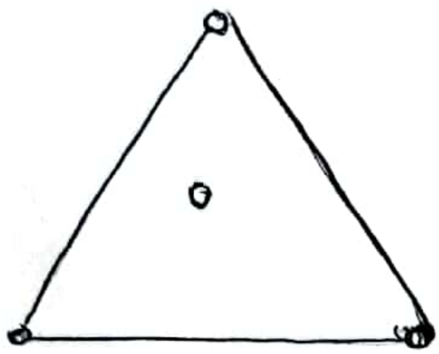
(19) بين صحة أو خطأ كل من التقريرين التاليين, مع التعليل :

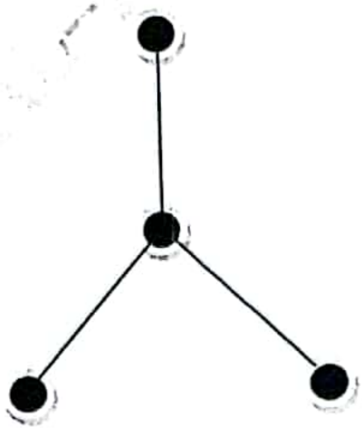
(أ)كل رسم بسيط $G = (V, E)$ فيه $|V| = n$ بحيث $|E| = n - 1$ هو شجرة .

There is no bridge in K_n $(n \geq 1)$. $(n \geq 1)$ K_n (ب)لا يوجد جسور في أي رسم تام

* (22) بين فيما إذا كان متمم الشجرة الموضحة أدناه، هو شجرة أيضاً

Q22. Decide whether the complementary tree of the given tree is also tree?





$\overline{T}$ T

$\overline{T}$ is not a tree

Cause: have cycles

and not connected.

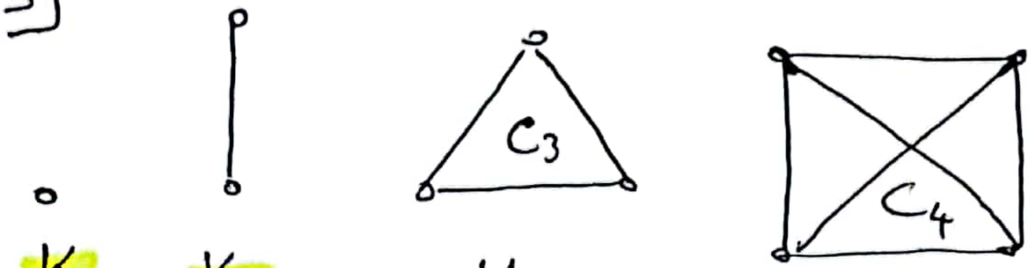
* (23) حدد قيم n التي يكون فيها الرسم التام K_n شجرة .

Q23. Determine the value of n such that K_n to be tree ?

K_1 , K_2 are Trees

the otherse not a tree Cause have cycles.

#23)



K_1 ✓ K_2 ✓ K_3 ✗ K_4 ✗

have cycles → ✗

$n = 1, 2$.

Exam Q4. (a) Let T be a tree with n vertices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, where $n > 2$. Find $\deg(v_n)$ if you know that $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \cdots = \deg(v_{n-1}) = 1$. (2 pts)

Answer:

$\because T$ is a tree $\Rightarrow |V| = n$ & $|E| = |V| - 1 = n-1$.

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = \underbrace{\deg v_1 + \deg v_2 + \cdots + \deg v_{n-1}}_{} + \deg v_n = 2|E|$$

?

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{(n-1)\text{ times}} + \deg v_n = 2(n-1),$$

$$\|$$

$$(n-1)1 + \deg v_n = 2(n-1).$$

$$\therefore \deg v_n = 2(n-1) - (n-1)$$

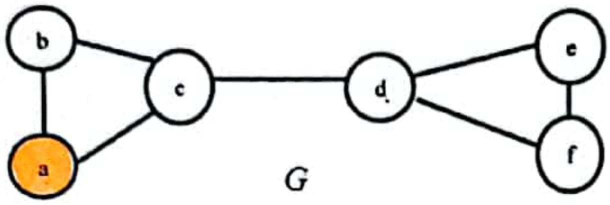
$$\deg v_n = n-1.$$

#

(8)

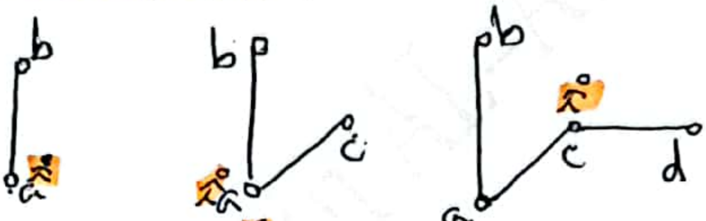
(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها a للرسم G أدناه .

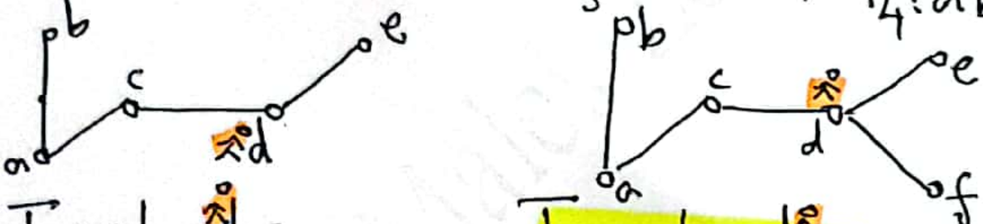


G

(i) Breadth-first search tree .

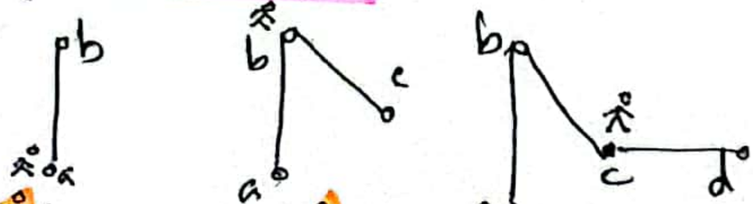


T_1: a , T_2: ab , T_3: abc , T_4: abcd

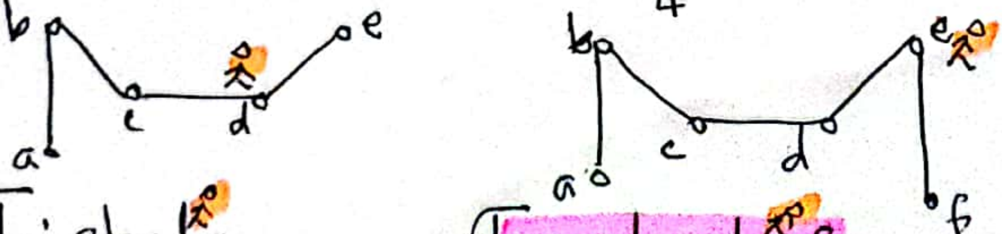


T_5: abcde , T_6: abcdef

(ii) Depth-first search tree



T_1: a , T_2: ab , T_3: abc , T_4: abcd

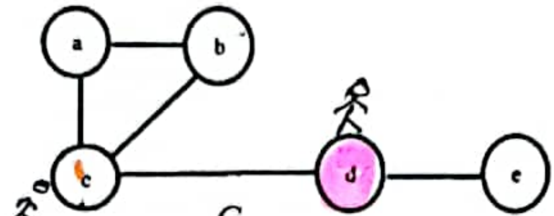


T_5: abcde , T_6: abcdef

(9)

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها d للرسم G أدناه .

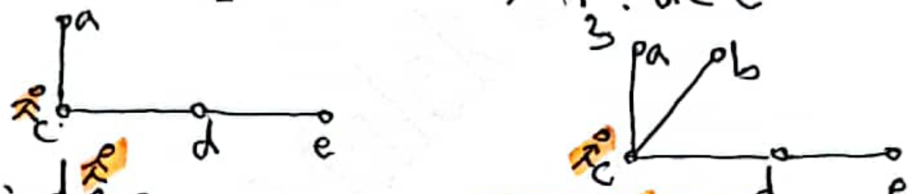
(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها d للرسم G أدناه .



G

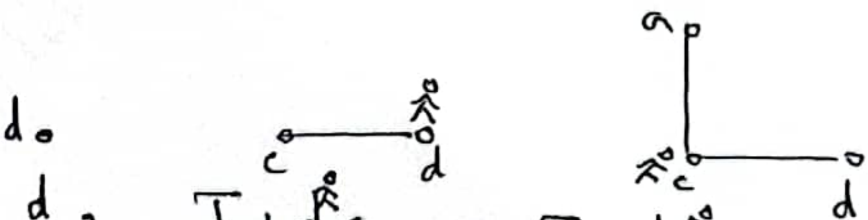
Breadth - first search tree .

T_1: d , T_2: dc , T_3: dce

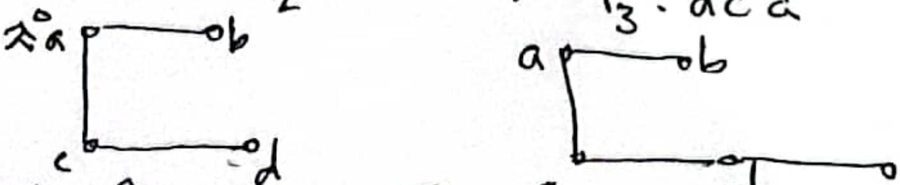


T_4: dcea , T_5: dceab

Depth - first search tree



T_1: d , T_2: dc , T_3: dca

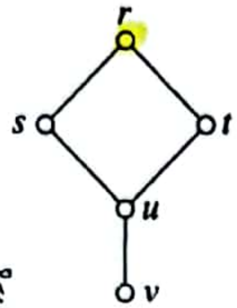


T_4: dcab , T_5: dcabe

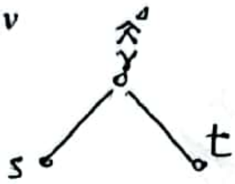
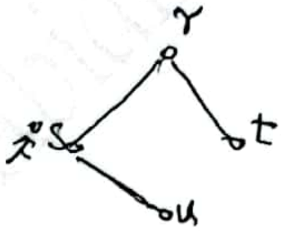
(5) ✓

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .

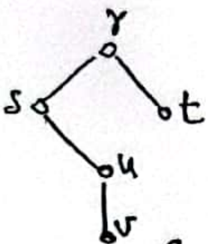
(ب) جد شجرة تقص عمقي (طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها r للرسم G أدناه .



(i) Breadth

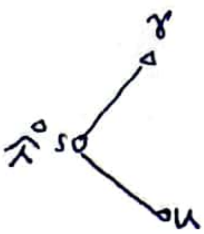




$T_1 : r$ $T_2 : rs$ $T_3 : rst$, $T_4 : rstu$

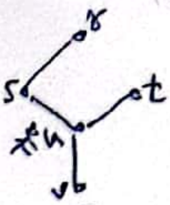


$T_5 : rstuv$

(ii) Depth.


$T_1 : r$ $T_2 : rs$, $T_3 : rsu$, $T_4 : rsuv$



$T_5 : rsuvt$

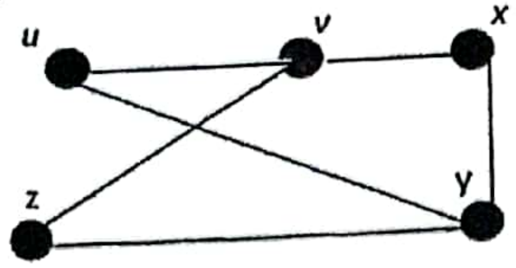
(6) H.W.

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها u للرسم G أدناه .

Find the *Breadth-first search tree of root* u *for the graph* G

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها u للرسم G أدناه .

Find the *Depth -first search tree of root* u *for the graph* G



G

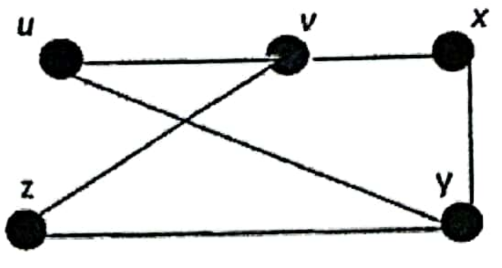
(6) H.W.

(أ) جد شجرة تقص عرضي (*Breadth-first search tree*) جذرها u للرسم G أدناه .

Find the *Breadth-first search tree of root* u *for the graph* G

(ب) جد شجرة تقص عمقي(طولي) (*Depth-first search tree*) جذرها u للرسم G أدناه .

Find the *Depth -first search tree of root* u *for the graph* G



G