

King Saud University

College of Science

Department of Mathematics

151 Math Exercises

(5.3)

Isomorphic Graphs

Malek Zein AL-Abidin

Δ 1443

2022

الرسومات المتماثلة ISOMORPHIC GRAPHS

تعريف

ليكن $G = (V(G), E(G))$ و $H = (V(H), E(H))$ رسمين بسيطين، وليكن $f: V(G) \rightarrow V(H)$ تطبيقاً. نقول إن f تماثل من G إلى H إذا تحقق التالي:

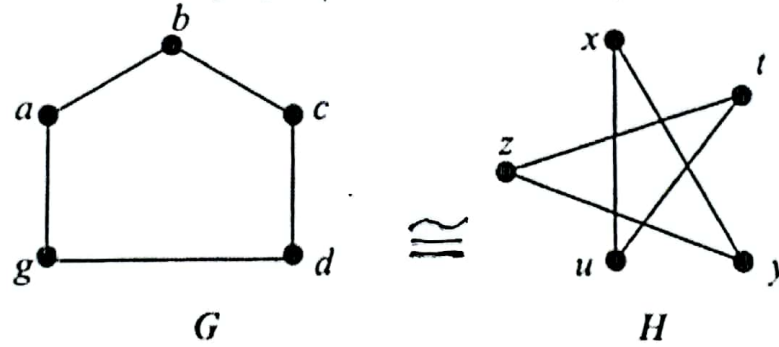
(أ) f تطبيق متباين وشامل (أي f تقابل).

(ب) لكل $x, y \in V(G)$ فإن $\{x, y\} \in E(G)$ إذا وفقط إذا كان $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$ $\Rightarrow \{x, y\} \in E(G) \Rightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(H)$

في هذه الحالة نقول إن G و H متماثلان ونكتب $G \cong H$.

مثال

بين ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا وعلل إجابتك:



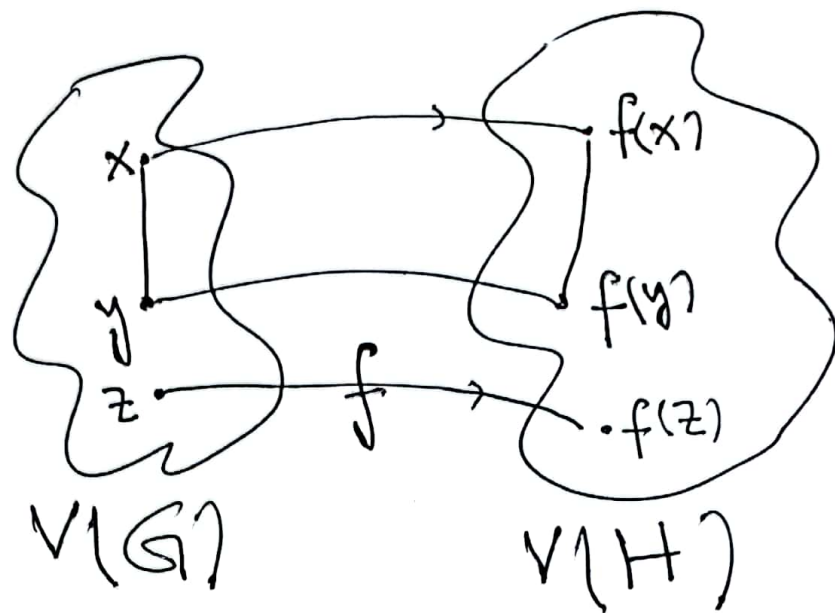
الحل

نعرف التطبيق $f: V(G) \rightarrow V(H)$ كما يلي:

v	a	b	c	d	g
$f(v)$	x	y	z	t	u

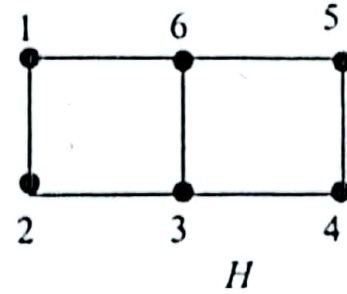
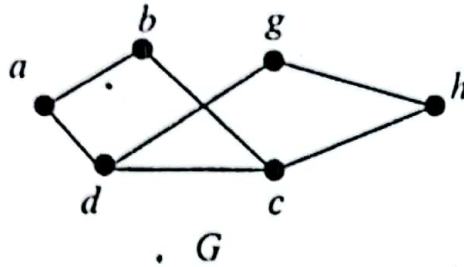
يستطيع القارئ أن يرى بسهولة أن f تماثل من G إلى H وبالتالي، فإن

$$\square G \cong H$$



مثال

بين ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا وعلل إجابتك.



الحل

نعرف التطبيق $f: V(G) \rightarrow V(H)$ كما يلي:

x	a	b	c	d	g	h
$f(x)$	2	1	6	3	4	5

واضح أن f تماثل من G إلى H وبالتالي فإن $G \cong H$ □

مبرهنة للحفظ ✓

ليكن $f: V(G) \rightarrow V(H)$ تماثلاً من الرسم البسيط G إلى الرسم البسيط H .

عندئذ :

(أ) $|E(G)| = |E(H)|$ و $|V(G)| = |V(H)|$

(ب) $\deg f(x) = \deg x$ لكل $x \in V(G)$

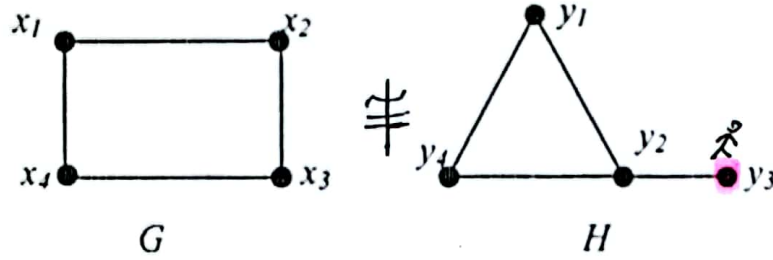
(ج) عدد الرؤوس التي درجة كل منها m في G يساوي عدد الرؤوس التي درجة كل منها m في H

(د) عدد الدورات التي طول كل منها l في G يساوي عدد الدورات التي طول كل منها l في H

(هـ) عدد مركبات الرسم G يساوي عدد مركبات الرسم H

؟

بين ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا وعلل إجابتك:



الحل

G لا يماثل H ، لأن $\deg y_2 = 3$ بينما لا يوجد رأس في G درجته 3 \square

مثال ✓

جد جميع الرسومات ثنائية التجزئة التامة غير المتماثلة التي عدد رؤوس كل

منها 6 .

الحل

عدد رؤوس الرسم $K_{m,n}$ يساوي $m+n$ ، إذن، $m+n=6$. وبالتالي فإن

الرسم المطلوبة هي: $K_{3,3}$ ، $K_{2,4}$ ، $K_{1,5}$ \square

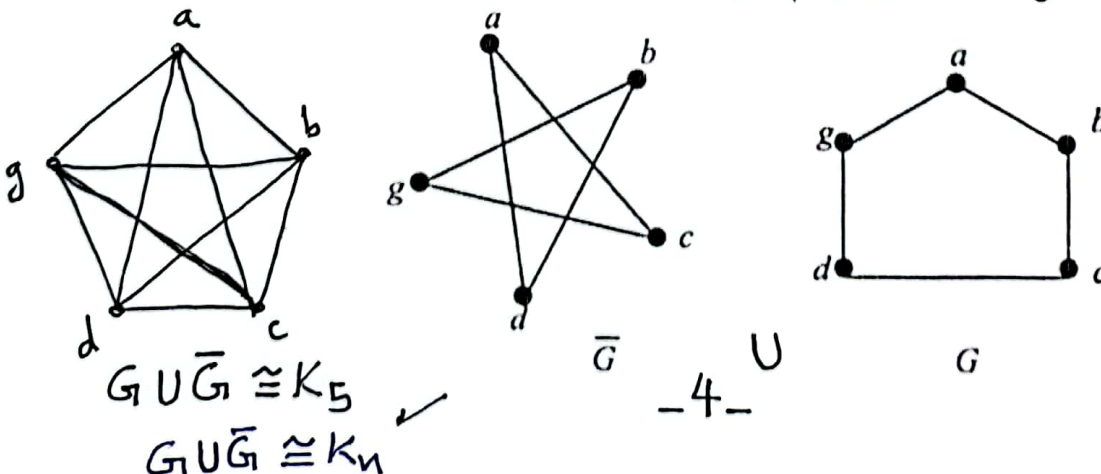
تعريف

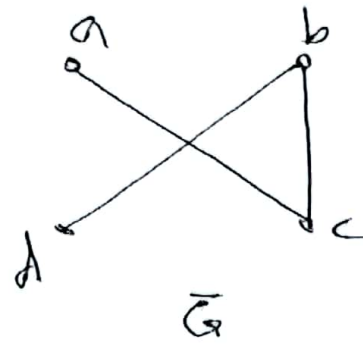
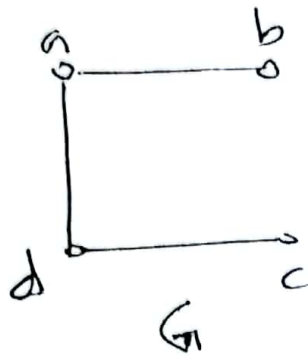
ليكن $G = (V, E)$ رسماً بسيطاً. يعرف متمم G ($\text{complement of } G$) على

أنه الرسم $\bar{G} = (V, \bar{E})$ حيث لكل $x, y \in V$ ، $x \neq y$ فإن:

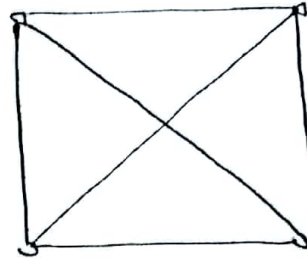
$\{x, y\} \in \bar{E}$ إذا وفقط إذا كان $\{x, y\} \notin E$.

مثال: الشكل أدناه يبين الرسم G ومتممه \bar{G} .





$$G \cup \bar{G} \cong$$



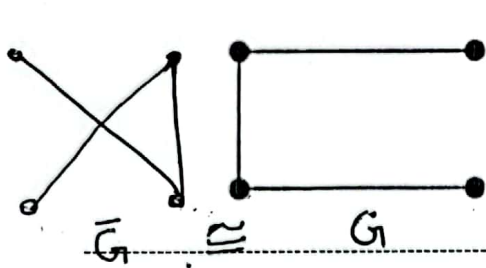
K_4

$$G \cup \bar{G} \cong K_n$$

Proof Theorem: $|E(G)| + |E(\bar{G})| = |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$.

✓ تعريف

نقول إن الرسم البسيط G ذاتي التتميم (self-complementary) إذا كان $G \cong \bar{G}$.



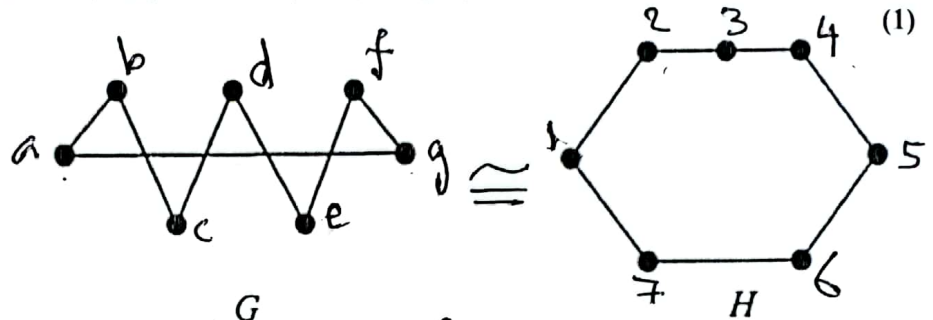
مثال K_4 $\Rightarrow G \cup \bar{G} \cong K_4$

الرسم G المبين في الشكل التالي ذاتي التتميم.

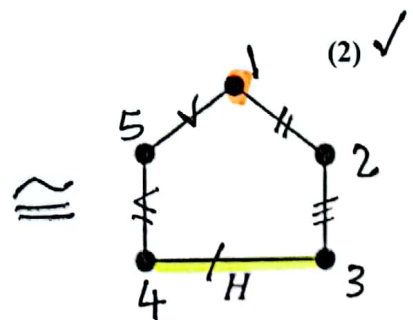
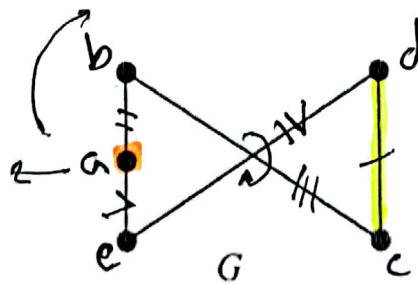
$G \cup \bar{G} \cong K_n$ ✓

تمارين

س1: في التمارين من (1) إلى (33)، بين ما إذا كان الرسمان المعطيان متماثلين أم لا و علل إجابتك.
Q. Show that the graphs $G = (V, E)$ and $H = (W, F)$, displayed in the Figure, are isomorphic.

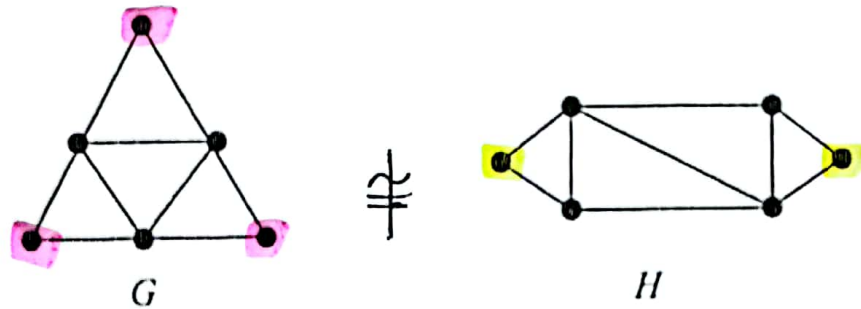


v	a	b	c	d	e	f	g
$f(v)$	1	2	3	4	5	6	7

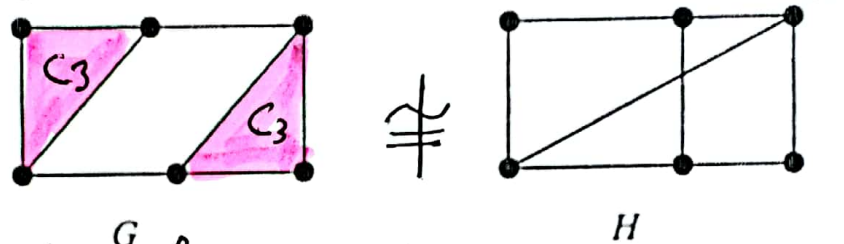


x	a	b	c	d	e
$f(x)$	1	2	3	4	5

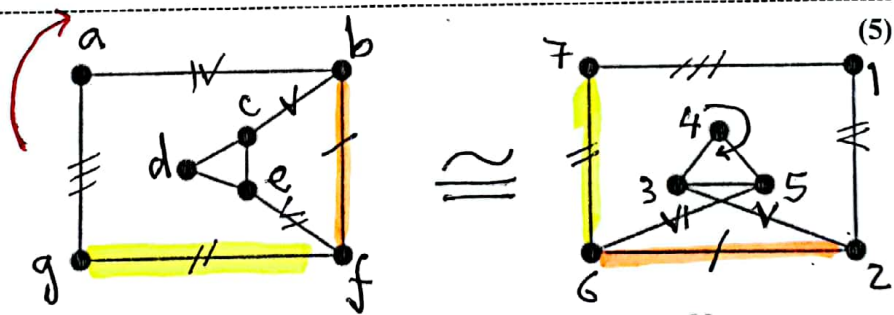
(3)



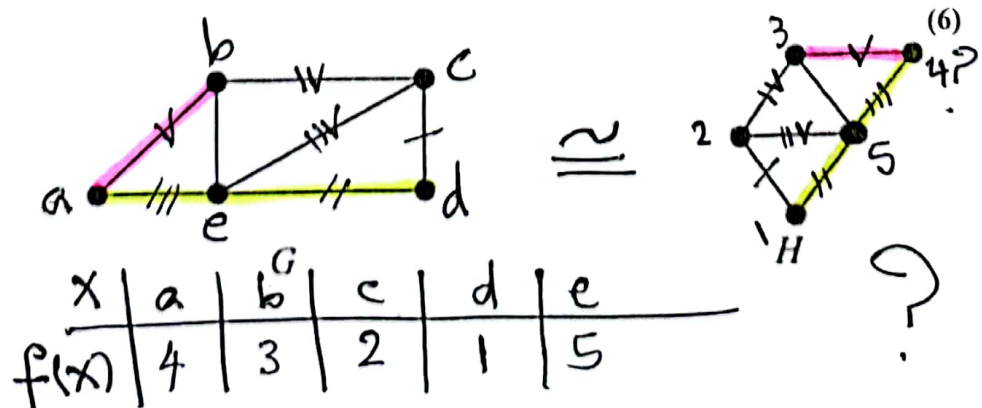
G have 3 vertices of degree 2 but H have only 2 vertices of degree 2



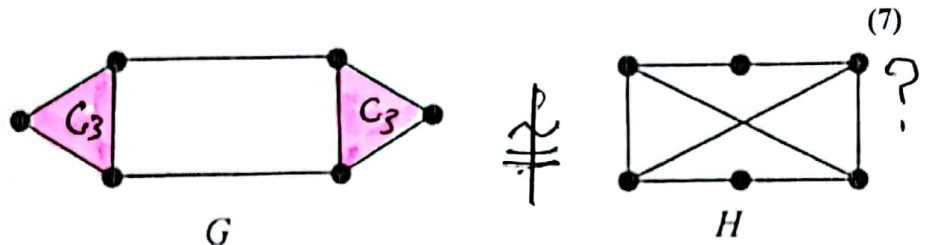
G have 2 Cycles of C_3 but H doesn't have.



x	a	b	c	d	e	f	g
f(x)	1	2	3	4	5	6	7

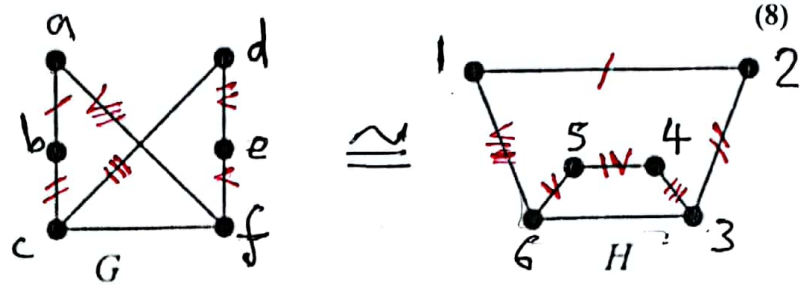


x	a	b	c	d	e
f(x)	4	3	2	1	5

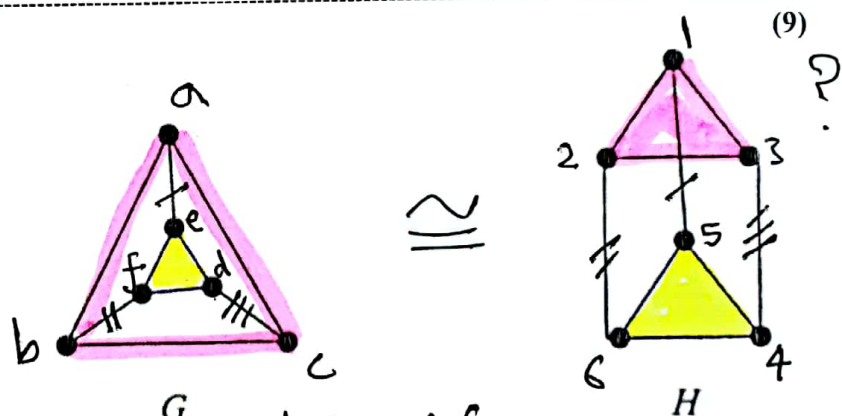


Cause:

G have 2 cycles of C_3 , but H doesn't have.

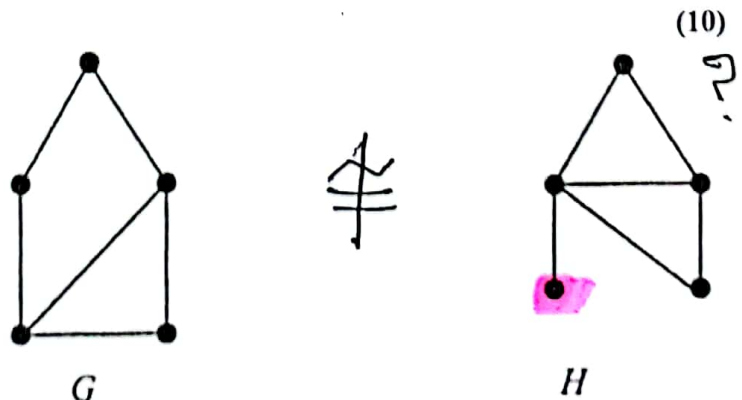


x	a	b	c	d	e	f
$f(x)$	1	2	3	4	5	6

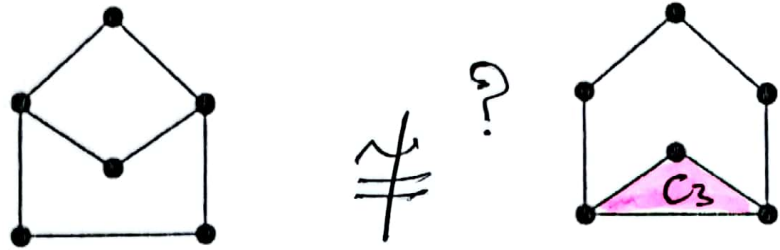


(10)

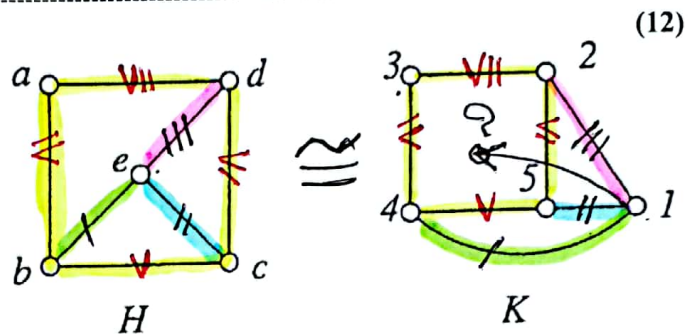
x	a	b	c	d	e	f
$f(x)$	1	2	3			



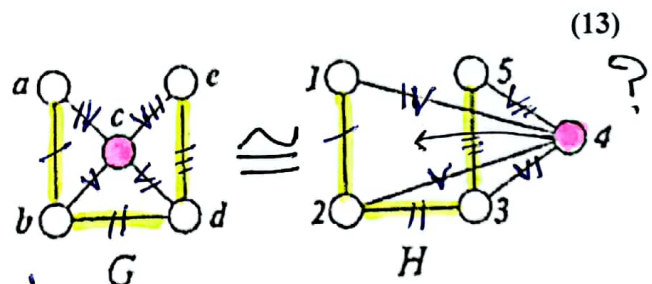
Cause: H have 1 vertex of degree 1
But G doesn't have. (7)



H has C_3 Cycle but G doesn't have.

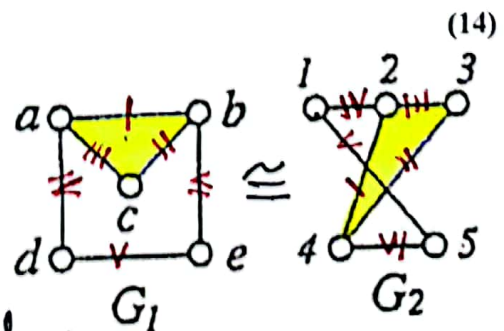


x	a	b	c	d	e
f(x)	3	4	5	2	1



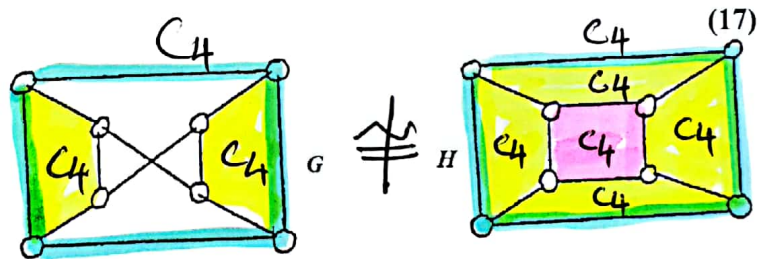
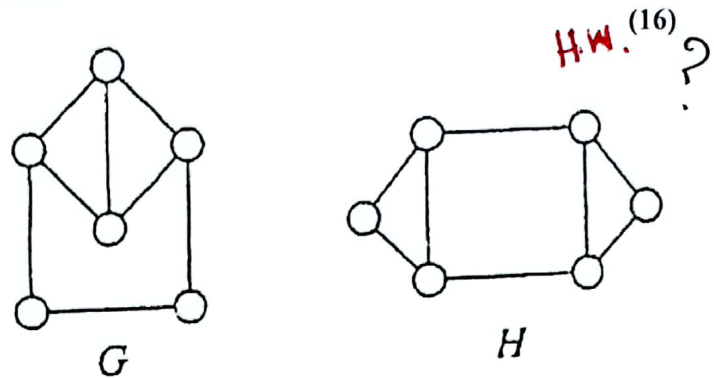
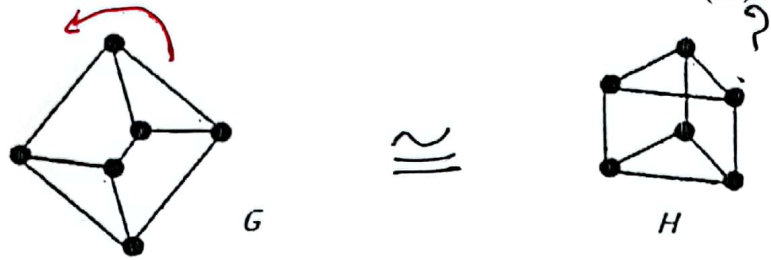
51

x	a	b	c	d	e
f(x)	1	2			

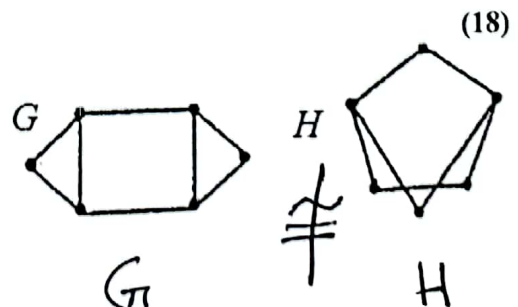


x	a	b	c	d	e
f(x)	2	4	3	1	5

(8)



G have only 4 cycles of C_4 but H have 6 of C_4

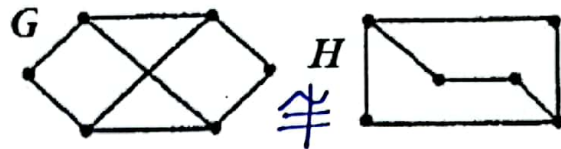


$$|E(G)| = 8 \neq 7 = |E(H)|$$

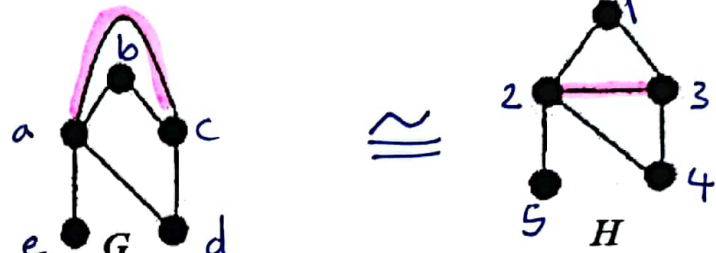
(9)

Cause:

$$|E(G)| = 8 \neq 7 = |E(H)|$$

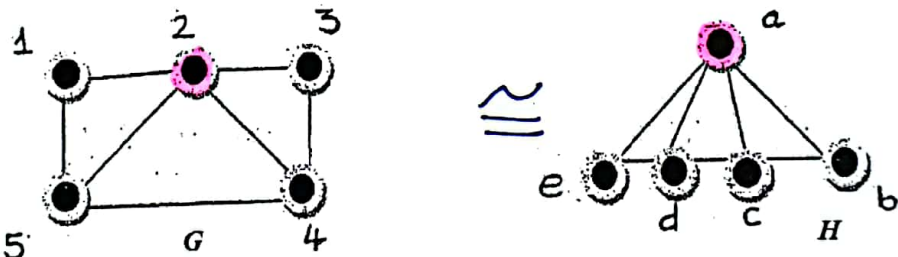


(20)



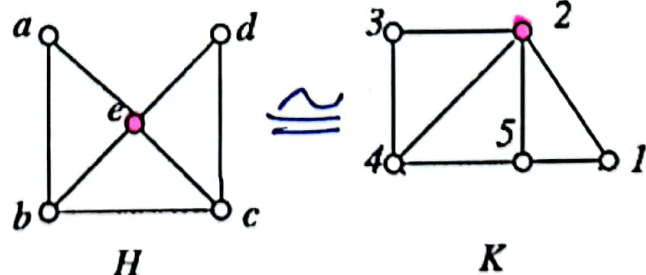
x	a	b	c	d	e
f(x)	2	1	3	4	5

(21)



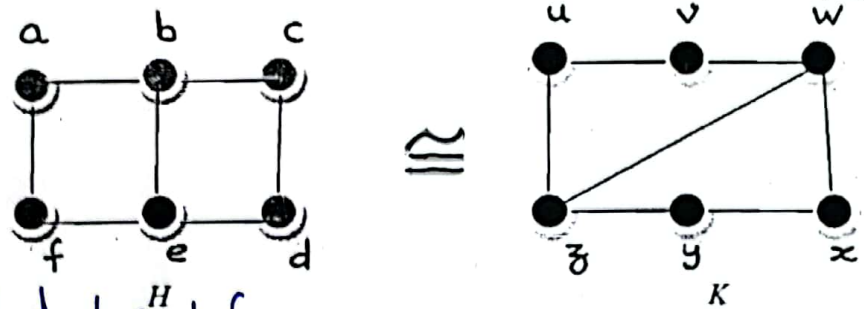
x	1	2	3	4	5
f(x)	e	a	b	c	d

(22)

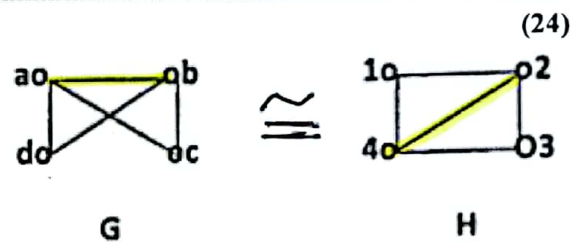


x	a	b	c	d	e
f(x)	3	4	5	1	2

(10)

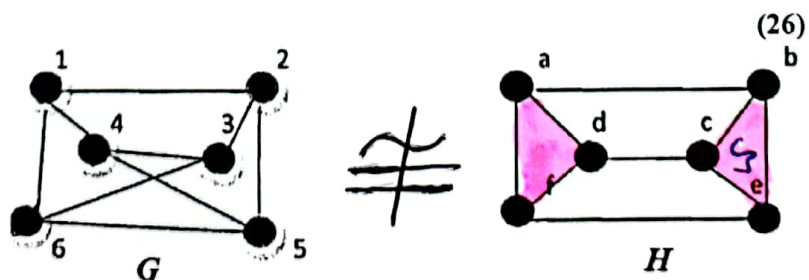
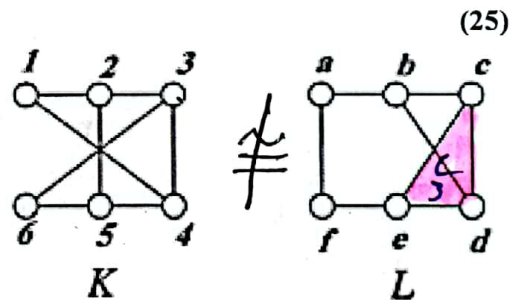


x	a	b	c	d	e^H	f
$f(x)$	u	z	y	x	w	v



x	a	b	c	d
$f(x)$	2	4	1	3

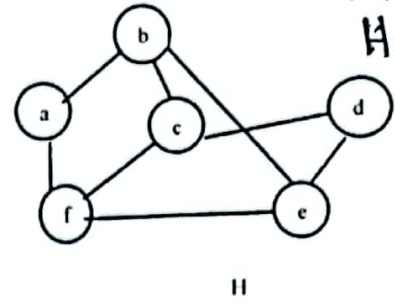
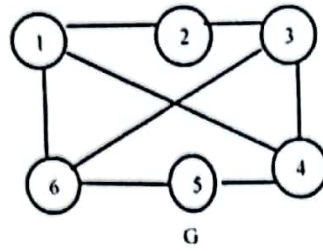
Cause: L have C_3 Cycle (triangle: cde) but K doesn't have



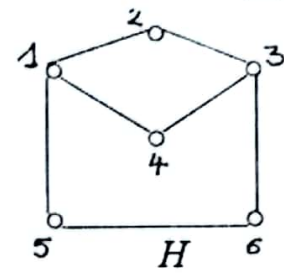
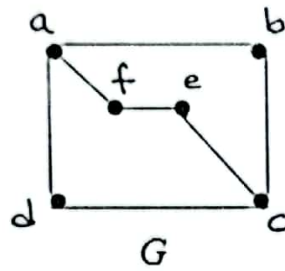
Cause: H have C_3 Cycle (triangle: bce) but G doesn't have.

(27)

H.W.,

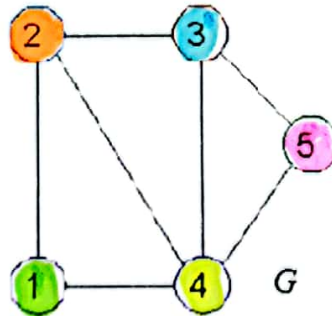


H.W.,
(28)

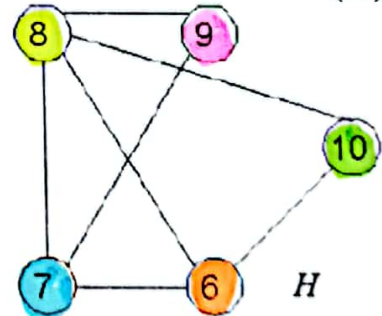


H.W.
(29)

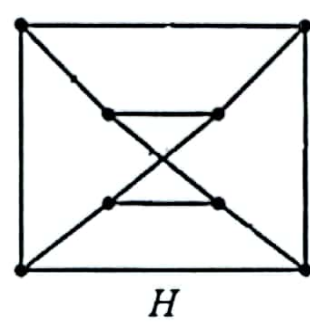
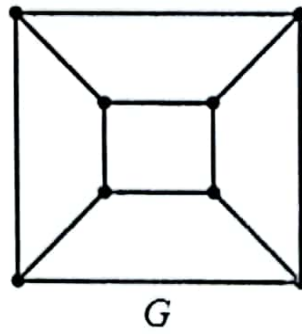
ف



\cong

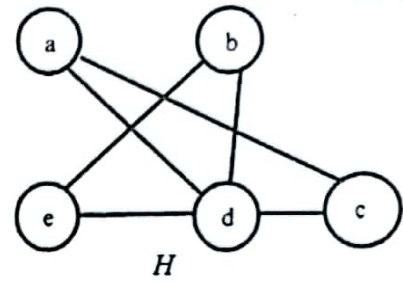
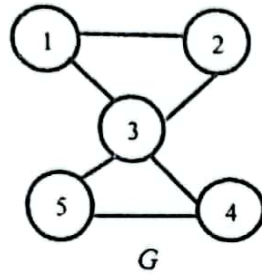


x					
f(x)					



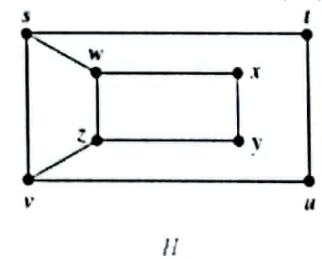
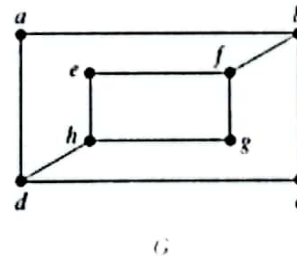
(31)

H.W.



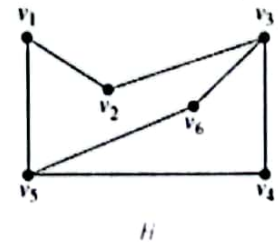
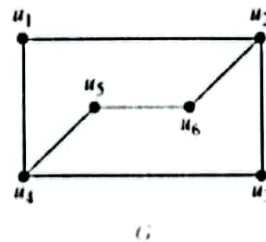
(32)

H.W.



(33)

H.W.



س2: عين جميع الرسومات الثنائية التجزئة التامة غير المتماثلة و التي عدد رؤوس كل منها 7 ؟
Q. List all *nonisomorphic* complete bipartite graphs with 7 total vertices ?

$$|V(K_{m,n})| = m + n = 7$$

$$1 + 6 = 7 \Rightarrow K_{1,6}$$

$$2 + 5 = 7 \Rightarrow K_{2,5}$$

$$3 + 4 = 7 \Rightarrow K_{3,4}$$

≠
≠

س3: إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n فأثبت أن $|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2}$ ✓

Sol. $\therefore G \cup \bar{G} \cong K_n$

$$\Rightarrow |E| + |\bar{E}| = |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

س4: عين جميع الرسومات البسيطة ذاتية التتميم التي عدد رؤوس كل منها 5 .

Q. Set all simple self complementary graphs with 5 vertices

س5: عين جميع الرسومات البسيطة غير المتماثلة التي عدد رؤوس كل منها 5 و عدد أضلاع كل منها 3 .

Q. . List all *nonisomorphic* simple graphs with 5 vertices and 3 edges ?

س6: إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه 56 و كان عدد أضلاع \bar{G} هو 80 فاحسب n ؟
 Q. Let G Be a simple graph with n vertices and 56 edges. If \bar{G} have 80 edges , find the value of n ?

$$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 56 + 80 = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n = ?$$

$$272 = n^2 - n \Rightarrow n^2 - n - 272 = 0$$

$$(n-17)(n+16) =$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \downarrow \\ \boxed{n=17} \end{array}$$

س7: جد مع التعليل عدد أضلاع الرسم المتمم للرسم $K_{10,14}$.

Q. Find the number of edges for the complementary graph of $K_{10,14}$. Explain the answer?

سأ. $|V(K_{10,14})| = 10 + 14 = 24$, $|E(K_{10,14})| = 10 \times 14 = 140$.

$$|E(K_{10,14})| + |\bar{E}(K_{10,14})| = \frac{24(24-1)}{2} \Rightarrow 140 + |\bar{E}(K_{10,14})| = 276$$

$$\Rightarrow |\bar{E}(K_{10,14})| = 276 - 140 = \boxed{136}$$

$\therefore |E(K_{10,14})| = 140 \neq 136 = |\bar{E}(K_{10,14})| \Rightarrow$ G is not self Complementary.

س8: عين جميع الرسومات البسيطة غير المتماثلة التي عدد رؤوس كل منها 4 و عد أضلاع كل منها 3 .

Q. List all *nonisomorphic* simple graphs with 4 vertices and 3 edges ?

س9: هل يوجد رسم G له 7 أضلاع و يحقق $G \cong \bar{G}$ ؟ وضح إجابتك .
 H.W. Q. Is there exist a graph G with 7 edges satisfies $\bar{G} \cong G$? explain the answer.

م

س10: إذا كان G رسماً بسيطاً درجات رؤوسه 2,2,2,3,3,4 فابعد عدد أضلاع \bar{G} (الرسم المتمم)

Q. Let G be a graph with the degree sequence 2,2,2,3,3,4. Find the number of edges of \bar{G} ?

$$\sum_{i=1}^n \deg v_i = 2|E| \Rightarrow 2+2+2+3+3+4 = 2|E| \Rightarrow |E| = \frac{16}{2} = 8$$

$$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 8 + |\bar{E}| = \frac{6(5)}{2} = 15$$

$$\therefore |\bar{E}| = 7 \quad \because |E| = 8 \neq |\bar{E}| = 7 \Rightarrow G \text{ is not Self Complementary}$$

س11: إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه 5، فجد ضعف عدد أضلاع الرسم المتمم \bar{G} .

Q. Let G be a graph with n vertices and 5 edges, find the double edges of \bar{G} ?

$$\text{Sol. } |E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 5 + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\times 2 \Rightarrow 10 + 2|\bar{E}| = n^2 - n \Rightarrow \therefore 2|\bar{E}| = n^2 - n - 10$$

س12: إذا كان G رسماً بسيطاً عدد رؤوسه n و عدد أضلاعه 36 . جد n إذا علمت أن عدد أضلاع الرسم المتمم \bar{G} يساوي 42 .

Q. Let G be a graph with n vertices and 36 edges. Find value of n if \bar{G} have 42 edges ?

$$|E| + |\bar{E}| = 36 + 42 = \frac{n(n-1)}{2} \quad ?$$

س13: إذا كان G رسماً بسيطاً منتظماً من النوع r و عدد رؤوسه n . أثبت أن الرسم المتمم \bar{G} منتظم أيضاً و احسب عدد أضلاعه ؟

H.W.

Q13. Let G be a simple regular graph of r degree and n vertices . Show that \bar{G} is also a regular, and find the number of edges?

$$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{nr}{2} + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{nr}{2} \Rightarrow |\bar{E}| =$$

س14: إذا كان G رسماً عدد رؤوسه 6 و عدد أضلاعه 7 . هل G ذاتي التتميم؟ علل إجابتك . H.W. (Exam)

Q14. Let G be a graph with 6 vertices and 7 edges . Decide whether G is self complementary ? Explain the answer?

$$|V| = n = 6, |E| = 7 \Rightarrow |\bar{E}| = ?$$

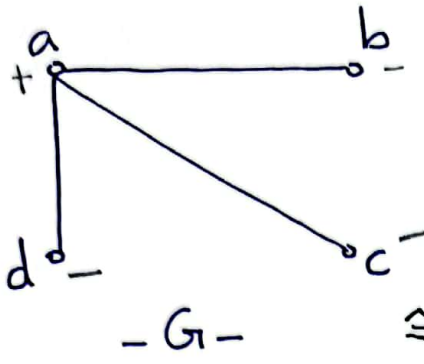
H.W.

س15: جد عدد أضلاع الرسم المتمم للرسم $K_{4,7}$ ؟

Q15. Find the number of edges of the complementary of $K_{4,7}$?

س16: إذا كانت المصفوفة التالية هي مصفوفة التجاور للرسم G ، فيبين فيما إذا كان G ذاتي التتميم .

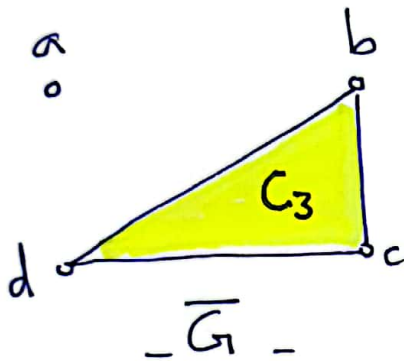
Q16. Let A be the given adjacency matrix of the graph G . Decide whether that G is self complementary? 'is it parbat'?



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

whether

$G \cong K_{1,3}$ parbat



$$G \not\cong \bar{G}$$

Cause \bar{G} have C_3 cycle, but G doesn't have.

H.w.

س17: أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم $\bar{K}_{7,13}$ للرسم $K_{7,13}$.

Q17. Find the number of edges of $\bar{K}_{7,13}$ (the complementary graph of $K_{7,13}$)

س18: أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم للرسم $K_{12,8}$ ثم بين فيما إذا كان الرسم $K_{12,8}$ ذاتي التتميم .

Q18. Find the number of edges of the complementary graph of $K_{12,8}$? Decide whether $K_{12,8}$ is self complementary?

Q19. Let A be the given adjacency matrix of the graph G . Find the number of edges?

H.W

س: 19

إذا كان للرسم G مصفوفة التجاور $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ فإن عدد أضلاع G يساوي:

(مع التعليل)

(د) 6

(ج) 5

(ب) 4

(أ) 3

Q20. Let G be a regular graph of degree 4 with 8 vertices . show that \bar{G} is a simple graph of degree :

س: 20

H.W

إذا كان G رسماً منتظماً من النوع 4 و عدد رؤوسه 8 فإن \bar{G} هو رسم بسيط منتظم من النوع:

(مع التعليل)

(د) 5

(ج) 4

(ب) 3

(أ) 2

$$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow \frac{8(4)}{2} + |\bar{E}| = \frac{8(7)}{2} \Rightarrow$$

$$|\bar{E}| = \frac{8(7)}{2} - \frac{8(4)}{2} = \frac{8}{2} (7-4) = \frac{8}{2} (3) \Rightarrow \bar{G} \text{ is regular of } 3 \text{ degree.}$$

H.W

?

س: 21 ليكن L الرسم الممثل بمصفوفة الوقوع المبينة :

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 \\ a & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ b & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ c & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ d & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(أ) أوجد عدد أضلاع الرسم المتمم \bar{L} للرسم L ؟

(ب) بين فيما إذا كان الرسم L ذاتي التتميم . و لماذا ؟
Decide whether the graph G is self complementary ?

س22: ليكن G رسماً بسيطاً ممثلاً بمصفوفة التجاور المقابلة :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (i) ارسم \overline{G} (الرسم المتمم للرسم G) (Draw \overline{G} (the complementary of G)
(ii) بين فيما إذا كان الرسم G ذاتي التمام أم لا ؟ (Decide whether the graph G is self complementary ?