جامعة الملك سعود

كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار النهائي

الفصل الثاني 1437 – 1438 هـ 244 ريض الزمن ثلاث ساعات

السؤال الأول

إذا كانت كل من A و B مصفوفة من الدرجة $\boxed{3}$ بحيث

$|AB^T| = -14$ و $\frac{1}{2}A^4 + A = 0$ ،

فاحسب $|A|$ و $|B|$.

حل

$\frac{1}{2}A^4 + A = 0$

$\frac{1}{2}A^4 = -A$

$\xrightarrow[\text{محددات}]{1\ 1}$ $\left|\frac{1}{2}A^4\right| = |-A|$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 |A|^4 = (-1)^3 |A|$

$\frac{1}{8}|A|^4 = -|A|$

$\frac{1}{8}|A|^4 + |A| = 0$

عامل مشترك $|A|$ $|A|\left[\frac{1}{8}|A|^3 + 1\right] = 0$

$|A| = 0$ $\Big|$ $\frac{1}{8}|A|^3 + 1 = 0$

$\frac{1}{8}|A|^3 + 1 = 0$

$\frac{1}{8}|A|^3 = -1$

$|A|^3 = -8$

$\xrightarrow[\text{للطرفين}]{\sqrt[3]{\ }}$ $|A| = -2$

$|A \cdot B^T| = -14$

$|A||B^T| = -14$

$-2\ |B| = -14$

$|B| = 7$

(٢). أوجد حل النظام الخطي $\boxed{AX = B}$، بحيث $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

نحل بطريقة المعكوس

$X = A^{-1} B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -1 \\ -20 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 + 2 + 3 \\ 10 - 2 - 3 \\ -20 + 2 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -12 \end{bmatrix}$$

حل آخر

$\{A \mid B\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 10 & 11 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{طريقة جاوس}]{\text{اختزال}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \end{array}\right]$$

السؤال الثاني

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 10 & 11 & 1 \end{pmatrix}$

(١). أوجد A^{-1}.

الحل

$[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 11 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

اختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -20 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & -1 \\ -20 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

السؤال الثالث

ليكن $m \in \mathbb{R}$ و ليكن النظام الخطي التالي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & m-2 & m+3 & m^2+5 \\ 3 & 5 & -5 & m+3 & m^2+2 \end{array}\right]$$

(١). أوجد قيم m حتى يكون النظام غير متسق.

(٢). أوجد قيم m حتى يكون النظام له حل وحيد.

(٣). أوجد قيم m حتى يكون النظام له عدد لا نهائي من الحلول.

الحل

الحل

أختزال

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{m+1}{m} & \frac{m^2+1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{m^2-1}{m+1} \end{array}\right]$$

م ل ع ن

$m = \phi$

غير متسق

~~حل وحيد~~

$m = 0$

$m+1 = 0$

$m = -1$

حل وحيد

$m \neq 0$

$m+1 \neq 0$

$m \neq -1$

$m = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

السؤال الرابع

لتكن
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(١). أوجد رتبة و صفرية المصفوفة A.

(٢). أوجد أساسا للفضاء العمودي للمصفوفة A.

اختزاله

جاوس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الرتبة $= rank(A) = 3$

$nullity(A) + rank\,A = n$

الصفرية $= nullity(A) = n - rank\,A$
$= 5 - 3 = 2$

أساس أعمدة العمود $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

السؤال الخامس

ليكن الفضاء $V = \mathbb{R}^3$ و الأساسين
$$B = \{v_1 = (1,1,-1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,1)\}$$
و
$$.C = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (4,2,-1), u_3 = (1,2,0)\}$$

(١). أوجد $[u_1]_B$، $[u_2]_B$، $[u_3]_B$. ($[u_1]_B$ هي إحداثيات المتجه u_1 بالنسبة للأساس B)

(٢). إحسب $_BP_C$ مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B.

(٣). إذا كان $[v]_C = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ فأوجد كلا من $[v]_B$ و $.v$

الحل

(١) $[u_1]_B$ $[u_2]_B$ $[u_3]_B$

$[B \mid u_1]$ $[B \mid u_2]$ $[B \mid u_3]$

اختصار عام $[B \mid u_1 \; u_2 \; u_3]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

اختزاله
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$[u_1]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[u_2]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[u_3]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

---

(2) $${}_B P_C = \begin{bmatrix} [u_1]_B & [u_2]_B & [u_3]_B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

---

(3) $$[v]_B = {}_B P_C \cdot [v]_C$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 - 6 - 1 \\ 0 - 2 + 2 \\ 5 - 4 - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نعرف $V = (x, y, z)$

$$[V]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \alpha_1 \\ \rightarrow \alpha_2 \\ \rightarrow \alpha_3 \end{matrix}$$

$$[C \mid V] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & x \\ 0 & 2 & 2 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \end{array}\right]$$

معادلة 2

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = x = 5 + 4(-2) + 1 = -2$$

$$2\alpha_2 + 2\alpha_3 = y = 2(-2) + 2(1) = -2$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = z = 5 + 2 = 7$$

$$V = (-2, -2, 7)$$

السؤال السادس

ليكن $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2$ التحويل الخطي الذي يحقق:

$$T(1,0,0) = 1 + X^2, \qquad T(0,1,0) = 2 + 3X^2, \qquad T(0,0,1) = -X^2.$$

(١). أوجد $T(a,b,c)$، لكل $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(٢). أوجد أساسا لكل من الفضائين $\ker T$ و $\operatorname{Im}T$.

الحل

أوجد قاعدة التحويل

نعرف $v = (a,b,c) \in R^3$

لكتابة v كتركيب خطي

$$(a,b,c) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$$

مصفوفة موسعة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[\text{جاهزة}]{\text{اختزال}} \begin{array}{l} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b \\ \alpha_3 = c \end{array}$$

نأخذ T للطرفين

$$T(a,b,c) = \alpha_1 T(1,0,0) + \alpha_2 T(0,1,0) + \alpha_3 T(0,0,1)$$

$$T(a,b,c) = a(1+x^2) + b(2+3x^2) + c(-x^2)$$

نبسط الشكل

$$T(a,b,c) = a + ax^2 + 2b + 3bx^2 - cx^2$$

$$T(a,b,c) = (a+3b-c)x^2 + a+2b$$

قاعدة التحويل

التأكد

$$T(1,0,0) = x^2+1$$

$$T(0,1,0) = 3x^2+2$$

$$T(0,0,1) = -x^2$$

$\ker T$

(2)

$$T(a,b,c) = 0x^2 + 0x + 0$$

$$= (\boxed{a+3b-c})x^2 + \boxed{a+2b}$$

$$a+3b-c=0$$

$$a+2b=0$$

معادلة مجهول

$$3 > 2$$

نفرض $\rightarrow$ $b = t$

$$a = -2t$$

$$c = -2t+3t$$

$$c = t$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل

$$\ker T = \{(-2,1,1)\}$$

ملاحظة $\boxed{T(-2,1,1)=0}$

Im T

نوجد صور الأساس الاعتيادي ل R^3

$T(1,0,0) = 1+x^2 \longrightarrow (1,0,1)$

$T(0,1,0) = 2+3x^2 \longrightarrow (3,0,2)$

$T(0,0,1) = -x^2 \longrightarrow (-1,0,0)$

الأعمدة ثم اختزال
نأخذ الأعمدة
ذات ① متقدمة
من المراحل

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس}]{\text{اختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

اذن $Im(T) = \{1+x^2, 2+3x^2\}$

السؤال السابع

ليكن الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbb{R}^2$ معرفا بالقاعدة

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 2x_1x_2 + 5y_1y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

(١). استخدم قاعدة جرام شميت لتحويل الأساس

$$\{v_1 = (1, -1),\ v_2 = (-2, 1)\}$$

إلى أساس $\{v_1, v_2\}$. عياري و متعامد.

الحل

تعامد

$$u_1 = v_1 = (1,-1)$$

$$u_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot \frac{u_1}{\|u_1\|^2}$$

$$= (-2,1) - \langle (-2,1), (1,-1) \rangle \cdot \frac{(1,-1)}{\|(1,-1)\|^2}$$

$$\boxed{\langle (1,-1), (1,-1) \rangle}$$

$$= (-2,1) - [\cancel{-4} - 5 + \cancel{4} + 2] \cdot \frac{(1,-1)}{[2+5-2-2]}$$

$$= (-2,1) - \left(\frac{-3}{3}\right)(1,-1)$$

$$= (-2,1) + (1,-1) = (-1,0)$$

عياري

$$\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,-1)}{\sqrt{<(1,-1),(1,-1)}}$$

$$= \frac{(1,-1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(-1,0)}{\sqrt{<(-1,0),(-1,0)>}}$$

$$= \frac{(-1,0)}{\sqrt{2+0+0+0}}$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$$

أساس عياري متعامد

(٢). ليكن $v = av_1 + bv_2$ و $w = cv_1 + dv_2$.
أوجد $\langle v, w\rangle$ بدلالة a, b, c, d.

$< v, w >$

$= < (av_1 + bv_2), (cv_1 + dv_2) >$

$= < av_1, cv_1 > + < av_1, dv_2 > + < bv_2, cv_1 > + < bv_2, dv_2 >$

$= ac < v_1, v_1 > + ad < v_1, v_2 > + bc < v_2, v_1 > + bd < v_2, v_2 >$

$< v_1, v_1 > = < (1, -1), (1, -1) > = 3$

$< v_2, v_1 > = < v_1, v_2 > = < (1, -1), (-2, 1) > = \cancel{-4} - 5 + 2 + \cancel{4} = -3$

$< v_2, v_2 > = < (-2, 1), (-2, 1) > = 8 + 5 - 4 - 4 = 5$

$= ac(3) + ad(-3) + bc(-3) + bd(5)$