د. برهان أصلح

جامعة الملك سعود / كلية العلوم قســـم الرياضيات	الأحد 9 /1433/5 هـ	الفصل الثاني 1432 / 1433 هـ الزمن : ساعة و نصف
الإسم.................................. رقم الشعبة / .... رقم التحضير/........................	الإختبار الفصلي الأول في المقرر 244ريض	الرقم الجامعي / .... أستاذ المادة / ....

درجة الجزء الأول

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	المجموع
رمز الإجابة	أ	ج	ب	د	د	ب	/9

درجة الجزء الثاني

درجة السؤال الأول	درجة السؤال الثاني	درجة السؤال الثالث	درجة السؤال الرابع	المجموع
				/12

الدرجة النهائية	
	20

لاحظ أن عدد الورقات (06) ورقات

أستخدم خلف الورقات فقط كمسودة

الجزء الأول : **[درجة و نصف لكل سؤال]** ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من 1 إلى 6 في الجدول المعطى :

(1) إذا كانت B مصفوفة من الدرجة 2 و لها معكوس و كانت $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ فإن $B^2 - 2BB^T + 3B$ فإن B تساوي:

(أ) $\boxed{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}}$ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$

(2) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda-1 & \lambda+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\lambda & \lambda+3 & \lambda+7 \end{bmatrix}$ فإن مجموعة قيم الثابت λ التي تجعل A قابلة للعكس هي:

(أ) $\{ \pm 2 \}$ (ب) $R \setminus \{ -2 \}$ (ج) $\boxed{\phi}$ (د) $R \setminus \{ 2 \}$

(3) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 3 و كان $|A| = -2$ فإن $|\, 2A^{-3}(A^T)^4 adj(A) \,|$ يساوي:

(أ) 64 (ب) $\boxed{-64}$ (ج) -4 (د) -4

(4) مجموعة قيم الثابت λ التي تجعل الحل الصفري هو الحل الوحيد للنظام

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ \lambda x + z &= 0 \\ -x + \lambda y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

هي:

(أ) $\{ -1 \}$ (ب) R (ج) $\{1\}$ (د) $\boxed{R \setminus \{ -1 \}}$

(5) إذا كانت $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + b - c - d = 1, a, b, c, d \in R \right\}$ فإن واحدة فقط من العبارات الأتية صائبة:

(أ) W فضاء جزئي من M_{2x2} و $W \neq \{0\}$

(ب) $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(ج) $W = M_{2x2}$

(د) W ليست فضاء جزئيًا من M_{2x2}

(6) قيمة المتغير x التي تحقق النظام

$$\begin{aligned} x - 3y - z &= -7 \\ x - y - z &= -2 \\ x - 6y - 2z &= -3 \end{aligned}$$

هي:

(أ) 11 (ب) $\boxed{-11}$ (ج) $-\frac{11}{2}$ (د) $\frac{11}{2}$

السؤال الأول (2 درجة)

ما هي القيود التي يجب وضعها على b_1, b_2, b_3 لكي يكون النظام التالي متسقا:

$$\begin{aligned} x-2y \quad -z &= b_1 \\ -4x+5y+3z &= b_2 \\ -3x+3y+2z &= b_3 \end{aligned}$$

يكون النظام متسقا عندما يكون له حلول

نستخدم طريقة جاوس - جوردان.

1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -4 & 5 & 3 & b_2 \\ -3 & 3 & 2 & b_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_2+4b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_3+3b_1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_2+4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3+3b_1-(b_2+4b_1) \end{array}\right]$$

لكي يكون النظام متسق لابد أن يكون:

1

$$b_3+3b_1-(b_2+4b_1)=0$$

$$\boxed{b_3-b_2-b_1=0}$$

السؤال الثاني (2.5 درجة)

لتكن $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

1) أثبت أن $A^2-4A-5I=0$

2) إستنتج أن A لها معكوس ثم عين A^{-1} بدلالة A و I .

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ 1

1.5

$$A^2-4A-5I=\begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن $A^2-4A-5I=0$

② بما أن $A^2-4A-5I=0$ فإن

$$A^2-4A=5I$$

$$\frac{1}{5}(A^2-4A)=I$$

① $$A\left[\frac{1}{5}A-\frac{4}{5}I\right]=I$$

فنستنتج أن A لها معكوس و معكوسها

$$A^{-1}=\frac{1}{5}A-\frac{4}{5}I$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}-\frac{4}{5}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

يعني $$A^{-1}=\begin{pmatrix}-3/5&2/5&2/5\\2/5&-3/5&2/5\\2/5&2/5&-3/5\end{pmatrix}$$

السؤال الثالث (3 درجات)

أثبت أن المجموعة $W=\{p(x)=ax^2+bx+c, 2a-b+c=0, a,b,c\in R\}$ تشكل فضاء جزئيا من $P_2[x]$

① نرى أن $W\neq\phi$ لأن $p(x)=0$ ينتمي لـ W

نأخذ $p(x)=ax^2+bx+c\in W$ حيث $2a-b+c=0$

و $Q(x)=a_1x^2+b_1x+c_1\in W$ حيث $2a_1-b_1+c_1=0$

و $\lambda\in\mathbb{R}$ فلنثبت أن $P(x)+\lambda Q(x)\in W$

$$P(x)+\lambda Q(x)=(ax^2+bx+c)+\lambda(a_1x^2+b_1x+c_1)$$
$$=(a+\lambda a_1)x^2+(b+\lambda b_1)x+(c+\lambda c_1)$$
$$=Ax^2+Bx+C$$

② حيث $A=a+\lambda a_1\in\mathbb{R}$, $B=b+\lambda b_1\in\mathbb{R}$, $C=c+\lambda c_1\in\mathbb{R}$

$$2A-B+C=2(a+\lambda a_1)-(b+\lambda b_1)+(c+\lambda c_1)$$
$$=\underbrace{(2a-b+c)}_{=0}+\lambda\underbrace{(2a_1-b_1+c_1)}_{0}$$
$$=0+\lambda\,0=0$$

إذن $(P(x)+\lambda Q(x))\in W$

فنستنتج أن $W\leq P_2[x]$.

السؤال الرابع (4.5 درجة)

لدينا النظام

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

1) عين قيم a التي تجعل للنظام:

أ) حلا وحيدا.

ب) لا يوجد له حلّ.

ج) عددا غير منته من الحلول.

2) إستخدم طريقة جاوس لإيجاد حلول النظام إذا كانت $a = 4$.

3) إستخدم قاعدة كرامر لإيجاد x إذا كانت $a = 0$.

① النظام يكتب على الشكل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & (a^2-14) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ a+2 \end{pmatrix}$$

أ) لكي يكون للنظام حلا وحيدا لابدّ أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & (a^2-14) \end{vmatrix} \neq 0$$

يعني

$$\left((14-a^2) + 40 - 9\right) - \left(12 + 5 + 6(a^2-14)\right) \neq 0$$

$$45 - a^2 - 6a^2 + 67 \neq 0$$

$$7a^2 \neq 112$$

$$a^2 \neq 16$$

$$a \neq \pm 4$$

1

ب) إذا كانت $a = -4$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & 14 & -18 \end{array}\right]$$

0.5

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

فإن النظام ليس له حلول.

0.5

ج) إذا كانت $a = 4$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

0.5

إذن النظام له عدد غير منته من الحلول.

② عندما $a=4$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 10/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y - 2z = \frac{10}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-20}{7} - 4z + 3z + 4 \\ y = \frac{10}{7} + 2z \end{cases}$$

1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{7} - z \\ y = \frac{10}{7} + 2z \end{cases}$$

مجموعة الحلول للنظام هي

$$S = \left\{ \left(\frac{8}{7} - z \,;\, \frac{10}{7} + 2z \,;\, z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}$$

③ إذا كان $a=0$, فإن النظام له حلاً وحيداً

باستخدام كرامر

1

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -14 \end{vmatrix}} = \frac{100}{112} = \frac{25}{28}.$$