جامعة الملك سعود

كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار النهائي

الفصل الأول 1438 – 1439 هـ 244 ريض الزمن ثلاث ساعات

السؤال الأول ($3+3$ درجات)

(١). إذا كانت A و B مصفوفتين بحيث $|AB^T| = -2$ و

$$(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

أوجد قيمة المحدد $|B|$

الحل

$$|AB^T| = -2$$

$$|A|\,|B^T| = -2$$

$$|B| = \frac{-2}{|A|}$$

$$|B| = \frac{-2}{\frac{1}{45}}$$

$$|B| = -2(45)$$

$$|B| = -90$$

$$(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

نأخذ المعكوس للطرفين

$$3A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$3A = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A = \frac{1}{2+3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left(\frac{1}{15}\right)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{15 \cdot 15}(2+3) = \frac{1}{45}$$

(٢). أوجد قيم كل من a و b التي تجعل المتجهات $v_1 = (1, 2, -1, 3)$، $v_2 = (-2, -3, 1, -1)$، $v_3 = (-1, a-2, a-1, b)$ مرتبطة خطيا في $\mathbb{R}^4$.

حل 1

$|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & a-2 \\ -1 & 1 & a-1 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix} = 0$$

4×3 غير مربعة

حل بالاختزال

$[A \mid 0]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & a-2 & 0 \\ -1 & 1 & a-1 & 0 \\ 3 & -1 & b & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & b-5a+3 & 0 \end{array}\right]$$

لكي تكون مرتبطة

عدد $3 < 4$

$2a - 2 = 0$

$a = 1$

$b - 5a + 3 = 0$

$b - 5 + 3 = 0$

$b = 2$

السؤال الثاني **(5 درجات)**

ليكن النظام الخطي

$$\begin{cases} x - y - 2z &= 2 \\ x + my - z &= 1 \\ mx + y + z &= -1 \end{cases}$$

(١). أوجد قيم m حتى يكون للنظام الخطي حل وحيد.

(٢). أوجد قيم m حتى لا يكون للنظام الخطي حل.

(٣). أوجد قيم m حتى يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \\ m & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{أصفار}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & m+1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m & -m \end{array}\right]$$

عدد لا نهائي	ليس حل	حل وحيد
$m = 0$ | $m = -1$	$m = \phi$	$m \neq 0$ | $m+1 \neq 0$, $m \neq -1$, $m = R - \{0, -1\}$

السؤال الثالث **(5 درجات)**

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(١). أوجد الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A.

(٢). إستنتج أساسا للفضاء العمودي و أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة A.

(٣). اوجد رتبة (Rank) و صفرية (nullity) المصفوفة A^T.

حل 1

1 $\xrightarrow{\text{اختزال}}$ جاوس جوردان
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 أساس الفضاء العمودي من الأصل $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

أساس الفضاء الصفي $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

من المختزلة

$\text{rank } A^T = \text{rank } A = \dim(\text{col } A)$

$= \dim(\text{row } A) = 3$

$\text{nullity } A^T + \text{rank } A = m$ عدد الصفوف

$\text{nullity } A^T = 4 - 3 = 1$

$$③\ [T]_C = \left[\,[T(1,0)]_C \quad [T(0,1)]_C\,\right]$$

$$= \left[\,[(1,2)]_C \quad [(-1,3)]_C\,\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$ لأن C معتاد

$$[T]_B = \left[\,[T(1,1)]_B \quad [T(1,2)]_B\,\right]$$

$$= \left[\,[(0,5)]_B \quad [(-1,8)]_B\,\right]$$

$$\left[\,B \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{matrix}\,\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{أختزل}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع **(7 درجات)**

ليكن $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,2)\}$ **اساسا للفضاء** $\mathbb{R}^2$ **و** C **الأساس المعتاد للفضاء** $\mathbb{R}^2$**. وليكن التحويل الخطي** $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ **المعرف كما يلي:** $T(x,y) = (x-y, 2x+3y)$

(١). اوجد المصفوفات ${}_C P_B$ **و** ${}_B P_C$.

(٢). اوجد $[T]_C$ **مصفوفة التحويل الخطي** T **بالنسبة للأساس** C **و اوجد** $[T]_B$ **مصفوفة التحويل الخطي** T **بالنسبة للأساس** B.

(٣). إذا كان $v = (2,1)$ **اوجد** $[T(v)]_B$.

① $${}_C P_B = \left[[(1,1)]_C \quad [(1,2)]_C \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لأن C أساس معتاد

$${}_B P_C = ({}_C P_B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

③

$[T(v)]_B$

$[T(2,1)]_B$

$= [(1,7)]_B$

$$\left[\begin{array}{c|c} B & \begin{matrix}1\\7\end{matrix}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{array}\right]$$

اختزال

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow [T(v)]_B = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

السؤال الخامس (7 درجات)

(١). ليكن التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ حيث $T(1,1,0)=(2,1,3)$، $T(1,0,1)=(-1,3,2)$، $T(1,0,0)=(0,1,2)$.
أوجد قاعدة التحويل الخطي T

الحل

نفرض $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

تركيبة خطية

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,0,1)+\alpha_3(1,0,0)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \xrightarrow{\text{اختزاله}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & x-y-z \end{array}\right]$$

طول جيرده

نأثر T ب

$$T(x,y,z) = \alpha_1 T(1,1,0)+\alpha_2 T(1,0,1)+\alpha_3 T(1,0,0)$$

$$= y(2,1,3)+z(-1,3,2)+(x-y-z)(0,1,2)$$

$$= (2y-z,\ y+3z+x-y-z,\ 3y+2z+2x-2y-2z)$$

$$T(x,y,z) = (2y-z,\ 2z+x,\ y+2x)$$

(٢). ليكن التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, -y - z, 3x + 5y + 2z, x + 4y + 3z)$$

(أ) أوجد أساسا لنواة التحويل الخطي T

(ب) أوجد أساسا لصورة التحويل الخطي T

ker

الحل

$x + 2y + z = 0$

$-y - z = 0$

$3x + 5y + 2z = 0$

$x + 4y + 3z = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

اختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x - z = 0$

$y + z = 0$

مجهول 3

معادلة 2

نفرض

$z = t$

$y = -t$

$x = t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\text{basis ker } T = \{(1, -1, 1)\}$

أساس الصورة

أساس $Im = \{(1,0,3,1), (2,-1,5,4)\}$

السؤال السادس **(4 درجات)**

(١). اثبت ان المجموعة S تمثل اساسا عياريا للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ حيث ان
$$S = \{v_1 = (0,1,0), v_2 = (-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}), v_3 = (\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5})\}$$
(٢). إذا كان $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$، إحسب $[u]_S$.

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle (0,1,0),(0,1,0)\rangle} = \sqrt{0+1+0} = 1$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\tfrac{16}{25}+0+\tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{25}{25}} = 1$$

$$\|v_3\| = \sqrt{\tfrac{9}{25}+0+\tfrac{16}{25}} = \sqrt{\tfrac{25}{25}} = 1$$

$[u]_S$

$[S \mid u]$

$[u]_S$

$$[S \mid u]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{25} \end{array}\right]$$

$$[u]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{17}{25} \\ \frac{19}{25} \end{bmatrix}$$

السؤال السابع **(6 درجات)**

لتكن $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(١). أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A و اثبت ان $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ هي قيم مميزة للمصفوفة A

(٢). أوجد المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة λ_1 و λ_2

(٣). اوجد مصفوفة P و مصفوفة قطرية D بحيث $A = PDP^{-1}$

(٤). اوجد A^{13} و A^{14}

الحل

$|\lambda I - A| = 0$

$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \lambda-3 & 2 \\ -2 & \lambda+1 \\ -2 & 2 \end{matrix} = 0$

$[(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda+1) - 8 - 8] - [-4(\lambda+1) + 4(\lambda-3) - 4(\lambda+1)] = 0$

$\lambda = 1 \rightarrow [(-2)(2)(2) - 8 - 8] - [-4(2) + 4(-2) - 4(2)]$

تعويض

$= 0$

$\lambda = -1 \rightarrow 0 = 0$

② المتجهات المميزة

$$[\lambda I - A]\, X = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-3 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+1 & 0 \end{array}\right]$$

$\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & \end{array}\right]$$

اختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

معادلة → $x - y - z = 0$

نفرض → $z = t$

نفرض → $y = s$

$x = t + s$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

متجهين مميزين مرافقين للقيمة $\lambda = 1$

$\lambda = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

اختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

معادلة

$x - z = 0$

$y - z = 0$

نفرض

$z = t$

$y = t$

$x = t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

متجه مميز للقيمة المميزة

$\lambda = -1$

ج

$$P = \begin{bmatrix} c & c & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \lambda=1 & \lambda=1 & \lambda=-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[P^{-1}]{\text{ایطر}} (P \mid I) \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

P^{-1}

$$D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$A^{13} = P D^{13} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{13} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{14} = P D^{14} P^{-1} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$