جامعة الملك سعود

كلية العلوم   قسم الرياضيات   الإختبار النهائي

الفصل الأول 1437 – 1438 هـ   244 ريض   الزمن ثلاث ساعات

السؤال الأول

أ) لتكن كل من $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ مصفوفة مربعة من الدرجة 4 و تحقق

$$|A| = 2, \qquad |B| = -3, \qquad |C| = 5$$

احسب المحدد التالي $|2A^{-5}B^{-3}C^{-1}(B^T)^5|$

$$= 2^4 \, |A|^{-5} \, |B|^{-3} \, |C|^{-1} \, |B|^5$$

$$= 16 \cdot \frac{1}{|A|^5} \cdot \frac{1}{|B|^3} \cdot \frac{1}{|C|} \cdot |B|^5$$

$$= \cancel{16} \cdot \frac{1}{2^{\cancel{5}}} \cdot \frac{1}{\cancel{(-3)^3}} \cdot \frac{1}{5} \cdot (-3)^{\cancel{5}\,2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 9 = \frac{9}{10}$$

ب) لتكن مصفوفتين مربعتين من الدرجة n غير صفريتين E و P حيث
$PE = EP$ و $\mathbf{E}^2 = 0$.
احسب $(\mathbf{I} - \mathbf{PE})(\mathbf{I} + \mathbf{PE})$
ماذا تستنتج؟

$$(I - PE)(I + PE)$$

$$= I \cdot I - PE \cdot PE$$

$$= I - PE \cdot EP$$

$$= I - P E^2 P$$

$$= I - P \cdot 0 \, P$$

$$= \boxed{I}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(a-b)(a+b)\\&= a^2 - b^2\end{aligned}}$$

نستنتج ـ $(I+PE)$ ، $(I-PE)$

كلا منهما معكوسا للآخر

ج) اعط مصفوفة غير صفرية E من الدرجة 2 حيث $E^2 = 0$.

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$E^2 = E \cdot E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E^2 = 0$$

السؤال الثاني

ليكن النظام الخطي

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ -x + 3y + az = 2 \\ 2x + y + z = b \end{cases}$$

عين قيم كل من a, b التي من أجلها يكون للنظام

(١). ليس له حل

(٢). حل وحيد

الحل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & a & 2 \\ 2 & 1 & 1 & b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & a+3 & -1 \\ 0 & 0 & -4-a & \frac{b-3}{5} \end{array}\right]$$

جاوس

حل وحيد

$-4-a \neq 0$

$a \neq -4$

$a = \mathbb{R} - \{-4\}$

$b = \mathbb{R}$

ليس له حل

$-4-a = 0$ | $b-3 \neq 0$

$a = -4$

$b \neq 3$

$b = \mathbb{R} - \{3\}$

السؤال الثالث

أ) أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

الحل

$[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

A^{-1}

ب) لتكن $B = A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}A^{-1}$ حيث A هي المصفوفة في الفقرة (أ)
أوجد مصفوفة C حيث $C^3 = B$.

$$C^3 = B = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}A^{-1}$$

باستخدم القانون

Ch7

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$A^{4} = P \cdot D^{n} \cdot P^{-1}$$

$$C = A\begin{bmatrix} (1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (2)^3 \end{bmatrix}A^{-1}$$

$$C = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}A^{-1}$$

$$C = \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ker $\quad I^m$

السؤال الرابع

عين أساسا لصورة و أساسا لنواة التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المعرف بالقاعدة

$$\mathbf{T(x,y,z,t) = (x-y+z, 2x-z-t, y+z+2t).}$$

ker T

$$T(x,y,z,t) = (0,0,0)$$

$x - y + z = 0$

$2x - z - t = 0$

$y + z + 2t = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس جوردن}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x = 0$

$y + t = 0$

$z + t = 0$

مجهول 4 $\quad$ معادلة 3

$t = s$

$z = -s$

$y = -s$

$x = 0$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\text{أساس}_{\ker T} = \{(0,-1,-1,1)\}$

$\dim \ker T = 1$

أساس ImT

نوجد الصورة من خلال الأساس المعتاد لـ R^4

$$T(1,0,0,0) = (1,2,0)$$
$$T(0,1,0,0) = (-1,0,1)$$
$$T(0,0,1,0) = (1,-1,1)$$
$$T(0,0,0,1) = (0,-1,2)$$

كأعمدة

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{اختزال}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

أساس $ImT = \{(1,2,0),(-1,0,1),(1,-1,1)\}$

$$Dim\, ImT = 3$$

السؤال الخامس

ليكن $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي والذي مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد S للفضاء $\mathbb{R}^3$ هي

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي $[\mathbf{T}]_{\mathbf{B}}$ بالنسبة للأساس $\mathbf{B}$ التالي

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{u_1} = (\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}),\ \mathbf{u_2} = (\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{3}),\ \mathbf{u_3} = (\mathbf{1},\mathbf{3},\mathbf{4})\}.$$

الحل

$$[T]_B = \left[[T(u_1)]_B \quad [T(u_2)]_B \quad [T(u_3)]_B \right]$$

$$[T(v)]_S = [T]_S [v]_S$$

$v\ (x,y,z) \in R^3$

$$[v]_S = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]_S = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x+4y-2z \\ -3x+4y \\ -3x+y+3z \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \lambda_1 \\ \to \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{matrix}$$

$$T(v) = T(x,y,z) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1)$$

$$= (-x+4y-2z)(1,0,0) + (-3x+4y)(0,1,0) + (-3x+y+3z)(0,0,1)$$

$$\boxed{T(x,y,z) = (-x+4y-2z,\ -3x+4y,\ -3x+y+3z)}$$

$$T(u_1) = T(1,1,1) = (1,1,1)$$

$$T(u_2) = T(2,3,3) = (4,6,6)$$

$$T(u_3) = T(1,3,4) = (3,9,12)$$

$$[T]_B = \Big[\ [(1,1,1)]_B \quad [4,6,6]_B \quad [3,9,12]_B\ \Big]$$

$$\left[\, B \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 12 \end{matrix} \right] \xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \right]$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

السؤال السادس

(١). أثبت أن (-1) و 2 هي قيم مميزة للمصفوفة

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -15 & 9 \\ 9 & -16 & 9 \\ 9 & -15 & 8 \end{pmatrix}.$$

(٢). أوجد أساسا للفضاءات المميزة $\mathbf{E}_{-1} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{AX} = -\mathbf{X}\}$ و $\mathbf{E}_2 = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{AX} = 2\mathbf{X}\}$

(٣). أ) أوجد مصفوفة $\mathbf{P}$ لها معكوس ومصفوفة $\mathbf{D}$ قطرية حيث $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

ب) أوجد المصفوفة $\mathbf{A}^9$.

الحل

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-8 & 15 & -9 \\ -9 & \lambda+16 & -9 \\ -9 & +15 & \lambda-8 \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda = -1$ نعوض

$$\begin{vmatrix} -9 & 15 & -9 \\ -9 & 15 & -9 \\ -9 & 15 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \quad \lambda = -1$

قيمة مميزة

$\lambda = 2 \longrightarrow$ نعوض

$$\begin{vmatrix} -6 & 15 & -9 \\ -9 & 18 & -9 \\ -9 & 15 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ $\lambda=2$ قيمة مميزة

$$(-3)(-3)(-3)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \\ 3 & -5 \end{matrix}$$

$$= -27\left[(-24-45-45) - (-30-30-54)\right]$$

$$= -27\left[-114 + 114\right] = 0$$

$$E_{-1} = \{ \underset{\sim}{X} \in \mathbb{R}^3 : AX = -X \}$$

(a, b, c)

$$AX = -X$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -15 & 9 \\ 9 & -16 & 9 \\ 9 & -15 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 8a - 15b + 9c &= -a \\ 9a - 16b + 9c &= -b \\ 9a - 15b + 8c &= -c \end{aligned}\right\} \begin{aligned} 9a - 15b + 9c &= 0 \\ 9a - 15b + 9c &= 0 \\ 9a - 15b + 9c &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{9a - 15b + 9c = 0}$$

$$\xrightarrow{\div 3} \quad 3a - 5b + 3c = 0$$

نفرض

مثلا

$$c = t$$

$$b = s$$

$$a = \frac{5}{3}s - \frac{3}{3}t = \frac{5}{3}s - t$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الاساس $= \{ (-1, 0, 1), (\frac{5}{3}, 1, 0) \}$

$\lambda = -1$ — $e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

المتجه 2
مميزة

$\boxed{[\lambda I - A]X = 0}$

$\lambda = 2 \longleftarrow e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[P^{-1}]{\text{نوجد}} = [\quad]$$

$$D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$A^9 = P D^9 P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^9 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^9 & 0 \\ 0 & 0 & 2^9 \end{bmatrix} [\quad]$$

السؤال السابع

إذا كان الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbb{R}^2$ معرفا بالقاعدة

$$\langle (x,y),(x',y')\rangle = \boxed{2xx' + yy'}$$

استخدم قاعدة جرام شميت لتحويل الأساس

$$\{u_1 = (1,-1),\ u_2 = (2,1)\}$$

إلى أساس عياري و متعامد.

$v_1 = u_1 = (1,-1)$

متعامد

$v_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle \dfrac{v_1}{\|v_1\|^2}$

$= (2,1) - \langle (2,1), (1,-1)\rangle \dfrac{(1,-1)}{\|(1,-1)\|^2}$

$= (2,1) - [\cancel{4-1}] \dfrac{(1,-1)}{\cancel{2+1}}$

$= (2,1) - (1,-1) = (1,2)$

$\dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{(1,-1)}{\sqrt{2+1}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

عياري

$\dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \dfrac{(1,2)}{\sqrt{2+4}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$

متعامد