Mid ②
S2
37\38

كلية العلوم — جامعة الملك سعود — قسم الرياضيات
الفصل الثاني ... — الاختبار الفصلي الثاني
٢٤٤ ريض — الزمن ساعة ونصف

السؤال الأول (ا درجات)

أوجد أساسا للفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات:

$u_1 = (1, 0, 2, -1),\ u_2 = (-1, 1, -1, 0)\ u_3 = (0, 1, 1, -1),\ u_4 = (2, -1, 3, -1)$

الحل

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

اختزال جاوس

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الأساس $= \{ u_1 , u_2 \}$

$S = \{(1,0,2,-1),(-1,1,-1,0)\}$

السؤال الثاني (٥ درجات)

(١) أوجد قيم a حتى تكون المتجهات $u_1 = (1, -1, 3, 1)$, $u_2 = (3, 1, 5, 3)$, $u_3 = (1, 1, 1, a)$ مرتبطة خطيا

(٢) أوجد أساسا للفضاء $\mathbb{R}^4$ يحتوي على $\{u_1, u_2, u_3\}$ في حالة $a = 0$.

الحل

(١) مرتبطة خطيا

$\cancel{|A| = 0}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} \quad 4 \times 3$$

الاختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

لكون المتجهات مرتبطة خطيا فإن النظام عنده عدد لا نهائي من الحلول

$a - 1 = 0$

$a = 1$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اختزله

جاوس

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$C(A) = \{ u_1, u_2, u_3, (1,0,0,0) \}$$

السؤال الثالث (3 درجات)

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & m \end{pmatrix}$

أوجد قيم m حتى تكون صفرية المصفوفة A ((nullity (A)) تساوي 1

الحل

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & m \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{جار}]{\text{اختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & m-6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-5 \end{bmatrix}$$

rank A + nullity A = 4

rank + 1 = 4

rank = 3

كي تكون nullity = 1 نجعل rank = 3

لكي تكون الرتبة لـ A 3 نجعل

$m-5 \neq 0$

$m \neq 5$

$m \in \mathbb{R} - \{5\}$

تكون nullity A = 1

السؤال الرابع (9 درجات)

ليكن V فضاء متجهات و $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ أساسا لهذا الفضاء.

(١). إذا كانت

$$u_1 = v_1 - v_2 + v_3$$
$$u_2 = v_2 + 2v_3$$
$$u_3 = v_1 - 2v_3$$

فأثبت أن المجموعة $C = \{u_1, u_2, u_3\}$ تكون أساسا للفضاء V.

الحل (١)

(١)

$u_1 = (1, -1, 1)$

$u_2 = (0, 1, 2)$

$u_3 = (1, 0, -2)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= [-2 + 0 - 2] - [0 + 0 + 1]$$

$$= -4 - 1 = -5 \neq 0$$

∴ تكون أساسا للفضاء V

(٢) أوجد المصفوفة ${}_BP_C$ (مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B).

(٣) إذا كان $v = u_1 - 2v_2 + u_3$
فاوجد $[v]_C$ و $[v]_B$.

الحل

(2) $${}_BP_C = \left[[u_1]_B \quad [u_2]_B \quad [u_3]_B \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(3) $$V = u_1 - 2v_2 + u_3$$

$$V = v_1 - v_2 + v_3 - 2v_2 + v_1 - 2v_3$$

$$\boxed{V = 2v_1 - 3v_2 - v_3}$$

$$[V]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[V]_C = {}_CP_B \, [V]_B$$

نوجد ${}_{C}P_{B}$

$${}_{C}P_{B} = \left({}_{B}P_{C}\right)^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right.}_{I}\left|\begin{array}{ccc} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$${}_{C}P_{B} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[V]_c = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 + 6 - 1 \\ 4 - 9 - 1 \\ 6 - 6 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

السؤال الخامس (4 درجات)

ليكن $V = \mathbb{R}^2$، $X_1 = (x_1, y_1)$ و $X_2 = (x_2, y_2)$.

نعرف الضرب الداخلي على الفضاء V كما يلي:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

(١). أوجد المسافة بين المتجهين $u = (-1, 2)$ و $v = (1, -1)$ و أوجد الزاوية التي بينهما.

(٢). أوجد قيمة c بحيث يكون المتجه $v = (1, c)$ متعامدا على المتجه $u = (-2, 3)$.

الحل

[1] المسافة $d(u, v) = \| u - v \|$

$= \| (-1, 2) - (1, -1) \|$

$= \| (-2, 3) \| = \sqrt{\langle (-2, 3), (-2, 3) \rangle}$

$= \sqrt{2(4) + 3(9) + 2(-6) + 2(-6)}$

$= \sqrt{8 + 27 - 12 - 12} = \boxed{\sqrt{11}}$

الزاوية

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$= \frac{2(-1) + 3(-2) + 2(2) + 2(1)}{\sqrt{2(1) + 3(4) + 2(-2) + 2(-2)}\ \sqrt{2(1) + 3(1) + 2(-1) + 2(-1)}}$$

$$= \frac{-2 - 6 + 4 + 2}{\sqrt{2 + 12 - 4 - 4}\ \sqrt{2 + 3 - 2 - 2}}$$

$$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{6}\ \sqrt{1}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

(2) التعامد

$$< u, v > = 0$$

$$< (-2, 3), (1, c) > = 0$$

$$2(-2) + 3(3c) + 2(-2c) + 2(3) = 0$$

$$-4 + 9c - 4c + 6 = 0$$

$$5c + 2 = 0$$

$$5c = -2$$

$$c = \frac{-2}{5}$$