التركيبات الخطية

ليكن V فضاء متجهات

وليكن $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots \in V$ و $v \in V$

نقول أن v تركيب خطي لـ $v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots$

إذا وجدت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ أعداد حقيقية

حيث $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 + \cdots$

طريقة حل السؤال

بالإختزال

$[A|V]$

هل هو حيد

عدد المعادلات = عدد المجاهيل

تركيب خطي

عدد لانهائي

عدد المعادلات أقل المجاهيل

ليس تركيب خطي

ليس لها حل

$[0\ 0\ 0\ 1]$

بالمحددات

نضع V, V_1, V_2, V_3 كأعمدة

$|A|$

$\neq 0$

تركيب خطي

$= 0$

لا تركيب خطي

$|A|$ تربيع

تمرين: إذا كانت المجموعة $\{v_1 = (1,-1,0,), v_2 = (0,1,1,), v_3 = (2,0,1) \in R^3\}$

وكان $v = (7,-2,2) \in R^3$ فهل v تركيب خطي للمتجهات v_1, v_2, v_3

الحل 1

$$V = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$(7,-2,2) = c_1(1,-1,0) + c_2(0,1,1) + c_3(2,0,1)$$

$$\begin{cases} 7 = c_1 + 2c_3 \\ -2 = -c_1 + c_2 \\ 2 = c_2 + c_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \neq 0$$

تركيب خطي

تمرين: إذا كانت المجموعة $\{v_1 = (1,-1,0,), v_2 = (0,1,1,), v_3 = (3,-5,-2) \in R^3\}$

وكان $v = (3,-1,4) \in R^3$ فهل v تركيب خطي للمتجهات v_1, v_2, v_3

الحل ١

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$[A|v]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

اختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$0 = 2$ غير صحيح

التعارض لا حل

ليس تركيب خطي

تمرين: إذا كانت المجموعة $\{v_1 = (-1,0,), v_2 = (1,1), v_3 = (2,3) \in R^2\}$

وكان $v = (2,1) \in R^2$ فهل v تركيب خطي للمتجهات v_1, v_2, v_3

الحل

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ غير مربع 2×3

$[A|v]$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$

الحل طلع موجود

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{bmatrix}$

معادلة 2

$r_1 + r_3 = -1$

$r_2 + 3r_3 = 1$

مجهول 3 > معادلة 2

عدد لانهائي

تركيب خطي

تمرين: إذا كانت المجموعة $\{v_1 = (1,2,-2), v_2 = (-2,-1,3), v_3 = (-1,1,2) \in R^3\}$

عين قيمة λ التي تجعل المتجه $v(3,2,\lambda)$ تركيب خطي لـ v_1, v_2, v_3

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \neq 0$$

∴ تركيب خطي

λ قيمة كل

$$\lambda = R$$

تمرين: بين هل $(9x^2+8x+7) \in P_2(x)$ تركيب خطي للمتجهات

$(4x^2+x+2)$, $(3x^2-x+1)$, $(5x^2+2x+3)$

$(4,1,2)$ $(3,-1,1)$ $(5,2,3)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

تركيب خطي

المجموعات المولدة

نقول ان المتجهات $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots\} \in V$ أنها تولد الفضاء V إذا كان

أي متجه $v \in V$ تركيب خطي لها

طريقة حل السؤال

بالمحددات

$|A|$

$\neq 0$ تولد

$= 0$ لا تولد

$|A|$ غير معدوم

بالإختزال

$[A|$ حروف مستقلة $]$

حل وحيد: عدد المعادلات = عدد المجاهيل — تولد

عدد لانهائي: عدد المعادلات أقل المجاهيل — حل مشروط — X تولد

ليس له حل: $[0 \ldots 0|\neq 0]$

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,2,-1), v_2 = (-2,-1,3), v_3 = (-1,1,2) \in R^3\}$

تولد فضاء المتجهات R^3 أم لا

الحل

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

X تعد

تمرين: عين قيمة λ بحيث تكون المجموعة

$v_1 = x^2+2x+1$ $\quad v_2 = \lambda x^2+x$ $\quad V_3 = 3x^2-x-2$

$(1,2,1)$ $\quad (\lambda,1,0)$ $P_2(x)$ $\quad (3,-1,-2)$ مولدة للفضاء

$$|A| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & \lambda \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \neq 0$$

$$[-2 - \lambda + 0] - [-4\lambda - 0 + 3] \neq 0$$

$$-2 - \lambda + 4\lambda - 3 \neq 0$$

$$3\lambda - 5 \neq 0$$

$$3\lambda \neq 5$$

$$\lambda \neq \frac{5}{3}$$

$$\lambda = \mathbb{R} - \{\frac{5}{3}\}$$

مستقلة خطياً

$$\lambda = \frac{5}{3}$$

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,1,2,1), v_2 = (-1,0,0,-5), v_3 = (2,1,1,8) \in R^4\}$

تولد فضاء المتجهات R^4 أم لا

الحل

بالمحددات

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

بالتربيع

بالاختزال

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \end{array}\right]$$

حروف كمصفوفة عمود

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 0 & 1 & c \\ 1 & -5 & 8 & d \end{array}\right]$$

اختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c-b \\ 0 & 1 & 0 & 3b-a-c \\ 0 & 0 & 1 & 2b-c \\ 0 & 0 & 0 & d+2c-5a \end{array}\right]$$

طرح صفوف

يكون النظام حل بشرط

$$d+2c-5a = 0$$

حل مشروط

$\Longrightarrow$ لا تولد

الاستقلال والارتباط الخطي

نقول ان المتجهات $\{v_1, v_2, v_3, \ldots\ldots\} \in V$ أنها مستقلة أومرتبطة

طريقة حل السؤال $A_{m \times n}$

$m = n$	$m < n$	$m > n$
بالمحددات		بالإختزال
$\|A\|$	مرتبطة دائماً	$[A \mid \vdots]$
$\neq 0$ مستقلة	مستقلة	حل وحيد (صفر) تافه → مستقلة
$= 0$ مرتبطة		عدد لانهائي → مرتبطة

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,2,4), v_2 = (2,1,3), v_3 = (4,-1,1) \in R^3\}$

مرتبطة أم مستقلة خطيا

الحل

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مرتبطة

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (0,0,1) \in R^3\}$

مرتبطة أم مستقلة خطيا

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

مستقلة

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,1), v_2 = (0,1), v_3 = (0,5) \in R^2\}$

مرتبطة أم مستقلة خطيا

$2 < 3$

$m < n$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}_{2 \times 3}$$

$m \times n$

مرتبطة

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,2,3), v_2 = (2,-1,5) \in R^3\}$

مرتبطة أم مستقلة خطيا

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}_{m \times n}^{3 \times 2}$$

$3 > 2$
$m > n$

اختزال

$$[A|\vec{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

اختزال
جاوس جوردن

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0 \;/\; x_2 = 0$

حل وحيد تافه صفري

مستقلة

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,2,3), v_2 = (2,4,6) \in R^3\}$

مرتبطة أم مستقلة خطيا

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}_{m \times n}^{3 \times 2}$$

$3 > 2$
$m > n$

اختزال

$$[A|\vec{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

اختزال
جاوس جوردن

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 + 2x_2 = 0$

معادلة (1) مجهول (2)

عدد لانهائي

مرتبطة

تمرين:

عين قيمة λ التي تجعل المتجهات الاتية مستقلة خطيا

$(1,3)$ $(2, \lambda^2+2)$

$x+3$, $2x+(\lambda^2+2)$

الحل

$|A| \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda^2+2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\lambda^2+2-6 \neq 0$

$\lambda^2-4 \neq 0$

$\lambda^2 \neq 4$

$\lambda \neq \pm\sqrt{4}$

$\lambda \neq \pm 2$

$\lambda = R - \{\pm 2\}$

ملاحظة

اذا كان السؤال مرتبط بقيمة

الحل

$\lambda = \pm 2$

تمرين:

عين قيمة λ التي تجعل المتجهات الاتية مستقلة خطيا

$v_1 = 1-x+x^2+\lambda x^3$

$v_2 = 1+x+3x^2+4x^3$

$v_3 = 1-x+x^2+3x^3$

$$|A| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \lambda & 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$4 \quad 3$

$m \times n$ $\quad m > n$

اختزاله

$$[A \mid \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ \lambda & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

اختزاله جاوس

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

مستقلة ← حل وحيد تافه صفر

$3-\lambda \neq 0$

$\lambda \neq 3$

$\lambda = \mathbb{R} - \{3\}$

حلول غير تافهة اذا كانت المتجهات مرتبطة

$\lambda = 3$

تمرين:

عين قيمة λ التي تجعل المتجهات الاتية مستقله خطيا

$v_1 = \lambda x^2-3x+2$

$v_2 = 2x^2-3x+2$

$v_3 = -x^2-x-1$

$v_4 = x^2+x$

الحل

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$m \times n$

$m < n$ ← مرتبطة دائما

$\lambda = \phi$

حالة خاصة

اذا كانت الدالات مرتبطة

$\lambda = R$