الفصل الرابع

تعريف فضاء المتجهات

الأعداد الحقيقية

فضاء الأعداد R

$\boxed{R^2}$

$(1,5) \leftarrow$ متجه

$(-1, \sqrt{2})$

$(\frac{1}{2}, -3)$

$\vdots$

$\boxed{R^3}$

$(2,5,-3) \leftarrow$ متجه

$(\sqrt{7}, \frac{1}{2}, 0.3)$

$\vdots$

$\boxed{R^n}$

فضاء كثيرات الحدود P

$\boxed{P_1(x)}$

$2x - 5 = (2,-5)$

$3 - x = (-1, 3)$

$\vdots$

$\boxed{P_2(x)}$

$x^2 - 5x + 1 = (1,-5,1)$

$3 - x^2 + 4x = (-1, 4, 3)$

$\vdots$

$\boxed{P_n(x)}$

فضاء المصفوفات M

$\boxed{M_{2\times 2}}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (2,-1,0,1)$

$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (-5,2,0,0)$

$\vdots$

$M_{2\times 2}$

$\vdots$

$\boxed{M_{n\times r}}$

الفضاءات الجزئية

نقول أن W فضاء جزئي من فضاء المتجهات V إذا تحقق

١) $\boxed{W \neq \emptyset}$ أي ان W غير خالية

خطأ

٢) إذا كان $u , v \in W$ فإن $u+v \in W$

متجهان

٣) إذا كان $u \in W$ و $k \in R$ فإن $ku \in W$

فضاء متجه عدد حقيقي

تمرين: إذا كانت $W = \{ (a, b) \in R^2 : a + 3b = 0 \}$

أثبت أن W فضاء جزئي من R^2

الحل

① اثبات أن $W \neq \phi$ نبحث عن عنصر ينتمي الى W

حل أ (الأصفار) $(0, 0) \in W$ لأن $0 + 3.0 = 0$ ✓

حل آخر $(3, -1) \in W$ لأن $3 + 3(-1) = 0$

$\Leftarrow W \neq \phi$

② نفرض $u, v \in W$

$u = (a_1, b_1) \; : \; a_1 + 3b_1 = 0$

$v = (a_2, b_2) \; : \; a_2 + 3b_2 = 0$

جمع جمع

$u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \; : \; a_1 + a_2 + 3(b_1 + b_2) = 0$

$\Longrightarrow u + v \in W$

③ نفرض $u \in W$ ، $k \in R$

$u = (a, b) \; : \; a + 3b = 0$

بالضرب k بالضرب k

$ku = (ka, kb) \; : \; ka + 3kb = 0$

$\Longrightarrow ku \in W$

من ① ، ② ، ③ W فضاء جزئي من R^2

$\boxed{W \subseteq R^2}$

تمرين: إذا كانت $W = \{ (a , b , c) \in R^3 \ : a +3b - c =2 \ \}$

بين هل W فضاء جزئي من R^3

الحل

1) اثبات ان $w \neq \phi$

نبحث عن عنصر ينتمي لـ w

$(2,0,0) \in w$ لأن $2+3(0)-(0)=2$

$\longrightarrow w \neq \phi$

2) نفرض $u, v \in w$

$u = (a_1, b_1, c_1) \ : \ a_1+3b_1-c_1=2$

$v = (a_2, b_2, c_2) \ : \ a_2+3b_2-c_2=2$

جمع جمع

$u+v = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2) \ : \ a_1+a_2+3(b_1+b_2)-(c_1+c_2) = \boxed{4}$

$\Longrightarrow u+v \notin w$

X لازم ذكر مثال

$(2,0,0) \in w \qquad 2+3(0)-(0)=2$

$(0,0,-2) \in w \qquad 0+3(0)-(-2)=2$

جمع

$(2,0,-2) \notin w \qquad 2+3(0)-(-2)=4 \neq 2$

$\longrightarrow u+v \notin w$

$\therefore$ w ليس فضاء جزئي من R^3

$$\boxed{W \not\subseteq R^3}$$

تمرين: إذا كانت $W = \{ ax^2+bx+c \in p_{2(x)} \ : a+b+c=0 \}$

بين هل W فضاء جزئي من $p_{2(x)}$

الحل

① اثبت أن $w \neq \phi$

$0x^2+0x+0 \in W \quad : \quad 0+0+0=0$

أو $\quad 2x^2-x-1 \in w \quad : \quad 2-1-1=0$

$\Longrightarrow w \neq \phi$

② نفرض $u, v \in w$

$u = a_1x^2+b_1x+c_1 \quad : \quad a_1+b_1+c_1=0$

$v = a_2x^2+b_2x+c_2 \quad : \quad a_2+b_2+c_2=0$

جمع   جمع

$u+v = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+c_1+c_2 \quad : \quad a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2=0$

$\Longrightarrow u+v \in w$

③ نفرض $u \in w \, , \, k \in R$

$u = ax^2+bx+c \quad : \quad a+b+c=0$

بالضرب k   بالضرب k

$ku = kax^2+kbx+kc \quad : \quad ka+kb+kc=0$

$\Longrightarrow ku \in w$

محقق ① , ② , ③ w فضاء جزئي من $P_2(x)$

$\boxed{w \subseteq P_2(x)}$

تمرين: إذا كانت $W = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2} \; : a^2 + b = c^2 + d \}$

بين هل W فضاء جزئي من $M_{2\times2}$

الحل

① اثبات أن $W \neq \phi$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W \quad 0^2 + 0 = 0^2 + 0$

$0 = 0$

$\Longrightarrow W \neq \phi$

② نفرض $u, v \in W$

$u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} : a_1^2 + b_1 = c_1^2 + d_1$

$v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} : a_2^2 + b_2 = c_2^2 + d_2$

تربيع جمع

جمع

$u + v = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} : a_1^2 + a_2^2 + b_1 + b_2 = c_1^2 + c_2^2 + d_1 + d_2$

$u + v \notin W$

$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$

لا ذكر مثال

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in W \quad 1^2 + 1 = 1^2 + 1$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \in W \quad 2^2 + 3 = 0^2 + 7$

(+)

$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \notin W \quad 3^2 + 4 \neq 1^2 + 8$

$13 \neq 9$

$\Longrightarrow u + v \notin W$

∴ W ليس فضاء جزئي من $M_{2\times2}$

$\boxed{W \not\leq M_{2\times2}}$

السؤال الأول : [5 درجات]

لتكن المجموعة $W = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y - 2z = 0, y + 3z = 0\}$

I) أثبت أن المجموعة W تشكل فضاءا جزئيا في R^3 .

الحل

① اثبات أن $w \neq \phi$

$(0,0,0) \in w$: $0+0-2.0=0$

$0+3.0=0$

$w \neq \phi$

② نفرض $u, v \in w$

$u = (x_1, y_1, z_1)$: $x_1+y_1-2z_1=0$, $y_1+3z_1=0$

$v = (x_2, y_2, z_2)$: $x_2+y_2-2z_2=0$, $y_2+3z_2=0$

جمع جمع جمع

$u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$: $x_1+x_2+y_1+y_2-2(z_1+z_2)=0$, $y_1+y_2+3(z_1+z_2)=0$

$u+v \in w$

③ نفرض $u \in w$, $k \in R$

$u = (x, y, z)$: $x+y-2z=0$, $y+3z=0$

بالضرب + k بالضرب + k بالضرب + k

$ku = (kx, ky, kz)$: $kx+ky-2kz=0$, $ky+3kz=0$

$ku \in w$

من ① ، ② ، ③ w فضاء جزئي من R^3

$\boxed{W \subseteq R^3}$