تعيين (إيجاد) الأساس

١) تعيين أساس وبعد فضاء الحل للنظام المتجانس

٢) تعيين أساس وبعد الفضاء الجزئي المولد بجموعة متجهات

٣) تعيين أساس وبعد فضاء يحتوي علي متجهات معطاه

٤) تعيين أساس وبعد فضاء جزئي معرف بقاعدة

١) تعيين أساس وبعد فضاء الحل للنظام المتجانس

تمرين : عين أساس وبعد فضاء الحل للنظام المتجانس

$x_1+x_2-x_3+2x_4 = 0$

$x_2+x_3-x_4 = 0$

$3x_1+4x_2-2x_3+5x_4 = 0$

الحل

$[A \mid 0]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{جوردن}]{\text{جاوس}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{معادلة}}$ $x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0$

$x_2 + x_3 - x_4 = 0$

معادلة   مجهول

2 < 4

حل لا نهائي

$\xrightarrow{\text{نفرض}}$ $x_4 = t$

$\xrightarrow{\text{نفرض}}$ $x_3 = s$

$\xrightarrow{\text{تعويض}}$ $x_2 = t - s$

$\xrightarrow{\text{تعويض}}$ $x_1 = 2s - 3t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s-3t \\ t-s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3t \\ t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$= s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الأساس $= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

البعد $=$ 2

dim

تمرين : عين أساس وبعد فضاء الحل للنظام المتجانس

$x-y+2z=0$

$-2x+3y-z=0$

$-x+2y+2z=0$

الحل

$[A \mid 0]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{اختزال جاوس جوردان}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x=0$

$y=0$

$z=0$

حل وحيد تافه صفري

لا يوجد أساس X

$\dim = 0$

تمرين : عين أساس وبعد فضاء الحل للنظام المتجانس

$x_1-2x_2-x_3+x_4 = 0$

$3x_1+x_2-5x_3-x_4 = 0$

$x_1-x_2+2x_4 = 0$

$x_1-x_2+x_3 = 0$

$[A \mid 0]$

الحل

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

لا يوجد أساس X

$\dim = 0$

$$\xrightarrow{\text{اختزال جاوس جوردان}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1=0$

$x_2=0$

$x_3=0$

$x_4=0$

حل وحيد تافه صفري

٢) تعيين أساس وبعد الفضاء الجزئي المولد بمجموعة متجهات(محتوى)

طريقة (١)

نضع المتجهات علي هيئة صفوف

ونختزل فتكون الصفوف الغير صفرية

هي الاساس من المصفوفة الأصلية

قبل الاختزال

مع مراعاة التبديل إذا وجد أثناء الاختزال

طريقة (٢) أسهل

نضع المتجهات علي هيئة أعمدة

نختزل فتكون الأعمدة من المصفوفة الأصلية

التي تقابل الاعمدة ذات الواحدات المتقدمة

من المختزلة هي متجهات الاساس

دون مراعاة للتبديل

$$\begin{matrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

إذا كان عدد الصفوف الغير صفرية بعد الاختزال

اقل من	يساوي
المتجهات الأصلية	المتجهات الأصلية
فإنها **مرتبطة**	فإنها **مستقلة**

إذا كان عدد الأعمدة ذات الواحدات بعد الاختزال

اقل من	يساوي
المتجهات الأصلية	المتجهات الأصلية
فإنها **مرتبطة**	فإنها **مستقلة**

تمرين : أوجد أساس وبعد الفضاء الجزئي المولد من R^4

$$W = \{v_1 = (1,-1,2,0), v_2 = (-1,0,2,3), v_3 = (2,1,0,1), v_4 = (2,0,4,4)\}$$

ثم بين هل متجهات W مستقلة ام مرتبطة

الحل

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

اختزال

جاوس

أ حل

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الأساس الصفوف الغير صفرية

الصف 1 2 3 من الأصلية

الأساس $= \{(1,-1,2,0), (-1,0,2,3), (2,1,0,1)\}$

$= \{v_1, v_2, v_3\}$

$\dim = 3$ أقل من

المتجهات مرتبطة

تمرين : أوجد أساس وبعد الفضاء الجزئي المولد من $P_2(x)$

$$P=\{2x^2+2x+2,\quad 7x^2+3x+4\quad ,6x^2+x+1\}$$

(2,2,2) (7,3,4) (6,1,1)

ثم بين هل متجهات P مستقلة ام مرتبطة

الحل

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اختزال جاوس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الصف ① ، ② ، ③ = الرتبة

الأساس = $\boxed{\{(2,2,2),(7,3,4),(6,1,1)\}}$

$= \{2x^2+2x+2,\ 7x^2+3x+4,\ 6x^2+x+1\}$

dim = 3 يساوي

مستقلة

تمرين : أوجد أساس وبعد الفضاء الجزئي المولد من R^3

$$B=\{(1,0,1),(1,1,0),(-1,1,-2),(1,2,1),(1,1,0)\}$$

ثم بين هل متجهات B مستقلة ام مرتبطة

الحل

نحل بدلالة أعمدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

اختزال جاوس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الأساس = {(1,0,1),(1,1,0),(1,2,1)}

dim = 3 أقل من

مرتبطة

٣) تعيين أساس وبعد فضاء يحتوي على متجهات معطاه

نوجد الاساس المعتاد للفضاء المعطي ونضمه الي المتجهات المعطاة ونطبق طريقة (٢)

تمرين:

عين أساس للفضاء R^3 يحتوي علي المتجه $V = (0,1,1)$

مكرر مكرر مكرر

$(0,1,1),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{جاوس}]{\text{اختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

القاعدة = $\{(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$

البعد : 3

تمرين:

عين أساس للفضاء R^3 يحتوي علي $V_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (1,1,1)$

مكرر مكرر مكرر

$(1,0,2),\ (1,1,1),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس}]{\text{اختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

H.W

القاعدة = $\{(1,0,2),(1,1,1),(1,0,0)\}$

البعد : 3

ملاحظة:

إذا طلب ادخال متجه مع مجموعة متجهات لكي تكون فضاء جزئي مولد

لابد أن يكون تركيب خطي لهم (بالاختزال حل وحيد أو عدد لانهائي)

تمرين:

أوجد مجموعة قيم الثابت α التي تجعل المتجه $V = (-7,2,\alpha + 5)$

ينتمي الي الفضاء الجزئي المولد بالمتجهات $\{(2,-1,0),(-5,4,-3),(1,1,-3)\}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & \alpha+5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+2 \end{array}\right]$$

$$\alpha + 2 = 0$$

$$\alpha = -2$$

٤) تعيين أساس وبعد فضاء جزئي معرف بقاعدة

تمرين:

عين أساس وبعد الفضاء الجزئي المعرف بالقاعدة

$$W=\{(a,b,c):a+b+c=0\}$$

الحل

معادلة ① < ③ مجهول

$a+b+c=0$

نفرض ⟶ $c=t$

نفرض ⟶ $b=s$

نعوض ⟶ $a=-t-s$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-t-s\\s\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-t\\0\\t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-s\\s\\0\end{bmatrix}$$

$$=t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

الأساس $\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

البعد : ②

تمرين:

عين أساس وبعد الفضاء الجزئي المعرف بالقاعدة

$$W = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \ : a + b = 0 \ , \ b + c + d = 0\}$$

الحل

معادلة مجهول

$4 > 2$

$a + b = 0$

$b + c + d = 0$

حر → $b = t$

حر → $d = s$

معوض → $a = -t$

معوض → $c = -t - s$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ -t-s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -s \\ s \end{bmatrix}$$

$$= t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الأساس = $\{-x^3 + x^2 - x \ , \ -x + 1\}$

البعد = 2

تمرين:

عين أساس وبعد الفضاء الجزئي المعرف بالقاعدة

$$W = \{A \in M_{2\times 2} : A = A^t\}$$

الحل

نفرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A = A^t$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$a = a$ | $b = c$

$c = b$ | $d = d$

$\Longrightarrow$ نفرض $c = t$, $b = t$

نفرض $a = s$

نفرض $d = L$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & t \\ t & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

$$= s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + L\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الأساس $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

البعد $= 3$

تمرين:

عين أساس وبعد الفضاء الجزئي المعرف بالقاعدة

$$W = \{A \in M_{2\times2} : A = -A^t\}$$

الحل

نفرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$A = -A^t$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix}$

$a = -a$
$a + a = 0$
$2a = 0$
$a = 0$

$b = -c$

نفرض $\rightarrow$ $c = t$, $b = -t$

$c = -b$

$d = -d$
$d + d = 0$
$2d = 0$
$d = 0$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

الأساس $= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

البعد $= 1$

تمرين:

عين أساس وبعد الفضاء الجزئي المعرف بالقاعدة $W = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} : a, b \in R\}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الأساس $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

البعد $= 2$