جامعة الملك سعود / كلية العلوم قســـم الرياضيات	السبت 13 /1433/02 1 - 9 صباحا	الفصل الأوّل 1433/1432 هـ الزمن // ثلاث ساعات
الإسم / .... رقم الشعبة /	الإختبار النهائي في المقرر 244 ريض	الرقم الجامعي / .... أستاذ المادة / ....

الإجابات

درجة الجزء الأول

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	الدرجة
رمز الإجابة	د	ب	أ	ج	ج	ب	ج	ب	أ	ب	$\frac{}{20}$

درجة الجزء الثاني

رقم السؤال	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	السابع	الثامن	الدرجة
الدرجة	$\frac{}{2}$	$\frac{}{5}$	$\frac{}{4}$	$\frac{}{3}$	$\frac{}{4}$	$\frac{}{4}$	$\frac{}{2}$	$\frac{}{6}$	$\frac{}{30}$

الدرجة النهائية	
	50

لاحظ أن : (1) عدد الورقات 12 -------- (2) إستخدم خلف الورقات مع الورقة الإضافية كمسودات بدون نزع الورقة الأخيرة

الجزء الأول : [درجتان لكل سؤال]

ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من 1 إلى 10 في الجدول المعطى :

(1) إذا كانت $S=\{u_1=(1,2,-1),u_2=(0,1,1),u_3=(2,1,1)\}$ أساسا في R^3 و كان $v=(1,2,3)$ فإنّ $[v]_S$ هي:

(أ) $(\frac{2}{3},2,\frac{1}{3})^T$ (ب) $(\frac{1}{3},2,\frac{2}{3})^T$ (ج) $(2,\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$ (د) $(\frac{-1}{3},2,\frac{2}{3})^T$

(2) بعد الفضاء الجزئي من R^3 المولد بالمتجهات $u_1=(1,2,-1),\ u_2=(2,1,-1),\ u_3=(1,-1,0),\ u_4=(4,5,-3),\ u_5=(3,0,-1)$ يساوي :

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(3) إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة n تحقق $A^2\neq 0$ و $A^3=0$ فإنّ $(I_n+A)^{-1}$ هو:

(أ) I_n-A+A^2 (ب) I_n+A-A^2 (ج) I_n+A+A^2 (د) غير موجود

(4) إذا كانت A مصفوفة مربعة من درجة 3 تحقق $A^T=-2adj(A^2)$ فإن واحدة فقط من بين العبارات التالية صحيحة:

(أ) $|A|=0$ (ب) $|A|=-\frac{1}{2}$ (ج) $|A|\in\{-\frac{1}{2},0\}$ (د) $|A|\in\{\frac{1}{2},0\}$

(5) إذا كان $T:R^2\to R^2$ تحويلا خطياحيث $T(x,y)=(x+y,x-y)$ فإن مصفوفة التحويل الخطي $[T]_B$ بالنسبة للأساس $B=\{(1,1),(2,1)\}$ هي:

(أ) $\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}1&2\\1&1\end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix}-2&-1\\2&2\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}$

(6) مجموعة القيم المميزة للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}3&-1\\5&-3\end{bmatrix}$ هي :

(أ) $\{-4\}$ (ب) $\{-2,2\}$ (ج) $\{-3,1\}$ (د) Φ

(7) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4&0\\1&-2\end{bmatrix}$ فإن:

(أ) A و B قابلتان للإستقطار.

(ب) A قابلة للإستقطار بينما B ليست كذلك.

(ج) B قابلة للإستقطار بينما A ليست كذلك .

(د) A و B غير قابلتين للإستقطار.

(8) إذا كان $T:R^3\to R^3$ تحويلاً خطياً معرفاً بالقاعدة $T(x,y,z)=(2x-y+3z,\ 4x-2y+3z,-6x+3y-9z)$ ، فإن بعد $ket(T)$ (أي $nullity(T)$) يساوي:

(أ) 2 (ب) 1 (ج) 0 (د) 3

(9) إذا كانت المجموعة $\{(1,\sqrt{2}),(1,-\sqrt{2})\}$ تشكل أساسا عياريا متعامدا في R^2 و ذلك بالنسبة للضرب الداخلي $<(a,b),(c,d)>= hac+kbd$ فإنه:

(أ) $h=\frac{1}{2}, k=\frac{1}{4}$

(ب) $h=\frac{1}{4}, k=\frac{1}{2}$

(ج) $h=\frac{1}{2}, k=\frac{1}{2}$

(د) $h=\frac{1}{4}, k=\frac{1}{4}$

(10) إذا كان $T:R^3 \to R^2$ تحويلا خطيا وكان $T(1,1,2)=(1,-1)$, $T(0,1,-1)=(-1,4)$ و $T(1,-1,1)=(2,3)$ فإن $T(6,5,7)$ تساوي:

(أ) $(-5,14)$

(ب) $(5,14)$

(ج) $(5,-14)$

(د) $(2,12)$

الجزء الثاني : أجب على الأسئلة التالية في نفس ورقة الأسئلة:

السؤال الأول : [2 درجات]

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}$ أثبت أنّ $|A| = (c-a)(b-a)(c-b)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ a & b \\ a^2 & b^2 \end{matrix}$$

$$= bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$$

$$= c^2(b-a) + ab(b-a) + c(a^2-b^2) \quad ; \quad a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

2

$$= (b-a)\ (c^2 + ab - c(a+b))$$

$$= (b-a)\ (c^2 - ca + ab - cb)$$

$$= (b-a)\ (c(c-b) + a(b-c)) = (b-a)\ (c-b)\ (c-a).$$

السؤال الثاني : [5 درجات]

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(1) أوجد A^{-1} باستخدام العمليّات الصفية الأوليّة فقط

(2) إحسب $|A|$ ثم إستنتج $adj(A)$

1)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

3

2)

$$|A| = -2$$

1

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\,A \implies adj(A) = |A|\ A^{-1} = -2A^{-1}$$

$\frac{1}{2}$

$$\implies adj(A) = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}$

السؤال الثالث : [4 درجات] ليكن النظام الخطّي

$$x+\alpha^2 y = 2\alpha$$
$$x+y=-2$$

أوجد قيم الثابت α لكي يكون

1) للنظام حلّ وحيد ثمّ جد الحلّ

2) للنظام عددا غير منته من الحلول ثم جد هذه الحلول

3) النظام غير متّسق

$$A=\begin{bmatrix}1 & \alpha^2\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \quad |A| = 1-\alpha^2.$$

1   1) للنظام حل وحيد إذا وفقط إذا $\alpha \neq \pm 1$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2\alpha & \alpha^2\\ -2 & 1\end{vmatrix}}{1-\alpha^2}=\frac{2\alpha}{1+\alpha}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2\alpha\\ 1 & -2\end{vmatrix}}{1-\alpha^2}=\frac{-2}{1-\alpha}.$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

2) $1-\alpha^2=0 \Leftarrow \alpha \neq \pm 1$

إذا كانت $\alpha=1$ ليس هناك حلول.

1   إذا كانت $\underline{\alpha=-1}$ هناك عدد غير منته من الحلول

$\frac{1}{2}$ $\left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c}1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ $\boxed{x=-2-y}$

$\frac{1}{2}$ 3) إذا كان $\alpha=1$ ليس هناك حلول.

السؤال الرابع : [3 درجات]

عين أساسا لفضاء حلول النظام المتجانس $AX = 0$ حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

$$AX=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow R: \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad 1,5$$

$$\begin{cases} x - y + 2t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow]6[\quad \begin{array}{l} y = z \\ x = y - 2t = z - 2t \end{array} \quad 0.5$$

$$(x,y,z,t) = (z-2t, z, z, t) = z(1,1,1,0) + t(-2,0,0,1).$$

1 $\{(1,1,1,0), (-2,0,0,1)\}$ أساس لفضاء الحلول هو

السؤال الخامس: [4 درجات]

ليكن V الفضاء الجزئي من R^4 المولد بالمتجهات $u_1 = (1,2,1,0), u_2 = (2,3,4,5), u_3 = (0,1,2,3), u_4 = (3,4,3,2)$.

1) جد أساسا للفضاء V و إستنتج $\dim V$.

2) جد العلاقة بين x,y,z,t بحيث يكون $(x,y,z,t) \in V$

$$\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1$$

2

إذا $\{u_1, u_2, u_3\}$ هو أساس الفضاء المولد ب $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

1

$(x,y,z,t) \in V = \langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle$ 2]

إذا هذا النظام هو متسق :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & x \\ 2 & 3 & 1 & 4 & y \\ 1 & 4 & 2 & 3 & z \\ 0 & 5 & 3 & 2 & t \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2x-y \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{z+2y-6x}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-z+y \end{array}\right]$$

$(x,y,z,t) \in V$ إذا

إذا و فقط إذا

$$\boxed{t-z+y=0}$$

1

السؤال السادس : [4 درجات]

إذا كان $T: R^5 \to R^3$ تحويلاً خطياً معرفابالضرب بالمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

1) عين أساس و بعد $\ker T$ (فضاء النواة).

2) إستنتج رتبة التحويل الخطي T (أي $rank(T)$).

1)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

1

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{x_4 = -x_5}$

$x_3 = -2x_4 - x_5 = 2x_5 - x_5$; $\boxed{x_3 = x_5}$

2 $x_1 = x_2 - x_3 - x_4 = x_2 - x_5 - x_5 = x_2 - 2x_5$

$\boxed{x_1 = x_2 - 2x_5}$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2 - 2x_5, x_2, x_5, -x_5, x_5) =$

$x_2(1,1,0,0,0) + x_5(-2,0,1,-1,1)$

أساس $\ker T$ هو $\{(1,1,0,0,0); (-2,0,1,-1,1)\}$

2) $\text{nullity}(T) + \text{rank}\, T = 5$

1 إذا $\text{rank}(T) = 5 - 2 = 3$

السؤال السابع: [2 درجات]

إذا كان الضرب الداخلي المعرّف على R^2 بالقاعدة $<(a,b),(c,d)> = 6ac + 3bd$. فإستخدم خوارزميّة جرام-شميت لتحويل الأساس $\{u_1 = (1,1), u_2 = (1,-2)\}$ إلى أساس عياري متعامد.

0,5 $V_1 = u_1 = (1,1)$; $\|V_1\| = 3$

0,5 $V_2 = u_2 - \left\langle u_2, \frac{V_1}{\|V_1\|^2} \right\rangle V_1 = (1,-2)$

$\|V_2\| = 3\sqrt{2}$

إذاً $\left\{ \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\}$

هو أساس عياري متعامد

0,5 0,5

السؤال الثامن: [6 درجات]

لتكن $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(أ) أثبت أن $\{1,4\}$ هي مجموعة القيم المميزة للمصفوفة A.

(ب) جد أساسا لكلّ فضاء مميّز.

(ج) أثبت أنّ A قابلة للإستقطار.

(د) عيّن مصفوفة P قابلة للعكس بحيث $P^{-1}AP = D$ تكون مصفوفة قطريّة.

1 أ) $f(\lambda) = (\lambda-4)^2(\lambda-1) = |\lambda I - A|$

ب) $E_1 = N(I-A) = \{X \in \mathbb{R}^3 / (I-A)X = 0\}$

1 $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$: $\boxed{x-z=0}$, $y=0$ $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$E_4 = N(4I - A)$; $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$

$\boxed{x+2z=0}$

$$E_4 = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle . \qquad 1$$

تعدد القيمة المميزة $= 2$ ؛ $\dim E_4$ (تعدد الجبري يساوي التعدد الهندسي) 1

لهذا A قابلة للاستقطار

ج)

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 1$$

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 1$$

و