د. برهان

جَامعة الملك سعود

قسم الريَاضيَات　　الإختبَار الفصلَى الَاول　　الفصل الثَاني ١٤٣٠ ـ ١٤٣١ هـ
كلية العلوم　　٢٤٤ ريض　　الزمن سَاعة و نصف

اَلإسم .... الرقم الجَامعي .... رقم التّحضير ......
رقم الشعبة .... أستَاذ المَادة ....

رقم السُؤَال	1	2	3	4	5	6	7	8	اَلدرجة
رمز الإجَابة	د	ب	د	ب	د	ج	ج	د	

درجة السُؤَال الَاول	درجة السُؤَال الثَّاني	درجة السُؤَال الثَّالث	اَلمجموع

اَلدرجة النّهَائية	
	20

عدد الورقَات 5
ممنوع إستعمَال الَالة الحَاسبة
إستعمل خلف الورقَات مع الورقة الإضَافية كمسودَّات من دون نزع الورقة الأَخيرة

الجزء الأول [درجة و نصف لكل سؤال] (ضع الإجابة الصحيحة من 1 إلى 8 في الجدول المعطى)

(1) إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة 2 و كان $|A| = 3$ فإن $|A^{-1}\text{adj}A^{-1}|$ يساوي

أ) $\frac{1}{3}$ ب) 9 ج) 3 $\boxed{\text{د)}\ \frac{1}{9}}$.

(2) إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n بحيث أن $A^3 = A$ فإن

أ) $|A| \in \{0,1\}$ $\boxed{\text{ب)}\ |A| \in \{-1,0,1\}}$

ج) $|A| \in \{-1,0\}$ د) $|A| \in \{-1,1\}$.

(3) مجموعة قيم الثابت α التي تجعل للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{bmatrix}$ معكوسا هي

أ) $\{0\}$ ب) $\mathbb{R}$ ج) $\{1\}$ $\boxed{\text{د)}\ \emptyset}$.

(4) إذا كانت C مصفوفة من الدرجة 2 و كان $|3C| = -9$ فإن $|3I - C\text{adj}C|$ يساوي

أ) 4 $\boxed{\text{ب)}\ 16}$ ج) 6 د) 36 .

(5) إذا كانت A مصفوفة بحيث $(I+2A)^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$ فإن A تساوي

أ) $2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

ج) $2\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{د)}\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$.

(6) قيمة الثابت α التي تجعل النظام الآتي

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ 5x + 5z = \alpha \end{cases}$$

متسقا (متآلفا) هي

أ) -1 ب) 2 $\boxed{\text{ج)}\ 1+}$ د) 0 .

(7) إذا كانت المصفوفة الموسعة لنظام معادلات خطية هي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-3 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن قيمة الثابت λ التي تجعل للنظام عددًا غير منته من الحلول هي

أ) $\lambda \neq \pm\sqrt{3}$ ب) $\lambda = 3$ $\boxed{\text{ج) } \lambda = \pm 2}$ د) $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

(8) قيمة الثابت k التي تجعل من المجموعة الآتية $W = \{(x, x+k, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$ فضاء جزئيًا من $\mathbb{R}^3$ هي

أ) $\lambda = 1$ ب) $\lambda = -1$ ج) $\lambda = 4$ $\boxed{\text{د) } \lambda = 0}$.

الجزء الثاني

السؤال الأول [3 درجات] لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ،

(i) أثبت أن $A^2 - 4A - 5I = 0$

(ii) إستخدم الفقرة (i) لإثبات أن A لها معكوس ثم عين هذا المعكوس.

1 (i) $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

0,5 $A^2 - 4A - 5I = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(ii) بما أن $A^2 - 4A - 5I = 0$ فإن:

$A^2 - 4A = 5I \iff A(A - 4I) = 5I \iff$

1 $A\left(\frac{1}{5}A - \frac{4}{5}I\right) = I.$

إذن A لها معكوس ومعكوسها

0,5 $A^{-1} = \frac{1}{5}A - \frac{4}{5}I = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$= \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 & 2/5 \\ 2/5 & -3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$

السُؤال الثّاني [درجتان و نصف] إستخدم طريقة جاوس لأيجاد مجموعة الحل للنظام

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

هذا النظام هو نظام متجانس و هو يكتب على الشكل $AX=0$

حيث $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_{21}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_{31}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (1,5)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+t=0 \\ y+t=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$$

يعني $(x,y,z,t)=(-t,-t,0,t)$ إذن

مجموعة الحل هي $S=\{t(-1,-1,0,1)\ ;\ t\in\mathbb{R}\}$ (1)

السُؤال الثّالث [درجتان و نصف] بين مَا إذَا كَانت المجموعة

$W=\{(x,y,z);\ 2x-y+z=0,\ x,y,z\in\mathbb{R}\}$ فضَاء جزئيًا من $\mathbb{R}^3$ أم لَا.

$W\neq\phi$ لأن $(0,0,0)\in W$ (0,5)

لنأخذ $u=(x,y,z)\in W$, $v=(x',y',z')\in W$ و $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

فلنثبت أن $\alpha u+\beta v\in W$ أم لا

$$\alpha u+\beta v=\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')$$
$$=(\alpha x+\beta x';\ \alpha y+\beta y';\ \alpha z+\beta z')\in\mathbb{R}^3$$ (2)

بما أن $2(\alpha x+\beta x')-(\alpha y+\beta y')+(\alpha z+\beta z')=$

$$\alpha(2x-y+z)+\beta(2x'-y'+z')=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0$$
$$=0$$

فان $\alpha u+\beta v\in W$

إذن W هو فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$.