د. برهان

جامعة الملك سعود

قسم الرياضيات　　الإختبار الفصلي الثاني　　الفصل الثاني ١٤٣٠ - ١٤٣١ هـ

كلية العلوم　　المقرر ٢٤٤ ريض　　الزمن ساعة و نصف

الإسم .... الرقم الجامعي .... رقم التحضير ......

رقم الشعبة .... أستاذ المادة ....

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	الدرجة
رمز الإجابة	ب	ب	ج	د	د	أ	ج	أ	

درجة السؤال الاول	درجة السؤال الثاني	درجة السؤال الثالث	المجموع

الدرجة النهائية	
	20

عدد الورقات 6

ممنوع إستعمال الالة الحاسبة

إستعمل خلف الورقات مع الورقة الإضافية كمسودات من دون نزع الورقة الأخيرة

الجزءُ الأول [درجة و نصف لكل سُؤال] (ضع رمز الإجَابة الصّحيحة من 1 إلَى 8 في الجدول المعطَى)

(1) إذَا كَان $u_1 = (1,-2,4), u_2 = (2,0,1), v = (0,-4,7), w = (2,4,0)$ فإن

أ) كل من w, v تركيب خطي للمتجهين u_1, u_2

ب) v تركيب خطي للمتجهين u_1, u_2 بينمَا w ليس كذلك.

ج) w تركيب خطي للمتجهين u_1, u_2 بينمَا v ليس كذلك.

د) كل من w, v ليس تركيبًا خطيًا للمتجهين u_1, u_2 .

(2) إذَا كَانت $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 9 & 2 & -14 \end{pmatrix}$ فإن أسَاس الفضَاء الصفّي للمصفوفة A هو المجموعة

أ) $\{(1,-3,0,4)\}$ ب) $\{(1,-3,0,4),(2,0,1,-1)\}$

ج) $\{(1,2,1),(-3,0,9)\}$ د) $\{(1,-3,0,4),(2,0,1,-1),(1,9,2,-14)\}$.

(3) إذَا كَانت A مصفوفة من الدرجة 5×3 فإن

أ) $\text{rank}A = 4$ ب) متجهَات أعمدة A مستقلة خطيًا

ج) متجهَات أعمدة A مرتبطة خطيًا د) متجهَات صفوف A تشكل أسَاسًا للفضَاء $\mathbb{R}^5$.

(4) مجموعة قيم الثَابت λ التي تجعل المجموعة $S = \{1+\lambda x^2, 2+\lambda x, -1+4x+2x^2\}$ أسَاسًا للفضَاء $\mathcal{P}_2(x)$ هي

أ) $\mathbb{R}$ ب) $\mathbb{R} \setminus \{1,-3\}$ ج) $\{0,-10\}$ د) $\mathbb{R} \setminus \{0,-10\}$

(5) مجموعة قيم الثَابت t التي تجعل المجموعة $B = \{(1,-1,1,-1),(1,1,1,1),(1,-1,-1,t)\}$ مستقلة خطيًا في $\mathbb{R}^4$ هي

أ) $\emptyset$ ب) $\{1\}$ ج) $\{-1\}$ د) $\mathbb{R}$.

(6) إذَا كَان V فضَاء ضرب دَاخلي و كَان $u, v \in V$ و $||u||^2 = 4$ ، $||v||^2 = 10$ و $\langle u+v, 2u-v \rangle = -7$ فإن $\langle u, v \rangle$ يسَاوي

أ) -5 ب) 5 ج) 6 د) -6 .

(7) إذَا كَانت المجموعة $\{u_1, u_2\}$ تشكل أسَاسًا عيَاريًا متعَامدًا لفضَاء الضرب الدَاخلي V و كَان $v \in V$ بحيث أن $\langle v, u_1 \rangle = 3$ و $\langle v, u_2 \rangle = -5$ فإن $||v||^2$ يسَاوي

أ) 36 ب) 16 ج) 34 د) 8 .

(8) إذا كانت المجموعة $C = \{(1, \sqrt{3}), (-1, \sqrt{3})\}$ تشكل أساسا عياريا متعامدا للفضاء $\mathbb{R}^2$ و ذلك بالنسبة للضرب الداخلي المعرف بالقاعدة $\langle (a, b), (a', b') \rangle = \alpha aa' + \beta bb'$ فإن

أ) $\boxed{\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{6}}$ ب) $\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{1}{3}$ ج) $\alpha = \frac{1}{6},\ \beta = \frac{1}{2}$ د) $\alpha = \frac{1}{3},\ \beta = \frac{1}{2}$.

الجزء الثاني

السؤال الأول [درجتان] عين اساسا لفضاء الحل للنظام الآتي

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

هذا النظام متجانس يكتب على الشكل $AX = 0$ حيث

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

يعني هذا النظام متكافئ

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} x_1 = -3(x_3 + x_4) + x_3 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

إذن $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_3 - 3x_4 ; x_3 + x_4 ; x_3 ; x_4)$

$= x_3 (-2, 1, 1, 0) + x_4 (-3, 1, 0, 1)$

مجموعة الحل للنظام هو الفضاء المولد ب $\{(-2,1,1,0) ; (-3,1,0,1)\}$

1

$$S = \langle (-2, 1, 1, 0) ; (-3, 1, 0, 1) \rangle$$

السؤال الثاني [3 درجات] عين اساسا لكل من الفضاء الصفي و الفضاء العمودي للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & -4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

- نستخدم طريقة جوردان - جاوس:

1 $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & -4 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

إذن أساس للفضاء الصفي هو $Row\,A = \langle (1,-1,0,2); (0,2,4,0); (0,0,0,1) \rangle$

أساس لـ $Row\,A$ هو $\{(1,-1,0,2); (0,2,4,0); (0,0,0,1)\}$

1 $$Rank\,A = \dim Row\,A = \dim Col\,A = 3$$

بما أن $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ فإن

$$Col\,A = \langle (1,0,0,0); (-1,2,0,0); (2,0,1,0) \rangle$$

1 أساس للفضاء العموي هو $\{(1,0,0,0); (-1,2,0,0); (2,0,1,0)\}$

اَلسُّؤَال الثَّالث [3 درجَات]

(أ) إذَا كَان u,v متجهين غير صفريين و متعَامدين في فضَاء ضرب دَاخلي V فأَثبت أن المجموعة $\{u,v\}$ مستقلة خطيًا.

(ب) إذَا كَان W فضَاء ضرب دَاخلي و كَان $u,v \in W$ بحيث أن $||u-v|| = ||u+v||$ فأثبت أن المتجهين u,v متعَامدَان.

(أ) نفترض أن $\alpha u + \beta v = 0$ (*) فلنثبت أن $\alpha = \beta = 0$

- نقوم بضرب طرفي المعادلة (*) بـ u ، فنحصل على أن:

$\langle \alpha u + \beta v , u \rangle = \langle 0 , u \rangle$. يعني

$\alpha \, ||u||^2 = 0$ لأن $\langle u,v \rangle = 0$

إذن $\boxed{\alpha = 0}$ لأن u متجه غير صفري.

- نقوم بضرب طرفي المعادلة * بـ v ، فنحصل على أن:

$\langle \beta v , v \rangle = \langle 0 , v \rangle$

إذن $\beta \, ||v||^2 = 0$ يعني $\boxed{\beta = 0}$ لأن v متجه غير صفري.

1,5

(ب) $||u+v|| = ||u-v|| \Longleftrightarrow \langle u+v , u+v \rangle = \langle u-v , u-v \rangle$

$\Longleftrightarrow ||u||^2 + 2\langle u,v \rangle + ||v||^2 = ||u||^2 - 2\langle u,v \rangle + ||v||^2$

$\Longleftrightarrow 4\langle u,v \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle u,v \rangle = 0$

$\Longleftrightarrow u \perp v$ (u و v متعامدان)

1,5