كلية العلوم	الاختبار الأول	الفصل الصيفي ١٤٣٦/١٤٣٧ هـ
قسم الرياضيات	في المقرر ٢٤٤ريض	الزمن : ساعة ونصف

تنبيه : لاتستعمل الآلة الحاسبة ورتب إجابتك حسب ترتيب ورود الأسئلة واكتب بخط مقروء واضح.

س (١)

(أ) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&2\\3&4&3\end{bmatrix}$ فجد $adjA$ وجد A^{-1} إن أمكن ذلك.

الحل

$C_{11}=+\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}=9-8=1$ | $C_{12}=-\begin{vmatrix}2&2\\3&3\end{vmatrix}=-(6-6)=0$ | $C_{13}=+\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}=8-9=-1$

$C_{21}=-\begin{vmatrix}0&0\\4&3\end{vmatrix}=0$ | $C_{22}=+\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}=3$ | $C_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\3&4\end{vmatrix}=-(4-0)=-4$

$C_{31}=+\begin{vmatrix}0&0\\3&2\end{vmatrix}=0$ | $C_{32}=-\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}=-2$ | $C_{33}=+\begin{vmatrix}1&0\\2&3\end{vmatrix}=3$

$C=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&3&-4\\0&-2&3\end{bmatrix}\longrightarrow adj(A)=C^T=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&-2\\-1&-4&3\end{bmatrix}$

$+\ -\ +$

$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&2\\3&4&3\end{vmatrix}=+1\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}=9-8=1$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&-2\\-1&-4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&-2\\-1&-4&3\end{bmatrix}$

(ب) استخدم طريقة جاوس-جوردان لإيجاد مجموعة الحل للنظام الخطي

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1$$
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3$$

الحل

$[A \mid B]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$x_1 - 2x_4 = 2$

$x_2 = 0$

$x_3 + 3x_4 = -1$

مجهول معادلة

$4 > 3$

عدد ∞ من الحلول

نفرض

$x_4 = t$

$x_3 = -1 - 3t$

$x_1 = 2 + 2t$

$x_2 = 0$

الحل

$\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$

$= \{(2+2t, 0, -1-3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

عدد ∞ من الحلول والنظام متسق

س(٢)

(ا) جد مجموعة قيم α التي تجعل للنظام الخطي

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -6\alpha$$
$$\alpha x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2\alpha$$
$$2x_1 + x_2 + (\alpha+1)x_3 = 4$$

حلاً وحيداً .

الحل

جاوس

$[A \mid B]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -6\alpha \\ \alpha & 3 & 2 & 2\alpha \\ 2 & 1 & \alpha+1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3\alpha \\ \alpha & 3 & 2 & 2\alpha \\ 2 & 1 & \alpha+1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3\alpha \\ 0 & 3-\frac{\alpha}{2} & 2-\frac{\alpha}{2} & 3\alpha^2+2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 6\alpha+4 \end{array}\right]$$

$$\frac{2}{1} - \frac{\alpha}{2} = \frac{4-\alpha}{2}$$

$$\frac{3}{1} - \frac{\alpha}{2} = \frac{6-\alpha}{2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3\alpha \\ 0 & \frac{6-\alpha}{2} & \frac{4-\alpha}{2} & 3\alpha^2+2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 6\alpha+4 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{R_2\left(\frac{2}{6-\alpha}\right)}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3\alpha \\ 0 & 1 & \frac{4-\alpha}{6-\alpha} & \frac{6\alpha^2+4\alpha}{6-\alpha} \\ 0 & 0 & \alpha & 6\alpha+4 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{R_3/\alpha}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3\alpha \\ 0 & 1 & \frac{4-\alpha}{6-\alpha} & \frac{6\alpha^2+4\alpha}{6-\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6\alpha+4}{\alpha} \end{array}\right]$$

لكي يكون النظام حل وحيد

$\alpha \neq 0$, $6-\alpha \neq 0$

$6 \neq \alpha$

$$\alpha = \mathbb{R} - \{0, 6\}$$

(ب) إذا كانت $\alpha = 1$ فجد قيمة x_2 مستخدماً قاعدة كرامر إن أمكن ذلك.

نعوض في السؤال السابق

$$2x_1 + x_2 + x_3 = -6$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} = [12+4+1]-[2+4+6]$$
$$= 17 - 12 = 5$$

$$|A_{x_2}| = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -6 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix} = [8-24+4]-[-12+16+4]$$
$$= -12 - (8)$$
$$= -20$$

$$x_2 = \frac{|A_{x_2}|}{|A|} = \frac{-20}{5} = -4$$

س(٣)

(أ) جد قيم a وقيم b التي تجعل النظام الخطي متسقاً.

$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = a$$
$$x_2 - 2x_3 + 3x_4 = b$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2$$
$$x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 5x_4 = 4$$

الحل

جاوس

$[A \mid B]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & 3 & b \\ 1 & -2 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 8 & -5 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & 3 & b \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 2-a \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 4-a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-a+2b \end{array}\right]$$

لكي يكون النظام متسق نأخذ

$2 - a - b = 0$

$\longrightarrow a + b = 2 \longrightarrow (1)$

$4 - a + 2b = 0$

$\boxed{a - 2b = 4} \longrightarrow (2)$

بحل المعادلتين (1) ، (2)

$\xrightarrow{(1)\,(-1)}$

$\cancel{-a} - b = -2$

$\cancel{a} - 2b = 4$

$(+)$ $\quad -3b = 2$

$b = -\frac{2}{3}$

$\xrightarrow[(1)]{\text{تعويض}}$ $a - \frac{2}{3} = 2$

$a = \frac{2}{1} + \frac{2}{3}$

$a = \frac{6+2}{3}$

$a = \frac{8}{3}$

(ب) إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة 3 بحيث $|-2A| = 16$ فجد $|4I + A\,adjA|$.

الحل

$|-2A| = 16$

$(-2)^3 |A| = 16$

$-8 |A| = 16$

$\div(-8)$

$|A| = -2$

$|4I + A\,adjA|$

$= |4I + |A| I|$

$= |4I - 2I|$

$= |2I|$

$= 2^3 |I|$

$= 8 \cdot 1$

$= 8$

س(٤)

(أ) إذا كانت A مصفوفة متماثلة بحيث $2\left(A^{-1}\right)^{T}+A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ **فجد** A .

الحل

$$A^{T}=A$$

$$2\left(A^{-1}\right)^{T}+A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$2\left(A^{T}\right)^{-1}+A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$2A^{-1}+A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$3A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{المعكوس للطرفين}]{\text{بأخذ}}\quad \left(3A^{-1}\right)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{3}A=\frac{1}{\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 1 & -3\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}-3 & -5\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}A=\frac{1}{6-5}\begin{bmatrix}-3 & -5\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3}A=\begin{bmatrix}-3 & -5\\ -1 & -2\end{bmatrix}\xrightarrow[3]{\text{بالضرب}}A=\begin{bmatrix}-9 & -15\\ -3 & -6\end{bmatrix}$$

(ب) إذا كانت $C=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 5 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}\alpha & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ بحيث $AB = AC$ فجد قيمة α.

سهل 1

$$AB = AC$$

$$\begin{bmatrix}\alpha & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boxed{2\alpha+6} & \alpha+4\\ 12+12 & 6+8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boxed{-2\alpha+10} & 7\alpha-2\\ -12+20 & 42-4\end{bmatrix}$$

ضفها ضبا سؤال

$$2\alpha+6 = -2\alpha+10$$

$$2\alpha+2\alpha = -6+10$$

$$4\alpha = 4$$

$$\alpha = 1$$

$$\alpha+4 = 7\alpha-2$$

$$\alpha-7\alpha = -4-2$$

$$-6\alpha = -6$$

$$\alpha = 1$$

س(٣) (ا) بين فيما إذا كان $W=\left\{A\in M_{nn}:\left(A^2\right)^T=A^2\right\}$ فضاءً جزئياً من الفضاء M_{nn} أم لا.

الحل

(1) اثبات ان $W \neq \phi$

$0 \in W$: $(0^2)^T = 0^2$

$W \neq \phi$

(2) نفرض $u, v \in W$

u : $(u^2)^T = u^2$

v : $(v^2)^T = v^2$

جمع

$u+v$: $(u^2)^T + (v^2)^T = u^2 + v^2$

$(u^2+v^2)^T = u^2 + v^2$

$u+v \notin W$

لان $(u+v)^2 \neq u^2 + v^2$

$= \boxed{u^2 + 2uv + v^2}$

W ليس فضاء جزئي من M_n

$W \not\subseteq M_n$