

جامعة الملك سعود
كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار الفصلي الأول
الفصل الثاني 1437 - 1438 هـ 244 رياض الزمن ساعة ونصف

السؤال الأول
استعمل طريقة جاوس لإيجاد حلول النظام الخطي $AX = B$ ،

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

حل

$[A|B]$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 11 & -3 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

نظام جاوس

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow x + 9u = -4$$

$$y + 13u = -9$$

$$z + 5u = 3$$

$$t + 6u = 0$$

معادلات

$$5 > 4$$

درجات

وانتظام

$$\rightarrow u = 5$$

$$\rightarrow t = -65$$

$$z = 3 - 5 \cdot 5$$

$$y = -9 - 13 \cdot 5$$

$$x = -4 - 9 \cdot 5$$

$$5 \in \mathbb{R}$$

السؤال الثاني

(4 درجات)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & a & 1 \\ b & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (1) \text{ اوجد المحدد المصفوفة التالية}$$

(2) اوجد قيم a, b بحيث تكون للمصفوفة A معكوس.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & a & 1 \\ b & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & a-4 & 0 \\ 0 & 3b+3 & 1-4b & -2-b \end{vmatrix}$$

$$= +1 \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 6 & a-4 & 0 \\ 3b+3 & 1-4b & -2-b \end{vmatrix}$$

$$= (-2-b) \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 6 & a-4 \end{vmatrix}$$

$$= (-2-b) [5a - 20 + 30]$$

$$= (-2-b) (5a + 10)$$

③ حل A

$$\Rightarrow |A| \neq 0$$

$$(-2-b)(5a+10) \neq 0$$

$$-2-b \neq 0 \quad | \quad 5a+10 \neq 0$$

$$b \neq -2$$

$$5a \neq -10$$

$$a \neq -2$$

$$b = R - \{-2\}$$

$$a = R - \{-2\}$$

السؤال الثالث

(5 درجات)

(1). أوجد معكوس المصفوفة التالية

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

الحل

$$[A | I]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{-6R_{32}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -14 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 14 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -29 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 14 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 31 & -2 & 13 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -29 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & 14 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -31 & 2 & -13 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -17 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -31 & 2 & -13 \end{array} \right]$$

\swarrow \searrow
A Θ^{-1}

$$\Theta^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -17 & 1 & -7 \\ -31 & 2 & -13 \end{bmatrix}$$

(٢) أوجد محدد المصفوفة B المربعة من الدرجة 3 و التي تحقق

$$2AB = I + A$$

$$\cdot \frac{1}{2} \rightarrow AB = \frac{1}{2} [I + A]$$

$$\xrightarrow{A^{-1}} B = A^{-1} \cdot \frac{1}{2} [I + A]$$

$$\xrightarrow{\text{نقطة}} B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -17 & 1 & -7 \\ -31 & 2 & -13 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \right]$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -17 & 1 & -7 \\ -31 & 2 & -13 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -17 & 2 & -7 \\ -31 & 2 & -12 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{17}{2} & 1 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{31}{2} & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

(6 درجات)

السؤال الرابع
للمنظام الخطي

$$\begin{cases} x+ay+2z = 1 \\ 2x-y+z = 3 \\ ax+4y+2az = 2 \end{cases}$$

(١) أوجد قيم a حتى يكون للنظام الخطي عدد لا نهائي من الحلول و أوجد حلول النظام في هذه الحالة.(٢) أوجد قيم a حتى يكون النظام الخطي غير متسق.

(الحل)

 $[A|B]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a & 4 & 2a & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & -1-2a & -3 & 1 \\ 0 & 4-a^2 & 0 & 2-a \end{array} \right]$$

 $R_2 / (-1-2a)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2a+1} & \frac{-1}{2a+1} \\ 0 & 4-a^2 & 0 & 2-a \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2a+1} & \frac{-1}{2a+1} \\ 0 & 0 & \frac{3a^2-12}{2a+1} & \frac{-3a^2+3a+6}{2a+1} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & \frac{4-a^2}{2a+1} + \frac{2-a}{1} \\ &= \frac{4-a^2+4a-2a^2+2-a}{2a+1} \\ &= \frac{-3a^2+3a+6}{2a+1} \end{aligned}$$

يكون للنظام عدد لا نهائي من
الحلول

$$\begin{aligned} 3a^2-12 &= 0 & -3a^2+3a+6 &= 0 \\ 3a^2 &= 12 & \div 3 & a^2-a-2 &= 0 \\ a^2 &= 4 & (a-2)(a+1) &= 0 \\ a &= \pm 2 & a &= 2 \quad | \quad a &= -1 \end{aligned}$$

استمر

$$a = 2$$

يكون النظام غير متسق إذا كانت

$$3a^2 - 12 = 0$$

$$(-3a^2 + 3a + 6) \neq 0$$

$$\downarrow$$

$$a = \pm 2$$

$$\downarrow$$

$$a \neq 2 \quad | \quad a \neq -1$$

$$\Rightarrow a = -2$$

تجعل النظام غير متسق

(١ درجات)

السؤال الخامس
لتكن A مربعة من الدرجة n و

$$W = \{B \in M_n : AB = BA\}.$$

بين أن W فضاء جزئي من M_n
(M_n هو فضاء المصفوفات المربعة من الدرجة n)

الحل

خطوة ١: $A \in M_n$

$$W \neq \emptyset$$

$$0 \in W : A0 = 0A$$

$$\therefore W \neq \emptyset$$

(٢) مقرر $u, v \in W$

$$u : Au = uA$$

$$v : Av = vA$$

$$\oplus$$

$$\oplus$$

$$u+v : Au + Av = uA + vA$$

$$A(u+v) = (u+v)A$$

$$\therefore u+v \in W$$

$k \in R$ ($u \in W$)

$$u : Au = uA$$

$$k \text{ مقرر}$$

$$W \text{ مقرر}$$

$$ku : A ku = kuA$$

$$\therefore ku \in W$$

$W \in M_n$ M_n فضاء جزئي W (٢) (٢) (٢) (٢)