$\boxed{dim}$ ## الاساس والبعد

نقول ان مجموعة المتجهات $\in V$ $\{v_1, v_2, v_3, \dots \dots .\}$ أساس للفضاء V إذا تحقق

١) $\{v_1, v_2, v_3, \dots \dots .\}$ مستقلة خطيا

٢) $\{v_1, v_2, v_3, \dots \dots .\}$ تولد V

والبعد = عدد متجهات الأساس = dim

الاساس المعتاد

R^2 ← $S = \{(1,0), (0,1)\}$

R^3 ← $S = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$P_1(x)$ ← $S = \{\underset{(1,0)}{x}, \underset{(0,1)}{1}\}$

$P_2(x)$ ← $S = \{\underset{(1,0,0)}{x^2}, \underset{(0,1,0)}{x}, \underset{(0,0,1)}{1}\}$

$M_{2\times2}$ ← $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

m ← عدد الصفوف
n ← عدد الأعمدة

طريقة حل السؤال $A_{m \times n}$

نضع المتجهات أعمدة

حظ

$m = n$

بالمحددات

$|A|$

$\neq 0$
تولد
مستقلة
إذاً تكون أساس

$= 0$
لا تولد
مرتبطة
إذاً لا تكون أساس
$\dim = 0$
البعد

$m < n$

مرتبطة

إذاً لا تكون أساس

$\dim = 0$

$m > n$

بالاختزال

بحث توليد

$$\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right]$$

حل وحيد
تولد
ممكن بحث

عدد لا نهائي
لا تولد

ليس لها حل
لا تولد

حل مشروط
لا تولد

إذاً لا تكون أساس
$\dim = 0$

بحث الاستقلال

$$\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right]$$

حل وحيد
صفري تافه
مستقلة
إذاً تكون أساس

عدد لا نهائي
مرتبطة
إذاً لا تكون أساس
$\dim = 0$

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,2,1), v_2 = (2,3,1), v_3 = (-1,2,-3) \in R^3\}$

تمثل اساس لـ R^3 أم لا

الحل

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

تولد

مستقلة

وتكون اساس $\{V_1, V_2, V_3\}$

$\dim = 3$

تمرين: بين هل المتجهات $\{x^2 + 1, \quad 2x \quad ,3x^2 - 2x + 3 \ \in P_2(x)\}$

تمثل اساس لـ $P_2(x)$ أم لا

$(1,0,1)$ $(0,2,0)$ $(3,-2,3)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

لا تولد

مرتبطة

لا تكون اساس

$\dim = 0$

تمرين: بين هل المتجهات

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}\right\}$$

تمثل اساس لـ $M_{2\times 2}$ أم لا

$(0,-1,-1,0)$, $(1,0,0,1)$, $(2,2,2,0)$, $(0,3,3,3)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

X تولد

مرتبطة

X تكون اساس

dim = 0

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,2), v_2 = (2,1), v_3 = (-1,3) \in R^2\}$

تمثل اساس لـ R^2 أم لا

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$m \times n$
2×3

$m < n$

مرتبطة

X تكون اساس

dim = 0

تمرين: بين هل المتجهات $\{v_1 = (1,1,2,1), v_2 = (-1,0,0,-5), v_3 = (2,1,1,8) \in R^4\}$

تمثل اساس لـ R^3 أم لا

الحل

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} m \times n \\ 4 \times 3 \end{matrix}$$

$m > n$

1 فقرة

بحث توليد

$$\left[A \;\middle|\; \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 2 & 0 & 1 & c \\ 1 & -5 & 8 & d \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 2 & -3 & c-2a \\ 0 & -4 & 6 & d-a \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & c-2b \\ 0 & 0 & 2 & 4b+d-5a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 2b-c \\ 0 & 0 & 2 & 4b+d-5a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & 2b-c \\ 0 & 0 & 0 & 2c+d-5a \end{array}\right]$$

للنظام حل بشرط

$2c+d-5a=0$

حل مشروط

تولد ✗

لا تكون اساس

$\dim = 0$

تمرين: عين k التي تجعل المجموعة $\{x^2 + 2x - 3, \quad 4x^2 + 3x - 1 \quad , kx^2 + x - 1\}$ اساس لـ $P_2(x)$

$(1, 2, -3) \quad (4, 3, -1) \quad (k, 1, -1)$

الحل

$$|A| \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & k \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{matrix} \neq 0$$

$$[-3 - 12 - 2k] - [-8 - 1 - 9k] \neq 0$$

$$-15 - 2k + 9 + 9k \neq 0$$

$$7k - 6 \neq 0$$

$$7k \neq 6$$

$$k \neq \frac{6}{7} \Rightarrow k \in R - \{\frac{6}{7}\}$$

ملاحظة اذا كان السؤال ليس اساس

$$k = \frac{6}{7}$$

تمرين: عين β التي تجعل المجموعة

$$\{v_1 = (1,1,2), v_2 = (1,-2\beta,-2\beta), v_3 = (2\beta,-1,-1) \in R^3\}$$

أساس لـــ R^3

$$|A| \neq 0$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2\beta & 1 & 1 \\ 1 & -2\beta & -1 & 1 & -2\beta \\ 2 & -2\beta & -1 & 2 & -2\beta \end{array}\right| \neq 0$$

$$[2\beta - 2 - 4\beta^2] - [-1 + 2\beta - 8\beta^2] \neq 0$$

$$\cancel{2\beta} - 2 - 4\beta^2 + 1 - \cancel{2\beta} + 8\beta^2 \neq 0$$

$$4\beta^2 - 1 \neq 0$$

$$4\beta^2 \neq 1$$

$$\beta^2 \neq \frac{1}{4}$$

$$\beta \neq \pm \frac{1}{2}$$

$$\beta = R - \{\pm \tfrac{1}{2}\}$$

ملاحظة اذا كان السؤال ليس أساس

الحل

$$\beta = \pm \frac{1}{2}$$