

الفصل الثاني

$$\begin{pmatrix} & \\ & \\ & \end{pmatrix}$$

Determinates المحددات

مصفوفة A

مربعة

$$|A| = \det(A) = \text{عدد}$$

محدد المصفوفة A

طرق حساب محدد المصفوفة المربعة

(١) طريقة الأقطار

(٢) عن طريق صف أو عمود

(٣) عن طريق خواص المحددات

2x2
3x3

(١) حساب محدد المصفوفة بطريقة الأقطار

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2 \times 2)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= (a d) - (c b)$$

$$B = \begin{pmatrix} a & d & i \\ b & e & j \\ c & f & k \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a & d & i \\ b & e & j \\ c & f & k \end{vmatrix}$$

(Note: The diagram shows the expansion of the determinant using the rule of Sarrus, with terms aek, dji, and cfb marked with red circles and lines connecting them in a cycle.)

$$= [aek + dji + cfb] - [dbk + adf + dec]$$

$$= 0$$

حيث $|B|$ det A

تمرين : أوجد

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-15) - (-2) \\ = -15 + 2 = \underline{\underline{-13}}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} \textcircled{2} & 1 & -3 & | & 2 & \textcircled{1} \\ 5 & 7 & 0 & | & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 4 & | & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= [56 + 0 - 45] - [20 + 0 + 21]$$

$$= 11 - 41 = \underline{\underline{-30}}$$

3x3
4x4

(٢) حساب محدد المصفوفة عن طريق صف أو عمود

+

+

+

قاعدة الاشارات

det A حيث

تمرين : أوجد

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل

$$\det A = \begin{vmatrix} \textcircled{+} & \textcircled{-} & \textcircled{+} \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

نمطية الصنف ①

$$= +2 \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (28 - 0) - 1 (20 - 0) - 3 (15 + 7)$$

$$= 56 - 20 - 66$$

$$= 56 - 66$$

$$= \textcircled{-10}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} +2 & 1 & -3 \\ -5 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

حل آخر
عبر ضرب العدد للأول

$$= +2 \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(28 - 0) - 5(4 + 9) - 1(0 + 21)$$

$$= 56 - 65 - 21$$

$$= -9 - 21 = -30$$

حل آخر حل عبر ضرب الصف الثاني

$$|A| = \begin{vmatrix} +2 & 1 & -3 \\ -5 & +7 & -0 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

تختار الصف أو العود
الذي به أصفار
أكثر

$$= -5 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -5(4 + 9) + 7(8 - 3)$$

$$= -5(13) + 7(5)$$

$$= -65 + 35 = -30$$

٣) حساب محدد المصفوفة عن طريق خواص المحددات

$$\det A = 0 \quad (1)$$

إذا كان A

(أ) بها صف صفري أو عمود صفري

(ب) بها صفين أو عمودين أحدهما مضاعف للآخر أو متساويين

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

(٢) إذا بدلنا صفين أو عمودين فإن المحدد يتغير إشارته

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

(٣) إذا ضربنا أحد الصفوف أو الأعمدة بعدد غير الصفر فإننا نقسم خارج المحدد على نفس العدد

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 15 & -5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

(٤) إذا ضربنا أحد صفوف أو أعمدة A بعدد غير الصفر وجمعنا النواتج مع صف آخر أو عمود

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-5R_{12}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

فان المحدد لا يتأثر

(٥) المصفوفة المثلثية (العلوية - السفلية) محددها = حاصل ضرب عناصر قطرها

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (3)(4)(-3) = -36$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) = 10$$

حيث $\det A$

تمرين: أوجد

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{13}} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-5R_{12}, -3R_{14}} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -8 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -12 & -8 & -16 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{12R_{23}, 2R_{24}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_{34}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1)(-8)(-10)$$

$$= 80$$

حل آخر للامتحان

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{13}} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-5R_{12} \\ -3R_{14}}} = - \begin{vmatrix} +1 & 2 & 3 & 4 \\ -0 & -12 & -8 & -16 \\ +0 & 1 & 0 & 3 \\ -0 & -2 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= - (+1) \begin{vmatrix} -12 & -8 & -16 & -12 & -8 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \left[(0 + 48 + 64) - (48 + 144 + 0) \right]$$

$$= - \left[112 - 192 \right]$$

$$= - \left[-80 \right] = 80$$