

الإختبار يحتوي على صفحتين
لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

السؤال الاول (8 درجات)
لتكن كل من A, B, C مصفوفة مربعة من الدرجة 4 و تحقق

$$2AC - AB^2 + 9I = 0$$

$$C = 9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } B = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ حيث}$$

(١). أوجد المصفوفة A^{-1} .

(٢). أوجد محدد المصفوفة A.

(٣). أوجد $\text{adj}A$.

السؤال الثاني (6 درجات)

(١). عين كل من a, b, c التي من أجلها يكون (1, -1, 2) حلا للنظام الخطي

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}$$

(٢). أثبت أن (1, -1, 2) هو حلا وحيدا للنظام الخطي في الفقرة (١).

السؤال الثالث (6 درجات)
عين أساس لصورة ونواة التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$$T(x, y, z, t) = (x - y, 2z + 3t, y + 4z + 3t, x + 6z + 6t).$$

السؤال الرابع (6 درجات)
ليكن $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي والذي مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد S لـ \mathbb{R}^3 هي

$$[T]_S = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي $[T]_B$ بالنسبة للأساس B التالي

$$B = \{u = (1, 1, 1), v = (1, 1, 0), w = (0, 1, -1)\}.$$

السؤال الخامس (14 درجات)

(١). أثبت أن 1 و -1 هي قيم مميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(٢). أوجد التعدد الجبري لكل من القيم مميزة 1 و -1.

(٣). أوجد أساسا الفضاء المميز $E_1 = \{X \in \mathbb{R}^3; AX = X\}$ واستنتج قيم m بحيث تكون المصفوفة A قابلة للاستقطار.

(٤). (أ) إذا كانت $m = 0$ أوجد مصفوفة P لها معكوس ومصفوفة D قطرية حيث $D = P^{-1}AP$.

(ب) إذا كانت $m = 0$ احسب A^{1437} .