

معكوس المصفوفة

مصفوفة الوحدة

$$[A | I]$$

A مصفوفة

 A^{-1} معكوس المصفوفةاختزال

$$[I | A^{-1}]$$

تمرين: أوجد معكوس المصفوفات الآتية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل

$$[A | I]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

 $R_{12} \rightarrow$
تبديل

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

 $-2R_{12} \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

 $-3R_{21} \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

\downarrow I \downarrow A^{-1}

نوجد A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

للتأكد

$$A A^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+7 & 14-14 \\ -3+3 & 7-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$[B | I]$$

$$\underline{\underline{B^{-1}}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} 1R_{1,2} \\ -2R_{1,3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$3R_{3,2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} -1R_{2,1} \\ 1R_{2,3} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$-1R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

$$-1R_{3,1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -1 & -4 \end{array} \right]$$

$$I$$

$$B^{-1}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B \cdot B^{-1} = I}}$$

$$\underline{\underline{C^{-1}}}$$

$$[C | I]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_{1,4}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$-2R_{1,2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{4} & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{لا يمكن} \\ \text{ايجاد } I \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{6}{4} \right) \cdot \left(-\frac{2}{4} \right) + 3 \\ & = \frac{-12}{4} + 3 \\ & = -3 + 3 \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C^{-1}$$

$$\begin{array}{l} \text{غير موجودة} \\ \text{لـ } C \end{array}$$

خواص المعكوس :

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} A^{-1}$

3) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4) $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$

5) $I^{-1} = I$

تمرين: أوجد المصفوفة B التي تحقق

$$(I + 2B)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\left[(I + 2B)^{-1} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$$

نأخذ
المعكوس
للمصفوفة

$$I + 2B = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\div 2} B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

 I (-1)

تمرين: اذا كانت A مصفوفة متماثلة تخالفيا حيث

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ c & d \end{bmatrix}$$

A^{-1}

أوجد a, b, c ثم أوجد

أو

أو

$$A^T = -A$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ 1 & d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & 1 \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ 1 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -1 \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

$$a = -a$$

$$a + a = 0$$

$$2a = 0$$

$$a = 0$$

$$c = -1$$

$$-c = 1$$

$$c = -1$$

$$d = -d$$

$$d + d = 0$$

$$2d = 0$$

$$d = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد A^{-1}

$$[A \mid I]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

بدي

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$-1R_1$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$I \quad A^{-1}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ لتكن}$$

تمرين: 36/37 s1

(1) احسب A^2 و A^3
 (2) اوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $A^3 - 4A + \alpha I = 0$

$$A^2 = A \cdot A =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 8 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\underline{A^3 - 4A + \lambda I = 0}$$

$$\lambda I = 4A - A^3$$

مقوفه

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 8 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 8 & 4 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 8 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = 6$$

النتيجة

السؤال الثاني

(6 درجات)

(١). أوجد معكوس المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(٢). أوجد مصفوفة B مربعة من الدرجة 3 بحيث

$$2(B + I)^{-1} = A.$$

الحل

① إيجاد A^{-1} $[A | I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$



$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

\downarrow I \downarrow A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2(B + I)^{-1} = A$$

نضرب $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$(B + I)^{-1} = \frac{1}{2} A$$

نأخذ
الطرفين

$$B + I = \left(\frac{1}{2} A\right)^{-1}$$

$$B + I = 2 A^{-1}$$

$$B = 2 A^{-1} - I$$

نستخدم

$$B = 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 6 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$