جامعة الملك سعود

كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار الفصلي الثاني

الفصل الثاني 1437 - 1438 هـ 244 ريض الزمن ساعة ونصف

السؤال الأول (4 درجات)

أوجد أساسا للفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات:

$u_1 = (1, 0, 2, -1), u_2 = (-1, 1, -1, 0)\ u_3 = (0, 1, 1, -1), u_4 = (2, -1, 3, -1)$

كرور كرور كرور كرور

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\xrightarrow{\text{اختزال}}$ جاوس ...

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الأساس $= \{u_1, u_2\}$

السؤال الثاني (٥ درجات)

(١). أوجد قيم a حتى تكون المتجهات $u_1 = (1, -1, 3, 1)$, $u_2 = (3, 1, 5, 3)$, $u_3 = (1, 1, 1, a)$ مرتبطة خطيا.

(٢). أوجد أساسا للفضاء $\mathbb{R}^4$ يحتوي على $\{u_1, u_2, u_3\}$ في حالة $a = 0$

الحل

$|A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = 0$$

4×3 → غير مربع ← اختزال

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

لكي تكون $\boxed{\text{مرتبطة}}$

لها حلول عدد لانهائي ← عدد المعادلات < المجاهيل

$a - 1 = 0$

$a = 1$

$u_1, u_2, u_3, (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس}]{\text{اختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

أساس $= \{ u_1, u_2, u_3, (1,0,0,0) \}$

(2) u_1, u_2, u_3, $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

السؤال الثالث (3 درجات)

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & m \end{pmatrix}$$

أوجد قيم m حتى تكون صفرية المصفوفة A (nullity (A)) تساوي 1.

$$\text{nullity}(A) + \text{rank } A = n$$

$$1 + \text{rank } A = 4$$

$$\text{rank}(A) = 3$$

لكي تكون الصفرية 1 نجعل رتبة المصفوفة = 3

أصفار جاوس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-5 \end{bmatrix}$$

$$m - 5 \neq 0$$

$$m \neq 5$$

$$m = \mathbb{R} - \{5\}$$

السؤال الرابع (9 درجات)

ليكن V فضاء متجهات و $B = \{v_1. v_2. v_3\}$ أساسا لهذا الفضاء.

(١،٠،٠) (٠،١،٠) (٠،٠،١)

(١). إذا كانت

$$u_1 = v_1 - v_2 + v_3$$

$$u_2 = v_2 + 2v_3$$

$$u_3 = v_1 - 2v_3$$

فأثبت أن المجموعة $C = \{u_1. u_2. u_3\}$ تكون أساسا للفضاء V.

$u_1 = (1, -1, 1)$

$u_2 = (0, 1, 2)$

$u_3 = (1, 0, -2)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

∴ تولد ، مستقلة

$\Leftarrow$ C أ

(٢). أوجد المصفوفة ${}_B P_C$ (مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B).

(٣). إذا كان $v = u_1 - 2v_2 + u_3$
فأوجد $[v]_C$ و $[v]_B$.

الحل

(2)

$$ {}_B P_C = \left[[u_1]_B \quad [u_2]_B \quad [u_3]_B \right] $$

أل C
مختار

$$ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} $$

$$ v = u_1 - 2v_2 + u_3 $$

$$ = \cancel{u_1 - 2\left(\qquad \right) + u_3} $$

$$ = v_1 - v_2 + v_3 - 2v_2 + v_1 - 2v_3 $$

$$ v = 2v_1 - 3v_2 - v_3 $$

$$[V]_B = V = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

لأنه B
أساس
معياري

$[V]_C$

المتجه الاحداثي

$$[C \mid V]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{جاوس جوردان}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$[V]_C = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

السؤال الخامس (4 درجات)

ليكن $V = \mathbb{R}^2$، $X_1 = (x_1, y_1)$ و $X_2 = (x_2, y_2)$.

نعرف الضرب الداخلي على الفضاء V كما يلي:

$$\langle X_1, X_2 \rangle = 2x_1x_2 + 3y_1y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1.$$

(١). أوجد المسافة بين المتجهين $u = (-1, 2)$ و $v = (1, -1)$ و أوجد الزاوية التي بينهما.

(٢). أوجد قيمة c بحيث يكون المتجه $v = (1, c)$ متعامدا على المتجه $u = (-2, 3)$.

(1)

$$d(u, v) = \| u - v \|$$

$$= \| (-1, 2) - (1, -1) \|$$

$$= \| (-2, 3) \|$$

$$= \sqrt{\langle \overset{(x_1, y_1)}{(-2, 3)}, \overset{(x_2, y_2)}{(-2, 3)} \rangle}$$

$$= \sqrt{(2)(4) + 3(9) + 2(-6) + 2(-6)}$$

$$= \sqrt{8 + 27 - 12 - 12} = \sqrt{11}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$= \frac{\langle (+1, 2), (1, -1) \rangle}{\sqrt{\langle (-1,2),(-1,2)\rangle}\ \sqrt{\langle (1,-1),(1,-1)\rangle}}$$

$$\cos\theta =$$

$$\theta = \cos^{-1}$$

(2) $\langle u, v \rangle = 0$

$$\langle \overset{x_1,\, y_1}{(1, c)}, \overset{x_2,\, y_2}{(-2, 3)} \rangle = 0$$

$$2(-2) + 3(3c) + 2(3) + 2(-2c) = 0$$

$$-4 + 9c + 6 - 4c = 0$$

$$5c = -2$$

$$c = \frac{-2}{5}$$