جامعة الملك سعود

كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار النهائي

الفصل الأول 1438 − 1439 هـ 244 ريض الزمن ثلاث ساعات

السؤال الأول **(3 + 3 درجات)**

(١). إذا كانت A و B مصفوفتين بحيث $|AB^T| = -2$ و

$$(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

أوجد قيمة المحدد $|B|$

(-1) أس

للطرفين

$$3A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$3A = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A = \frac{1}{2+3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left(\frac{1}{15}\right)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{15 \cdot 15} \cdot [2+3] = \frac{1}{45}$$

$$|AB^T| = -2$$

$$|A|\,|B| = -2$$

$$\frac{1}{45}|B| = -2$$

$$\Rightarrow |B| = -90$$

(٢). أو جد قيم كل من a و b التي تجعل المتجهات $v_1 = (1, 2, -1, 3)$، $v_2 = (-2, -3, 1, -1)$، $v_3 = (-1, a-2, a-1, b)$ مرتبطة خطيا في $\mathbb{R}^4$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & a-2 \\ -1 & 1 & a-1 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix} \quad 4 \times 3 \quad m > n$$

١ اختزال

[illegible]

$$\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & a-2 & 0 \\ -1 & 1 & a-1 & 0 \\ 3 & -1 & b & 0 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & a-2 & 0 \\ 0 & 5 & b+3 & 0 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & b-5a+3 & 0 \end{array} \right]$$

لكي تكون المتجهات مرتبطة

$2a-2=0$ | $b-5a+3=0$

$a=1$ → $b-5+3=0$

$b=2$

السؤال الثاني **(5 درجات)**

ليكن النظام الخطي

$$\begin{cases} x - y - 2z &= 2 \\ x + my - z &= 1 \\ mx + y + z &= -1 \end{cases}$$

(١). أوجد قيم m حتى يكون للنظام الخطي حل وحيد.

(٢). أوجد قيم m حتى لا يكون للنظام الخطي حل.

(٣). أوجد قيم m حتى يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \\ m & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & m+1 & 1 & -1 \\ 0 & m+1 & 2m+1 & -2m-1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & m+1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & m & -m \end{array}\right]$$

حل وحيد

$m \neq 0$, $m+1 \neq 0$

$m \neq -1$

$m = R - \{0, -1\}$

لا يكون النظام حل

$m = \phi$

عدد لا نهائي من الحلول

$m = 0$

السؤال الثالث **(5 درجات)**

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(١). أوجد الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A.

(٢). إستنتج أساسا للفضاء العمودي و أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة A.

(٣). أوجد رتبة (Rank) و صفرية (nullity) المصفوفة A^T.

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$ صيغة درجية صفية مختزلة

أساس الفضاء العمودي $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

أساس الفضاء الصفي $= \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$

Rank $A = 3$

nullity A^T + rank $A = m$

nullity $A^T = 4 - 3 = 1$

السؤال الرابع **(7 درجات)**

ليكن $B=\{v_1=(1,1), v_2=(1,2)\}$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^2$ و C الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^2$. وليكن التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف كما يلي: $T(x,y)=(x-y, 2x+3y)$

(١). اوجد المصفوفات ${}_CP_B$ و ${}_BP_C$.

(٢). اوجد $[T]_C$ مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس C و اوجد $[T]_B$ مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس B.

(٣). إذا كان $v=(2,1)$ اوجد $[T(v)]_B$.

الحل

$\boxed{1}$

$${}_CP_B = \left[\; [(1,1)]_C \quad [(1,2)]_C \;\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لأن C المعتاد

$${}_BP_C = ({}_CP_B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ $[T]_C = \left[\; [T(1,0)]_C \quad [T(0,1)]_C \;\right]$

$$= \left[\; [(1,2)]_C \quad [(-1,3)]_C \;\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \left[\, [T(1,1)]_B \quad [T(1,2)]_B \,\right]$$

$$= \left[\, [(0,5)]_B \quad [(-1,8)]_B \,\right]$$

$$\longrightarrow \left[B \,\middle|\, \begin{matrix} 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{matrix} \right]$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{matrix} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 & -1 \\ 5 & 9 \end{matrix} \right]$$

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -5 & -10 \\ 5 & 9 \end{matrix} \right]$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]_B = [T(2,1)]_B = [(-1,7)]_B$$

$$\left[B \,\middle|\, \begin{matrix} -1 \\ 7 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -1 \\ 7 \end{matrix} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -1 \\ 8 \end{matrix} \right] \longrightarrow \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} -9 \\ 8 \end{matrix} \right]$$

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

السؤال الخامس **(7 درجات)**

(١). ليكن التحويل الخطي $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ حيث $T(1,1,0) = (2,1,3)$، $T(1,0,1) = (-1,3,2)$، $T(1,0,0) = (0,1,2)$.

أوجد قاعدة التحويل الخطي T

الحل

$V=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ نفرض

$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,0,0)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & y-x \\ 0 & 1 & 0 & z \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & x-y \\ 0 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & -1 & z-x+y \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & x-y-z \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & x-y-z \end{array}\right] \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{array}$$

نأخذ T للطرفين

$T(x,y,z) = \alpha_1 T(1,1,0) + \alpha_2 T(1,0,1) + \alpha_3 T(1,0,0)$

$= y(2,1,3) + z(-1,3,2) + (x-y-z)(0,1,2)$

$T(x,y,z) = (2y-z, x+2z, y+2x)$

(٢). ليكن التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$$T(x,y,z) = (x+2y+z, -y-z, 3x+5y+2z, x+4y+3z)$$

(أ) أوجد أساسا لنواة التحويل الخطي T

(ب) أوجد أساسا لصورة التحويل الخطي T

الحل

ker

$T(x,y,z) = (0,0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z= \\ -y-z=0 \\ 3x+5y+2z=0 \\ x+4y+3z=0 \end{array}\right\} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x - z = 0$

$y + z = 0$

$\longrightarrow z = t$

$y = -t$

$x = t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cLi $\ker T = \{(1,-1,1)\}$

$\dim \ker T = 1$

cLi $\operatorname{Im} T = \{(1,0,3,1),(2,-1,5,4)\}$

$\dim \operatorname{Im} T = 2$

$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

السؤال السادس **(4 درجات)**

(١). اثبت ان المجموعة S تمثل اساسا عياريا للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ حيث ان

$$S = \{v_1 = (0,1,0), v_2 = (-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}), v_3 = (\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5})\}$$

(٢). إذا كان $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$، إحسب $[u]_S$.

الحل

①

$$\|v_3\| = \sqrt{\langle v_3, v_3 \rangle} = \sqrt{\tfrac{9}{25} + 0 + \tfrac{16}{25}} = 1$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle} = \sqrt{\tfrac{16}{25} + 0 + \tfrac{9}{25}} = 1$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1$$

$\therefore$ S اساس عياري للفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^3$

②

$[u]_S$ $\quad [S \mid u]$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[5R_3]{-5R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 25 & 19 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{25} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{19}{25} \end{array}\right]$$

$$[u]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{17}{25} \\ \frac{19}{25} \end{bmatrix}$$

السؤال السابع **(6 درجات)**

لتكن $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(١). أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A و اثبت ان $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ هي قيم مميزة للمصفوفة A

(٢). أوجد المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة λ_1 و λ_2

(٣). أوجد مصفوفة P و مصفوفة قطرية D بحيث $A = PDP^{-1}$

(٤). اوجد A^{13} و A^{14}

الحل

(١) القيم المميزة (λ)

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \lambda-3 & 2 & 2 & \lambda-3 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 & -2 & \lambda+1 \\ -2 & 2 & \lambda+1 & -2 & 2 \end{array}\right| = 0$$

$$[(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda+1) - 8 - 8] - [-4(\lambda+1) + 4(\lambda-3) - 4(\lambda+1)] = 0$$

$\xrightarrow[\text{نعوض}]{\lambda_1 = 1}$ $[(-2)(2)(2) - 16] - [-8 + 4(-2) - 4(2)]$

$$= -8 - 16 + 8 + 8 + 8 = 0$$

$\underline{\lambda = -1}$ $[(-4)(0)(0) - 8 - 8] - [-4(0) + 4(-4) - 4(0)]$

$$= -16 + 16 = 0$$

③ المتجهات المميزة ⓔ

$$[\lambda I - A]\, x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-3 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+1 & 0 \end{array}\right]$$

$\lambda = 1 \longrightarrow$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\div -2 R_1}$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$\longrightarrow$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x - y - z = 0$$

$z = t$

$y = s$

$x = t + s$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 1}$ متجهات مميزات للقيمة المميزة $\boxed{\lambda = 1}$

$\Longrightarrow \lambda = 1, \lambda = 1$ مكررة

$\lambda = -1$

نعوض

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{تبديل } R_{12}]{R_2/(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x - z = 0$

$y - z = 0$

$z = t$

$y = t$

$x = t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

متجه مميز مرافق للقيمة المميزة

$\lambda = -1$

3

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ایجاد P^{-1}

$$[P|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

14

$$A = P \; D \; P^{-1}$$

$$A^{13} = P \; D^{13} \; P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \; & \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1)^{13} & 0 & 0 \\ 0 & (1)^{13} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \; & \; \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \; & \; \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \; & \; \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \; & \; \end{bmatrix}$$

$$A^{14} = A^{13} \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} \; & \; \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \; & \; \end{bmatrix}$$