تمرين: أوجد

1) أساس وبعد الفضاء الصفي للمصفوفة A

2) أساس وبعد الفضاء العمودي للمصفوفة A

3) رتبة المصفوفة A

4) **اساس وبعد الفضاء الصفري لمصفوفة A N (A)**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل

$$\xrightarrow{\text{أختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① أساس الفضاء الصفي $= \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$

$\dim(\text{row}) = 3$

② أساس الفضاء العمودي $= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim(\text{col}) = 3$

③ $\text{rank}(A) = \dim(\text{row}) = \dim \text{col} = 3$

(٢) $[A \mid \begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}]$

$$\xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

حل وحيد
تافه صفري

X يوجد الا الصفري

لعدد الحلول
الصفري = $\text{nullity}(A) = 0$

$$\text{nullity}(A) + \text{rank}(A) = n$$

$$0 + 3 = 3$$

تمرين : -

أوجد مجموعة قيم الثابت α التي تجعل رتبة المصفوفة A تساوي 2

(الصفوف(الاعمدة) مرتبطة)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{اختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-8 \end{bmatrix}$$

لتجعل رتبة المصفوفة = 2

نجعل الصفوف الغير صفرية = 2

$\alpha - 8 = 0$

$\alpha = 8$

ملاحظة اذا كان سؤال الرتبة = 3 "مستقلة"

$\alpha - 8 \neq 0$

$\alpha \neq 8 \qquad \alpha = R - \{8\}$

تمرين:

١) إذا كانت $A_{4\times3}$ وكان النظام $A X = 0$ له حل وحيد

فإن

rank A = …3…

٢) إذا كانت $A_{5\times7}$

فإن

rank A …≤ …5…

٣) إذا كانت $A_{4\times4}$ وكان $|A| = 0$

فإن

rank A …< …4..

٤) إذا كانت $A_{6\times8}$ وكان النظام $A X = B$ نظام متسق

فأوجد nullity A

rank A = 6

nullity A + rank A = n

nullity A + 6 = 8

nullity A = 2

٥) إذا كانت $A_{3\times8}$ وكان بعد فضاء الحل للنظام المتجانس $A X = 0$ هو 5

فأوجد

rank A

nullity (A) = 5

nullity (A) + rank A = n

5 + rank A = 8

rank A = 3

nullity A — صفرية المصفوفة (بعد فضاء الحل للنظام المتجانس $AX = 0$)

إذا كان مصفوفة

$$A_{m\times n}$$

$\boxed{\text{Rank } A + \text{nullity } A = n}$ → عدد الأعمدة

$\text{Rank } A + \text{nullity } A^t = m$ → عدد الصفوف , $\boxed{\text{Rank } A = \text{Rank } A^t}$

دائما

$\text{Rank } A \le m$, $\text{Rank } A \le n$

أي اقل من أويساوي أصغرهما

$A_{2\times5}$

$\text{rank}(A) \le 2$

إذا كان $\text{rank } A < m$ فإن الصفوف مرتبطة

إذا كان $\text{rank } A = m$ فإن الصفوف مستقلة

$\text{rank } A < n$ فإن الأعمدة مرتبطة

$\text{rank } A = n$ فإن الأعمدة مستقلة

إذا كان النظام $AX = B$

متسق (حل وحيد أو عدد لانهائي)

فإن

$\text{rank } A = m$ عدد الصفوف

غير متسق(ليس له حل)

فإن

$\text{rank } A < m$

إذا كان النظام $AX = 0$

حل وحيد (صفري) (تافه)

فإن

$\text{rank } A = n$ عدد الأعمدة

عدد لانهائي

فإن

$\text{rank } A < n$

الفصل الخامس

تعريف الضرب الداخلي

$\langle (\ ),(\ ) \rangle$

متجهات

$u, v \in V$

$$\langle u , v \rangle$$

الضرب الإقليدي

$$\langle (a,b),(x,y) \rangle = ax + by$$

مثال

$$\langle (1,-1),(5,4) \rangle = 5 - 4 = 1$$

$$\langle (2,-1,3),(4,2,-1) \rangle = 8 - 2 - 3 = 3$$

الضرب بقاعدة (معرفة لكل سؤال)

$$\langle (a,b),(x,y) \rangle = 2ax + b^y$$

$$\langle (1,2),(3,4) \rangle = 2(1)(3) + 2^4 = 6 + 16 = 22$$

خواص الضرب الداخلي:

نقول أن V فضاء ضرب داخلي إذا تحقق عدد حقيقي

لكل $u,v,w \in V$ ولكل $\alpha \in R$

1) $< u , v > = < v , u >$ الابدال

2) $< (u + v) , w > = < u , w > + < v , w >$

3) $< \alpha u , v > = \alpha < u , v >$

4) $< u , u > \;\; > \;\; 0$

5) $< u , u > \;\; = \;\; 0 \rightarrow u = 0$

خواص أخرى:

1) $< 0 , v > \;\; = \;\; < v , 0 > \;\; = \;\; 0$

2) $< u , v + w > = < u , v > + < u , w >$

3) $< u , \alpha v > = \alpha < u , v >$

4) $< u - v , \; w > = < u , w > - < v , w >$

5) $< u , v - w > = < u , v > - < u , w >$

تمرين: إذا كان $\boxed{< u , v > \; = \; 2a_1b_1 + 3a_2b_2}$ قاعدة تعرف فضاء ضرب داخلي
حيث

$u = (a_1 , a_2) = (3 , 4)$

$v = (b_1 , b_2) = (2 , -1)$

أوجد :

١) $\|u\|$ و $\|v\|$

٢) المتجه العياري للمتجه u

٣) هل المتجهان u , v متعامدان

الحل

① $\|u\| = \sqrt{<u,u>}$

$= \sqrt{<(3,4),(3,4)>}$

$= \sqrt{2(3)(3) + 3(4)(4)}$

$= \sqrt{18 + 48} = \sqrt{66}$

$\|v\| = \sqrt{<v,v>}$

$= \sqrt{<(2,-1),(2,-1)>}$

$= \sqrt{8 + 3} = \sqrt{11}$

② المتجه العياري لـ u $= \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{(3,4)}{\sqrt{66}}$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt{66}}, \frac{4}{\sqrt{66}}\right)$$

للتأكد

نجد $\left\| \left(\frac{3}{\sqrt{66}}, \frac{4}{\sqrt{66}}\right) \right\|$

$$= \sqrt{2\left(\frac{3}{\sqrt{66}}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{66}}\right) + 3\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right)\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{18}{66} + \frac{48}{66}} = \sqrt{\frac{66}{66}} = 1$$

③ $\langle u, v \rangle$

$$= \langle (3,4), (2,-1) \rangle$$

$$= 2(3)(2) + 3(4)(-1)$$

$$= 12 - 12 = 0$$

$\therefore u, v$ متعامدان

تمرين: إذا كان $<\ ,\ >$ فضاء ضرب داخلي اقليدي

$u = (2, -3)$

$v = (-5, 1)$

أوجد :

١) $\|u\|$ و $\|v\|$

٢) المتجه العياري للمتجه u

٣) هل المتجهان u, v متعامدان

الحل

(1) $\|u\| = \sqrt{<u, u>}$

$= \sqrt{<(2,-3), (2,-3)>}$

$= \sqrt{(2)(2) + (-3)(-3)}$

$= \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$\|v\| = \sqrt{<v, v>} = \sqrt{<(-5,1), (-5,1)>}$

$= \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$

(2)

المتجه العياري ل u $= \dfrac{u}{\|u\|} = \dfrac{(2,-3)}{\sqrt{4+9}}$

$$= \frac{(2,-3)}{\sqrt{13}}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

---

(3) $\langle u \cdot v \rangle = \langle (2,-3), (-5,1) \rangle$

$$= -10 - 3 = -13 \neq 0$$

$\therefore$ u , v غير متعامدان

التعامد

نقول ان المتجهين u , v متعامدان اذا كان $< u , v > \; = \; 0$

طول المتجه (معياره أو مقياسه) $\| \;\; \|$

$$\|u\| = \sqrt{< u , u >}$$

$$\|u\|^2 = \; < u , u >$$

تربيع الطرفين

المتجه العياري :

هو المتجه الذي طوله يساوي واحد

$\|u\| = 1$

$\longrightarrow u$ عياري

لإيجاد متجه عياري لمتجه غير عياري نقسمه علي طوله

$u \longrightarrow$ غير عياري

$$\frac{u}{\|u\|} \longleftrightarrow \text{عياري}$$

قاعدة اذا كان u , v متجهان متعامدان و α , β عددان حقيقيان فإن

$$\|\alpha\, u \pm \beta\, v\|^2 = \alpha^2\|u\|^2 + \beta^2\|v\|^2$$

تمرين: إذا كان $<\ ,\ >$ ضرب داخلي علي فضاء المتجهات V وكان

$u, v \in V$ متعامدان , $\|u\| = 2$, $\|v\| = \sqrt{10}$

أوجد :

$\|2u - 3v\|^2$

$= (2)^2 \|u\|^2 + (3)^2 \|v\|^2$

$= 4\ (2)^2 + 9\ (\sqrt{10})^2$

$= 16 + 90$

$= 106$

تمرين: إذا كان $<\ ,\ >$ ضرب داخلي علي فضاء المتجهات V وكان

$u, v \in V$, $\|u\| = 1$, $\|v\| = \sqrt{10}$

$\boxed{\|2u - v\|^2 = 18}$

أوجد : $<u, v>$

$\|\boxed{2u - v}\|^2 = 18$

$\boxed{\begin{aligned} \|\square\| &= \sqrt{<\square, \square>} \\ \|\square\|^2 &= <\square, \square> \end{aligned}}$

$<(2u - v), (2u - v)> = 18$

$<2u, 2u> + <2u, -v> + <-v, 2u> + <-v, -v> = 18$

$4<u, u> - 2<u, v> - 2<v, u> + <v, v> = 18$

$4\|u\|^2 - 4<u, v> + \|v\|^2 = 18$

نعوض $\rightarrow$ $4(1)^2 \boxed{-4<u, v>} + (\sqrt{10})^2 = 18$

$4 + 10 - 18 = 4<u, v>$

$-4 = 4<u, v>$

$<u, v> = -1$

تمرين :

إذا كان الضرب الداخلي المعرف علي R^3. هو الضرب الاقليدي وكان $\|\alpha(-2,2,-1)\| = 3$

فأوجد قيم α

الحل

$$\|\alpha(-2,2,-1)\| = 3$$

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

$$\sqrt{\langle \alpha(-2,2,-1), \alpha(-2,2,-1)\rangle} = 3$$

بالتربيع للطرفين

$$\langle \alpha(-2,2,-1), \alpha(-2,2,-1)\rangle = 9$$

$$\alpha^2 \langle (-2,2,-1), (-2,2,-1)\rangle = 9$$

$$\alpha^2 [4+4+1] = 9$$

$$9\alpha^2 = 9$$

$$\alpha^2 = 1$$

$$\alpha = \pm 1$$

تمرين :

إذا كان $u\,,v$ متجهين متعامدين في فضاء الضرب الداخلي $<\ ,\ >$ المعرف علي V

وكان $\|u\| = \sqrt{2}$ و v متجه عياري أوجد قيمة $\|2\,v - u\|$

الحل

$\|v\| = 1$

$\|v\| = \sqrt{<v,v>}$

$\|2v - u\|$

$= \sqrt{<(2v-u),(2v-u)>}$

$= \sqrt{<2v,2v> + <2v,-u> + <-u,2v> + <-u,-u>}$

$= \sqrt{4\|v\|^2 - 2\cancel{<v,u>} - 2\cancel{<u,v>} + \|u\|^2}$

$= \sqrt{4(1)^2 + (\sqrt{2})^2}$

$= \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$

حل ١٥

u, v متعامدان

$$\|2v - u\|^2$$

$$= (2)^2 \|v\|^2 + \|u\|^2$$

$$= 4(1)^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$= 4 + 2$$

$$= 6$$

$$\Rightarrow \|2v - u\| = \sqrt{6}$$

تمرين:

إذا كانت القاعدة $\boxed{<(a,b),(a`,b`)> = \alpha\, a\, a` + \beta\, b\, b`}$

تعرف ضرب داخلي علي الفضاء R^2

وكان $\|(1,1)\| = 2$ و $<(1,1),(2,-1)> = 2$

فأوجد قيم α , β

الحل

$\|(1,1)\| = 2$

$\sqrt{<(1,1),(1,1)>} = 2$

بالتربيع

$<(1,1),(1,1)> = 4$

$\alpha(1)(1) + \beta(1)(1) = 4$

$\boxed{\alpha + \beta = 4} \rightarrow (2)$

$<(1,1),(2,-1)> = 2$

$\alpha(1)(2) + \beta(1)(-1) = 2$

$\boxed{2\alpha - \beta = 2} \rightarrow (1)$

نحل المعادلتين (1) ، (2)

$2\alpha - \cancel{\beta} = 2$

$\alpha + \cancel{\beta} = 4$

بالجمع

$3\alpha = 6$ $\quad \alpha = 2$

نعوض $\quad 2 + \beta = 4 \quad \beta = 2$

متباينة كوشي شوارتز

$$|< u , v >| \leq \|u\| \ \|v\|$$

$< u , v > = 0$	$|< u , v >| = \|u\| \ \|v\|$
u , v متعامدان ومستقلان	u , v مرتبطان

تمرين:

إذا كان u , v متجهين في فضاء الضرب الداخلي المعرف علي

حيث $\boxed{\text{مرتبطين}}$ خطيا فأوجد قيمة

det محور

$$\begin{vmatrix} < v, v > & < u, v > \\ < v.u > & < u.u > \end{vmatrix}$$

الحل

$$= < v , v > . < u , u > - (< u , v >)^2$$

$$= \|v\|^2 \|u\|^2 - (\|u\| . \|v\|)^2$$

$$= \|v\|^2 \|u\|^2 - \|u\|^2 . \|v\|^2$$

$$= 0$$

المسافة بين متجهين

إذا كان $u , v \in V$ فإننا نعرف المسافة بين u,v

$$d (u , v) = \|u - v\|$$

تمرين:

إذا كان $u = (1,2,3) , v = (-1,-2,4)$ أوجد المسافة بين المتجهين والضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي

الحل

$$d(u,v) = \| u - v \|$$

$$= \| (1,2,3) - (-1,-2,4) \|$$

$$= \| (2,4,-1) \|$$

$$= \sqrt{\langle (2,4,-1),(2,4,-1) \rangle}$$

$$= \sqrt{4+16+1}$$

$$= \sqrt{21}$$

تمرين :

ليكن $C[a,b]$ حيث $f,g \in C[a,b]$ هو فضاء المتجهات المكون من الدوال المتصلة

علي الفترة المغلقة $[a,b]$ معرف بالقاعدة $< f, g > = \int_a^b f(x).\, g(x) dx$

إذا كانت $f(x) = 2x,\ g(x) = 5x$ والضرب الداخلي علي $C[0,2]$

أوجد $d(f, g)$

الحل

$$d(f,g) = \| f - g \|$$

$$= \| 2x - 5x \|$$

$$= \| -3x \|$$

$$= \sqrt{< -3x , -3x >}$$

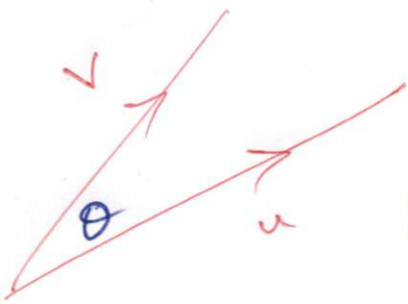
$$= \sqrt{\int_0^2 (-3x)(-3x)\, dx}$$

$$= \sqrt{\int_0^2 9x^2\, dx}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{9x^3}{3}\right]_0^2}$$

$$= \sqrt{[3x^3]_0^2} = \sqrt{3(8) - 0} = \sqrt{24}$$

جيب تمام الزاوية بين متجهين



ليكن V فضاء ضرب داخلي

وليكن u , v متجهين غير صفريين في الفضاء V فإن

$$\boxed{\text{Cos } \theta = \frac{\langle u , v \rangle}{\|u\| \|v\|}}$$

حيث θ الزاوية بين المتجهين

تمرين :

إذا R^2 هو فضاء الضرب الإقليدي وكان $u = (1,2)$, $v = (-1,3)$

فأوجد جيب تمام الزاوية بين المتجهين

$$\text{Cos } \theta = \frac{\langle u , v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$= \frac{\langle (1,2) , (-1,3) \rangle}{\|(1,2)\| \ \|(-1,3)\|}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{-1+6}{\sqrt{1+4}\ \sqrt{1+9}} = \frac{5}{\sqrt{50}}$$

$$\theta = \text{Cos}^{-1} \frac{5}{\sqrt{50}}$$