د. برهان

جَامعة الملك سعود

قسم الريَاضيّات — الإختبَار النهَائي للمقرر — الفصل الثَاني ١٤٣٠ - ١٤٣١ هـ

كلية العلوم — ٢٤٤ ريض — الزمن ثلَاث سَاعَات

ألإسم .... الرقم الجَامعي .... رقم التّحضير ......

رقم الشعبة .... أستَاذ المَادة ....

درجة الجزء الأول

رقم السُّؤَال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	ألدرجة
رمز الإجَابة	د	ب	ب	ب	أ	ج	أ	د	أ	أ	أ	ج	أ	د	

درجة الجزء الثّاني

ألسُّؤَال الَاول	ألسُّؤَال الثَّاني	ألسُّؤَال الثَّالث	ألسُّؤَال الرَابع	ألمجموع

ألدرجة النّهَائية	
	50

عدد الورقَات 8

ممنوع إستعمَال الَالة الحَاسبة

إستعمل خلف الورقَات مع الورقة الإضَافية كمسودَّات من دون نزع الورقة الأَخيرة

الجزء الأول [درجتان لكل سؤال] (ضع رمز الإجابة الصحيحة من 1 إلى 14 في الجدول المعطى)

(1) إذا كانت A, B مصفوفتين من نفس الدرجة و كان $(A^2B^{-1})^{-1}A = A^{-1}$ ، فإن

أ) $B = B^{-1}$ ب) $A = A^{-1}$ ج) $A = I$ د) $B = I$.

(2) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n و كان $|A| = 4$ ، و $A^2 = \text{adj}A$ ، فإن

أ) $n = 1$ ب) $n = 3$ ج) $n = 2$ د) $n = 4$.

(3) إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{bmatrix}$ فإن $|B|$ يساوي

أ) $1 - a^2 + b^2 + c^2$ ب) $1 + a^2 + b^2 + c^2$ ج) $1 - a^2 - b^2 - c^2$ د) $1 + a^2 + b^2 - c^2$.

(4) مجموعة قيم الثابت α التي تجعل النظام

$$\begin{cases} x & & & - & 2z = -4 \\ -x & + & y & + & (\alpha+4)z = 10 \\ x & - & \alpha y & - & 5z = -10 \end{cases}$$

غير متسق (غير متآلف) هي

أ) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ب) $\{-3\}$ ج) $\{-3, 1\}$ د) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(5) إذا كانت كل من $B = \{u, v\}$ و $S = \{u+v, u-v\}$ أساسا في فضاء المتجهات V فإن ${}_SS_B$ مصفوفة الإنتقال من الأساس B إلى الأساس S هي

أ) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ج) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(6) إذا كان المتجه $(\alpha, 3, \beta, -2)$ تركيبا خطيا للمتجهين $v_1 = (3, 1, 1, -2)$ ، $v_2 = (2, 1, 3, 2)$ ، فإن

أ) $\alpha = 7,\ \beta = 6$ ب) $\alpha = 5,\ \beta = 8$ ج) $\alpha = 8,\ \beta = 5$ د) $\alpha = 6,\ \beta = 7$.

(7) إذا كانت المجموعة $B = \{(1,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ و كان $v = (3,4,3) \in \mathbb{R}^3$ فإن $[v]_B$ يساوي

أ) $[3, 2, 1]^t$ ب) $[-1, 2, 3]^t$ ج) $[3, -1, 2]^t$ د) $[0, 3, 4]^t$.

(8) مجموعة قيم الثابت λ التي تجعل المجموعة $S = \{(-1, 1, \lambda), (1, 1, 1), (-1, -1, 1)\}$ مستقلة خطيا في $\mathbb{R}^3$ هي

أ) $\{-1\}$ ب) $\{1\}$ ج) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ د) $\mathbb{R}$.

(9) إذَا كَانت المجموعة $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ متعَامدة و عيَارية في فضَاء ضرب دَاخلي V فإن

أ) $||u_1+u_2+u_3||^2=3$ ب) $||u_1+u_2+u_3||=3$

ج) $||u_1+u_2+u_3||^2=1$ د) $||u_1-u_2-u_3||=1$.

(10) إذَا كَان $\langle\ ,\ \rangle$ ضربًا دَاخليًا علَى فضَاء متجهَات V و كَان $u,v\in V$ فإن العدد $\langle\langle u,v\rangle v,\langle v,u\rangle u\rangle$ يسَاوي

أ) $\langle u,v\rangle^3$ ب) $\langle u,v\rangle^2$ ج) $2\langle u,v\rangle$ د) $\langle u,v\rangle$.

(11) إذَا كَانت كل من $S=\{(1,1),(1,-1)\}$ ، $S'=\{(1,0),(1,1)\}$ أَسَاسًا للفضَاء $\mathbb{R}^2$ و كَان $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ مُؤَثرًا خطيًا بحيث أَن $[T]_S^{S'}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ فإن $[T(2,4)]_{S'}$ تسَاوي

أ) $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}-6\\6\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}6\\-6\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$.

(12) إذَا كَان $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ مُؤَثرًا خطيًا بحيث أَن $T(1,0)=(-4,1)$ ، $T(1,1)=(1,-2)$ فإن $T(x,y)$ تسَاوي

أ) $(-4x+2y,x+3y)$ ب) $(4x-5y,-x+3y)$

ج) $(-4x+5y,x-3y)$ د) $(4x-y,-x+2y)$.

(13) مجموعة قيم الثَابت α التي تجعل المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \alpha & 2 & 1\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ قَابلة للّتحول إلَى الصيغة القطرية هي

أ) $\mathbb{R}$ ب) $\emptyset$ ج) $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ د) $\{0,1\}$.

(14) إذَا كَانت $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ فإن A^{71} تسَاوي

أ) $\begin{bmatrix}1 & 3^{71}\\ 0 & 2^{71}-1\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}1 & 3^{71}\\ 0 & 2^{71}\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}1 & 2^{71}\\ 0 & 3^{71}\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}1 & 3^{71}-1\\ 0 & 3^{71}\end{bmatrix}$.

اَلجزءُ الثَّاني في الصفحة التَالية

الجزءُ الثّاني

السُّؤال الأول [خمس درجات]

أ) عين مجموعة قيم الثّابت λ التي تجعل النظام

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

غير متسق (غير متآلف)

ب) عين مجموعة الحل للنّظام الوّارد في (أ) عندمّا $\lambda = 2$.

(أ) • الطريقة الأولى: النظام هو متكافئ لـ : $AX = B$

حيث $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2 .$$

نرى عندما $\lambda = 1$ ، النظام له العديد من الحلول (عدد غير منتهي) .

عندما $\lambda = -2$ ، النظام ليس له حلول .

عندما $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ ، النظام له حلا وحيدا .

خلاصة : هذا النظام يكون غير متسق إذا وفقط إذا كان $\lambda = -2$.

• الطريقة الثانية : باستخدام جاوس - جوردان :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\lambda \neq 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\lambda \neq 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2-\lambda & -1 \end{array}\right)$$

• إذن النظام يكون غير متسق إذا كان $-2-\lambda = 0$ يعني $\lambda = -2$.

3

(ب) - عندما $\lambda = 2$ ،

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

بما أن $|A| \neq 0$ فان النظام له حلا وحيدًا ، نستخدم طريقة كرامر لايجاد الحل :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2

إذن

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

مجموعة الحل هي $S = \{(1/4, 1/4, 1/4)\}$.

اَلسُّؤَال الثَّانِي [خمس درجَات]

إِذَا كَان V فضَاءًا جزئِيًا من $\mathbb{R}^4$ مولدًا بالمجموعة

$\{(2,2,1,3),(7,5,5,5),(3,2,2,1),(2,1,2,1)\}$ فعين مَا يلي

أ) أسَاسَا للفضَاء الجزئِي V .

ب) قيم β التي من أجلهَا يكون $u=(6+\beta,1+\beta,-1+\beta,2+\beta)\in V$.

1 (أ) بما أن: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

فإن $\{(2,2,1,3);(7,5,5,5);(3,2,2,1)\}$ مستقلة خطيا.

1 و بما أن: $(7,5,5,5) = (2,2,1,3)+(3,2,2,1)+(2,1,2,1)$

يعني أن V مرتبطة خطيا.

1 إذن $B=\{(2,2,1,3);(7,5,5,5);(3,2,2,1)\}$ هو أساسا لـ V

(ب)

بما أن B هو أساس فإن u يكتب كتركيب خطي وحيد بعناصر B. إذن يوجد أعداد حقيقية وحيدة x, y و z حيث

1
$$\begin{pmatrix} 6+\beta \\ 1+\beta \\ \beta-1 \\ 2+\beta \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 2x+7y+3z \\ 2x+5y+2z \\ x+5y+2z \\ 3x+5y+z \end{pmatrix}.$$

* نستخدم الحذف جاوس-جوردان

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & \beta-1 \\ 2 & 7 & 3 & 6+\beta \\ 2 & 5 & 2 & 1+\beta \\ 3 & 5 & 1 & 2+\beta \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & \beta-1 \\ 0 & -3 & -1 & 8-\beta \\ 0 & -5 & -2 & 3-\beta \\ 0 & -10 & -5 & 5-2\beta \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & \beta-1 \\ 0 & 1 & 1/3 & \frac{\beta-8}{3} \\ 0 & 1 & 2/5 & \frac{\beta-3}{5} \\ 0 & 1 & 1/2 & \frac{2\beta-5}{10} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & \beta-1 \\ 0 & 1 & 1/3 & \frac{\beta-8}{3} \\ 0 & 0 & 1/15 & \frac{\beta-3}{5}-\frac{\beta-8}{3} \\ 0 & 0 & 1/6 & \frac{2\beta-5}{10}-\frac{\beta-8}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & \beta-1 \\ 0 & 1 & 1/3 & \frac{\beta-8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3(\beta-3)-5(\beta-8) \\ 0 & 0 & 1 & 6\left(\frac{2\beta-5}{10}\right)-2(\beta-8) \end{array}\right)$$

هذا يعني أن $3(\beta-3)-5(\beta-8)=6\left(\frac{2\beta-5}{10}\right)-2(\beta-8)$

1 يعني $\boxed{\beta=15}$

ملاحظة:

$x=2$, $y=2$, $z=1$ يعني
$$\begin{pmatrix} 21 \\ 16 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

اَلسُؤَال الثَّالث [خمس درجَات]

إِذَا كَان $T_A: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ تحويلًا خطيًا معرفًا بالقَاعدة $T_A(X) = AX$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ فعين

أ) أَسَاسًا لنوَاة T ($\ker T$).

ب) أَسَاسًا لصورة T ($\operatorname{Im} T$).

(1) أ) $\ker T = \{X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 / AX = 0\}$

نأخذ $X \in \ker T$ ، إذن لدينا :

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ -2x_5 = 0 \end{cases} \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) $X = (-2x_2 - 3x_3 ; x_2 ; x_3 ; x_3 ; 0)$; $\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3 \\ x_4 = x_3 \\ x_5 = 0 \end{cases} \longleftarrow$

$X = x_2(-2, 1, 0, 0, 0) + x_3(-3, 0, 1, 1, 0)$

(1) $\operatorname{Ker} T = \langle (-2, 1, 0, 0, 0) ; (-3, 0, 1, 1, 0) \rangle$.

(ب) $\dim \operatorname{Ker} T + \operatorname{Rank} T = 5$ ، فنستنتج أن : $\operatorname{Rank} T = 3$

(1) - بما أن $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$

(1) فإن $\operatorname{Im} T = \langle (1, 2, 3, 1) ; (2, 1, 3, -1) ; (1, 2, 3, -1) \rangle$

ٱلسُّؤال الرّابع [سبع درجَات] لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

أ) أثبت أن القيم المميزة (الذّاتية) ٱلمختلفة للمصفوفة A هي ± 1 .

ب) عين أساسا لكل فضَاء مميز (ذَاتي) مرَافق لكل قيمة مميزة.

ج) عين، إن أمكن، مصفوفة P لهَا معكوس تحول المصفوفة A إلَى الصيغة القطرية مع إيجَاد تلك الصيغة القطرية.

(أ) : $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}$

1 $= [(2-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda)] - [-3(1-\lambda)]$

$= (1-\lambda)[(2-\lambda)(-2-\lambda)+3] = (1-\lambda)(\lambda^2-1).$

$= -(1-\lambda)^2(1+\lambda).$

* القيم المميزة هم جذور $P(\lambda)=0$ ، إذن هم $\lambda = \pm 1$ للمصفوفة A.

$\lambda = 1$ قيمة مميزة مضاعفة مرتين

$\lambda = -1$ " " بسيطة.

(ب) الفضاء المميز المقابل للقيمة المميزة $\lambda = -1$ هو:

1 $E_{-1} = \{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (A+I)X = 0\}$

ليكن $X \in E_{-1}$ $(A+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3x \\ y=0 \end{cases}$

$(x;y;z) = (x;0;-3x) = x(1,0,-3)$

1 $E_{-1} = \langle (1,0,-3) \rangle$

* الفضاء المميز المقابل للقيمة المميزة $\lambda = 1$ هو:

1 $E_1 = \{X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (A-I)X = 0\}$

$(A-I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+z=0$

إذن $(x,y,z) = (x,y,-x)$

$= x(1,0,-1) + y(0,1,0)$

1 $E_1 = \langle (1,0,-1) ; (0,1,0) \rangle$

(ج) - بما $\dim E_1 = 2$ فإن A قابلة للاستقطار (التعدد الجبري = التعدد الهندسي بالنسبة لـ $\lambda=1$)

1 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; الصيغة القطرية $\boxed{D = P^{-1}AP}$

1 نجد $D = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$