الفصل السابع

القيم المميزة   المتجهات المميزة   الإستقطار

القيم المميزة

λ

لمصفوفة A

نحل المعادلة $|\lambda I - A| = 0$ وقيم λ هي القيم المميزة

تمرين : أوجد القيم المميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

الحل

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

ممكن الاستغناء عن هذه الخطوات

مباشرة

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2) - 0 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 2 \quad | \quad \lambda = 2$$

تمرين : أوجد القيم المميزة للمصفوفة
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left|\begin{matrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \lambda & 0 \\ -1 & \lambda-2 \\ -1 & 0 \end{matrix} = 0$$

$$[\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)+0+0] - [0+0-2(\lambda-2)] = 0$$

$$\lambda\underline{(\lambda-2)}(\lambda-3) + \underline{2(\lambda-2)} = 0$$

ناخذ مشترك $(\lambda-2)$

$$(\lambda-2)\left[\lambda(\lambda-3)+2\right] = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2) = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$

$\lambda = 2$ | $\lambda = 2$ | $\lambda = 1$

المتجهات المميزة

ح

نحل النظام المتجانس $[\lambda I - A]\, X = 0$ لكل قيم λ

تمرين:

أوجد المتجهات المميزة للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

الحل

نوجد القيم المميزة للمصفوفة A

$|\lambda I - A| = 0$

$\lambda = 2 \quad | \quad \lambda = 2$ م 1

$[\lambda I - A]\, X = 0$

$\begin{bmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ نحل النظام

$\lambda = 2$

$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

معادلة → $-3x_2 = 0$ $\quad x_1 = t$

$x_2 = 0$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

متجه مميز مرافق للقيمة المميزة $\lambda = 2$

تمرين:

أوجد المتجهات المميزة للمصفوفة
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل

نوجد القيم المميزة

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\lambda = 2 \quad | \quad \lambda = 2 \quad | \quad \lambda = 1$$

$$[\lambda I - A] X = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 & 0 \end{array}\right]$$

$\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

اختزال

صفي

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

معادلة

$$x_1 + 2x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$

مجهول → معادلة

$3 > 2$

نفرض $\rightarrow$

$x_3 = t$

$x_2 = t$

$x_1 = -2t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

متجه مميز مرافق للقيمة المميزة ($\lambda = 1$)

($\lambda = 2$) $\rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{اختزال جاوس جوردان}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

معادلة $\rightarrow$ $x_1 + x_3 = 0$ معادلة مجهول ① > ③

نفرض $\rightarrow$ $x_3 = t$

نفرض $x_2 = s$

نعوض $x_1 = -t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

متجهين مميزين مرافقين للقيمة المميزة ($\lambda = 2$)

العلاقة بين القيم المميزة λ والمتجهات المميزة e لمصفوفة A

نقطة $\lambda e = A e$

تمرين:

إذا كان $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ متجه مميز مرافق للقيمة الذاتية $\lambda = 1$

وإذا كان $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ متجه مميز مرافق للقيمة الذاتية $\lambda = -1$ للمصفوفة $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

أوجد المصفوفة A

الحل

$e = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ $\quad \lambda e = Ae$

$\lambda = 1$

$1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b\\ c+d\end{bmatrix}$

$a+b=1 \quad , \quad c+d=1$

نعوض

$e = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $\quad \lambda e = Ae$

$\lambda = -1$

$-1\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0+b\\ 0+d\end{bmatrix}$ $\quad b = 0$

$d = -1$

$$\xrightarrow{b=0} \quad a+b=1 \longrightarrow a=1$$

$$\xrightarrow{d=-1} \quad c+d=1 \quad c=2$$

$$\Longrightarrow \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الاستقطار

خطوات حل المسألة مصفوفة A

١) نوجد القيم المميزة λ للمصفوفة A

٢) نوجد المتجهات المميزة e للمصفوفة A المرافقة لكل قيمة مميزة λ

٣) نوجد المصفوفة $P = \begin{bmatrix} e & e & e \end{bmatrix}$

نضع بها المتجهات المميزة بأي ترتيب

٤) نوجد P^{-1} إذًا المصفوفة A قابلة للاستقطار

$[P \mid I] \xrightarrow{\text{اختزال}} [I \mid P^{-1}]$

٥) نوجد المصفوفة القطرية

$$D = P^{-1} A P = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

٦) لايجاد A^n

نستخدم القاعدتين

$$A = P D P^{-1}$$

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

حيث

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

تمرين :

إذا كانت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 \\ -3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

١) اثبت أن A قابلة للاستقطار

٢) أوجد مصفوفة قطرية D

٣) أوجد A^{10}

الحل

(١) * نوجد القيم المميزة λ

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & 3 \\ 3 & -6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+5 & 3 \\ -6 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)\{(\lambda+5)(\lambda-4)+18\} = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+5\lambda-20+18) = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$$

$$\lambda = 1 \quad | \quad \lambda = -2 \quad | \quad \lambda = 1$$

② نوجد المتجهات المميزة e

$$[\lambda I - A]x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda+5 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & \lambda-4 & 0 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\lambda=-2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{جاوس جوردان}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0$

$x_2 + x_3 = 0$

معادلة ② < ③ مجهول

$\xrightarrow{\text{نفرض}}$ $x_3 = t$

$\longrightarrow$ $x_2 = -t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ متجه مميز مرافق للقيمة المميزة $\lambda = -2$

$\xrightarrow{\lambda=1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{جاوس جوردان}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{معادلة}}$ $x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$

معادلة ① < ③ مجهول

$\xrightarrow{\text{نفرض}}$ $x_3 = t$

$\xrightarrow{\text{نفرض}}$ $x_2 = s$

$\xrightarrow{\text{نعوض}}$ $x_1 = t + 2s$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

متجهات مميزة مرافقة للقيمة المميزة ($\lambda = 1$)

---

③ نوجد P

$$P = \begin{bmatrix} e_3 & e_2 & e_1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

---

④ نوجد P^{-1}

$$[P \mid I]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

P^{-1}

$$\Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

∴ مصفوفة A قابلة للاستقطار،

المصفوفة القطرية D

$$D = P^{-1} A P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 \\ -3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$A^{10} = P D^{10} P^{-1}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1)^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

مبرهنات الاستقطار

١) إذا كانت A مصفوفة مثلثية (علوية – سفلية) فإن القيم المميزة لها هي عناصر القطر

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 5,\ \lambda = -1,\ \lambda = 4$

$\lambda = 3$
$\lambda = -1$

٢) القيم المميزة للمصفوفة A هي نفسها للمصفوفة A^t

٣) إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n وكان للمصفوفة A عدد n من

***القيم المميزة المختلفة** فإن A قابلة للاستقطار

****المتجهات المميزة** فإن A قابلة للاستقطار

*****القيم المميزة (ليس شرط الاختلاف)** فإن $\lambda_n \ldots\ldots\ldots \lambda_3\ \lambda_2\ \lambda_1 = |A|$ محدد المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

القيم المميزة $\lambda = 3,\ \lambda = -1,\ \lambda = -1$

$\longrightarrow |A| = (3)(-1)(-1) = 3$

تمرين:

عين القيم المميزة للمصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -4$

$\lambda = 9$

$\lambda = -7$

$\lambda = 5$

$\lambda = -1$

تمرين:

عين قيم a التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ قابلة للاستقطار

القيم المميزة هي $\lambda = -9$, $\lambda = 1$ قيمتان مختلفتان

للمصفوفة من الدرجة (2)

∴ قابلة للاستقطار مهما كانت قيمة a

$a \in R$

تمرين:

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ فأوجد القيم المميزة للمصفوفة A^t

نفس القيم المميزة لـ A

$\lambda = 3$, $\lambda = -2$

تمرين:

عين قيم a التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ غير قابلة للاستقطار

نوجد القيم المميزة

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -a \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)\left[(\lambda-3)(\lambda-2) - 0\right] = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda = 1$ | $\lambda = 3$ | $\lambda = 2$

ثلاث قيم مميزة مختلفة ← المصفوفة قابلة للاستقطار

$a = \emptyset$