**المتجه الاحداثي** $[v]_B =$

$[B \mid v]$

هو قيم $\alpha$ التي تجعل المتجه v تركيب خطي للمجموعة $S = \{ v_1 , v_2 , ........\}$

والتي هي أساس للفضاء V

**تذكر :**

إذا كان $[v]_S = v$   S أساس معتاد

---

**تمرين:** إذا كانت $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ أساس لــــ

وكان المتجه $v = (-1,3,2)$

فأوجد $[v]_B$

الحل

$[B \mid v]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس جوردن}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = -1$

$\alpha_3 = 3$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**تمرين:** إذا كان $v = (-1,3,2)$ متجه وكان $B$ أساس معتاد للفضاء $R^3$

$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$

أوجد $[v]_B$

الحل

$[B \mid v]$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow [v]_B = v = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أساس معتاد

---

**تمرين :** إذا كان $S = \{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$ أساس في $R^3$

وكان

$$[v]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \alpha_1 \\ \to \alpha_2 \\ \to \alpha_3 \end{array}$$

أوجد المتجه $v$

الحل

نفرض $v = (a,b,c)$

$[S \mid v]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & b \\ -1 & 1 & 1 & c \end{array}\right]$$

معادلة $\Rightarrow$

$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = a \xrightarrow{\text{تعويض}} 3+1+1 = a \quad a = 5$

$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = b \xrightarrow{\text{تعويض}} 3-1-1 = b \quad b = 1$

$-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = c \xrightarrow{\text{تعويض}} -3+1-1 = c \quad c = -3$

$\Longrightarrow v = (5, 1, -3)$

**تمرين :**

إذا كان $V = (2 , \alpha)$ وكان $S = \{(1,-1),(0,-5)\}$ أساس في $R^2$

حيث

$$[v]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \alpha_1 \\ \to \alpha_2 \end{matrix}$$

أوجد قيمة $\alpha$

$[S \mid V]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & \alpha \end{array}\right]$$

$\alpha_1 = 2$

$-\alpha_1 - 5\alpha_2 = \alpha$

نعوض $-2 - 5(-1) = \alpha$

$-2 + 5 = \alpha$

$\alpha = 3$

# مصفوفة الانتقال من أساس لأساس اخر

إذا كان لدينا $B = \{v_1, v_2, v_3, \dots \dots . v_n\}$ أساسان في الفضاء V
$C = \{u_1, u_2, u_3, \dots \dots . u_n\}$

فإن

$_C P_B = \begin{bmatrix} [v_1]_C & [v_2]_C & \cdots \end{bmatrix}$

مصفوفة الانتقال من الاساس B
الي الأساس C

$[C|v_1]$ $[C|v_2]$

$_B P_C = \begin{bmatrix} [u_1]_B & [u_2]_B & \cdots \end{bmatrix}$

مصفوفة الانتقال من الاساس C
الي الأساس B

$[B|u_1]$ $[B|u_2]$

**تذكر:**

$$\boxed{_B P_C = \quad ( \ _C P_B)^{-1}}$$

$$[v]_C = {}_C P_B \cdot [v]_B$$

$$[v]_B = {}_B P_C \cdot [v]_C$$

**تمرين:**

ليكن $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ أساسان في $R^3$

$C = \{(2,-1,3), (0,1,1), (1,-1,0)\}$

وكان $v = (2,3,5)$ متجه أوجد كلا مكن

1) $[v]_B$ 2) $[v]_C$

3) ${}_BP_C =$ 4) ${}_CP_B =$

5) تحقق من صحة العلاقة $[v]_B = {}_BP_C\,[v]_C$

الحل

(1) $[V]_B$ = $V$ = $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

أساسي معتاد

(2) $[V]_C$

$[C \mid V]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس جوردن}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array}$$

$$[V]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(3) $${}_{B}P_{C} = \Big[\, [(2,-1,3)]_B \quad [(0,1,1)]_B \quad [(1,-1,0)]_B \,\Big]$$

أساس معتاد

$${}_{B}P_{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

---

(4) $${}_{C}P_{B} = \Big[\, [(1,0,0)]_C \quad [(0,1,0)]_C \quad [(0,0,1)]_C \,\Big]$$

$$\left[\, C \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \qquad \left[\, C \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right] \qquad \left[\, C \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right]$$

$$\xrightarrow[\text{في اختزال واحد}]{\text{نجمعهم}} \left[\, C \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس جوردن مرة واحدة}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow {}_{C}P_{B} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

حل آخر للفقرة رقم 4 — أ حل

$${}_{C}P_{B} = \left({}_{B}P_{C}\right)^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{جاوس جوردن}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$I$

$$\Longrightarrow {}_{C}P_{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5 $[V]_B = {}_B P_C \cdot [V]_C$

$${}_B P_C \cdot [V]_C$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + 0 + 2 \\ 0 + 5 - 2 \\ 0 + 5 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ +3 \\ 5 \end{bmatrix} = [V]_B$$

**تمرين:**

أوجد مصفوفة الانتقال من الأساس $B = \{1 + x , 3 + 2x\}$ إلي الأساس $S = \{1 , x\}$

(1,1)  (3,2)

(1,0) , (0,1)

اساس معتاد

$$ {}_{S}P_{B} = \begin{bmatrix} [(1,1)]_S & [(3,2)]_S \end{bmatrix} $$

أساس معتاد

$$ {}_{S}P_{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} $$

H.W

# الأساس المعتاد

$R^2$: $(1,0),(0,1)$

$R^3$: $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$

$P_1(x)$: $\{x, 1\}$

$(1,0)$ $(0,1)$

$P_2(x)$: $\{x^2, x, 1\}$

$(1,0,0),(0,1,0)$ $(0,0,1)$

$M_{2\times 2}$: $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

$(1,0,0,0)$

| الفضاء الصفي | والفضاء العمودى | ورتبة المصفوفة |
|---|---|---|
| | | rank A |
| **أساس الفضاء الصفي لمصفوفة A**<br>هو الصفوف الغير صفرية<br>بعد الاختزال | **أساس الفضاء العمودي لمصفوفة A**<br>هو الأعمدة التي تحتوي علي<br>واحدات متقدمة بعد الاختزال<br>من الأصل | **اساس الفضاء الصفري**<br>**لمصفوفة A  N (A)** |
| **بعد الفضاء الصفي**<br>هو عدد الصفوف<br>الغير صفرية بعد | **بعد الفضاء العمودى**<br>هو عدد الأعمدة ذات<br>الواحدات المتقدمة | **بعد الفضاء الصفرى** |
| **Dim( row A )** | **Dim( ~~row~~ Col A )** | |

**Rank A = dim ( row A )**

**= dim ( col  A )**

**تمرين:** أوجد

١) أساس وبعد الفضاء الصفي للمصفوفة A

٢) أساس وبعد الفضاء العمودي للمصفوفة A

٣) رتبة المصفوفة A

٤) **اساس وبعد الفضاء الصفري لمصفوفة A** $\boxed{N(A)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل

[1] الفضاء الصفي

$$\xrightarrow[\text{جاوس}]{\text{اختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ناخذ الصفوف الغير صفرية

اساس $= \{(1,1,0,0,1,-1), (0,0,1,0,1,-2), (0,0,0,1,0,2)\}$

بعد الفضاء الصفي $= \dim(\text{row } A) = \boxed{3}$

## 2) الفضاء العمودي

اختزال →

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نأخذ الأعمدة ذات الواحدات المتقدمة **من الأصل**

أساس الفضاء العمودي $= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

بعد الفضاء العمودي $= \dim \text{col} = 3$

---

## 3) رتبة المصفوفة

$$\text{rank}(A) = \dim(\text{col } A) = \dim(\text{row } A)$$

$$\boxed{\text{rank}(A) = 3}$$

## ٤) الفضاء الصفري $N(A)$

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}\end{array}\right]$$

اختزال جاوس جوردن →

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

معادلات →

$$x_1 + x_2 + x_5 - x_6 = 0$$

$$x_3 + x_5 - 2x_6 = 0$$

$$x_4 + 2x_6 = 0$$

معادلات مجاهيل

$3 < 6$

عدد لانهائي

نفرض → $x_6 = t$

نفرض → $x_5 = s$

نفرض → $x_2 = k$

نعوض → $x_4 = -2t$

نعوض → $x_3 = -s + 2t$

نعوض → $x_1 = -k - s + t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k-s+t \\ k \\ -s+2t \\ -2t \\ s \\ t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -k \\ k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ -s \\ 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 2t \\ -2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$= k \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

اساس الفضاء الصفري $= \{(-1,1,0,0,0,0), (-1,0,-1,0,1,0), (1,0,2,-2,0,1)\}$

nullity $A$ = بعد الفضاء الصفري $= 3$

صفرية المصفوفة A

$$\boxed{\text{nullity } A + \text{rank } A = 4}$$

عدد اعمدة المصفوفة A

$3 + 3 = 6$

$n \rightarrow$ عدد أعمدة المصفوفة

$\text{rank}(A) \rightarrow$ رتبة المصفوفة

$\dim(\text{row } A) \rightarrow$ بعد الفضاء الصفي

$\dim(\text{col } A) \rightarrow$ بعد الفضاء العمودي

$\text{nullity}(A) \rightarrow$ بعد الفضاء الصفري

---

$$\boxed{\dim(\text{row } A) = \dim(\text{col } A) = \text{rank } A}$$

$$\boxed{\text{nullity}(A) + \text{rank } A = n}$$