| | | |
|---|---|---|
| جامعة الملك سعود / كلية العلوم<br>قســــم الرياضيات | | الفصل الثاني 1432 / 1433 هـ<br>الزمن // ساعة و نصف |
| الإسم / ..................................<br>رقم الشعبة / ............................<br>رقم التحضير / ........................ | الإختبار الفصلي الثاني<br>في المقرر 244 ريض<br>الأحد 1433/6/15هـ | الرقم الجامعي / ......................<br>أستاذ المادة / ......د. برهان...... |

درجة الجزء الأول

| رقم السؤال | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| رمز الإجابة | أ | ب | ج | د | ب | ج | $\frac{\quad}{9}$ |

درجة الجزء الثاني

| السؤال الأول | السؤال الثاني | السؤال الثالث | السؤال الرابع | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\quad}{3}$ | $\frac{\quad}{4}$ | $\frac{\quad}{2}$ | $\frac{\quad}{2}$ | $\frac{\quad}{11}$ |

| | |
|---|---|
| الدرجة النهائية | |
| | 20 |

لاحظ أن عدد الورقات7

**أستخدم خلف الورقات فقط كمسودة بدون نزع أي منها**

الجزء الأول :[ درجة ونصف لكل سؤال ] ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من 1 إلى 6 في الجدول المعطى :

( 1 ) إذا كان المتجه $v=(a,a,b)$ ( حيث $a\neq 0$ ) تركيبا خطيا للمتجهين $v_1=(1,-1,0)$ , $v_2=(0,1,-1)$ فإن العلاقة بين a و b هي:

( أ ) $b=-2a$ ( ب ) $b=2a$ ( ج ) $a=-2b$ ( د ) $a=2b$

( 2 ) الفضاء الجزئي $W$ من $R^4$ المولد بالمتجهات $v_1=(1,-1,0,1)$ , $v_2=(-1,1,1,0)$, $v_3=(2,-2,1,3)$ له $\dim W$ يساوي:

( أ ) 1 ( ب ) 2 ( ج ) 3 ( د ) 4

(3) مجموعة قيم الثابت $\alpha$ التي تجعل المجموعة $S=\{(0,\alpha,\alpha);(\alpha,0,0);(0,-3\alpha,3\alpha)\}$ أساسا عياريا متعامدا هي:

( أ ) $R$ ( ب ) $R\setminus\{0\}$ ( ج ) $\phi$ ( د ) $R\setminus\{1,-1\}$

( 4 ) إذا كان $B=\left\{u_1=\frac{1}{5\sqrt{2}}(3,4),u_2=\frac{1}{5\sqrt{2}}(4,-3)\right\}$ تشكل أساسا عياريا متعامدا في الفضاء $R^2$ حيث الضرب الداخلي معرف هو: $<(a,b);(a',b')>=2aa'+2bb'$ وكان $v=(-\sqrt{2},2\sqrt{2})$ فإن $[v]_B$ هي:

(أ) $(-2,4)^T$ (ب) $(2,4)^T$ (ج) $(1,2)^T$ (د) $(2,-4)^T$

(5) إذا كانت كل من $B=\{u_1=(-1,3),u_2=(3,1)\}$ و $C=\{v_1=(1,3),v_2=(1,1)\}$ تشكل أساساً للفضاء $R^2$ ، فإن مصفوفة الإنتقال ${}_CP_B$ من الأساس $B$ إلى الأساس C هي:

( أ ) $\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 21 & -3\end{bmatrix}$ ( ب ) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{bmatrix}$ ( ج ) $\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 7 & 11\end{bmatrix}$ ( د ) $\begin{bmatrix}5 & 2\\ -8 & 3\end{bmatrix}$

(6) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 7\\ 1 & -5 & 2 & -2\\ -1 & 4 & 0 & 3\\ 1 & -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ فإن رتبة $A$ أي $rank(A)$ تساوي :

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

الجزء الثاني : أجب على الأسئلة التالية في نفس ورقة الأسئلة :

السؤال الأول : [3 درجات ]

إذا كانت المجموعة $S=\{\, x^2+3, -x^2+x+1, -x^2+4x+5, -2x^2+2x-2, x+2 \,\}$ تشكل مجموعة جزئية من $P_2[x]$ وليكن $W$ الفضاء المولد ب $S$ .

بين ماإذا كان $W=P_2[x]$ أم لا.

نضع $\boxed{u_1 = x+2}$ ; $u_3 = -x^2+4x+5$ ; $\boxed{u_5 = x^2+3}$

$u_2 = -2x^2+2x-2$ ; $u_4 = -x^2+x+1$

$u = -2u_4 + u_2 = +2x^2-2x-2+(-2x^2+2x-2) = -4$

$\boxed{u=-4}$

2 نرى أن $\{u, u_1, u_5\}$ مستقلة خطيا

1 و بما أن $\dim P_2[x] = 3$

فإن $W = P_2[x]$

السؤال الثاني : [ 4 درجات ]

ليكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

1) أوجد **الصيغة الدرجية الصفية المختزلة** للمصفوفة $A$
2) عين أساسا لفضاء الحل للنظام المتجانس $AX = 0$
3) عين أساسا لفضاء الأعمدة $Col(A)$
4) عين أساسا لفضاء الصفوف $Row(A)$

1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = R$$

2

$$\operatorname{Ker} A = \{ X \in \mathbb{R}^5 \,/\, AX = 0 \}$$

ليكن $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A$ ; $AX = 0$

$$\begin{cases} x - y - w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ t - w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + w \\ z = -2w \\ t = w \end{cases}$$

1

$$X = (x, y, z, t, w) = (y + w, y, -2w, w, w)$$
$$= y(1, 1, 0, 0, 0) + w(1, 0, -2, 1, 1)$$

$$\operatorname{Ker} A = \langle (1, 1, 0, 0, 0) ; (1, 0, -2, 1, 1) \rangle$$



$\dim \operatorname{col} A = \dim \operatorname{Row} A$ $\quad$ $\operatorname{col} A = \langle (1,0,0) ; (0,1,0) ; (0,0,1) \rangle$ 3 $\quad$ 0.5

$\dim \operatorname{ker} A + \dim \operatorname{col} A = 5$ ; $\quad$ $\operatorname{Row} A = \langle (1,-1,0,0,-1) ; (0,0,1,0,2) ;$ 4 $\quad$ 0.5
$(0,0,0,1,-1) \rangle$

السؤال الثالث : [ 2 درجتان ]

(1) تحقق من متباينة كوشي- شوارتز للمتجهين $u=(1,1); v=(1,-1)$ في فضاء الضرب الداخلي $R^2$ **حيث**

$<(a,b),(a',b')> = 2aa'+3bb'$

(2) إستنتج من الفقرة (1) أن $u=(1,1); v=(1,-1)$ مستقلين في **الفضاء** $R^2$ .

:

(1) $|<u,v>| \leq \|u\| \, \|v\|$

$<u=(1,1) \,;\, v=(1,-1)> = 2-3 = -1$ 05

$|<u,v>| = |-1| = 1$

$\|u\| = \sqrt{<u,u>} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$ 0,5

$\|v\| = \sqrt{<v,v>} = \sqrt{2+3} = \sqrt{5}$ 0,5

بما $1 \leq \sqrt{5}.\sqrt{5}$ فان متباينة كوشي-شوارتز تتحقق .

(2) بما أن $|<u,v>| < \|u\|.\|v\|$

فان $\{u,v\}$ مستقلة خطيا في $R^2$ . 0,5

السؤال الرابع: [ 2 درجتان ] .

عين أساسا في $R^3$ يحتوي على $S = \{u = (1,-1,2); v = (2,1,2)\}$

بما أن S مستقلة خطيا و $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

فيجب أن نجد متجه w في $\mathbb{R}^3$ بحيث

تكون $B\{u, v, w\}$ مستقلة خطيا وبالتالي تكون

أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

2

نختار $w = (0,0,1)$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

فإن $B = \{u, v, w\}$ أساس لـ $\mathbb{R}^3$