الفصل الرابع

الأعداد الحقيقية R

تعريف فضاء المتجهات

فضاء المصفوفات	فضاء كثيرات الحدود	فضاء الأعداد
$M_{2\times2}$	$P_1(x)$	$\boxed{R^2}$
$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = (-1,5,0,2)$	$2x-3=(2,-3)$	$(2,-5) \rightarrow$ متجه
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = (1,3,\sqrt{5},\frac{1}{2})$	$3-7x=(-7,3)$	$(-\frac{1}{2},3)$
$\vdots$	$x+9=(1,9)$	$(\sqrt{2},1\frac{1}{4})$
	$5x=(5,0)$	$\vdots$
	$\vdots$	
$M_{2\times3}$	$P_2(x)$	$\boxed{R^3}$
	$x^2+5x-1=(1,5,-1)$	$(2,1,5) \rightarrow$ متجه
	$3x^2+9=(3,0,9)$	$(-1,\frac{1}{2},\sqrt{3})$
$M_{5\times4}$	$x-x^2=(-1,1,0)$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	
$M_{n\times r}$	$P_n(x)$	$\boxed{R^4}$

الفضاءات الجزئية

نقول أن W فضاء جزئي من فضاء المتجهات V إذا تحقق

١) $W \neq \emptyset$ أي ان W غير خالية

٢) إذا كان $u, v \in W$ فإن $(u+v) \in W$

متجهة

٣) إذا كان $u \in W$ و $k \in R$ فإن $ku \in W$

متجه عدد حقيقي

جزء من

$W \subseteq V$

تمرين: إذا كانت $W = \{ (a, b) \in R^2 : a + 3b = 0 \}$

أثبت أن W فضاء جزئي من R^2

الحل

1 إثبات أن $W \neq \phi$

أسهل الأصفار

$(0,0) \in W$

لأن $0 + 3 \cdot 0 = 0$

$\therefore W \neq \phi$

مثال آخر $(3,-1) \in W$

$3 + 3(-1) = 0$

$\therefore W \neq \phi$

2 نفرض $u, v \in W$

$u = (a_1, b_1) \quad : \quad a_1 + 3b_1 = 0$

$v = (a_2, b_2) \quad : \quad a_2 + 3b_2 = 0$

جمع جمع

$u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \qquad a_1 + a_2 + 3(b_1 + b_2) = 0$

$\Rightarrow u + v \in W$

3 نفرض $u \in w$ ، $k \in R$

$u = (a, b)$: $a + 3b = 0$

بالضرب k   بالضرب k

$ku = (ka, kb)$: $ka + 3kb = 0$

$ku \in w$

من 1 ، 2 ، 3

w فضاء جزئي من R^2

$w \subseteq R^2$

تمرين: إذا كانت $W = \{ (a, b, c) \in R^3 : a + 3b - c = 2 \}$

بين هل W فضاء جزئي من R^3

الحل

① اثبات ان $W \neq \phi$

$(2, 0, 0) \in W$ لأن $2 + 3\cdot(0) - 0 = 2$

$W \neq \phi$

② نفرض $u, v \in W$

$u = (a_1, b_1, c_1) \quad : \quad a_1 + 3b_1 - c_1 = 2$

$v = (a_2, b_2, c_2) \quad : \quad a_2 + 3b_2 - c_2 = 2$

جمع

جمع

$u + v = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \quad :$

$a_1 + a_2 + 3(b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) = 4$

$u + v \notin W$

مثال

يجب ذكر مثال يثبت عدم صحة الشرط الثاني

$(2,0,0) \in w \qquad 2+3\cdot 0-0=2$

$(1,1,2) \in w \qquad 1+3\cdot 1-2=2$

$+$

$(3,1,2) \notin w \qquad 3+3\cdot 1-2=4 \neq 2$

$\therefore$ w ليس فضاء جزئي من R^3

$$w \not\subseteq R^3$$

تمرين: إذا كانت $W = \{ ax^2+bx+c \in p_{2(x)} \ : a+b+c=0 \}$

بين هل W فضاء جزئي من $p_{2(x)}$

الحل

[1] اثبت أن $w \neq \phi$

$0x^2+0x+0 \in P_2(x)$ $\qquad 0+0+0=0$

$\therefore w \neq \phi$

(2) نفرض $u, v \in w$

$u = a_1x^2+b_1x+c_1 \ : \ a_1+b_1+c_1=0$

$v = a_2x^2+b_2x+c_2 \ : \ a_2+b_2+c_2=0$

جمع $\qquad$ جمع

$u+v = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2) \ : \ a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2=0$

$u+v \in w$

ولا داعي لنكمل المثال

3) نفرض $u \in W$ ، $k \in R$

$u = ax^2 + bx + c$ ، $a + b + c = 0$

k ، k ،

$ku = kax^2 + kbx + kc$ ، $ka + kb + kc = 0$

$ku \in W$

من 1) 2) 3)

$$W \subseteq P_2(x)$$

تمرين: إذا كانت $W = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2} \ : a^2 + b = c^2 + d \}$

بين هل W فضاء جزئي من $M_{2\times2}$

الحل

1) اثبات ان $w \neq \phi$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in w \qquad 0^2 + 0 = 0^2 + 0$

$w \neq \phi$

2) نفرض $u, v \in w$

$u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \ : \ a_1^2 + b_1 = c_1^2 + d_1$

$v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \ : \ a_2^2 + b_2 = c_2^2 + d_2$

صح صح

$u + v = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \ : \ \boxed{a_1^2 + a_2^2} + b_1 + b_2 = c_1^2 + c_2^2 + d_1 + d_2$

مختلف

$(a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2$

$u + v \notin w$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \in W : \quad 2^2 + 3 = 1^2 + 6 \quad \text{صح}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \in W : \quad 1^2 + \cancel{14}\,13 = 3^2 + 5$$

4

$$\begin{bmatrix} 3 & 16 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \notin W \quad 3^2 + 16 \neq 4^2 + 11$$

$$25 \neq 27$$

$$W \not\subseteq M_{2\times 2}$$

السؤال الأول : [5 درجات]

لتكن المجموعة $W = \{(x, y, z) \in R^3 : x + y - 2z = 0, y + 3z = 0\}$

1) أثبت أن المجموعة W تشكل فضاءا جزئيا في R^3.

الحل

1) إثبات أن $w \neq \phi$

$(0,0,0) \in w \qquad 0 + 0 - 2 \cdot 0 = 0 \; / \; 0 + 3 \cdot 0 = 0$

$w \neq \phi$

2) نفرض $u, v \in w$

$u = (x, y, z) : \quad x + y - 2z = 0 \; / \; y + 3z = 0$

$v = (a, b, c) : \quad a + b - 2c = 0 \; / \; b + 3c = 0$

$u + v = (x + a, y + b, z + c) : x + a + y + b - 2(z + c) = 0 \; / \; y + b + 3(z + c) = 0$

$u + v \in w$

3] نعرف $u \in W$ ، $k \in R$

$u = (x, y, z) : x + y - 2z = 0 , y + 3z = 0$

u $\cdot\, k$ $\cdot\, k$

$ku = (kx, ky, kz) : kx + ky - 2kz = 0 , ky + 3kz = 0$

$ku \in W$

من 1) ، 2) ، 3)

$W \subseteq R^3$

السؤال الخامس

بين فيما إذا كانت المجموعة $W = \{A \in M_n / A = 2A^T\}$ تشكل فضاء جزئيا من M_n، حيث إن M_n هو فضاء المصفوفات المربعة من الدرجة n.

الحل

1] اثبات أن $w \neq \phi$

مصفوفة الصفرية مربعة

$\underline{0} \in W$ لأن $\underline{0} = 2\underline{0}^T$

$w \neq \phi$

2] نفرض $u, v \in w$

$u = A$ $\quad A = 2A^T$

$v = B$ $\quad B = 2B^T$

صح $\quad$ صح

$u + v = A + B$ $\quad A + B = 2A^T + 2B^T$

$= 2(A+B)^T$

$u + v \in w$

$k \in \mathbb{R}$, $u \in W$ [illegible] 3)

$u = A$: $A = 2A^T$

$\cdot k$ $\cdot k$

$ku = kA$ $kA = 2kA^T$

$= 2(kA)^T$

$ku \in W$

---

3) 2) D

$W \subseteq M_n$