نواة التحويل الخطي

Ker

صورة التحويل الخطي

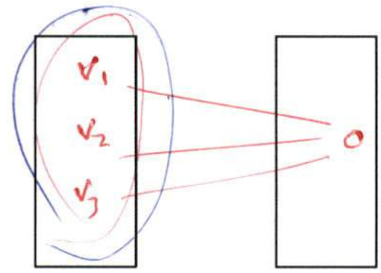
Im

$T : V \to W$ تحويل خطي فإن

جميع المتجهات من V والتي صورة

كل منها 0 تسمي نواة التحويل الخطي

$$\text{Ker } T = \{ v \in V : T(v) = 0 \}$$

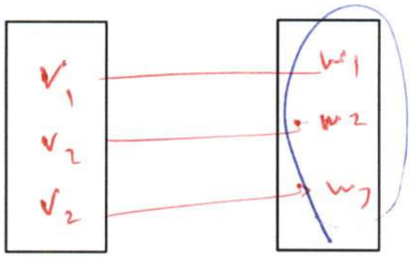


جميع المتجهات من W والتي صورة

والتي هي صور للمتجهات من V تسمي

صورة التحويل الخطي

$$\text{Im } T = \{ T(v) \in W : v \in V \}$$



علاقات

$\dim \text{Ker } T = \text{nullity}(T)$

$\dim \text{Im } T = \text{rank}(T)$

$$\boxed{\text{nullity}(T) + \text{rank}(T) = n}$$

$$\dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T = n$$

حيث n هو بعد فضاء المتجهات V $\quad \dim V$

ملاحظة

$\dim(R^3) = 3$

$\dim(P_5) = 5+1 , 6$

$\dim(M_{3\times 4}) = 3 \times 4 , 12$

$\dim(R^n) = n$

$\dim(P_n) = n+1$

$\dim(M_{m\times n}) = m \times n$

تمرين:

ليكن $T : R^3 \to R^4$ تحويل خطي معرف بالقاعدة

$$T(x,y,z) = (x+y\ ,\ y-z\ ,\ x+z\ ,\ 2x+y+z)$$

أوجد

أ) Ker T	د) Im T	ز) تحقق من صحة
ب) أساس Ker T	هـ) أساس Im T	nullity (T) + rank (T) = n
جـ) بعد Ker T	و) بعد Im T	

الحل

Ker

نضع $T(x,y,z) = (0,0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} x+y&=0\\ y-z&=0\\ x+z&=0\\ 2x+y+z&=0\end{aligned}\right\} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow[\text{جاوس جوردان}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$x + z = 0$

$y - z = 0$

مجهول 3 > معادلة 2 عدد لا نهائي

نفرض

$z = t$

$y = t$

$x = -t$

$$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t\\ t\\ t\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$$

① $\ker T = \{(-t,t,t) : t \in R\}$

② أساس $\ker T = \{(-1,1,1)\}$

③ $\dim \ker T = 1 =$ nullity

Im

③ $T(x,y,z) = (a,b,c,d)$

$$\left.\begin{aligned} x+y&=a \\ y-z&=b \\ x+z&=c \\ 2x+y+z&=d \end{aligned}\right\} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \\ 2 & 1 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow[\text{جاوس جوردان}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a-b \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-a+b \\ 0 & 0 & 0 & d-2a+b \end{array}\right]$$

يكون النظام حل اذا كان

$$c-a+b=0$$
$$d-2a+b=0$$

$\operatorname{Im} T = \{ (a,b,c,d) : c-a+b=0,\ d-2a+b=0 \}$

ⓑ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{جاوس جوردام}]{\text{اختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نأخذ الأعمدة ذات الوحدات المتقدمة من الأصل

$\text{B of } \operatorname{Im} T = \{ (1,0,1,2), (1,1,0,1) \}$

$\dim \operatorname{Im} T = 2 = \operatorname{rank} T$

$\operatorname{nullity}(T) + \operatorname{rank}(T) = n = \dim R^3$

$1 + 2 = 3$

تمرين:

احسب بعد كل من نواة وصورة المؤثر الخطي $T : R^4 \to R^4$

المعرف بالقاعدة $T(v) = Av$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -16 \\ 2 & -14 & -10 & -20 \end{bmatrix}$$

أولاً

ker(T)

$$[A \mid 0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 0 \\ 1 & -12 & -11 & -16 & 0 \\ 2 & -14 & -10 & -20 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{جاوس جوردن}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{8}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2 معادلة $\rightarrow$

$$x_1 + \frac{17}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4 = 0$$

$$x_2 + \frac{6}{5}x_3 + \frac{6}{5}x_4 = 0$$

مجهول معادلة

$4 > 2$

فرض $x_4 = t$

فرض $x_3 = s$

$\longrightarrow x_2 = -\frac{6}{5}t - \frac{6}{5}s$

$\longrightarrow x_1 = \frac{8}{5}t - \frac{17}{5}s$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -\frac{17}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پایه $\ker T = \left\{ \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}, 0, 1\right), \left(-\frac{17}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0\right) \right\}$

$\dim \ker T = 2 = \text{nullity } T$

$cvi_{Im(T)} = \{(1,1,1,2),(-2,8,-12,-14)\}$

من المصفوفة
المختزلة
نأخذ الأعمدة
ذات الواحد
المتقدم
من الأصل

$\dim Im T = 2 = rank\,T$

النواة

$nullity\,T + rank\,T = n = \dim \mathbb{R}^4$

$2 + 2 = 4$

مصفوفة التحويل الخطي

١) المصفوفة المعتادة

تمرين:

إذا كان : $T : R^3 \rightarrow R^2$ تحويل خطي معرف بالقاعدة

$$T(x,y,z) = (x+y\ ,\ y-z)$$

أوجد المصفوفة المعتادة لهذا التحويل

الحل

نوجد صور الأساس المعتاد لـ R^3

$T(1,0,0) = (1,0)$

$T(0,1,0) = (1,1)$

$T(0,0,1) = (0,-1)$

المصفوفة المعتادة $= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

أ/ محمد

٢) مصفوفة التحويل الخطي $T : V \to W$

عند الانتقال من أساس V إلي أساس W

إذا كان لدينا $B = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \}$ أساس للفضاء V

وإذا كان لدينا $C = \{ w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n \}$ أساس للفضاء W

$$[T]_B^C = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_C & [T(v_2)]_C & \cdots \end{bmatrix}$$

مصفوفة التحويل الخطي من أساس B الى C

$T : W \to V$

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} [T(w_1)]_B & [T(w_2)]_B & \cdots \end{bmatrix}$$

مصفوفة التحويل الخطي من أساس C الى B

علاقات: ليكن $v \in V$

$$[T(v)]_C = [T]_B^C \, [v]_B$$

$$[T(v)]_B = [T]_B \, [v]_B$$

حيث $T : V \to V$ مؤثر

تمرين:

إذا كان $T : R^3 \rightarrow R^2$ تحويل خطي معرف بالقاعدة $T(x,y,z) = (x+y-z\ ,\ x-2y+z)$

وكان $B = \{ (1,1,1) , (1,0,1) , (0,0,1) \}$ أساس للفضاء R^3

و $C = \{ (1,1) , (1,-1) \}$ أساس للفضاء R^2

و $v = (1,0,2)$ فاحسب

١) $[T(v)]_c$ ٢) $[v]_B$ ٣) $[T]_B^C$

٤) تحقق من صحة $[T(v)]_c = [T]_B^C \ [v]_B$

الحل

(1) $[T(v)]_c = [T(1,0,2)]_c$

$= [(-1, 3)]_c$

$$[T(v)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$[C \mid \begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}]$

$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$

معادلات

$\alpha_1 + \alpha_2 = -1$

$\alpha_1 - \alpha_2 = 3$ (+)

$2\alpha_1 = 2$

$\alpha_1 = 1 \longrightarrow \alpha_2 = -2$

② $[V]_B$

$[B \mid V]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&0&0&0\\1&1&1&2\end{array}\right] \xrightarrow[\text{جاوس جوردان}]{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow [V]_B = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

---

③ $[T]_B^C = \Big[\, [T(1,1,1)]_C \;\; [T(1,0,1)]_C \;\; [T(0,0,1)]_C \,\Big]$

$$= \Big[\, [(1,0)]_C \;\; [(0,2)]_C \;\; [(-1,1)]_C \,\Big]$$

$$\left[\, C \;\middle|\; \begin{array}{ccc}1&0&-1\\0&2&1\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc}1&1&1&0&-1\\1&-1&0&2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{cc|ccc}1&0&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&\frac{1}{2}&-1&-1\end{array}\right]$$

$$[T]_B^C = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&-1&-1\end{bmatrix}$$

التحقق

$$[T(v)]_c = [T]_\beta^c \, [v]_\beta$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+1+0 \\ 0-1-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

طريقة اخرى للايجاد

$$[T(v)]_c$$

تمرين:

إذا كان $T : R^2 \rightarrow R^2$ مؤثر خطي معرف بالقاعدة $T(x,y) = (x+2y, 2x-y)$

وكان $B = \{ (1,1), (1,-1) \}$ أساس للفضاء R^2

و $v = (5,3)$ فاحسب

١) $[T(v)]_B$ ٢) $[v]_B$ ٣) $[T]_B$

٤) تحقق من صحة $[T(v)]_B = [T]_B [v]_B$

الحل

$$① \; [T(v)]_B = [T(5,3)]_B = [(11,7)]_B$$

$$\left[B \;\middle|\; \begin{matrix} 11 \\ 7 \end{matrix} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 7 \end{array} \right]$$

2 معادلة

$$x_1 + x_2 = 11$$

$$x_1 - x_2 = 7$$

$$(+) \quad 2x_1 = 18$$

$$x_1 = 9 \longrightarrow x_2 = 2$$

$$\Longrightarrow [T(v)]_B = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

② $[V]_B$

$$[B|v] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1 - x_2 = 3$$

$+$

$$2x_1 = 8 \longrightarrow x_1 = 4 \longrightarrow x_2 = 1$$

$$[V]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \left[[T(1,1)]_B \ [T(1,-1)]_B \right]$$

$$= \left[[(3,1)]_B \ [(1,-1)]_B \right]$$

$$\left[B \,\middle|\, \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

اختزال
$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

التحقق

$$[T(v)]_B = [T]_B \cdot [v]_B$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 + 1 \\ 4 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

طريقة ثانية

لايجاد

$[T(v)]_B$

تمرين:

إذا كان $T : R^2 \to R^2$ مؤثر خطي

وكان $B = \{ (1,1), (1,-1) \}$ أساس للفضاء R^2 وكانت $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

عين قاعدة التحويل T

الحل

نستخدم القانون

$$[T(v)]_B = [T]_B [v]_B$$

نفرض $V = (x, y) \in R^2$

$[V]_B$

$$[B \mid v] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \end{array}\right] \xrightarrow{\text{اختزال}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{2} \end{array}\right]$$

$$[V]_B = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{bmatrix}$$

نعوض

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2x+2y}{2} + \frac{x-y}{2} \\ \frac{x+y}{2} + \frac{-2x+2y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3x+y}{2} \\ \frac{-x+3y}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \lambda_1 \\ \to \lambda_2 \end{matrix}$$

(x,y) ترکیب خطی مه $(1,-1)$, $(1,1)$

$$T(v) = T(x,y) = \lambda_1 (1,1) + \lambda_2 (1,-1)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{3x+y}{2}\right)(1,1) + \left(\frac{-x+3y}{2}\right)(1,-1)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{3x+y-x+3y}{2}, \frac{3x+y+x-3y}{2}\right)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{2x+4y}{2}, \frac{4x-2y}{2}\right)$$

$$\boxed{T(x,y) = (x+2y, 2x-y)}$$

$[T]_B^S$

تمرين:

إذا كانت $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ هي المصفوفة الممثلة للتحويل الخطي $T : R^3 \to R^2$ بالنسبة للاساسين

$B = \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}, S = \{ (-1,1), (2,0) \}$

أوجد قاعدة التحويل $T(x,y,z)$

الحل

نستخدم القانون

$$[T(v)]_S = [T]_B^S [v]_B$$

نفرض $v = (x,y,z) \in R^3$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ لأن B اساس عادي

$$[B|v] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right]$$

$$[T(v)]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x + y + z \\ x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \lambda_1 \\ \to \lambda_2 \end{array}$$

(x, y, z) ترکیب خطی از

$(-1,1), (2,0)$

$T(v) = T(x,y,z) = \lambda_1(-1,1) + \lambda_2(2,0)$

$= (x+y+z)(-1,1) + (x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z)(2,0)$

$= \left(-x-y-z+2x-y+z \,/\, x+y+z+0\right)$

$T(x,y,z) = \left(x-2y, \; x+y+z\right)$