

تمرين: عين قيمة K التي تجعل النظام غير متسق

$$x - 2y + z = 0$$

$$x + Ky - 3z = 0$$

$$-x + 6y - 5z = 1$$

الحل

[A|B]

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & k & -3 & 0 \\ -1 & 6 & -5 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & k+2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2/(k+2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k+2} & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{k+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8-4k}{k+2} & 1 \end{array} \right]$$

النظام غير متسق

$$k+2=0 \quad \text{عندما}$$

$$k = -2$$

$$(-4) \left(\frac{-4}{k+2} \right) + (-4)$$

$$\frac{+16}{k+2} - \frac{4}{1}$$

$$= \frac{16 - 4k - 8}{k+2} = \frac{8 - 4k}{k+2}$$

$$8 - 4k = 0 \quad \text{نحسب}$$

$$8 = 4k$$

$$k = 2$$

(٣) طريقة المعكوس (تستخدم فقط لحل النظام الوحيد الحل)

$$AX = B$$

نوجد A^{-1} ثم

$$X = A^{-1}B$$

تمرين: حل النظام عن طريق المعكوس

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + x_3 = -2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نوجد A^{-1}

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 5 \end{array} \right]$$

A^{-1}

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 0 + 8 \\ -3 - 0 - 6 \\ -3 - 0 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -9 \\ -13 \end{bmatrix}$$

حل النظام $\{(x_1, x_2, x_3)\}$

$$= \{ (11, -9, -13) \}$$

حل وحيد
والنظام مستقر

تمرين: حل النظام عن طريق المعكوس إن أمكن

$$x_1 + x_3 = 1$$

$$x_2 - x_3 = -1$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نوعية

$$[A | I]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

لا يمكن
تحويله إلى

①

ن A ليس له معكوس

النظام لا يمكن
حله بالمعكوس

ليس له حل

عدد
لا يمكن

تفسير الطريقة

الحل خارج
مورد

ملاحظة : النظام

$$\underline{A \cdot X = B}$$

$$|A| = 0$$

عدد لانتهائي أو ليس لها حل

A ليس عكس

$$|A| \neq 0$$

حل وحيد

A عكس

(٤) طريقة كرامر (تستخدم فقط لحل النظام الوحيد الحل)

$$A X = B$$

$$|A| =$$

$$|A_1| =$$

$$|A_2| =$$

⋮

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

⋮

تمرين: حل النظام بطريقة كرامر

$$5x_1 + 3x_2 = -1$$

$$x_1 - x_2 = 4$$

(الحل)

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5) - (3) = -8$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-1) - (12) = -11$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (20) - (-1) = 21$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-11}{-8} = \frac{11}{8}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{21}{-8} = -\frac{21}{8}$$

تمرين: حل النظام بطريقة كرامر

$$4x_1 + 5x_2 = 2$$

$$11x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 11 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

-132

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

-36

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 11 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

-24

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 11 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

12

$$x_1 = \frac{-36}{-132} =$$

$$x_2 = \frac{-24}{-132}$$

$$x_3 = \frac{12}{-132}$$

هذا خطأ
وذا كما استأه
حل النظام بكرام لا يجار
(أصل)

|A|

|A₁|

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

لا بد من
|A₁|
|A₂|
|A₃|
نظام
الوقت

أنظمة حل المعادلات المتجانسة

$$A X = 0$$

الناتج صفر

تمرين : أوجد حل النظام المتجانس

$$2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$

$$x_1 - x_3 - 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$

[A | B]

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{array} \right]$$

الحل باستخدام فوراء

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ملاحظة

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

معادلات جابض

$$(4) > (3)$$

عدد لا نهائي

الحل

$$x_3 = t$$

$$x_2 = -t$$

$$x_1 = t$$

$$= \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \}$$

$$= \{ (t, -t, t, 0) : t \in \mathbb{R} \}$$

أنظمة الماتrices

نظام متجانس

$$AX = 0$$

عدد كاي

حل وحيد

حل صفر

حل نافي

نظام غير متجانس

$$AX = B$$

لي اعمل

$$عدد = 0$$

[0 0 0 0]

عدد كاي

عدد المعادلات

أقل من

عدد المجهول

[0 0 0 0]

حل وحيد

عدد المعادلات =

عدد المجهول

[1 1 1]

تمرين : أوجد حل النظام المتجانس

$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

$$2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{4}{3} + \frac{2}{1} = \frac{-4+6}{3} = \frac{2}{3}$$

الحل

محل الجبرار ك هودا

[A|B]

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

حل و صير
حل صير
حل تاخذه

ملاحظة: النظام المتجانس

$$A X = 0$$

$$|A| = 0$$

عدد لانهازي

$$|A| \neq 0$$

حل وحيد (حل صفري) (حل تافه)

تمرين: أوجد قيمة λ التي تجعل للنظام المتجانس

(1) عدد لانهازي من الحلول

(2) حل وحيد (حل صفري) (حل تافه)

$$x - 2y + z = 0$$

$$x + \lambda y - 3z = 0$$

$$-x + 6y - 5z = 0$$

$$\left(\frac{-4}{\lambda+2} \right) (-4) - 4$$

$$\frac{16}{\lambda+2} - \frac{4}{1} = \frac{16-4\lambda-8}{\lambda+2}$$

الحل

$$[A|B]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & -3 & 0 \\ -1 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{\lambda+2} & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{\lambda+2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8-4\lambda}{\lambda+2} & 0 \end{array} \right]$$

عدد λ حقيقيعدد الجار $2 >$ عدد الجار

$$8 - 4\lambda = 0$$

$$8 = 4\lambda$$

$$\lambda = 2$$

حل وحيد

$$\lambda \neq 2$$

$$\lambda \neq 0$$

$$\lambda + 2 \neq 0$$

$$\lambda \neq -2$$

$$\lambda = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$