جامعة الملك سعود

كلية العلوم قسم الرياضيات الإختبار النهائي

الفصل الأول 1438 − 1439 هـ 244 ريض الزمن ثلاث ساعات

السؤال الأول (3 + 3 درجات)

(١). إذا كانت A و B مصفوفتين بحيث $|AB^T| = -2$ و

$$(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

أوجد قيمة المحدد $|B|$

أولا

بأخذ

(-1) للطرفين

$$|AB^T| = -2$$

$$|A| \cdot |B^T| = -2$$

$$|B| = \frac{-2}{|A|}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3A = \frac{1}{2+3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left| \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$|A| = \left(\frac{1}{15}\right)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{15^2}\left[2+3\right]$$

$$|A| = \frac{\cancel{5}^{1}}{15 \times \cancel{15}_{3}} = \frac{1}{45}$$

$$|B| = \frac{-2}{|A|}$$

$$|B| = \frac{-2}{\frac{1}{45}}$$

$$|B| = -90$$

(٢). اوجد قيم كل من a و b التي تجعل المتجهات $v_1 = (1, 2, -1, 3)$، $v_2 = (-2, -3, 1, -1)$، $v_3 = (-1, a-2, a-1, b)$ مرتبطة خطيا في $\mathbb{R}^4$.

Independent

$|A| =$ مربع

$4x_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & a-2 & 0 \\ -1 & 1 & a-1 & 0 \\ 3 & -1 & b & 0 \end{array}\right]$$

many

Reduc

جاوس

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & b+3-5a & 0 \end{array}\right]$$

عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل

$\longrightarrow$ $2a-2=0$

$a=1$

$\longrightarrow$ $b+3-5a=0$

$b+3-5=0$

$b=2$

السؤال الثاني (5 درجات)

ليكن النظام الخطي

$$\begin{cases} x - y - 2z &= 2 \\ x + my - z &= 1 \\ mx + y + z &= -1 \end{cases}$$

(١). اوجد قيم m حتى يكون للنظام الخطي حل وحيد. unique

(٢). اوجد قيم m حتى لا يكون للنظام الخطي حل. No solution

(٣). اوجد قيم m حتى يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول.

many

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \\ m & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

جاوس $\longrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & m+1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2m & -2m \end{array}\right]$$

(1) unique solution

$m+1 \neq 0 \qquad 2m \neq 0$

$m \neq -1 \qquad m \neq 0$

$m = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$

? No solution

$2m = 0$ | $-2m \neq 0$

$m = 0$ | $m \neq 0$

$\longrightarrow$ $m = \phi$

? many

$m = 0$, $m + 1 = 0$

$m = -1$

السؤال الثالث **(5 درجات)**

لتكن المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Reduced

(١). أوجد الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A.

Row Base Col Base

(٢). إستنتج أساسا للفضاء العمودي و أساسا للفضاء الصفي للمصفوفة A.

(٣). أوجد رتبة (Rank) و صفرية (nullity) المصفوفة A^T.

(1) $\xrightarrow{Red}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) Col = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

row = $\{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \}$

(3) $\text{rank}(A) = 3 = \text{rank}(A^T)$

$\text{nullity}(A^T) + \text{rank}(A) = m$ عدد الصفوف

$\text{nullity}(A^T) + 3 = 4$

$\text{nullity}(A^T) = 1$

السؤال الرابع (7 درجات)

ليكن $B = \{v_1 = (1,1), v_2 = (1,2)\}$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^2$ و C الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^2$. و ليكن التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف كما يلي: $T(x,y) = (x-y, 2x+3y)$

S.T. Base

$C = \{(1,0),(0,1)\}$

(١). اوجد المصفوفات $_CP_B$ و $_BP_C$.

(٢). اوجد $[T]_C$ مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس C و اوجد $[T]_B$ مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس B.

(٣). إذا كان $v = (2,1)$ اوجد $[T(v)]_B$.

So

① $_CP_B = \left[[(1,1)]_C \quad [(1,2)]_C \right]$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$_BP_C = (_CP_B)^{-1} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

② $[T]_{C} = \left[[T(1,0)]_C \quad [T(0,1)]_C \right]$

$= \left[[(1,2)]_C \quad [(-1,3)]_C \right]$

$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$[T]_B = \left[[T(1,1)]_B \quad [T(1,2)]_B \right]$

$= \left[[(0,5)]_B \quad [(-1,8)]_B \right]$

$\left[B \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{matrix} \right]$

$\left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{matrix} \right]$

$\xrightarrow{\text{Red}} \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} -5 & -10 \\ 5 & 9 \end{matrix} \right]$

3) $V\,(2,1)$

$[T(v)]_B$

$= [\,T(2,1)\,]_B$

$= [\,(1\,,7)\,]_B$

$\left[\,B \;\middle|\; \begin{matrix}1\\7\end{matrix}\right]$

$\left[\begin{matrix}1 & 1\\1 & 2\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}1\\7\end{matrix}\right]$

$\xrightarrow{\text{red.}} \left[\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}-5\\6\end{matrix}\right]$

السؤال الخامس (7 درجات)

(١). ليكن التحويل الخطي $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ حيث $T(1,1,0) = (2,1,3)$،
$T(1,0,1) = (-1,3,2)$، $T(1,0,0) = (0,1,2)$.
أوجد قاعدة التحويل الخطي T

Rule

Sol

Let $V(x,y,z) \in R^3$

$V = (x,y,z) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,0,0)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Redy}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & x-y-z \end{array}\right]
\begin{array}{l} \to \alpha_1 \\ \to \alpha_2 \\ \to \alpha_3 \end{array}$$

$T \;\; T(x,y,z) = \alpha_1 T(1,1,0) + \alpha_2 T(1,0,1) + \alpha_3 T(1,0,0)$

$= y(2,1,3) + z(-1,3,2) + (x-y-z)(0,1,2)$

$= (2y - 2z, \cancel{y} + 3z + x - \cancel{y} - z, 3y + 2z + 2x - 2y - 2z)$

$T(x,y,z) = (2y-2z, 2z+x, y+2x)$

$T(1,1,0) = (2,1,3)$

(٢). ليكن التحويل الخطي $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$$T(x,y,z) = (x+2y+z, -y-z, 3x+5y+2z, x+4y+3z)$$

(أ) أوجد أساسا لنواة التحويل الخطي T ← Bas ker

(ب) أوجد أساسا لصورة التحويل الخطي T ← Base Im

$T(x,y,z) = (0,0,0,0)$

$x+2y+z=0$

$-y-z=0$

$3x+5y+2z=0$

$x+4y+3z=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{حل بالآلة}]{\text{Red}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x-z=0$

$y+z=0$

$z=t$

$y=-t$

$x=t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base ker $= \{(1,-1,1)\}$

$$\text{Base Im} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

السؤال السادس (4 درجات)

Eclead Unit vector

(١). اثبت أن المجموعة S تمثل اساسا عياريا للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^3$ حيث ان
$$S = \{v_1 = (0,1,0), v_2 = (-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5}), v_3 = (\tfrac{3}{5}, 0, \tfrac{4}{5})\}$$

(٢). إذا كان $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$، إحسب $[u]_S$.

$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{0+1+0} = 1$

$\|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2\rangle} = \sqrt{\frac{16}{25} + 0 + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$

$\|v_3\| = \sqrt{\langle v_3, v_3\rangle} = \sqrt{\frac{9}{25} + 0 + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$

$\longrightarrow$ unit vectors

$[u]_S$

$$[S \mid u] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{\text{Red}}$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} \end{array}\right]$$

السؤال السابع (6 درجات)

لتكن
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigen value

(١). اوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A و اثبت ان $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ هي قيم مميزة للمصفوفة A

Eigen vectors

(٢). اوجد المتجهات المميزة المقابلة للقيم المميزة λ_1 و λ_2

(٣). اوجد مصفوفة P و مصفوفة قطرية D بحيث $A = PDP^{-1}$

Diagonal matrix

(٤). اوجد A^{13} و A^{14}

sol

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left|\begin{matrix} \lambda-3 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} \lambda-3 & 2 \\ -2 & \lambda+1 \\ -2 & 2 \end{matrix} = 0$$

$$\boxed{[(\lambda-3)(\lambda+1)(\lambda+1) - 8 - 8] - [-4(\lambda+1) + 4(\lambda-3) - 4(\lambda+1)] = 0}$$

$\lambda = 1 \xrightarrow{\text{تعويض}}$ $[(-2)(2)(2) - 16] - [-4(2) + 4(-2) - 4(2)] =$

$= -24 - [-8 - 8 - 8] =$

$= -24 + 24 = 0$

$\lambda = -1$

عوض

$$[\quad] - [\quad]$$

$$= \quad +16 \quad - \quad [+16]$$

$$= \quad -16 + 16 \quad = 0$$

eigen vectors

$$[\lambda I - A]\, x = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 & 2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \lambda-3 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & \lambda+1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda+1 & 0 \end{array}\right]$$

$\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

red

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x - y - z = 0$$

$z = t$

$y = s$

$x = t + s$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Repeated

$\lambda = -1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Red}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x - z = 0$

$y - z = 0$

$\rightarrow z = t$

$y = t$

$x = t$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{D = P\,D\,P^{-1}}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = P\,D\,P^{-1}$$

$$A^{13} = P\,D^{13}\,P^{-1}$$

$$A^{13} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$A^{14} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$