الاساسات العيارية المتعامدة

اذا كان $S = \{ v_1 , v_2 , \dots\dots\dots \} \in V$ حيث V فضاء ضرب داخلي

نقول أن S مجموعة عيارية متعامدة إذا كان

١) كل متجهين مختلفين من S متعامدان $< v \cdot u > = 0$

٢) كل متجه من S عياري (طوله = واحد) $\| \; \| = 1$

تمرين: اثبت أن

$$S = \{ \underset{v_1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}, \underset{v_2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)}, \underset{v_3}{\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)} \} \in R^4$$

مجموعة عيارية متعامدة حيث الضرب الداخلي هو الضرب الاقليدي

الحل

١) اثبات عيارية

$\|v_1\| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3}} = 1$

$\|v_2\| = 1$

$\|v_3\| = 1$

٢) اثبات متعامدة

$< v_1 , v_2 > = \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$

$< v_1 , v_3 > = \frac{-1}{\sqrt{18}} + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$

$< v_2 , v_3 > = \frac{-1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{6} = 0$

$\Longrightarrow \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ مجموعة عيارية متعامدة

تمرين: إذا كانت $S=\{\underset{v_1}{(1,1)},\underset{v_2}{(1,-1)}\}\in R^2$

مجموعة عيارية متعامدة في فضاء الضرب الداخلي المعرف بالقاعدة

$$\boxed{<(a,b),(a`,b`)> = \alpha\, a a` + \beta\, b b`}$$

أوجد قيم β , α

الحل

عيارية

$\|v_1\| = 1$

$\sqrt{<v_1,v_1>} = 1$

بالتربيع

$<(1,1),(1,1)> = 1$

$\alpha(1)(1)+\beta(1)(1) = 1$

$\alpha+\beta = 1 \rightarrow (2)$

متعامدة

$<v_1,v_2> = 0$

$<(1,1),(1,-1)> = 0$

$\alpha(1)(1)+\beta(1)(-1) = 0$

$\alpha-\beta = 0 \rightarrow (1)$

نحل المعادلتين (1) ، (2)

$$\begin{array}{r} \alpha-\beta = 0 \\ \alpha+\beta = 1 \\ \hline (+)\quad 2\alpha = 1 \end{array}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

$\xrightarrow[(2)]{\text{بالتعويض}}\ \frac{1}{2}+\beta = 1$ $\quad \beta = \frac{1}{2}$

تمرين:

أوجد قيم (α) التي تجعل المجموعة

$$S = \{\underbrace{(1,0,-1)}_{V_1},\underbrace{(1,-2,1)}_{V_2},\underbrace{(\alpha,\alpha^2,\alpha^3)}_{V_3}\} \in R^3$$

أساس متعامد لفضاء الضرب الداخلي الاقليدي

الحل

$\langle V_1, V_3 \rangle = 0$

$\alpha + 0 - \alpha^3 = 0$

$\alpha - \alpha^3 = 0$

$\alpha(1 - \alpha^2) = 0$

$\alpha = 0 \quad | \quad \alpha^2 = 1$

$\alpha = \pm 1$

$\langle V_2, V_3 \rangle = 0$

$\alpha - 2\alpha^2 + \alpha^3 = 0$

$\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0$

$\alpha = 0 \quad | \quad \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$

$(\alpha - 1)(\alpha - 1) = 0$

$\alpha = 1 \quad | \quad \alpha = 1$

نأخذ الـ α المشترك

$$\boxed{\alpha = 0, 1}$$

نظرية:

اذا كان $S = \{ u_1 , u_2 , \dots \dots \dots \} \in V$ أساس عياري متعامد في فضاء ضرب داخلي V

وكان $u \in V$ فإنه يمكن كتابة u كتركيب خطي من S كالاتي

$$u = < u , u_1 > u_1 + < u , u_2 > u_2 + \dots \dots \dots \dots \dots \dots + < u , u_n > u_n$$

تمرين:

إذا كانت المجموعة $S = \{ u_1 , u_2 \}$ أساس عياري متعامد لفضاء الضرب الداخلي V

وكان $u \in V$ حيث

$< u , u_1 > = 3$, $< u , u_2 > = -5$

أوجد $\|u\|^2$

الحل

من النظرية $\longrightarrow$

$$u = < u , u_1 > u_1 + < u , u_2 > u_2$$

$$u = 3 u_1 + (-5) u_2$$

$$u = 3 u_1 - 5 u_2$$

$\| \; \|^2 \xrightarrow{\text{للطرفين}}$

$$\|u\|^2 = \| 3u_1 - 5u_2 \|^2$$

$$= (3)^2 \|u_1\|^2 + (5)^2 \|u_2\|^2$$

$$= 9 (1)^2 + 25 (1)^2 = 34$$

تحويل الأساس إلي أساس عياري متعامد

خوارزمية جرام شميدت

إذا كان V فضاء ضرب داخلي وكانت $S = \{ v_1 , v_2 , \dots \dots \dots , v_n\} \in V$ أساس لـ V

فانه يمكن تحويل هذا الأساس الي أساس عياري متعامد بخطوتين

---

١) التعامد

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - < v_2 , u_1 > \frac{u_1}{\|u_1\|^2}$$

$$u_3 = v_3 - < v_3 , u_2 > \frac{u_2}{\|u_2\|^2} - < v_3 , u_1 > \frac{u_1}{\|u_1\|^2}$$

---

٢) العياري

$$\frac{u_1}{\|u_1\|}$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|}$$

$$\frac{u_3}{\|u_3\|}$$

$\{V_1, V_2, V_3, \ldots\}$ أساس غير عياري وغير متعامد

التعامد

$\boxed{u_1} = V_1$

$\boxed{u_2} = V_2 - \langle V_2, u_1 \rangle \cdot \frac{u_1}{\|u_1\|^2}$

$u_3 = V_3 - \langle V_3, u_2 \rangle \cdot \frac{u_2}{\|u_2\|^2} - \langle V_3, u_1 \rangle \frac{u_1}{\|u_1\|^2}$

تمرين : إذا كان القاعدة $\boxed{<(a,b),(c,d)> = 2ac + 3bd}$

تعرف ضرب داخلي علي الفضاء R^2 فاستخدم طريقة جرام شميدت لتحويل الأساس

$S = \{ v_1 = (1,1), v_2 = (3,-3) \}$ إلي أساس عياري متعامد

الحل

التعامد

تذكر

$\|\square\|^2 = <\square, \square>$

$u_1 = v_1 = (1,1)$

$u_2 = v_2 - <v_2, u_1> \dfrac{u_1}{\|u_1\|^2}$

$= (3,-3) - <(3,-3),(1,1)> \cdot \dfrac{(1,1)}{\|(1,1)\|^2}$

$= (3,-3) - [6 - 9] \cdot \dfrac{(1,1)}{2+3}$

$= (3,-3) + \dfrac{3}{5}(1,1)$

$= (3,-3) + \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

$u_2 = \left(\dfrac{18}{5}, \dfrac{-12}{5}\right)$

$\dfrac{3}{1} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{15+3}{5} = \dfrac{18}{5}$

$\dfrac{-3}{1} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{-15+3}{5} = \dfrac{-12}{5}$

المعياري

$$\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2+3}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\left(\frac{18}{5}, \frac{-12}{5}\right)}{\sqrt{2\left(\frac{18}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{-12}{5}\right)^2}}$$

هو الأساس المعياري المتعامد

تمرين : إذا كان V

فضاء ضرب داخلي إقليدي فاستخدم طريقة جرام شميدت لتحويل الأساس

$S = \{ v_1 = (1,0,1), v_2 = (2,1,0), v_3 = (1,1,1) \}$ إلي أساس عياري متعامد

الحل

$u_1 = v_1 = (1,0,1)$

$u_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \frac{u_1}{\|u_1\|^2}$

$= (2,1,0) - \cancel{[2+0+0]} \cdot \frac{(1,0,1)}{\cancel{1+0+1}}$

$= (2,1,0) - (1,0,1)$

$u_2 = (1, 1, -1)$

$u_3 = v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle \frac{u_2}{\|u_2\|^2} - \langle v_3, u_1 \rangle \frac{u_1}{\|u_1\|^2}$

$= (1,1,1) - \{1 \cancel{+1-1}\} \frac{(1,1,-1)}{1+1+1} - \cancel{[1+0+1]} \cdot \frac{(1,0,1)}{\cancel{1+0+1}}$

$= (1,1,1) - \frac{1}{3}(1,1,-1) - (1,0,1)$

$= (1,1,1) - (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}) - (1,0,1) = (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

العيارة

$$\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{1+0+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{1+1+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{9}}}\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

توضيح

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{6}{9}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{6}}$$

الأساس
العياري
المتعامد

$$= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$