جامعة الملك سعود

كلية العلوم قسم الرياضيات

الإختبار الفصلي الأول

الفصل الأول 1437 – 1438 هـ 244 ريض الزمن ساعة ونصف

السؤال الأول **(5 درجات)**

أوجد حلول النظام الخطي التالي

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - y + z + 3t = 0 \\ z - t = 0 \\ -2x + y - t = 0 \end{cases}$$

الحل

أسلوب جاوس جوردان

$[A|B]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x = 0$

$y = 0$

$z = 0$

$t = 0$

الحل تافه الحل وحيد

والنظام متسق

السؤال الثاني (6 درجات)

(١). أوجد معكوس المصفوفة التالية $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(٢). أوجد مصفوفة B مربعة من الدرجة 3 بحيث

$$2(B+I)^{-1} = A.$$

حل 1

ايجار معكوس A

$[A \mid I]$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

I $\qquad$ A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد معكوس المصفوفة A

إذا كانت 2×2

الحل

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$

إذا كانت 3×3

الحل

$[A \mid I]$

اختزال $\longrightarrow$ $[I \mid A^{-1}]$

إذا حدد الطريقة التزم بالطلب

2

$$2(B+I)^{-1} = A$$

بأخذ $\xrightarrow{-1}$ للطرفين

$$\left[2(B+I)^{-1}\right]^{-1} = [A]^{-1}$$

$$\frac{1}{2}(B+I) = A^{-1}$$

$\xrightarrow{\cdot 2}$

$$B + I = 2A^{-1}$$

$$B = 2A^{-1} - I$$

$$B = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & 6 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B + I = A$$

$$B = A - I$$

$$B = -I + A$$

$$AB = C$$

$$A = C B^{-1}$$

$$B = A^{-1} C$$

السؤال الثالث **(4 درجات)**

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a+b & b & a+b \\ 0 & a & a+b \\ a+b & b & a \end{pmatrix}$.

أوجد قيم a, b بحيث تكون المصفوفة A لها معكوس.

الحل

$|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a+b & b & a+b \\ 0 & a & a+b \\ a+b & b & a \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\cancel{-0\,|\ \ |} + a\begin{vmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a \end{vmatrix} - (a+b)\begin{vmatrix} a+b & b \\ a+b & b \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a\left[a(a+b) - (a+b)^2\right] - \cancel{(a+b)\left[b(a+b) - b(a+b)\right]} \neq 0$$

$$a\left[\underline{a(a+b)} - \underline{(a+b)}^2\right] \neq 0$$

$(a+b)$ عامل مشترك

$$a(a+b)\left[a - (a+b)\right] \neq 0$$

$$a(a+b)(\cancel{a} - \cancel{a} - b) \neq 0$$

$$a(a+b)(-b) \neq 0$$

$a \neq 0$

$a+b \neq 0$

$a \neq -b$

$-b \neq 0$

$b \neq 0$

$a = R - \{0\}$

$b = R - \{0\}$

بشرط

$a \neq -b$

السؤال الرابع (6 درجات)

ليكن النظام الخطي التالي:

$$\begin{cases} -x + y + az &= -2 \\ 2x - ay - z &= -1 \\ ax - 2y + z &= 1 \end{cases}$$

(١). اوجد قيم العدد a حتى يكون للنظام الخطي عدد ما لا نهائي من الحلول.

(٢). اوجد حلول النظام الخطي في حالة $a = 2$ (إن وجدت).

(٣). اوجد حلول النظام الخطي في حالة $a = 0$ (إن وجدت).

حل ١

$[A \mid B]$

جاور أ حل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & -2 \\ 2 & -a & -1 & -1 \\ a & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 2 \\ 2 & -a & -1 & -1 \\ a & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 2 \\ 0 & 2-a & 2a-1 & -5 \\ 0 & a-2 & a^2+1 & 1-2a \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2a-1}{2-a} & \frac{-5}{2-a} \\ 0 & a-2 & a^2+1 & 1-2a \end{array}\right]$$

$\xrightarrow{(2-a)R_{23}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2a-1}{2-a} & \frac{-5}{2-a} \\ 0 & 0 & a^2+2a & -4-2a \end{array}\right]$$

لكي يكون النظام عدد لا نهائي

نجعل

$a^2+2a=0$ | $-4-2a=0$

$a(a+2)=0$ | $-4=2a$

$a=0$ | $a=-2$ | $a=-2$

ما هو المشترك

$a = -2$

تجعل النظام عدد لا نهائي من الحلول

② عندما $a=-2$ نعوضها في المصفوفة المعززة

عن ①

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{-4-1}{2+2} & \frac{-5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

عدد المعادلات 2 لا

$$x - y + 2z = 2$$

$$y - \frac{5}{4}z = \frac{-5}{4}$$

عدد المجاهيل ③ > عدد المعادلات ②

عدد لا نهائي

نفرض $z = t$

نعوض $y = \frac{5}{4}t - \frac{5}{4}$

نعوض $X = 2 - 2t + \frac{5}{4}t - \frac{5}{4}$

$t \in R$ حيث

هو النظام متسق

③ عند $a=0$ نعوضها في المعززة

$$\Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$0 = -4$$

النظام ليس له حل

وغير متسق

السؤال الخامس (4 درجات)

استخدم قاعدة كرامر لحساب y التي تحقق النظام التالي

$$\begin{cases} 3x - 2z = 2 \\ -2x + 3y - 2z = 3 \\ -5x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 0 \\ -2 & 3 \\ -5 & 4 \end{matrix} = [-9+0+16]-[0-24+30]$$

$$= 7-(6) = 1$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{matrix} = [-9+20+4]-[4-6+30]$$

$$= 15-(28)$$

$$= -13$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-13}{1} = -13$$

السؤال الخامس

بين فيما إذا كانت المجموعة $W = \{A \in M_n / A = 2A^T\}$ تشكل فضاء جزئيا من M_n، حيث إن M_n هو فضاء المصفوفات المربعة من الدرجة n.

الحل

① اثبات أن $W \neq \phi$

$0 \in W$ لأن $0 = 2(0)^T = 0$

$\therefore W \neq \phi$

مصفوفة مربعة

② نفرض $u, v \in W$

مصفوفة مربعة $\rightarrow u \quad : \quad u = 2(u)^T$

$v \quad : \quad v = 2(v)^T$

جمع

$u+v \quad : \quad u+v = 2(u)^T + 2(v)^T$

$= 2(u+v)^T$ خطي T

$\longrightarrow u+v \in W$

③ نفرض $u \in W$ ، $k \in R \longrightarrow$ عدد حقيقي

مصفوفة مربعة $u \quad : \quad u = 2(u)^T$

ضرب k ضرب k

$ku \quad : \quad ku = 2k(u)^T$

$= 2(ku)^T$ خواص T $\Rightarrow ku \in T$

من ①، ② W فضاء جزئي من M_n

$W \subseteq M_n$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$