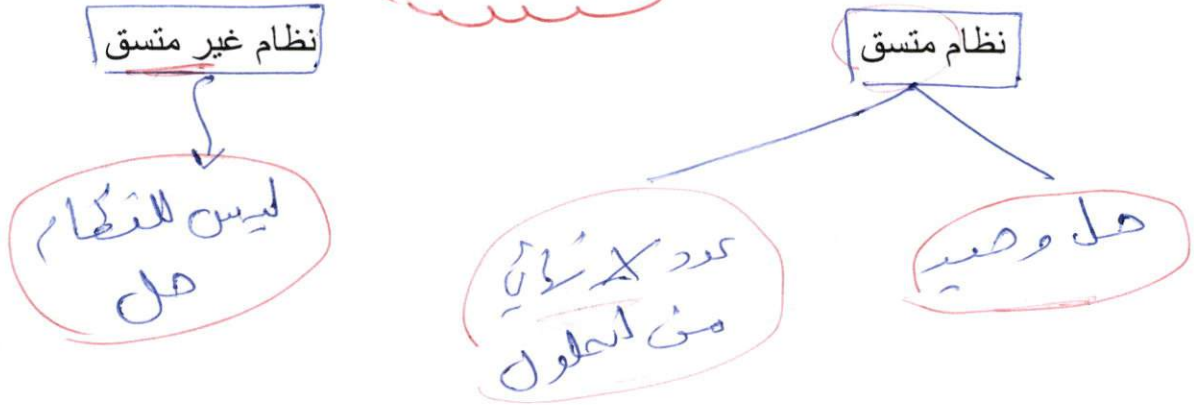


الفصل الثالث

أنظمة المعادلات الخطية



طرق حل الأنظمة الخطية

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| (١) ✓ طريقة جاوس | (٢) ✓ طريقة جاوس جوردان |
| (٣) ✓ طريقة المعكوس | (٤) ✓ طريقة كرامر |

$$x + y = 5$$

$$x - y = 1$$

نظام

اصل

مینه

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

نظام متساوی

(١) طريقة جاوس
 $A \rightarrow$ مصفوفة المعاملات
 $X \rightarrow$ المتجه
 $B \rightarrow$ المتجه

$$A X = B$$

$$[A | B] \xrightarrow[\text{تحت إحصاء}]{\text{أضرب}} \begin{bmatrix} & & & 1 \end{bmatrix}$$

بما لا 2

تمرين: استخدم طريقة جاوس لحل النظام

$$2x_2 + 4x_3 = 3$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$A X = B$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل

$$[A | B]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & | & 3 \\ 1 & -3 & 5 & | & 1 \\ 3 & -1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$R_{1,2} \rightarrow$ تبديل

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & | & 1 \\ 0 & 2 & 4 & | & 3 \\ 3 & -1 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & | & 1 \\ 0 & 2 & 4 & | & 3 \\ 0 & 8 & -16 & | & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 8 & -16 & | & -2 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -5 & | & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

معادلات

$$x_3 = \frac{7}{16}$$

$$x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2}$$

تعويض

$$x_2 = \frac{5}{8}$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1$$

تعويض

$$x_1 = \frac{11}{16}$$

$$\{x_1, x_2, x_3\}$$

حل النظام

$$= \left\{ \left(\frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16} \right) \right\}$$

فكلم متم له حل وحيد

(٢) طريقة جاوس جوردان $AX = B$

$$[A | B] \xrightarrow[\text{مصفوفة وحدة}]{\text{اختزال}} [I]$$

مباشرة الحل بدون معادلات

تمرين: استخدم طريقة جاوس جوردان لحل النظام

$$2x_2 + 4x_3 = 3$$

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1$$

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل

$$[A | B]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & -16 & -2 \end{array} \right]$$

$$R_2/2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 8 & -16 & -2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -32 & -14 \end{array} \right]$$

$$3\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{9}{2} + \frac{2}{2} = \frac{11}{2}$$

$$-8\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = -12 - 2 = -14$$

$$\frac{7}{16}(-2) + \frac{7}{2} = \frac{-7}{8} + \frac{7}{2} = \frac{-7 + 28}{8} = \frac{21}{8}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{16}(11) + \frac{11}{2} &= \frac{-77}{16} + \frac{11}{2} \\ &= \frac{-77 + 88}{16} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{11}{16}$$

$$x_2 = \frac{5}{8} \quad \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$x_3 = \frac{7}{16} \quad \left\{ \frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16} \right\}$$

النظام منتهى الحل

$$\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2}$$

تمرين: استخدم طريقة جاوس جوردان لحل النظام

$$3x_1 + 2x_2 = 4$$

$$9x_1 + 6x_2 = 12$$

$$-6x_1 - 4x_2 = -8$$

$$\{A|B\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 12 \\ -6 & -4 & -8 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \div 3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 9 & 6 & 12 \\ -6 & -4 & -8 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{معادلات}} \boxed{x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{4}{3}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{عدد المعادلات} \\ \text{عدد المتغيرات} \end{array}} \quad \begin{array}{c} (2) > (1) \end{array}$$

للتظام عدد لا نهائي من الحلول

$$\xrightarrow{\text{نقطة 1}} x_2 = t$$

$$\xrightarrow{\text{نقطة 2}} x_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}t$$

الحل

$$\left(\frac{2}{3}\right)(-\frac{4}{3}) + 6 = -\frac{8}{9} + 6 = \frac{52}{9} \neq 0$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)(-\frac{4}{3}) + 12 = -\frac{16}{9} + 12 = \frac{104}{9} \neq 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)(6) - 4 = 4 - 4 = 0$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)(6) - 8 = 8 - 8 = 0$$

$$\{(\alpha_1, \alpha_2)\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

عدد لا نهائي من الحلول

النظام متسق

تمرين: استخدم طريقة جاوس جوردان لحل النظام

$$x_1 - x_2 = -1$$

$$x_1 + 3x_2 = -1$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

الحل

$[A|B]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

النظام غير متسق
لأنه لا حل

النتيجة
②

$$0 = 2$$

ملاحظة:

النظام غير متسق

ليس له حل

درج = 3

درج = 3

النظام متسق

حل وجيد

عدد لا نهائي من الحلول

درج = 3

درج = 3

درج = 3

درج = 3

تمرين: أوجد الشرط اللازم الذي يجب وضعه على a, b, c لكي يكون النظام متسق

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = a$$

$$4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = b$$

$$-3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = c$$

الحل

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & | & a \\ 4 & -5 & 8 & | & b \\ -3 & 3 & -3 & | & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & | & a \\ 0 & 3 & -12 & | & b-4a \\ 0 & -3 & 12 & | & c+3a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & | & a \\ 0 & 1 & -4 & | & \frac{b-4a}{3} \\ 0 & -3 & 12 & | & c+3a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & | & a \\ 0 & 1 & -4 & | & \frac{b-4a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & b-a+c \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{b-4a}{3}\right)(3) + (c+3a) = b-a$$

يكون النظام متسق إذا كان

$$b-a+c=0$$

إذا كان السؤال غير متسق

$$b-a+c \neq 0$$

تمرين:

أوجد a التي تجعل النظام حل وحيد

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2$$

$$4x_1 + x_2 + (a^2 - 14)x_3 = a + 2$$

(21)

{A | B}

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 - 14 & a + 2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-4}{a^2-16} \end{array} \right]$$

النظام حل وحيد

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 14 \end{array} \right]$$

$$a^2 - 16 \neq 0$$

$$a^2 \neq 16$$

$$a \neq \pm \sqrt{16}$$

$$a \neq \pm 4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & -7 & a^2 - 2 & a - 14 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{10}{7} \\ 0 & 0 & a^2 - 16 & a - 4 \end{array} \right]$$

$$a \in \mathbb{R} - \{\pm 4\}$$