MATH 244

Math 244

LINEAR ALGEBRA

First Midterm

شرح و حل تمارين

محمد ندا (ابو يوسف)

LINEAR ALGEBRA

CHAPTER 1

Matrices المصفوفات

Section (1.1) : Matrices and Matrix Operations

تعريف المصفوفة:

عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة في مستطيل أو مربع مكونة من صفوف و أعمدة و يرمز لها بالحروف ... ,A , B , C

و تكون درجة المصفوفة size $(m \times n)$ بحيث m هي عدد الصفوف . و n هي عدد الأعمدة

*** أهم أنواع المصفوفات

-1 المصفوفة المربعة Square matrix

عدد الصفوف = عدد الأعمدة $(m = n)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

-2 المصفوفة الصفرية Zero matrix (O)

جميع عناصرها أصفار

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ..0 \\ : & 0 & ..0 \\ 0 & 0 & ..0 \end{bmatrix}$$

-3 المصفوفة القطرية Diagonal matrix

مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا قطرها الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

-1 مصفوفة الوحدة Unit matrix , Identity matrix (I)

هي مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي جميعها (1)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-1 المصفوفة المثلثية السفلية Lower triangular matrix

مصفوفة مربعة جميع العناصر أعلى القطر الرئيسي أصفار

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

-2 المصفوفة المثلثية العلوية Upper triangular matrix

مصفوفة مربعة جميع العناصر أسفل القطر الرئيسي أصفار

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Operations on Matrices العمليات على المصفوفات **

1- تساوي المصفوفات Equality matrix
تكون المصفوفتان A and B متساويتان اذا كانا من الدرجة نفسها و جميع العناصر المتناظرة متساوية

2- جمع و طرح المصفوفات Sum and Difference matrices
عند جمع أو طرح المصفوفات يجب أن تكون من نفس الدرجة و نجمع أو نطرح كل عنصر مع نظيره بالمصفوفة الأخرى

Ex : If $\begin{bmatrix} a & 2 \\ 4 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ c & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & d \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, Solve for a, b, c and d

solution

$$\begin{bmatrix} a+2 & 2-6 \\ 4+c & b+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & d \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$a+2=5 \longrightarrow a=-3$$
$$2-6=d \longrightarrow d=-4$$
$$4+c=2 \longrightarrow c=-2$$
$$b+7=4 \longrightarrow b=-3$$

3- ضرب المصفوفة بعدد ثابت
عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت نضربه بجميع عناصر المصفوفة

Ex : If $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, Find (1) $5A$ (2) $2B-A$

solution:

$$(1)\ 5A = 5\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 5 & -20 \\ 10 & -15 \end{bmatrix}$$

$$(2)\ 2B-A = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \\ 14 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Ex : If $A+2\begin{bmatrix}1 & -1\\3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\2 & -2\end{bmatrix}$, Find matrix A

solution

$$A+\begin{bmatrix}2 & -2\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4\\2 & -2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -4\\2 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -2\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -2\\-4 & -2\end{bmatrix}$$

Ex : $A+B=\begin{bmatrix}3 & -3\\0 & 6\end{bmatrix}$ and $A-2B=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, Find matrices A and B

solution: multiply first equation by 2

$$2A+2B=2\begin{bmatrix}3 & -3\\0 & 6\end{bmatrix} \qquad \text{equation (1)}$$

$$A-2B=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{equation (2)}$$

Add equ(1) + equ(2)

$$\therefore\ 3A=\begin{bmatrix}6 & -6\\0 & 12\end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix}2 & -3\\0 & 4\end{bmatrix}$$

From first equation : $B=\begin{bmatrix}3 & -3\\0 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -2\\0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{bmatrix}$

** الخواص الاساسية للعمليات على المصفوفات Properties of Matrices

(1) $A+B=B+A$

(2) $A+0=0+A=A$

(3) $A+(B+C)=(A+B)+c$

(4) $k(A+B)=kA+kB$, k scaler

(5) $IA=AI=A$, I is idntity matrix

4- منقول المصفوفة A Transpose A

نحصل على منقول (transpose) المصفوفة A نحول صفوفها لأعمدتها و أعمدتها هي صفوفها و يرمز لها بالرمز (A^T)

If $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 6\\0 & 4\end{bmatrix}$ then $A^T=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\-1 & 6 & 4\end{bmatrix}$

Properties of transpose matrix

(1) $\left(A^T\right)^T = A$

(2) $(kA)^T = kA^T \quad , \; k \in \mathbb{R}$

(3) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

Ex : If $(A+2I)^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, Find A

solution:

$$(A+2I)^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left((A+2I)^T\right)^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$(A+2I) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

5- ضرب المصفوفات Multiplying Matrices

لضرب مصفوفتان لا بد أن يكون عدد أعمدة الأولى يساوي عدد صفوف الثانية .

أي أن اذا كان لدينا مصفوفة A من الدرجة $m \times n$ و مصفوفة B من الدرجة $n \times p$ فأن حاصل ضربهما مصفوفة AB من الدرجة $m \times p$

$$A_{m\times \boxed{n}} \cdot B_{\boxed{n}\times p} = C_{m\times p}$$

نستنتج أن ضرب المصفوفات ليس ابدالي $AB \neq BA$

Ex : If $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

Find AB , AC , BA , CA and $A^T C$

solution:

$$* AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}(1)(2)+(2)(0)+(-1)(4) & (1)(-1)+(2)(3)+(-1)(1)\\ (3)(2)+(1)(0)+(0)(4) & (3)(-1)+(1)(3)+(0)(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$* AC=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}\begin{bmatrix}6 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{2\times2} \quad \text{undefined}$$

الضرب غير معرف لأن عدد أعمدة A لا تساوي عدد صفوف C

$$* BA=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}_{3\times2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}2-3 & 4-1 & -2+0\\ 0+9 & 0+3 & 0+0\\ 4+3 & 8+1 & -4+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -2\\ 9 & 3 & 0\\ 7 & 9 & -4\end{bmatrix}$$

$$* CA=\begin{bmatrix}6 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}_{2\times2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 11 & -6\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$* A^T C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 13 & -2\\ -6 & 1\end{bmatrix}$$

Ex : If $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, prove $A^2-A-6I=0$

solution:

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$* A^2-A-6I=\begin{bmatrix}9 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Ex : If $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 2 & b \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 0 \\ -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $AB=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

Find a , b

solution:

$$AB=\begin{pmatrix} a-b-2 & -a-6+b \\ 2b+1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$2b+1=7 \rightarrow 2b=6 \rightarrow b=3$

$a-b-2=-4 \rightarrow a-3-2=-4 \rightarrow a=1$

for checking : $-a-6+b=-4 \rightarrow -1-6+3=-4$

Ex : If $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Find the value of a where $A^2-AB+aI_3=0$

solution:

$$* \ A^2=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$* \ AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$* \ A^2-AB+aI_3=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}+a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2+a & 0 & 0 \\ 0 & 2+a & 0 \\ 0 & 0 & 2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$2+a=0 \longrightarrow a=-2$

6- أثر المصفوفة (trace)
اذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان أثر A (tr(A)) هو مجموع عناصر القطر الرئيسي

$$If \quad A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$tr(A)=3+(-2)+(-4)=-3$$

** خواص trace

(1) $tr\left(A^T\right)=tr\left(A\right)$

(2) $tr\left(A+B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(B\right)$

(3) $tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$

(4) $tr\left(kA\right)=ktr\left(A\right)$

(5) $tr\left(AA^T\right)$ يساوي مجموع مربعات عناصر A

عمليات على صفوف المصفوفة لاختزالها

(1) تغيير ترتيب أي صفين من المصفوفة
(2) ضرب أي صف من المصفوفة بعدد ثابت غير صفري
(3) ضرب أي صف من المصفوفة بعدد و اضافة الناتج الى أي صف آخر

نستخدم العمليات السابقة للحصول على أحد الصيغتين

1- الصيغة الدرجية الصفية (الصيغة المدرجة) Row Echelon Form
2- الصيغة الدرجية الصفية المختزلة (الصيغة المدرجة المختزلة) Reduced Row Echelon Form

لحل أنظمة المعادلات الخطية

أولا : الصيغة الدرجية الصفية (الصيغة المدرجة) Row Echelon Form

(1) كل صف غير صفري يكون أول عنصر غير صفري يساوي 1 (الواحد المتقدم)
(2) ان وجدت صفوف صفرية تكون أسفل المصفوفة
(3) بأي صفين غير صفرين فأن العنصر المتقدم 1 في الصف الأعلى يكون على يسار العنصر المتقدم 1 بالصف السفلي

مصفوفات على الصيغة المدرجة Echelon Form

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0&1&5\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&2&0&6\\0&1&2&3\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

خطوات الحل:

(1) نجعل العنصر الأول بالصف الأول من اليسار 1 اما
- تبديل صف بصف آخر يكون 1 جاهز أو سهل تجهيزه
- ضرب أو قسمة صف بعدد و اضافته للصف الأول

(2) نجعل العنصر الثاني من الصف الثاني من اليسار 1 بالخطوات السابقة

(3) نكمل الخطوات على هذه الطريقة لجميع الصفوف حتى نصل للمصفوفة الدرجية

Ex : Put the matrix in Echelon Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

solution:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[-4R1+R3]{-3R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -11 & 1 & -20 \\ 0 & -11 & 5 & -22 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R23} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -11 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{11}R2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{11} & \frac{20}{11} \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}R3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{11} & \frac{20}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ex : Put the matrix $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ in Echolen Form

solution

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R3+R1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R1+R3]{-3R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2 \longleftrightarrow R3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{4R2+R3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{-18}R3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ثانيا : الصيغة الدرجية الصفية المختزلة (الصيغة المدرجة المختزلة) Reduced Echelon Form
تحقق الشروط الثلاثة بالصيغة المدرجة مع اضافة شرط (كل عمود يحتوي على عنصر متقدم يكون باقي العناصر أصفار)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

** لإيجاد الصيغة المدرجة المختزلة نطبق نفس خطوات الحل للصيغة المدرجة الا أننا نجعل العناصر أعلى و أسفل العنصر المتقدم أصفار بنفس خطوات الحل

Ex : Put the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ in Reduced Echelon Form

solution:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R1+R3]{R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R2+R3]{-3R2+R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R3+R2]{5R3+R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex : Put the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$ in Reduced Echelon Form

solution:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R1+R4]{-2R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-5R2+R3 \\ -4R2+R4}]{2R2+R1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{6}R3]{R3\leftrightarrow R4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3R3+R2]{-6R3+R1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Section (1-3) : Inverse of Matrix معكوس المصفوفة

Definition : If A is a square matrix , and if a matrix B of the same size . such that $AB = BA = I$, then A is said to be invertible (nonsingular) and B is called an inverse of A . If no such matrix B can be found (A is singular)

Finding inverse of Matrix using Elementary Row Operations

نضع المصفوفة A و مصفوفة الوحدة بهذه الصورة $\left[A \mid I\right]$ و نقوم بالاختزال لتتحول الى $\left[I \mid A^{-1}\right]$

- اذا كان A مصفوفة مربعة نقول أن المصفوفة B معكوس للمصفوفة A اذا كان B من نفس الدرجة وكان $AB = BA = I$

Ex : Find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

solution:

$$\left[A \mid I\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R1+R2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R2+R1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right] \approx \left[I \mid A^{-1}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Ex : Find the inverse of $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

solution:

$$\left[A \mid I\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-3R1+R2} \\ \xrightarrow{-R1+R3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3R32} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-4R_2+R1} \\ \\ \xrightarrow{4R2+R3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -28 & 4 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 30 & -4 & -1 & 13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{30}R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -28 & 4 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 7 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{15} & \frac{-1}{30} & \frac{13}{30} \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{28R3+R1} \\ \xrightarrow{-7R3+R2} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{15} & \frac{7}{30} & \frac{-1}{30} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{15} & \frac{-1}{30} & \frac{13}{30} \end{array}\right] , A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{-1}{15} & \frac{7}{30} & \frac{-1}{30} \\ \frac{-2}{15} & \frac{-1}{30} & \frac{13}{30} \end{bmatrix}$$

Ex : Find the inverse of $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$ if exist

solution

$$[A \mid I] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R1+R3]{R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[2R2+R3]{-3R2+R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

A is not invertible

عناصر الصف الأخير بالمصفوفة اليسرى أصفار (أي أن لم تختزل الى الصورة $[I \mid A]$) لذلك لا يوجد للمصفوفة معكوس

Ex : If $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ and $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Find A such that $BA^{-1} = C$

$BA^{-1} = C$

$BA^{-1}A = CA$

$BI = CA$

$C^{-1}B = C^{-1}CA \quad \Rightarrow \quad A = C^{-1}B$

$$* \; [C \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R1+R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-R3+R2]{2R3+R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \; , \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$* \; A = C^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

** ملحوظات **

- ليس بالضرورة وجود معكوس لكل مصفوفة
- اذا كان للمصفوفة معكوس فان لها معكوس واحد فقط

Properties of inverse of the matrix

We have A and B are invertible two square matrices

(1) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

(2) $I^{-1}=I$

(3) $\left(A^{-k}\right)=\left(A^{k}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{k}$ for $k\geq 1$

(4) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(5) $(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}$, c is nonzero real numbers

(6) $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$

- يمكن ايجاد معكوس المصفوفة المربعة من الدرجة 2 بهذه الطريقة

If $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ then $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$Ex:\ A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(2)(1)-(-1)(3)}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Examples

$Ex:$ Let A is invertible matrix and $A^3+5A^2-3A+I_n=0$

Prove $A^{-1}=\left(3I_n-5A-A^2\right)$

solution:

يكون للمصفوفة معكوس اذا وجدنا مصفوفة أخرى ويكون حصل ضربهم مصفوفة الوحدة $(AB=I)$

$A^3+5A^2-3A+I_n=0$

$A^3+5A^2-3A=-I_n$

$3A-5A^2-A^3=I_n$

أخذ مصفوفة A عامل مشترك

$A\left(3I_n-5A-A^2\right)=I_n$, ie $\left(AA^{-1}=I\right)$

$A^{-1}=\left(3I_n-5A-A^2\right)$

Ex : If A square matrix of degree 2 and $\left(A^{-1}+2I_2\right)^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, Find A

solution:

$\left(A^{-1}+2I_2\right)^T=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ بأخذ منقول الطرفين

$A^{-1}+2I_2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ بأخذ معكوس الطرفين

$A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}$, $A=\dfrac{1}{(1)(-1)-(1)(-2)}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$

Ex : If A square matrix of degree 2 and $(A+2I)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, Find A

solution:

$(A+2I)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

بأخذ معكوس الطرفين

$A+2I=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$

$A+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{(-1)(-1)-(2)(1)}\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix}$

Ex : If A square matrix of degree 2 and $(\begin{bmatrix}-4 & 7\\ 1 & -2\end{bmatrix}A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, Find A

solution:

$(\begin{bmatrix}-4 & 7\\ 1 & -2\end{bmatrix}A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

باستخدام العلاقة

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$A\begin{bmatrix}-4 & 7\\ 1 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 7\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}-5 & 8\\ -3 & 5\end{bmatrix}$

$Ex:$ if $(A^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix})^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^T$, Find A

solution:

$$(A^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix})^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\1&0&0\end{bmatrix}^T$$

باستخدام العلاقة

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$Ex:$ Let $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

1) Prove that $A^2-4A-5I=0$

2) Deduce A has inverse , Determine A^{-1} in terms of A and I

solution:

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}$$

1) $A^2-4A-5I=\begin{bmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

2) $A^2-4A-5I=0$

$$A^2-4A=5I$$

$$A\left(\frac{1}{5}A-\frac{4}{5}I\right)=I$$

then $A^{-1}=\left(\frac{1}{5}A-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{5}(A-4I)$

* $A^{-1}=\frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3&2&2\\2&-3&2\\2&2&-3\end{bmatrix}$

Ex : If A be a square matrix of degree 2 and $B^2 - 2BB^T + 3B\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = B$, Find B

solution:

$$B\left(B - 2B^T + 3\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right) = B$$

$$B^{-1}B\left(B - 2B^T + 3\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\right) = B^{-1}B$$

- بأخذ المصفوفة B عامل مشترك
- ثم بالضرب بمعكوس B للطرفين من اليسار

$$\left(B - 2B^T + \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}\right) = I$$

$$B - 2B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -15 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$$

* Let $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$$B - 2B^T = \begin{bmatrix} -2 & -15 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a & 2c \\ 2b & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -15 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a & b - 2c \\ c - 2b & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -15 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$$

* $-a = -2$, $a = 2$
* $-d = -11$, $d = 11$
* $b - 2c = -15$

$-2b + c = 6$ $\quad\quad$ $\therefore\ b = 1$, $c = 8$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$$

** المصفوفات المتماثلة Symmetric Matrices و المتماثلة تخالفيا Skew-symmetric

-1 المصفوفة المتماثلة symmetric Matrices : العناصر أعلى القطر الرئيسي تطابق أسفله و يكون $A^T = A$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

-1 المصفوفة المتماثلة تخالفيا Skew-symmetric matrices

العناصر أعلى القطر الرئيسي تطابق العناصر أسفله بإشارة مخالفة و يكون $A^T = -A$ عناصر القطر الرئيس أصفار

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

يمكن الحصول على المصفوفة المتماثلة و المتماثلة تخالفيا من أي مصفوفة A

-1 المصفوفة المتماثلة symmetric Matrices : $B=\frac{1}{2}\left(A+A^{T}\right)$

-2 المصفوفة المتماثلة تخالفيا Skew-symmetric: $C=\frac{1}{2}\left(A-A^{T}\right)$

Ex : Find summetric matrices and skew-symmetric matrices for

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 7 & 5 & -2\\ 8 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

solution:

1) Symmetric matrices $B=\frac{1}{2}\left(A+A^{T}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 7 & 5 & -2\\ 8 & 2 & -3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\ 3 & 5 & 2\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & 5 & \frac{7}{2}\\ 5 & 5 & 0\\ \frac{7}{2} & 0 & -3\end{bmatrix}$

2) skew-symmetric $C=\frac{1}{2}\left(A-A^{T}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 7 & 5 & -2\\ 8 & 2 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 7 & 8\\ 3 & 5 & 2\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & -2 & \frac{-9}{2}\\ 2 & 0 & -2\\ \frac{9}{2} & 2 & 0\end{bmatrix}$

Ex : Let $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ be skew-symmetric matrices and $b=1$

Find the matrix B

solution:

B is skew-symmetric $\Leftrightarrow$ $B=-B^{T}$

$$\begin{pmatrix}a & 1\\ c & d\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a & c\\ 1 & d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a & 1\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a & -c\\ -1 & -d\end{pmatrix}$$

$c=-1$

$a=-a \rightarrow 2a=0 \quad , \quad a=0$

$c=-c \rightarrow 2c=0 \quad , \quad c=0$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

CHAPTER 2

DETERMINANTS المحددات

تعريف المحدد : دالة مجالها مجموعة المصفوفات المربعة و المجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية
و يرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $\det(A)$ أو $|A|$

** ايجاد محدد المصفوفة المربعة من الدرجة 2

If $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ then $\det(A)=(a)(d)-(b)(c)$

Ex : Find the determinant of matrix A

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

solution

* $\det(A)=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=(3)(4)-(-2)(5)=22$

** ايجاد محدد المصفوفة المربعة من الدرجة أكبر من 2

1- باستخدام أحد الصفوف أو أحد الأعمدة
2- الطريقة السريعة Sarrus's Theorem (ضرب الأقطار) و لا تصلح الا للمصفوفة من الدرجة 3
3- باستخدام خواص المحددات

1- طريقة استخدام أحد الصفوف أو الأعمدة Cofactor Expansion

Ex : Find the determinant of matrix A

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

solution:

* $|A|=\begin{vmatrix} \overset{+}{1} & \overset{-}{3} & \overset{+}{-4} \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}-(3)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}+(-4)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$=(1)(3-10)-3(-6-0)-4(4-0)=-5$$

* $|A|=\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}=(1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}+(0)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

$$=(1)(3-10)-2(-9+8)+0=-5$$

- نلاحظ سهولة الحل عند اختيار صف أو عمود يحتوي على أصفار

Ex : Find the determinant of the matrix $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta-\cos\theta & \sin\theta+\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$

solution:

$$* \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta-\cos\theta & \sin\theta+\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Ex : Find the determinant of the matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

solution:

$$* \ |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$$= (1)\left[0-(3)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\right] + \left[(-2)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= -3(9) - 2(7) - 3(2) = -47$$

-2 الطريقة السريعة Sarrus's Theorem (ضرب الأقطار) و لا تصلح الا للمصفوفة من الدرجة 3 (arrow technique)

Ex : Use arrow technique to evaluate the determinant $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

solution:

$$* \ |A| = \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 3 & -4 \end{array}$$

$$= (1)(2)(4) + (1)(3)(3) + (0)(-1)(-4) - (3)(2)(0) - (-4)(3)(1) - (4)(-1)(1)$$

$$= 8 + 9 + 0 + 0 + 12 + 4 = 33$$

Properties of Determinants خواص المحددات

1- اذا كانت المصفوفة A مصفوفة مربعة تحتوي على أي صف أو عمود صفري فان $\det(A)=0$

2- اذا كانت المصفوفة A مصفوفة مربعة تحتوي على صفين أو عمودين متساويين فان $\det(A)=0$

3- اذا كان أحد صفوف أو أعمدة المصفوفة مضاعف لصف أو عمود آخر فان $\det(A)=0$

4- المصفوفة القطرية و المثلثية العلوية و السفلية يكون قيمة محددها يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

5- اذا أبدلنا صفين (صف بدلا من صف) أو عمودين بالمصفوفة فان تتغير اشارة محدد المصفوفة

6- اذا ضربنا أحد صفوف المصفوفة بعدد ثم اضافة الناتج لصف آخر فان قيمة المحدد لا تتغير (ينطبق على الأعمدة أيضا)

7- اذا ضربنا أحد الصفوف بالمصفوفة بعدد فان محدد المصفوفة الناتجة نضرب العدد بقيمة محدد المصفوفة

....

8- محدد المصفوفة يساوي محدد منقول المصفوفة $\det\left(A^T\right)=\det(A)$

9- $\det(AB)=\det(A)\det(B)$

10- $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det(A)}$

11- $\det(kA)=k^n\det(A)$ حيث A مصفوفة مربعة من الدرجة n

****** المصفوفة المربعة يكون لها معكوس $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$ ******

Ex : Evaluate $\det(A)$ using row reduction $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&6&2\\-1&4&1\end{bmatrix}$

solution

$$* \ \det(A)=\underset{-4R1+R2,\ R1+R3}{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&6&2\\-1&4&1\end{vmatrix}}=\underset{3R2+R3}{\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-10\\0&6&4\end{vmatrix}}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-2&-10\\0&0&-26\end{vmatrix}$$ مصفوفة مثلثية علوية

$$=(1)(-2)(-26)=52$$

Ex : Evaluate $\det(A)$ using row reduction $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

solution:

$$* \ |A| = \underset{R1 \leftrightarrow R2}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = - \underset{\substack{-5R1+R2 \\ -3R1+R4}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}} = - \underset{R2 \leftrightarrow R3}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -8 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{vmatrix}}$$

$$= + \underset{\substack{12R2+R3 \\ 2R2+R4}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -12 & -8 & -16 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{vmatrix}} = \underset{-\frac{1}{2}R3+R4}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1)(-8)(-10) = 80$$

Ex : Evaluate the determinants of the matrix using row reduction

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

solution:

$$* \ |A| = \underset{R_1+R_2, 2R_1+R_3, R_1+R_4}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \underset{R_2 \leftrightarrow R_4}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \underset{-4R_2+R_3}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\left(\frac{-7}{3}\right) \underset{-R_3+R_4}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= 7 \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot ((-1)(1)(1)(1)) = -7$$

$$Ex:\ \text{Let } A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix} \text{ and } B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 0 & 4\\ -3 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}, \text{ Find } \det(AB)$$

solution:

$$*\,AB=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\\ 1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & 0 & 4\\ -3 & 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-8 & 5 & -2 & -8\\ 7 & -7 & 1 & 10\\ 5 & -4 & 1 & 6\\ 12 & -11 & 2 & 16\end{pmatrix}$$

قيمة المحدد تساوي صفر اذا تطابق صفان

$$*\ |AB|=\underset{R2+R3}{\begin{vmatrix}-8 & 5 & -2 & -8\\ 7 & -7 & 1 & 10\\ 5 & -4 & 1 & 6\\ 12 & -11 & 2 & 16\end{vmatrix}}=\begin{vmatrix}-8 & 5 & -2 & -8\\ 7 & -7 & 1 & 10\\ 12 & -11 & 2 & 16\\ 12 & -11 & 2 & 16\end{vmatrix}=0$$

الصف الثالث يطابق الصف الرابع

تمارين على المحددات و خواصها

$$Ex:\ \text{Let } A=\begin{bmatrix}a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ c & c+1 & c+2\end{bmatrix}, \text{ prove } \det(A)=0$$

solution

$$*\ \det(A)=\underset{\substack{-R1+R2\\ -R1+R3}}{\begin{vmatrix}a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ c & c+1 & c+2\end{vmatrix}}=\begin{vmatrix}a & a+1 & a+2\\ b-a & b-a & b-a\\ c-a & c-a & c-a\end{vmatrix}$$

بأخذ $(b-a),(c-a)$ عامل مشترك من الصف الثاني و الثالث

$$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}a & a+1 & a+2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

المحدد يساوي صفر لأن يوجد صفين متطابقين

Ex : Let $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&a^2&a^3\\b&b^2&b^3\end{bmatrix}$, Find $|A|$

solution:

$|A|=|A^t|$

$$* \ |A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a^2&a^3\\b&b^2&b^3\end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&b&b^2\end{vmatrix}_{\substack{-R1+R2\\-R1+R3}}=ab\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&a^2-1\\0&b-1&b^2-1\end{vmatrix}$$

$$=ab\begin{vmatrix}1&1&1\\0&a-1&(a-1)(a+1)\\0&b-1&(b-1)(b+1)\end{vmatrix}=ab(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&a+1\\0&1&b+1\end{vmatrix}_{-R_2+R3}$$

$$=ab(a-1)(b-1)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&a+1\\0&0&b-a\end{vmatrix}=ab(a-1)(b-1)(b-a)$$

Ex : Find all values of α for which the matrix A is not invetible

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha+1&\alpha&1\end{bmatrix}$$

solution:

A is not invertible $\Leftrightarrow$ $\det(A)=0$

المصفوفة يكون ليس لها معكوس اذا كان قيمة المحدد يساوي صفر

$$* \ |A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\\alpha&\alpha&\alpha\\\alpha+1&\alpha&1\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\\alpha+1&\alpha&1\end{vmatrix}=0$$

نلاحظ أن قيمة المحدد دائما تساوي صفر أيا كانت قيمة α
لذلك قيم α التي تجعل المصفوفة ليس لها معكوس اذا كان $\alpha\in R$

$\alpha\in\mathbb{R}$

Ex : Find all values of δ for which the matrix A is invetible

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\3&2&-2\\4&3&\delta\end{bmatrix}$$

solution:

A is invertible $\Leftrightarrow$ $\det(A)\neq 0$

المصفوفة يكون لها معكوس اذا كان قيمة المحدد لا يساوي صفر

$$* \ \det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&2&-2\\4&3&\delta\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\3&2\\4&3\end{matrix}\neq 0$$

$$2\delta-8+9-3\delta+6-8\neq 0$$

$$-\delta-1\neq 0 \quad , \quad \delta\neq -1$$

$$\therefore \ \delta\in R-\{-1\}$$

Ex : Find all values of a for which the matrix A is not invetible

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a^2 & a^2 \\ a^2 & 1 & a^2 \\ 1 & a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

solution:

A is not invertible $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$

$$* \ |A| = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^2 \\ a^2 & 1 & a^2 \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow{-R1+R2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^2 \\ a^2 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad (1-a^2)\begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-a^2)(1-a^4) = 0 \quad , (1-a)(1+a)(1-a^2)(1+a^2) = 0$$

$$(1-a)(1+a)(1-a)(1+a)(1+a^2) = 0$$

$$a = 1 \quad , \quad a = -1$$

Ex : Find all values of x for which the matrix A is invetible

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & x-1 \\ 1 & x+2 & 2x+2 \end{bmatrix}$$

solution:

A is invertible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

$$* \ |A| \neq 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & x-1 \\ 1 & x+2 & 2x+2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\xrightarrow[-R1+R3]{R1+R2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x+2 & x+2 \\ 0 & x & 2x-1 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & x & 2x-1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\xrightarrow{(-x)R2,3}$$

$$(x+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(x+2)(x-1) \neq 0$$

$$x \neq -2 \ , \ x \neq 1$$

then $x \in R - \{-2, 1\}$

Ex : Given that $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$, Evaluate the determinants $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

solution:

$$\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}_{4R2+R3} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-3)(-6) = 18$$

Ex : If A and B are invertible matrices , prove AB is invertible

solution:

A is invertible $\Rightarrow$ $\det(A) \neq 0$

B is invertible $\Rightarrow$ $\det(B) \neq 0$

* $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$ $\Rightarrow$ the matrix AB is invertible

Ex : If A and B invertible square matrices with degree 2 . Evalute $\left|-5AB^2A^TB^{-3}A^{-2}B^T\right|$

solution:

* $$\left|-5AB^2A^TB^{-3}A^{-2}B^T\right| = (-5)^2|A||B^2||A^T||B^{-3}||A^{-2}||B^T|$$
$$= 25\ |A||B|^2|A|\frac{1}{|B|^3}\frac{1}{|A|^2}|B|$$
$$= 25$$

Ex : If A and B are $n \times n$ matrices for which $\det(A) = 3$, $\det(B) = -2$

Evalute $\det\left(ABA^TB^{-3}A^2B^T\right)$

solution:

* $$\det\left(ABA^TB^{-3}A^2B^T\right) = \det(A)\det(B)\det(A^T)\det(B^{-3})\det(A^2)\det(B^T)$$
$$= \det(A)\det(B)\det(A)\frac{1}{\det(B)^3}\det(A^2)\det(B)$$
$$= (3)(-2)(3)\frac{1}{(-2)^3}(3)^2(-2) = -\frac{81}{2}$$

Ex : If $\det(A) = 0$, Evaluate $\det(A^3 + 5A^2 + 6A)$

solution :

* $$\det(A^3 + 5A^2 + 6A) = \det\left(A(A^2 + 5A + 6I)\right)$$
$$= \det(A)\det(A^2 + 5A + 6I) = 0$$

Ex : If A and B are 3×3 matrices for which $|A|=|-2B|$, $|B^{-1}|=-2$

Evaluate $|ABA^{T}A^{-1}|$

solution:

$$|B^{-1}|=-2 \quad\rightarrow\quad |B|=\frac{1}{-2}$$

$$|A|=|-2B| \quad\rightarrow\quad |A|=(-2)^3|B|=(-8)\left(\frac{1}{-2}\right)=4$$

$$* \quad |ABA^{T}A^{-1}|=|A||B||A^{T}||A^{-1}|$$

$$=|A||B||A|\frac{1}{|A|}=(4)\left(\frac{-1}{2}\right)=-2$$

Ex : If A and B are 3×3 matrices for which $|A|=-2$ and $AB=BA$

Evaluate the determinants of $BAB^{-1}+2A$

solution:

$$* \quad |BAB^{-1}+2A|=|ABB^{-1}+2A|=|AI+2A|=|3A|$$

$$=3^3|A|=(27)(-2)=-54$$

Ex : Let $A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}$ and B,C are 3×3 matrices , $|B|=2$, $|C|=3$

Evaluate $|(A^{-2}B)^{-1}A^{-1}C-2B^{-1}C|$

solution:

$$* \quad |(A^{-2}B)^{-1}A^{-1}C-2B^{-1}C|=|B^{-1}(A^{-2})^{-1}A^{-1}C-2B^{-1}C|$$

$$=|B^{-1}A^{2}A^{-1}C-2B^{-1}C|$$

$$=|B^{-1}AC-2B^{-1}C|$$

$$=|B^{-1}(AC-2C)|=|B^{-1}(A-2I)C|$$

$$=|B^{-1}||A-2I||C|=\left(\frac{1}{2}\right)(14)(3)=21$$

$$* \; A-2I=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&1&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\2&-1&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$* \; |A-2I|=\begin{vmatrix}-1&-2&1\\2&-1&-3\\1&-2&1\end{vmatrix}\begin{matrix}-1&-2\\2&-1\\1&-2\end{matrix}=(1)+(6)+(-4)-(-4)-(-6)-(-1)=14$$

المصفوفة المصاحبة (Adjoint Matrix)

لايجاد المصفوفة المصاحبة للمصفوفة A نقوم بايجاد مصفوفة المعاملات المصاحبة للعناصر ثم منقولها

Ex : Find the adjoint of the matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

2- نوجد مصفوفة المعاملات المصاحبة للعناصر

solution:

$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 9 \quad , \quad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 12 \quad , \quad C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -24$

$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 9 \quad , \quad C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -13 \quad , \quad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 11$

$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -9 \quad , \quad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad , \quad C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -6$

** $C = \begin{bmatrix} 9 & 12 & -24 \\ 9 & -13 & 11 \\ -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

1- نوجد المصفوفة المصاحبة $adjA = C^T$

$$adjA = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -9 \\ 12 & -13 & 3 \\ -24 & 11 & -6 \end{bmatrix}$$

نظرية:

اذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فان $A(adjA) = (adjA)A = |A|I$

Finding Inverse of the matrix using its adjoint

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)$$

تذكر لدينا طريقة لايجاد معكوس المصفوفة بطريقة اختزال المصفوفة $[A \mid I]$ الى الشكل $[I \mid A]$

نستنتج من القاعدة السابقة : $adj(A) = |A|A^{-1}$

Ex : Find the inverse of the matrix using its adjoint

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

solution:

1)

3- نوجد قيمة محدد المصفوفة

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 3\end{matrix}=1+0-3+2-0-1=-1$$

2- نوجد المصفوفة المصاحبة $adj\,(A)$

2)

$$C_{11}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\ ,\quad C_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\ ,\quad C_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-4$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\ ,\quad C_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0\ ,\quad C_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\ ,\quad C_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1\ ,\quad C_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 1 & -4\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}\ ,\quad adj\,(A)=C^T=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -4 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

1- نوجد المعكوس

3)

$$*\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\,(A)\ ,\quad A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ -4 & -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -3\end{bmatrix}$$

نظريات و نتائج هامة:

We know $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\,(A)$

1. $adj\,(A)=|A|A^{-1}$
2. By multplying $A \Rightarrow A\,adj\,(A)=adj\,(A)A=|A|I$
3. If $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj\,(A) \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{|A|}adj\,(A)\right)^{-1}$

$$A=|A|(adj\,(A))^{-1} \Rightarrow (adj\,(A))^{-1}=\frac{1}{|A|}A$$

4. $|adj\,(A)|=\left||A|A^{-1}\right|=|A|^n\left|A^{-1}\right|=|A|^{n-1}$
5. $adj\,(A)=|A|A^{-1}$ similary $adj\,(A^{-1})=\left|A^{-1}\right|A$

Ex : Find the inverse of the matrix using its adjoint

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

solution:

$$* \ |A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & 2\\ 2 & 2\end{matrix}=(-2)+(-8)+(8)-(-4)-(-4)-(8)=-2$$

$$* \ C=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 6 & -5 & 2\\ -8 & 6 & -2\end{bmatrix}$$

$$* \ Adj(A)=C^T=\begin{bmatrix}2 & 6 & -8\\ -2 & -5 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj(A)=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}2 & 6 & -8\\ -2 & -5 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 4\\ 1 & \frac{5}{2} & -3\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Ex : Let $A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, Find $adj(A^T)$

solution:

$$A^T=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

$C_{11}=2$ $\quad$ $C_{12}=-2$

$C_{21}=-1$ $\quad$ $C_{22}=2$

$$C=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix} \quad , \quad adj(A^T)=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

يمكن اختصار الخطوات لكن الحل بالتفصيل لتوضيح الخطوات

Ex : Let A square matrix of degree 3 and $|A|=2$, find $|A^{-1}+adj(A)|$

solution:

$$* \ adj(A)=|A|A^{-1}=2A^{-1}$$

$$* \ |A^{-1}+adj(A)|=|A^{-1}+2A^{-1}|$$

$$=|3A^{-1}|=3^3|A^{-1}|=(27)\frac{1}{2}=\frac{27}{2}$$

Ex : Let A square matrix of degree 4 and $\det(A)=2$, find $\det(adjA)$

solution:

* $adj(A)=|A|A^{-1}=2A^{-1}$

* $\det(adj(A))=\det(2A^{-1})$

$$=2^4\det(A^{-1})$$

$$=16\cdot\frac{1}{2}=8$$

Ex : Let A and B are two matrices of degree 3 where $|A|=3$, $|B|=-2$

Evaluate $\left|-B^3A^{-2}B^T adj(A^{-2})\right|$

solution:

* $adj(A)=|A|A^{-1}=3A^{-1}$

$|adj(A)|=\left|3A^{-1}\right|=3^3\left|A^{-1}\right|=(27)\frac{1}{|A|}=9$

* $\left|adj(A^{-2})\right|=\frac{1}{\left|adj(A^2)\right|}=\frac{1}{9^2}=\frac{1}{81}$

* $\left|-B^3A^{-2}B^T adj(A^{-2})\right|=(-1)^3|B|^3\frac{1}{|A|^2}\left|B^T\right|\left|adj(A^{-2})\right|$

$$=-(-2)^3\frac{1}{9}(-2)\frac{1}{81}=\frac{16}{729}$$

Ex : Let A and B are two matrices of degree 3 where $|A|=1$, $|B|=-2$

Evaluate $\left|-B^3A^{-2}B^T adj(A^{-3})\right|$

solution:

* $adj(A)=|A|A^{-1}=A^{-1}$

$|adj(A)|=\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}=1$

* $\left|adj(A^{-3})\right|=\frac{1}{\left|adj(A^3)\right|}=\frac{1}{1^3}=1$

* $\left|-B^3A^{-2}B^T adj(A^{-3})\right|=(-1)^3|B|^3\left|B^T\right|\left|adj(A^{-3})\right|$

$$=-(-2)^3(-2)(1)=-16$$

Ex : Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, Evaluate $A^2 adj(A)$

solution:

* $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 4 & -4 \end{matrix} = 0-48+16-0+16+16=0$

* $A\,adj(A) = |A| I_3 = 0$
* $A^2 adj(A) = A A\,adj(A) = A|A| = A(0) = 0$

Ex : If A is square matrix and invertible , Find $A^2 adj(A^{-3})$

solution:

* $adj(A) = |A| A^{-1}$

$adj\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{|A|} A$

$adj\left(A^{-3}\right) = \left(\frac{1}{|A|} A\right)^3 = \frac{1}{|A|^3} A^3$

* $A^2 adj\left(A^{-3}\right) = A^2 \frac{1}{|A|^3} A^3 = \frac{1}{|A|} A^5$

Ex : If A and B are matrices of degree 3 , $|A^{-1}| = -3$, $|B'| = -2$

Evaluate $|A\,adjA - B\,adjB|$

solution:

* $|A^{-1}| = -3 \longrightarrow |A| = -\frac{1}{3}$, $|B'| = |B| = -2$
* $|A\,adjA - B\,adjB| = \left||A|I - |B|I\right|$

$= \left|-\frac{1}{3}I - (-2)I\right| = \left|\frac{5}{3}I\right|$

$= \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$

CHAPTER 3
SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS

أنظمة المعادلات الخطية

** طرق حل أنظمة المعادلات الخطية

1- طريقة جاوس
2- طريقة جاوس – جوردن (في الطريقتين نستخدم المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$)
3- طريقة المعكوس $\left(X = A^{-1}B \right)$
4- طريقة كرامر

....

- اذا كان النظام $AX = B$ حل وحيد أو عدد لا نهائي من الحلول يكون النظام (متسقا أو متآلفا)consistent
- اذا كان النظام $AX = B$ ليس له حل يكون النظام (غير متسق) inconsistent

حل النظام الخطي بطرق جاوس و جاوس - جوردان

First : Gaussian Elimination :

نضع نظام المعادلات الخطية في صورة المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$ و نبسطها على الصيغة الدرجية الصفية ثم نوجد الحل

Ex : Solve the system by Gaussian elimination method

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ 2x - 5y - z &= -5 \\ 3x \qquad + 2z &= 7 \end{aligned}$$

solution:

$$* \ [A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R1+R3]{-2R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 9 & -1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-9R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{26}R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ y - 3z &= -5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

$z = 2$

$y - 3z = -5 \longrightarrow y = -5 + 3(2) = 1$

$x - 3y + z = 0 \longrightarrow x = 3(1) - 2 = 1$

The solution is $(1,1,2)$

Ex : Solve the system by Gaussian elimination method

$$x+3y+5z=-10$$
$$2x+5y+z=-4$$
$$3x+7y-3z=2$$

solution:

$$* \left[A \mid B\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -10 \\ 2 & 5 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-2R1+R2} \\ \xrightarrow{-3R1+R3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -10 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \\ 0 & -2 & -18 & 32 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 9 & -16 \\ 0 & -2 & -18 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow{2R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 9 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$y+9z=-16 \longrightarrow y=-16-9z$$
$$x+3y+5z=-10 \longrightarrow x=-10-3y-5z$$
$$z=t$$
$$y=-16-9t$$
$$x=-10-3(-16-9t)-5t=38+22t$$

The general solution of the system parametrically: $\{(38+22t\ ,\ -16-9t\ ,\ t):t\in R\}$

Ex : Solve the system by Gaussian elimination method

$$x_1-2x_2 \quad =4$$
$$2x_1-3x_2+x_3=1$$
$$5x_1-9x_2+x_3=7$$

solution:

$$* \left[A \mid B\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & -9 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-2R1+R2} \\ \xrightarrow{-5R1+R3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} x_1-2x_2+3x_3=0 \\ x_1+x_2=-7 \\ 0=-6 \end{array}$$

The system has no solution

Second: Gauss-Jordan Elimination

نضع النظام في صورة المصفوفة الموسعة $[A \mid B]$ و نبسطها على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة

Ex : Solve by Gauss – Jordan elimination

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ 2x \quad\quad - z &= 1 \\ 3y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

solution:

$$* \ [A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{2R2+R1} \\ \\ \xrightarrow{-3R2+R3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{4} & -\frac{13}{4} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{4}{13}R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{1}{2}R3+R1} \\ \xrightarrow{\frac{7}{4}R3+R2} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

The solution is $(1,2,1)$

Ex : Solve the system by Gauss-Jordan elimination

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= -1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -2 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

solution:

$$* \ [A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{R1+R2} \\ \xrightarrow{-2R1+R3} \\ \xrightarrow{-R1+R4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{2R2+R1} \\ \\ \xrightarrow{-5R2+R3} \\ \xrightarrow{-2R2+R4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_4 = 1 \longrightarrow x_1 = 1 + x_4$

$x_2 - 2x_3 = 0 \longrightarrow x_2 = 2x_3$

put $x_4 = s$, $x_3 = t$ $\rightarrow x_1 = 1 + s$, $x_2 = 2t$

The general solution is $x_1 = 1 + s$, $x_2 = 2t$, $x_3 = t$, $x_4 = s$ for $t, s \in \mathbb{R}$

Ex : Solve the system by Gauss-Jordan elimination

$$x - 3y - z + u = 1$$
$$-2x + 7y + 2z - u = -1$$
$$x - 2y - z + 3u = 1$$

solution:

$$* \ [A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 7 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{2R1+R2} \\ \xrightarrow{-R1+R3} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{3R2+R1} \\ \xrightarrow{-R2+R3} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-4R3+R1} \\ \xrightarrow{-R3+R2} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$x - z = 8 \ , \ \ y = 2 \ \ , \ \ u = -1$

put $z = t \ \rightarrow \ x = t + 8 \ , \ y = 2 \ , \ z = t \ , \ u = -1$

The general solution is $x = t + 8 \ , \ y = 2 \ , \ z = t \ , \ u = -1 \ , \ t \in \mathbb{R}$

** ملحوظات **

** ملحوظة **

اذا كان عدد المجاهيل بالنظام أكبر من عدد المعادلات فان للنظام اما

- عدد غير منته من الحلول
- لا يوجد له حلول (غير متسق)

** ملحوظة **

عند حل النظام المربع و اختزال المصفوفة الموسعة اذا كان ناتج الاختزال

1. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ فان للنظام عدد غير منته من الحلول

2. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$ لا يوجد حل للنظام (غير متسق)

Ex : Solve the system $AX = B$ by Gauss – Jordan , where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix}$$

solution:

$$* \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -R12 \\ -3R13 \\ -3R14 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 11 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R21 \\ \\ -R23 \\ -R24 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -R3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -R31 \\ -2R32 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R41 \\ R42 \\ R43 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} x + 9u = -4 \\ y + 13u = -9 \\ z + 5u = 3 \\ t + 6u = 0 \end{array}$$

Let $u = r$

$x = -9r - 4 , y = -13r - 9 \ , z = -5r + 3 \ , t = -6r \ , \ u = r$ for $r \in \mathbb{R}$

The solution set is $\{(-9r - 4 , -13r - 9, -5r + 3 \ ,t = -6r,r) \text{ for } r \in \mathbb{R}\}$

Many infinitely solutions

Ex : What condition if any , must b_1 , b_2 and b_3 satisfy for the system to be consistent

$$\begin{aligned} x - 2y - z &= b_1 \\ -4x + 5y + 3z &= b_2 \\ -3x + 3y + 2z &= b_3 \end{aligned}$$

النظام يكون متسقا اذا كان له حلول

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -4 & 5 & 3 & b_2 \\ -3 & 3 & 2 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[3R1+R3]{4R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_2+4b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_3+3b_1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -3 & -1 & b_2+4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3+3b_1-(b_2+4b_1) \end{array}\right]$$

The system is consistent if

$$b_3 + 3b_1 - (b_2 + 4b_1) = 0$$

$$b_3 - b_2 - b_1 = 0$$

Ex : What condition if any , must α satisfy for the system to be inconsistent

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= \alpha \\ 2x + 3y + 5z &= 2\alpha \end{aligned}$$

النظام ليس متسقا اذا كان ليس له حل

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \\ 2 & 3 & 5 & 2\alpha \end{array}\right] \xrightarrow[-2R1+R3]{-R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 1 & 1 & 2\alpha-2 \end{array}\right] \xrightarrow{-R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{array}\right]$$

The system is inconsistent if $\alpha - 1 \neq 0 \longrightarrow \alpha \neq 1$ or $\alpha \in R - \{1\}$

Ex : Determine the value of a for which the system has exactly one solution

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 4y + az &= -1 \\ 3x + ay + 9z &= 1 \end{aligned}$$

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & a & -1 \\ 3 & a & 9 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R1+R3]{-2R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a-6 & -3 \\ 0 & a-6 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \leftrightarrow R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-6 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & a-6 & -3 \end{array}\right]$$

$$(a-6)y = -2$$

$$(a-6)z = -3$$

the system has one solution if: $a - 6 \neq 0 \longrightarrow a \neq 6$, $a \in R - \{6\}$

Ex : Determine the value of λ for which the system is consistent

$$\begin{aligned} x-2y+3z-u&=2\\ y-z+4u&=0\\ (\lambda^2-1)u&=3 \end{aligned}$$

solution:

$$* \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 & 3 \end{array}\right]$$

$(\lambda^2-1)z=3$

The system is consistent if $\lambda^2-1\neq 0 \longrightarrow \lambda\neq\pm1$ or $\lambda\in R-\{\pm1\}$

Ex : Determine the value(s) of α for which the system is consistent

$$\begin{aligned} x+\quad\; z&=\alpha^2\\ 2x+y+3z&=-3\alpha\\ 3x+y+4z&=-2 \end{aligned}$$

solution:

$$* [A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha^2\\ 2 & 1 & 3 & -3\alpha\\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-2R1+R2}\\ \xrightarrow{-3R1+R3} \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha^2\\ 0 & 1 & 1 & -2\alpha^2-3\alpha\\ 0 & 1 & 1 & -3\alpha^2-2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R2+R3}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha^2\\ 0 & 1 & 1 & -2\alpha^2-3\alpha\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2+3\alpha-2 \end{array}\right]$$

النظام يكون متسقا اذا كان له حلول

The system is consistent if : $-\alpha^2+3\alpha-2=0 \xrightarrow{-1} \alpha^2-3\alpha+2=0$

$\alpha=2\ ,\ \alpha=1$

Ex : Determine the value(s) of m for which the system has infinitely many solution

$$\begin{cases} x-2y+3z=7 \\ 2x-y-2z=14 \\ -x+2y+mz=2m-1 \end{cases}$$

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -2 & 14 \\ -1 & 2 & m & 2m-1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3]{-2R_1+R_2} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & m+3 & 2m+6 \end{array}\right]$$

$(m+3)z=2m+6$

The system has many solutions if

$$m=-3 \leftarrow m+3=0$$

If $m=-3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x-2y+3z=7 \rightarrow x=7+2y-3z$

$3y-8z=0 \rightarrow y=\frac{8}{3}z$

Let $z=t$

$y=\frac{8}{3}t$, $x=7+2\left(\frac{8}{3}t\right)-3t=7+\frac{7}{3}t$, for $t\in\mathbb{R}$

the general solution : $\left\{\left(7+\frac{7}{3}t,\frac{8}{3}t,t\right);\ t\in\mathbb{R}\right\}$

Ex : Let $\begin{cases} -x+y+az=-2 \\ 2x-ay-z=-1 \\ ax-2y+z=1 \end{cases}$

(1) Determine the value(s) of a for which the system has infinitely many solutions

(2) Find the solution of the system if $a=-2$, if exist

(2) Find the solution of the system if $a=0$, if exist

solution:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & a & -2 \\ 2 & -a & -1 & -1 \\ a & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 2 \\ 2 & -a & -1 & -1 \\ a & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-aR_{13}]{-2R_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 2 \\ 0 & 2-a & 2a-1 & -5 \\ 0 & a-2 & a^2+1 & 1-2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 2 \\ 0 & 2-a & 2a-1 & -5 \\ 0 & 0 & a^2+2a & -4-2a \end{array}\right]$$

$$a^2+2a=0 \ \rightarrow \ a(a+2)=0 \ \rightarrow \ a=0 \ , \ a=-2$$

$$-4-2a=0 \ \rightarrow \ a=-2$$

The system has infinitely many solution if $a=-2$

(2) If $a=-2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -a & 2 \\ 0 & 2-a & 2a-1 & -5 \\ 0 & 0 & a^2+2a & -4-2a \end{array}\right] \text{ if } a=-2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} x-y+2z=2 \\ 4y-5z=-5 \end{array}$$

Let $y=t$

$*-5z=-5-4y \ \rightarrow \ z=1+\frac{4}{5}y=1+\frac{4}{5}t$

$*x-y+2z=2 \ \rightarrow \ x=y-2z+2$

$=t-2(1+\frac{4}{5}t)+2=-\frac{3}{5}t$

$S=\left\{\left(-\frac{3}{5}t \ , \ t \ , \ 1+\frac{4}{5}t\right) : \ t\in\mathbb{R}\right\}$

(3) If $a=0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

The system has no solution if $a=0$

Ex : Let the linear system $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + (a-2)y + z = -1 \\ -2x + 2y + (a-2)z = 3a \end{cases}$

Determine the values of a for which the system has

(a) exactly one solution (b) infinitely many solutions (c) no solution

solution:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & a-2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & a-2 & 3a \end{array}\right] \xrightarrow[2R1+R3]{-R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2 & 3a \end{array}\right] \begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ (a-1)y - z = -1 \\ (a+2)z = 3a \end{array}$$

$a = -2$, $a = 0$, $a = 1$

* If $a = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ z = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

we have $z = 1$, $x = y - 2$

Let $y = t$

The system has many solutions : $x = t - 2$, $y = t$, $z = 1$ for $t \in \mathbb{R}$

$\{(t-2, t, 1), t \in \mathbb{R}\}$

* $a = -2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \quad 0z = -6$$

The system has no solution if $a = -2$

* $a = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}$$

The system has one solution : $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$

The solution has exactly one solution if $a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$

$Ex:$ For $\begin{cases} x+2y-mz &= 2-m^2 \\ x+my+3z &= m^2-3 \\ 2x+(m+2)y+2z &= 0 \end{cases}$

Determine the values of a for which the system has

(a) exactly one solution (b) no solution

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -m & 2-m^2 \\ 1 & m & 3 & m^2-3 \\ 2 & m+2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-R1+R3]{-R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -m & 2-m^2 \\ 0 & m-2 & m+3 & 2m^2-5 \\ 0 & m-2 & 2m+2 & 2m^2-4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -m & 2-m^2 \\ 0 & m-2 & m+3 & 2m^2-5 \\ 0 & 0 & m-1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[(-1)R3,2]{(1)R3,1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3-m^2 \\ 0 & m-2 & 4 & 2m^2-6 \\ 0 & 0 & m-1 & 1 \end{array}\right]$$

$(m-2)y+4z=2m^2-6$

$(m-1)z=1$

We discuss if: $m=1$, $m=2$

* If $m=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad (0)z=1$$

The system has no solution

* If $m=2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

The system has no solution

(a) The system has no solution if $m=-1$, $m=2$

(b) The system has one solution for $m \in \mathbb{R}-\{-1,2\}$

Ex : What condition, if any, must a satisfy for the linear system to be

$$x+y+z=3$$
$$2x+5y+4z=a$$
$$3x+(a^2-8)z=12$$

(a) unique solution (b) infinitely many solution (c) no solution

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & a \\ 3 & 0 & a^2-8 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R1+R3]{-2R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & a-6 \\ 0 & -3 & a^2-11 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & a-6 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a-3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 3y+2z=a-6 \\ (a-3)(a+3)z=(a-3) \end{array}$$

the values of a : $a=3$, $a=-3$, $a=6$

* If $a=3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x+y+z=3 \longrightarrow x=3-y-z$

$3y+2z=-3 \longrightarrow y=-1-\frac{2}{3}z$

Let $z=t$

$y=-1-\frac{2}{3}t$, $x=3-\left(-1-\frac{2}{3}t\right)-t=4-\frac{1}{3}t$

The system has many solutions : $x=4-\frac{1}{3}t$, $y=-1-\frac{2}{3}t$, $z=t$; $t\in\mathbb{R}$

* If $a=-3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \quad (0)z=-6$$

The system has no solution

* If $a=6$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 3 \end{array}\right]$$

The system has one solution

The system has one solution if $m\in\mathbb{R}-\{-3,3\}$

Ex : Let $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & m-2 & m+3 & m^2+5 \\ 3 & 5 & -5 & m+3 & m^2+2 \end{array}\right]$

Determine the values of a for which the system has

(a) exactly one solution (b) infinitely many solutions (c) inconsistent solution

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & m-2 & m+3 & m^2+5 \\ 3 & 5 & -5 & m+3 & m^2+2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-2R1+R2} \\ \xrightarrow{-2R1+R3} \\ \xrightarrow{-3R1+R3} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & m & m+1 & m^2+1 \\ 0 & -1 & -2 & m & m^2-4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-R2} \\ \\ \xrightarrow{-R2+R4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & m & m+1 & m^2+1 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 & m^2-1 \end{array}\right] \xrightarrow{(-1)R4+R3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & m & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 & m^2-1 \end{array}\right]$$

$(m)z = 2$

$(m+1)t = m^2-1$, $(m+1)t = (m-1)(m+1)$

$\rightarrow$ We have $m=-1$, $m=0$

* If $m=0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad (0)z = 2$$

The system has no solution (inconsistent)

* If $m=-1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{ll} x+2y-z+t=2 & \rightarrow x = 2-2y+z-t \\ y+2z+t=3 & \rightarrow y = 3-2z-t \\ z=-2 & \rightarrow z=-2 \end{array}$$

$z=-2$, $y=7-t$, $x=-2y-t=-2(7-t)-t=-14+t$

The system has many solution : $\{(-14+t, 7-t, -2, t); t \in \mathbb{R}\}$

(a) The system is inconsistent if $m=0$

(b) The system has many infinitley solutions if $m=-1$

(c) The system has unique solution if $m \in \mathbb{R}-\{-1,0\}$

Homogeneous Linear Systems نظام المعادلات الخطية المتجانسة

النظام المتجانس هو $AX = 0$ و يكون له دائما حلول (نظام متسق) consistent solution اما

- الحل التافه trivial solution : و يكون جميع المجاهيل تساوي صفر
- الحل الغير تافه nontrivial solution: ويكون له عدد غير منته من الحلول

Ex : Solve the system by Gauss-Jordan elimination

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x - 6y + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R2 \leftrightarrow R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{R2+R1} \\ \\ \xrightarrow{4R2+R3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{7}R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R3+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

The system has trivial solution $S = \{(0,0,0)\}$

Ex : Solve the system by Gauss-Jordan elimination

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 5z &= 0 \\ -3x + 2y - 3z &= 0 \\ -x - 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_3, R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{3R_1+R_2} \\ \\ \xrightarrow{-2R_1+R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{8}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{8} & 0 \\ 0 & -8 & 9 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-2R_2+R_1} \\ \\ \xrightarrow{8R_2+R_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} x + \tfrac{1}{4}z &= 0 & \rightarrow\ x &= -\tfrac{1}{4}z \\ y - \tfrac{9}{8}z &= 0 & \rightarrow\ y &= \tfrac{9}{8}z \end{aligned}$$

Let $z = t$, $x = -\frac{1}{4}t$, $y = \frac{9}{8}t$, $t \in R$

The solution is $x = -\frac{1}{4}t$, $y = \frac{9}{8}t$, $z = t$ for $t \in \mathbb{R}$ (nontrivial solution)

Ex : Solve the homogeneous system

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_5 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 0 \\ -3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 11x_5 &= 0 \end{aligned}$$

solution:

$$* \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -5 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 7 & 0 \\ -3 & 5 & -6 & 2 & 11 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{2R1+R2} \\ \xrightarrow{R1+R3} \\ \xrightarrow{3R1+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 20 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{R2+R1} \\ \\ \xrightarrow{-R2+R3} \\ \xrightarrow{-2R2+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 7 & 3 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-3R3+R1} \\ \xrightarrow{-2R3+R2} \\ \\ \xrightarrow{-R3+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Let $x_3 = t \quad , \quad x_5 = s$

$x_1 + 7x_3 + 13x_5 = 0 \longrightarrow x_1 = -7x_3 - 13x_5$

$x_2 + 3x_3 + 10x_5 = 0 \longrightarrow x_2 = -3x_3 - 10x_5$

$x_4 = 0$

The solution is : $x_1 = -7t - 13s \quad , \quad x_2 = -3t - 10s \quad , x_3 = t \quad , \quad x_4 = 0 \quad , \quad x_5 = s$

$$S = \{(-7t - 13s \ , \ -3t - 10s \ , \ t \ , \ 0 \ , \ s) : t, s \in R\}$$

<u>نظرية :</u>

اذا كانت A مصفوفة مربعة فان للنظام $AX = 0$ الحل التافه trivial solution $\Leftrightarrow$ اذا كان للمصفوفة A معكوس $\det(A) \neq 0$

- و نستنتج أن : اذا كان A ليس لها معكوس($\det(A) = 0$) فان للنظام عدد غير منته من الحلول

Ex : Prove that the linear system has trivial solution

$$\begin{aligned} x+y+z&=0\\ 2y&=0\\ 3x+y-z&=0 \end{aligned}$$

solution:

لاثبات أن النظام المتجانس له الحل الصفري نثبت ان المصفوفة A لها معكوس $\det(A)\neq 0$

$$* \ \det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&0\\3&1&-1\end{vmatrix}=(2)\begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}=2(-1-3)=-8\neq 0$$

للمصفوفة A معكوس و بالتالي يكون للنظام المتجانس الحل الصفري (التافه) فقط

Ex : Find all values a for which the given system has many infinitely solution

$$\begin{aligned} x+y-z&=0\\ ay-z&=0\\ x+y+az&=0 \end{aligned}$$

بما أن النظام متجانس فأنه يكون له عدد غير منته من الحلول اذا كان $\det(A)=0$

solution:

$$* \ \det(A)=0 \quad , \quad \begin{vmatrix}1&1&-1\\0&a&-1\\1&1&a\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\0&a\\1&1\end{matrix}=0$$

$$(a^2)+(-1)+(0)-(0)-(-1)-(-a)=0$$

$$a^2+a=0 \rightarrow a(a+1)=0$$

$$a=0 \ , \ a=-1 \longrightarrow a\in\{-1,0\}$$

Ex : Find all values α for which the given system $AX=0$ has many infinitely solution

$$A=\begin{bmatrix}\alpha-3&2&0\\2&\alpha-3&0\\0&0&\alpha-5\end{bmatrix}$$

solution:

بما أن النظام متجانس فأنه يكون له عدد غير منته من الحلول اذا كان $\det(A)=0$

$$* \ \det(A)=0 \quad , \quad \begin{vmatrix}\alpha-3&2&0\\2&\alpha-3&0\\0&0&\alpha-5\end{vmatrix}=0$$

$$(\alpha-5)\begin{vmatrix}\alpha-3&2\\2&\alpha-3\end{vmatrix}=0$$

$$(\alpha-5)\left((\alpha-3)^2-4\right)=0$$

$$(\alpha-5)\left(\alpha^2-6\alpha+5\right)=0$$

$$(\alpha-5)(\alpha-1)(\alpha-5)=0$$

$$\alpha=5 \ , \ \alpha=5 \ , \ \alpha=1 \longrightarrow \alpha\in\{1,5\}$$

Ex : Determine the values of α for which the homogeneous has nontrivial solution and find the solution to every value of α

$$\alpha x + y + z = 0$$
$$x - y + z = 0$$
$$x + y + \alpha z = 0$$

solution:

بما أن النظام متجانس فأنه يكون له حلول غير صفرية اذا كان $\det(A) = 0$

$$\det(A) = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \begin{matrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 0$$

$$(-\alpha^2) + (1) + (1) - (\alpha) - (\alpha) - (-1) = 0$$
$$-\alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0 \ , \quad \alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$
$$\alpha = 1 \quad , \quad \alpha = -3$$

1. If $\alpha = 1$

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-R1+R3]{-R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-R2+R1]{-\frac{1}{2}R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} x + z = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

Let $z = t$

$x = -z = -t$

$y = 0$

The solution is $S = \{(-t\ ,\ 0\ ,\ t) : t \in R\}$

2. If $\alpha = -3$

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-R1+R3]{3R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R2+R3]{R2+R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{matrix}$$

Let $z = t$

$x = t$

$y = 2t$

The solution is $S = \{(t\ ,\ 2t\ ,\ t) : t \in R\}$

Second : Solutionof the linear system $AX = B$ using the inverse $(X = A^{-1}B)$

ثانيا : حل النظام الخطي باستخدام معكوس المصفوفة $(X = A^{-1}B)$

نحصل على معكوس مصفوفة المعاملات ثم نضربها بمصفوفة الثوابت

** تذكر يوجد طريقتين لايجاد معكوس المصفوفة

- طريقة اختزال elementary row operations : تحويل $[A \mid I]$ الى $[I \mid A^{-1}]$
- طريقة المصفوفة المصاحبة Adjoint matrix $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)$

Ex : Solve the system of linear equations using the inverse

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 6 \\ 2x + y - z &= -6 \\ 3x \quad - z &= 12 \end{aligned}$$

solution:

$$* AX = B \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$* |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix} = (-1) + (3) + (0) - (2) - (0) - (6) = -6$$

$$* \ C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -1 & -7 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad adj(A) = C^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -7 & 5 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$* \ A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -7 & 5 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$* \ X = A^{-1}B = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -7 & 5 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -12 \\ 96 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -16 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$x = 2 \quad , \quad y = -16 \quad , \quad z = -6$

Ex : Solve the system of linear equations using the inverse

$$x + y - z + u = 3$$
$$-x + 2z + 3u = -2$$
$$-z + 3u = 1$$
$$-z = 4$$

solution:

$$* \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1+R2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-R2+R1} \\ \\ \xrightarrow{-R3} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{2R3+R1} \\ \xrightarrow{-R3+R2} \\ \\ \xrightarrow{-R4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{9R4+R1} \\ \xrightarrow{-7R4+R2} \\ \xrightarrow{3R4+R3} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad , \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$* \ X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -9 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ 30 \\ -13 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ملحوظات هامة:

1- لحل النظام الخطي بطريقة ايجاد معكوس المصفوفة طبعا لابد أن يكون للمصفوفة معكوس أي أن $\det(A) \neq 0$

2- اما اذا كان ليس للمصفوفة معكوس أي أن $\det(A) = 0$ فلا يمكن حلها بهذه الطريقة و نحلها بطرق جاوس او جاوس جوردان

3- و اذا كان $\det(A) = 0$ فان النظام الخطي اما يكون له (عدد لانهائي من الحلول) أو يكون (ليس له حل).

Third : Solution of the linear system using (Cramer's Rule)

ثالثا : حل النظام الخطي بقاعدة كرامر

لحل المعادلات الخطية بقاعدة كرامر يشترط أن عدد المعادلات تساوي عدد المجاهيل

Ex : Use Cramer's rule to solve the linear system

$$x-3y-z=-7$$
$$x-y-z=-2$$
$$x-6y-2z=-3$$

solution:

1- نوجد قيمة محدد مصفوفة المعاملات

$$* \quad \det(A)=\begin{vmatrix}1&-3&-1\\1&-1&-1\\1&-6&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}1&-3\\1&-1\\1&-6\end{matrix}=(2)+(3)+(6)-(6)-(6)-(1)=-2$$

2- باستبدال العمود الأول بمصفوفة الثوابت

$$* \quad \det(A_1)=\begin{vmatrix}-7&-3&-1\\-2&-1&-1\\-3&-6&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}-7&-3\\-2&-1\\-3&-6\end{matrix}=(-14)+(-9)+(-12)-(-12)-(-42)-(-3)=22$$

3- باستبدال العمود الثاني بمصفوفة الثوابت

$$* \quad \det(A_2)=\begin{vmatrix}1&-7&-1\\1&-2&-1\\1&-3&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}1&-7\\1&-2\\1&-3\end{matrix}=(4)+(7)+(3)-(14)-(3)-(2)=-5$$

4- باستبدال العمود الثالث بمصفوفة الثوابت

$$* \quad \det(A_3)=\begin{vmatrix}1&-3&-7\\1&-1&-2\\1&-6&-3\end{vmatrix}\begin{matrix}1&-3\\1&-1\\1&-6\end{matrix}=(3)+(6)+(42)-(9)-(12)-(7)=23$$

$$* \quad x=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{22}{-2}=-11$$

$$* \quad y=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{5}{2}$$

$$* \quad z=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=-\frac{23}{2}$$

Ex : Use Cramer's rule to solve the linear system

$$x - y + 2z = a$$
$$2x + y - z = -a$$
$$3x - z = 2a$$

solution:

$$* \ \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 1(-2+3) + (-1-6) = -6$$

$$* \ \det(A_1) = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ -a & 1 & -1 \\ 2a & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -a & -1 \\ 2a & -1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a & -1 \end{vmatrix} + 0$$

$$= 1(a+2a) + (-a-4a) = -2a$$

$$* \ \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & -a & -1 \\ 3 & 2a & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & a \\ 2 & -a \\ 3 & 2a \end{matrix} = (a) + (-3a) + (8a) - (-2a) - (-2a) - (-6a) = 16a$$

$$* \ \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & -a \\ 3 & 0 & 2a \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & -a \\ 3 & 2a \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & a \\ 3 & 2a \end{vmatrix} + 0$$

$$= 1(4a+3a) + (2a-3a) = 6a$$

$$* \quad x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-2a}{-6} = \frac{1}{3}a$$

$$* \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{16a}{-6} = -\frac{8}{3}a$$

$$* \quad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{6a}{-6} = -a$$

الفصل الرابع

فضاءات المتجهات (Vector Spaces)

تعريف : فضاء المتجهات

نقول عن نظام V أنه فضاء متجهات على حقل الأعداد الحقيقية اذا كانت V مجموعة غير خالية بها عمليتين احداهما عملية الجمع و الأخرى عملية الضرب بعدد حقيقي بحيث تتحقق الخواص التالي

1- خاصية الاغلاق لعملية الجمع
اذا كان $u,v \in V$ فان $u+v \in V$
2- الخاصية الابدالية للجمع
اذا كان $u,v \in V$ فان $u+v=v+u$
3- الخاصية التجميعية للجمع
اذا كان $u,v,w \in V$ فان $u+(v+w)=(u+v)+w$
4- خاصية المحايد الجمعي
يوجد عنصر $0 \in V$ بحيث $u+0=0+u=0$ لكل $u \in V$
5- لكل عنصر $u \in V$ يوجد عنصر $-u$ يسمى النظير الجمعي لـ u بحيث $u+(-u)=(-u)+u=0$
6- خاصية الاغلاق لعملية الضرب بعدد
اذا كان $u \in V$ و كان $\alpha \in R$ فان $\alpha u \in V$
7- اذا كان $u,v \in V$ و كان $\alpha \in R$ فان $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$
8- اذا كان $u \in V$ و كان $\alpha,\beta \in R$ فان $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$
9- اذا كان $u \in V$ و كان $\alpha,\beta \in R$ فان $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)=\beta(\alpha u)$
10- اذا كان $u \in V$ فان $1 \cdot u=u$

Definition: Vector Space

Let V be nonempty set of objects on which two operations are defined addition and multiplication by numbers

V is vector space if

1. If u and v $\in V$, then $u+v \in V$ (closure under addition)
2. $u+v=v+u$
3. $u+(v+w)=(u+v)+w$
4. There is $0 \in V$ such that $u+0=0+u=u$
5. For $u \in V$ there is $-u \in V$ such that $u+(-u)=(-u)+u=0$
6. If α is scaler and $u \in V$ then $\alpha u \in V$ (closure under scaler multiplication)
7. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$
8. $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$
9. $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)(u)$
10. $1\,u=u$

Ex : Prove that the set $V=\{(x,y,x): x\in R\}$ is Vector space where the operations addition and multiplication are defind on $\mathbb{R}^3$

solution:

Let $u,v,w\in V$ where $u=(x,y,x)$, $v=(x_1,y,x_1)$, $w=(x_2,y,x_2)$

1. $u+v=(x,y,x)+(x_1,y_1,x_1)=(x+x_1,y+y_1,x+x_1)\in V$
2. $u+v=(x+x_1,y+y_1,x+x_1)=(x_1+x,y_1+y,x_1+x)=v+u$
3. $(u+v)+w=((x+x_1)+x_2,(y+y_1)+y_2,(x+x_1)+x_2)$

$$=(x+(x_1+x_2),y+(y_1+y_2),x+(x_1+x_2))=u+(v+w)$$

4. Let $0=(0,0,0)\in V \Rightarrow u+0=(x,y,x)+(0,0,0)=u$
5. If $u=(x,y,x)\in V$ there $-u=(-x,-y,-x)\in V$

then $u+(-u)=(x,y,x)+(-x,-y,-x)=0$

6. $u=(x,y,x)\in V$ and $\alpha\in R \Rightarrow \alpha u=(\alpha x,\alpha y,\alpha x)\in V$
7. $\alpha(u+v)=\alpha(x+x_1,y+y_1,x+x_1)$

$$=(\alpha x+\alpha x_1,\alpha y+\alpha y_1,\alpha x+\alpha x_1)$$
$$=(\alpha x,\alpha y,\alpha x)+(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha x_1)$$
$$=\alpha(x,y,x)+\alpha(x_1,y_1,x_1)$$
$$=\alpha u+\alpha v$$

8. $\alpha,\beta\in R$

$(\alpha+\beta)u=(\alpha+\beta)(x,y,x)$
$$=((\alpha+\beta)x,(\alpha+\beta)y,(\alpha+\beta)x)$$
$$=(\alpha x,\alpha y,\alpha x)+(\beta x,\beta y,\beta x)$$
$$=\alpha u+\beta u$$

9. $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)=\beta(\alpha u)$
10. $1\cdot u=1\cdot(x,y,x)=u$

الفضاءات الجزئية (Subspaces)

Definition: Subspace

Let V be a vector space and W a subset of V then W is a subspace of V if and only if

1. $0 \in W$
2. If $u, v \in W$ then $u + v \in W$
3. If $u \in W$ and $\alpha \in \mathbb{R}$ then $\alpha u \in W$

ملحوظة : يمكن جمع الشرطين الثاني و الثالث بشرط واحد

- $\alpha u + \beta v \in W$ أو $\alpha u + v \in W$

Ex : Prove that the set $W = \{(x, y) \in R^2 : y = 2x\}$ is subspace of R^2

solution:

1. $(0,0) \in W$ because $2(0) = 0$

2. If $u = (x, y) \in W$ then $y = 2x$ and $v = (x_1, y_1) \in W$ then $y_1 = 2x_1$

* $u + v = (x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$

$\rightarrow y + y_1 = 2x + 2x_1 = 2(x + x_1)$

then $u + v \in W$

3. If $u = (x, y) \in W$ then $y = 2x$ and $\alpha \in \mathbb{R}^2$

* $\alpha u = \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

$\rightarrow \alpha y = \alpha(2x) = 2(\alpha x)$

$\alpha u \in W$

W is a subspace of $\mathbb{R}^2$

Ex : Show that the set $W = \{(x, x+1) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$ is not a subspace of $\mathbb{R}^2$

solution:

W is not a subspace of $\mathbb{R}^2$ since $(0,0) \notin W$

Ex : Determine whether the set $W = \{(x,y,z) \in R^3 : xy = 0\}$ subspace of $\mathbb{R}^3$ or not

solution:

W is not a subspace because

$u = (1,0,1) \in W$ and $v = (0,1,1) \in W$

but $u + v = (1,1,2) \notin W$; $(1)(1) \neq 0$

Ex : Prove that the set $W = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y - z = 0\}$ is not a subspace of $\mathbb{R}^3$

solution:

W . is not a subspace of $\mathbb{R}^3$ since

$u = (1,2,3)$ and $v = (2,3,7) \in W$

but $u + v = (3,5,10) \notin W$; $3^2 + 5 - 10 \neq 0$

Ex : Determine whether the set $W = \{(x,y,z) \in R^3 : z \leq x + y\}$ is a subspace of R^3

solution:

W is not a subspace of $\mathbb{R}^3$ since

$u = (3,2,4) \in W$, $\alpha = -2 \in \mathbb{R}$

but $\alpha u = (-6,-4,-8) \notin W$, $(x + y = -6 - 4 = -10 < z)$

Ex : Show that the set $W = \{A \in M_{22} ; \det(A) = 0\}$ is not a subspace of M_{22}

solution:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in W$$

but $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin W$, $\det(A + B) \neq 0$

Then W is not asubspace of M_{22}

Ex : Show that the set $W=\{A\in M_{22}\,;\,A^2=A\}$ is not a subspace of M_{22}

solution:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\in W\quad\Rightarrow\quad A^2=A\quad,\ B^2=B$$

but $A+B=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\notin W$, because $(A+B)^2=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&1\\1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\neq A+B$

Then W is not asubspace of M_{22}

Ex : Prove that the set $W=\{(a-b,2a,3a+b),a,b\in R\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$

solution:

1. $(0,0,0)\in W$
2. If $u,v\in W$ where $u=(a-b,2a,3a+b)$, $v=(a_1-b_1,2a_1,3a_1+b_1)$

* $u+v=(a-b,2a,3a+b)+(a_1-b_1,2a_1,3a_1+b_1)$

$=(a-b+a_1-b_1,2a+2a_1,3a+b+3a_1+b_1)$

$=((a+a_1)-(b+b_1)\,,\,2(a+a_1)\,,\,3(a+a_1)+(b+b_1))\in W\quad\Rightarrow\quad u+v\in W$

3. If $u\in W$ where $u=(a-b,2a,3a+b)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

* $\alpha u=\alpha(a-b,2a,3a+b)$

$=(\alpha(a-b),\alpha(2a),\alpha(3a+b))$

$=(\alpha a-\alpha b,2\alpha a,3\alpha a+\alpha b)\in W$

$\alpha u\in W$

W is a subspace of $\mathbb{R}^4$

Ex : Prove that the set $W=\{(x,y,z)\in R^3:\ 2x+3y-z=0\}$ is a subspace of $\mathbb{R}^3$

solution:

1. $(0,0,0)\in W$ because $2(0)+3(0)-0=0$
2. If $u=(x,y,z)$ and $v=(x_1,y_1,z_1)\in W$ then $2x+3y-z=0$ and $2x_1+3y_1-z_1=0$

* $u+v=(x,y,z)+(x_1,y_1,z_1)=(x+x_1,y+y_1,z+z_1)$

$\rightarrow\ 2(x+x_1)+3(y+y_1)-(z+z_1)=2x+2x_1+3y+3y_1-z-z_1$

$=(2x+3y-z)+(2x+3y-z)=0$

$u+v\in W$

3. If $u=(x,y,z)\in W$ then $2x+3y-z=0$, $\alpha\in R$

* $\alpha u=\alpha(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

$\rightarrow\ 2\alpha x+3\alpha y-\alpha z=\alpha(2x+3y-z)=0$

$\alpha u\in W$

W is a subspace of $\mathbb{R}^3$

Ex : Prove that the set $W = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,/\, a-2b+c=0 \wedge b+2c+2d=0\}$

is a subspace of $\mathbb{R}^4$

solution:

1. $(0,0,0,0) \in W$ because $0-2(0)+0=0 \wedge 0+2(0)+2(0)=0$

2. If $(a,b,c,d) \in W$ then $a-2b+c=0 \wedge b+2c+2d=0$

If $(a_1,b_1,c_1,d_1) \in W$ then $a_1-2b_1+c_1=0 \wedge b_1+2c_1+2d_1=0$

* $(a,b,c,d)+(a_1,b_1,c_1,d_1)=(a+a_1,b+b_1,c+c_1,d+d_1)$

$\to (a+a_1)-2(b+b_1)+(c+c_1)=(a-2b+c)+(a_1-2b_1+c_1)=0$

$\to (b+b_1)+2(c+c_1)+2(d+d_1)=(b+2c+d)+(b_1+2c_1+d_1)=0$

$(a,b,c,d)+(a_1,b_1,c_1,d_1) \in W$

3. If $(a,b,c,d) \in W$ then $a-2b+c=0 \wedge b+2c+2d=0$, $\alpha \in R$

* $\alpha(a,b,c,d)=(\alpha a,\alpha b,\alpha c,\alpha d)$

$\to \alpha a-2(\alpha b)+(\alpha c)=\alpha(a-2b+c)=0$

$\to \alpha b+2(\alpha c)+2(\alpha d)=\alpha(b+2c+2d)=0$

$\alpha(a,b,c,d) \in W$

W is a subspace of $\mathbb{R}^4$

Ex : If $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}, a,b \in R \right\}$, prove that W is a subspace of $M_{2\times 2}$

solution:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ because $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (W has at least one vector)

2. If $A,B \in W$ then $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 2a_1 \end{bmatrix}$

* $A+B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 2a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ 0 & 2(a+a_1) \end{bmatrix}$

$A+B \in W$

3. If $A \in W$ then $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$, $\alpha \in R$

* $\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & 2\alpha a \end{bmatrix}$

$\alpha A \in W$

W is a subspace of $M_{2\times 2}$

Ex : If $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix}, a,b \in R \right\}$, prove that W is a subspace of $M_{2\times 2}$

solution:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ because $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(0)-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. If $A,B \in W$ then $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 2a_1-b_1 \end{bmatrix}$

* $A+B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 2a_1-b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ 0 & 2(a+a_1)-(b+b_1) \end{bmatrix} \in W$

$A+B \in W$

3. If $A \in W$ then $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

* $\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ 0 & 2\alpha a - \alpha b \end{bmatrix} \in W$

$\alpha A \in W$

W is a subspace of $M_{2\times 2}$

Ex : Determine whether the set $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a+b+c+d=0 , a,b,c,d \in R \right\}$

is a subspace of $M_{2\times 2}$ or not

solution:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ because $0+0+0+0=0$ (W has at least one vector)

2. If $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$ and $B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in W$ then $a+b+c+d=0$, $a_1+b_1+c_1+d_1=0$

* $A+B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ c+c_1 & d+d_1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow (a+a_1)+(b+b_1)+(c+c_1)+(d+d_1) = (a+b+c+d)+(a_1+b_1+c_1+d_1) = 0$

$A+B \in W$

3. If $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$ then $a+b+c+d=0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

* $\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$

$\rightarrow \alpha a + \alpha b + \alpha c + \alpha d = \alpha(a+b+c+d) = 0$

$\alpha A \in W$

W is a subspace of $M_{2\times 2}$

Ex : Let n is integer number and the set $W = \{A \in M_{2\times2} : A^t = nA\}$

Prove that W is a subspace of $M_{2\times2}$

solution:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ because $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. If $A, B \in W$ then $A^t = nA$, $B^t = nB$

   * $(A+B)^t = A^t + B^t = nA + nB = n(A+B)$

   $A + B \in W$

3. If $A \in W$ then $A^t = nA$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   * $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha nA = n(\alpha A)$

   $\alpha A \in W$

   W is a subspace of $M_{2\times2}$

Ex : Prove that the set $W = \{A \in M_{3\times3} : A^t = kA\}$ is a subspace of $M_{3\times3}$ and deduce that the symmetric matrices and skew-symmetric matrices of dgree 3 are subspaces of $M_{3\times3}$

solution:

1. $\underline{0} \in W$ because $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (W has at least one vector)

2. if $A, B \in W$ then $A^t = kA$, $B^t = kB$

   * $(A+B)^t = A^t + B^t = kA + kB = k(A+B)$

   $A + B \in W$

3. $A \in W$ then $A^t = kA$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   * $(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(kA) = k(\alpha A)$

   $\alpha A \in W$

W is a subspace of $M_{3\times3}$

From the proof

1. If $k = 1$, $W = \{A \in M_{3\times3} : A^t = A\}$ is a subspace , then the symmetric matrices of degree 3 is a subspace
2. If $k = -1$, $W = \{A \in M_{3\times3} : A^t = -A\}$ is a subspace , then the skew-symmetric matrices of degree 3 is a subspace

Ex : Let $a \in \mathbb{R}$ and $W = \{P(x) = ax^2 + a : a \in R\}$, prove W is a subspace of $P_2(x)$

solution:

1. $P(x) = 0x^2 + 0 \in W$

2. If $P(x) = ax^2 + a \in W$ and $P_1(x) = a_1x^2 + a_1 \in W$

   * $P(x) + P_1(x) = (ax^2 + a) + (a_1x^2 + a_1)$

   $= (a + a_1)x^2 + (a + a_1)$

   $P(x) + P_1(x) \in W$

3. If $P(x) = ax^2 + a \in W$, $\alpha \in R$

   * $\alpha P(x) = \alpha\left(ax^2 + a\right) = (\alpha a)x^2 + (\alpha a)$

   $\alpha P(x) \in W$

   W is a subspace of $P_2(x)$

Ex : Prove the set $W = \{P(x) = ax^2 + bx + c,\ 2a - b + c = 0\ , a,b,c \in R\}$ is a subspace of $P_2(x)$

solution:

1. $P(x) = 0x^2 + 0x + 0 \in W$, $W \neq \phi$

2. If $P(x) = ax^2 + bx + c \in W$ and $P_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \in W$

   then $2a - b + c = 0$ and $2a_1 - b_1 + c_1 = 0$

   * $P(x) + P_1(x) = ax^2 + bx + c + a_1x^2 + b_1x + c_1$

   $= (a + a_1)x^2 + (b + b_1)x + (c + c_1)$

   $\rightarrow 2(a + a_1) - (b + b_1) + (c + c_1) = (2a - b + c) + (2a_1 - b_1 + c_1) = 0$

   $P(x) + P_1(x) \in W$

3. If $P(x) = ax^2 + bx + c \in W$ then $2a - b + c = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

   * $\alpha P(x) = \alpha\left(ax^2 + bx + c\right) = \alpha ax^2 + \alpha bx + \alpha c$

   $2\alpha a - \alpha b + \alpha c = \alpha(2a - b + c) = 0$

   $\alpha P(x) \in W$

   W is a subspace of $P_2(x)$

MATH 244

Math 244

LINEAR ALGEBRA

Second Mid-term

شرح و حل تمارين

محمد ندا (ابو يوسف)

LINEAR ALGEBRA

Linear Combination and Span

Linear Combination

Definition : Linear Combination

Let $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ be vectors in a vector space V and $u \in V$ is said to be a linear combination if we can expressed

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n v_n \quad \text{for} \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_n \in R$$

- هام جدا : نضع الشرط $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n v_n$ في صيغة نظام معادلات خطية و نحلها اذا كان النظام متسقا (للنظام حل وحيد أو عدد لا نهائي من الحلول) فان u تركيب خطي (linear combination) للمتجهات
- اما اذا كان النظام ليس له حل فان u ليس تركيب خطي للمتجهات (not linear combination)

Ex : Express the vector $v = (1,-7,5) \in R^3$ as a linear combination of
$v_1(1,-1,1)$, $v_2(1,0,1)$, $v_3(1,1,0)$

solution:

* $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots\ldots\ldots + \alpha_n v_n$

$(1,-7,5) = \alpha_1(1,-1,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,1,0)$

$(1,-7,5) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 &= -7 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 5 \end{aligned}$$

* $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[-R1+R3]{R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{-R2+R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R3+R2]{R3+R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

$\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = -4$

$(1,-7,5) = 3(1,-1,1) + 2(1,0,1) - 4(1,1,0)$

v is a linear combination of the vectors v_1 , v_2 , v_3

هام جدا : يمكن ايجاد قيمة المحدد للنظام المربع و اذا كان قيمة المحدد ≠ صفر فان للنظام حل وحيد و يكون المتجه v هو تركيب خطي للمتجهات (linear combination) اما اذا كان المحدد = 0 نحل النظام بالاختزال (reduction)

اما اذا كان النظام غير مربع نحل بالاختزال اذا كان للنظام حل فان المتجه يكون (linear combination)
و اذا كان ليس له حل not linear combination

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Determine whether the vector $v=(1,-7,5)\in R^3$ is a linear combination of the vectors $v_1(1,-1,1)$, $v_2(1,0,1)$, $v_3(1,1,0)$

solution:

$* \quad v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots\dots\dots+\alpha_n v_n$

$(1,-7,5)=\alpha_1(1,-1,1)+\alpha_2(1,0,1)+\alpha_3(1,1,0)$

$(1,-7,5)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,-\alpha_1+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$$
$$-\alpha_1+\alpha_3=-7$$
$$\alpha_1+\alpha_2=5$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\-1&0\\1&1\end{matrix}=(0)+(1)+(-1)-(0)-(1)-(0)=-1\neq 0$$

the system has one solution

v is a linear combination of the vectors v_1 , v_2 , v_3

ملحوظة : عند ايجاد قيمة المحدد للنظام و كان قيمة المحدد = 0 فان النظام قد يكون له عدد غير منته من الحلول او ليس له حلول و لا نستطيع تحديد هل المتجهات تركيب خطي ام لا و لابد من حلها بالاختزال (جاوس أو جاوس جوردان او بالعمليات على الصفوف)

Ex : Determine whether the vector $h(x)=2x^2-3x+1$ is a linear combination of the vectors $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x+1$, $k(x)=x^2+2$

solution

$h(x)=\alpha_1 f(x)+\alpha_2 g(x)+\alpha_3 k(x)$

$2x^2-3x+1=\alpha_1(x^2+x)+\alpha_2(x+1)+\alpha_3(x^2+2)$

$2x^2-3x+1=(\alpha_1+\alpha_3)x^2+(\alpha_1+\alpha_2)x+(\alpha_2+2\alpha_3)$

$$\alpha_1+\alpha_3=2$$
$$\alpha_1+\alpha_2=-3$$
$$\alpha_2+2\alpha_3=1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\1&1&0&-3\\0&1&2&1\end{array}\right]\xrightarrow{-R1+R2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-1&-5\\0&1&2&1\end{array}\right]\xrightarrow{-R2+R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-1&-5\\0&0&3&6\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-1&-5\\0&0&1&2\end{array}\right]\begin{matrix}\xrightarrow{-R3+R1}\\\xrightarrow{R3+R2}\end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&-3\\0&0&1&2\end{array}\right]\quad\begin{matrix}\alpha_1=0\\\alpha_2=-3\\\alpha_3=2\end{matrix}$$

$2x^2-3x+1=(0)(x^2+x)+(-3)(x+1)+(2)(x^2+2)$

$h(x)$ is a linear combination of the vectors

Ex : Let $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$, express $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$ as a linear combination of A and A^2

solution:

* $A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$

* $B=\alpha_1 A+\alpha_2 A^2$

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+2\alpha_2\\0 & \alpha_1+\alpha_2\end{bmatrix}$$

$\alpha_1+\alpha_2=1$

$\alpha_1+2\alpha_2=-1$

solving the system $\alpha_1=3$, $\alpha_2=-2$

$B=3A-2A^2$

Ex : Determine whether the vector $v=(6,-2,4)$ is a linear combination of the vectors $v_1=(1,-1,0)$, $v_2=(1,0,1)$, $v_3=(3,-5,-2)$

solution:

* $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\dots\dots\dots+\alpha_n v_n$

$(6,-2,4)=\alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(1,0,1)+\alpha_3(3,-5,-2)$

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3&=6\\-\alpha_1-5\alpha_3&=-2\\\alpha_2-2\alpha_3&=4\end{aligned}\qquad,\qquad \det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\-1 & 0 & -5\\0 & 1 & -2\end{vmatrix}=0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 6\\-1 & 0 & -5 & -2\\0 & 1 & -2 & 4\end{array}\right]\xrightarrow{(1)R1,2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 6\\0 & 1 & -2 & 4\\0 & 1 & -2 & 4\end{array}\right]\xrightarrow[-R2,3]{-R2,1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 5 & 7\\0 & 1 & -2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\quad\begin{aligned}\alpha_1+5\alpha_3&=7\\\alpha_2-2\alpha_3&=4\end{aligned}$$

$\alpha_1=7-5\alpha_3$

$\alpha_2=4+2\alpha_3$

put $\alpha_3=t$, $\alpha_1=7-5t$, $\alpha_2=4+2t$, $t\in\mathbb{R}$

the system has many infinite solution

the vector v is a linear combination of v_1 , v_2 and v_3

Ex : Express the vector $A=\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ as a linear combination of

the vectors $A_1=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

solution:

$A=\alpha_1 A_1+\alpha_2 A_2+\alpha_3 A_3$

$$\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_1+4\alpha_2 & -\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3 \\ 2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3 & 3\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1+4\alpha_2 \qquad &=6 \\ -\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3&=-8 \\ 2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3&=-1 \\ 3\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3&=-8 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & -8 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{R1+R2} \\ \xrightarrow{-2R1+R3} \\ \xrightarrow{-3R1+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -10 & 1 & -13 \\ 0 & -14 & 4 & -26 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{6}R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -10 & 1 & -13 \\ 0 & -14 & 4 & -26 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-4R2+R1} \\ \\ \xrightarrow{10R2+R3} \\ \xrightarrow{14R2+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{22}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{13}{3} & -\frac{49}{3} \\ 0 & 0 & \frac{26}{3} & -\frac{92}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{3}{13}R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{22}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{49}{13} \\ 0 & 0 & \frac{26}{3} & -\frac{92}{3} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{4}{3}R3+R1} \\ \xrightarrow{-\frac{1}{3}R3+R2} \\ \\ \xrightarrow{-\frac{26}{3}R3+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{30}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{12}{13} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{49}{13} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

the system has no solution

A is not a linear combination of A_1 , A_2 and A_3

Ex : Find all values of a where the vector $(a,4,8)$ is a linear combination of the vectors $(1,2,4),(3,3,2)$

solution

* $(a,4,8)=\alpha_1(1,2,4)+\alpha_2(3,3,2)$

$(a,4,8)=(\alpha_1+3\alpha_2, 2\alpha_1+3\alpha_2, 4\alpha_1+2\alpha_2)$

$$\alpha_1+3\alpha_2=a$$
$$2\alpha_1+3\alpha_2=4$$
$$4\alpha_1+2\alpha_2=8$$

* $$\left[\begin{array}{cc|c}4&2&8\\2&3&4\\1&3&a\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{4}R1}\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{1}{2}&2\\2&3&4\\1&3&a\end{array}\right]\xrightarrow[-R1+R3]{-2R1+R2}\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{1}{2}&2\\0&2&0\\0&\frac{5}{2}&a-2\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R2}\left[\begin{array}{cc|c}1&\frac{1}{2}&2\\0&1&0\\0&\frac{5}{2}&a-2\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-\frac{5}{2}R2+R3]{-\frac{1}{2}R2+R1}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&2\\0&1&0\\0&0&a-2\end{array}\right]$$

$\alpha_1=2$, $\alpha_2=0$

لكي يكون للنظام حل (متسق) $a-2=0$

the vector is a linear combination if $a-2=0$, $a=2$

Ex : Find all values of β where the vector $(1,\beta,\beta^2+1)$ is a linear combination of the vectors $(1,1,2),(1,-1,0),(3,1,4)$

solution:

$(1,\beta,\beta^2+1)=\alpha_1(1,1,2)+\alpha_2(1,-1,0)+\alpha_3(3,1,4)$

$(1,\beta,\beta^2+1)=(\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3, \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+4\alpha_3)$

$$\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=1$$
$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=\beta$$
$$2\alpha_1 + 4\alpha_3=\beta^2+1$$

* $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&1\\1&-1&1&\beta\\2&0&4&\beta^2+1\end{array}\right]\xrightarrow[-2R1+R3]{-R1+R2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&1\\0&-2&-2&\beta-1\\0&-2&-2&\beta^2-1\end{array}\right]\xrightarrow{-R2+R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&3&1\\0&-2&-2&\beta-1\\0&0&0&\beta^2-\beta\end{array}\right]$$

للنظام حل اذا كان $\beta^2-\beta=0$

the system has solution if : $\beta^2-\beta=0 \rightarrow \beta=0$, $\beta=1$

the vector $(1,\beta,\beta^2+1)$ is a linear comination of $(1,1,2),(1,-1,0),(3,1,4)$ if $\beta=0$ or $\beta=1$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

المجموعات المولدة Span

Definition : Span

If $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ is a nonempty set of vecrors in a vector space V , then the supspace S of V that consists of all possible linear combination of the vectors in S is called the subspace of V generated by S . and we say that the vectors $v_1,v_2,\ldots,v_n$ span S

تعريف :

لتكن $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعات جزئية من فضاء المتجهات V . نقول ان S تولد V اذا كان كل عنصر من V تركيب خطي لعناصر S

خطوات الحل:

1- نفرض متجه وليكن $v\in V$
2- نحل معادلة التركيب الخطي $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+\ldots$
3- اذا كان النظام متسق فان مجموعة متجهات S تولد الفضاء V

ملحوظة :

أولا: النظام مربع

- يمكن ايجاد قيمة المحدد النظام و اذا كان قيمة المحدد ≠ صفر فان للنظام حل وحيد و يكون المتجهات تولد الفضاء (span)
- يمكن ايجاد قيمة المحدد النظام و اذا كان قيمة المحدد = صفر يكون المتجهات لا تولد الفضاء (not span)

ثانيا : النظام مستطيل

- نحل النظام بأي طريقة للاختزال اذا كان يوجد شرط حتى يكون النظام (consistent) أو many solution فان المتجهات (not span)
- نحل النظام بأي طريقة للاختزال اذا كان لا يوجد شرط حتى يكون النظام (consistent) أي حل وحيد فان المتجهات (span)

Ex : Determine whether the vectors $v_1=(2,0,2)$, $v_2=(3,1,1)$, $v_3=(-3,5,5)$ span the vector space $\mathbb{R}^3$

solution:

Let $v=(x,y,z)\in R^3$

* $(x,y,z)=\alpha_1(2,0,2)+\alpha_2(3,1,1)+\alpha_3(-3,5,5)$

$$(x,y,z)=\left(2\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_3,\alpha_2+5\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3\right)$$

$$2\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_3=x$$
$$\alpha_2+5\alpha_3=y$$
$$2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3=z$$

* $$\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&-3&x\\0&1&5&y\\2&1&5&z\end{array}\right]\xrightarrow{-R1+R3}\left[\begin{array}{ccc|c}2&3&-3&x\\0&1&5&y\\0&-2&8&z-x\end{array}\right]\xrightarrow[2R2+R3]{-3R2+R1}\left[\begin{array}{ccc|c}2&0&-18&x-3y\\0&1&5&y\\0&0&18&z-x+2y\end{array}\right]$$

the system has one solution (the vector $v(x,y,z)$ is a linear combination of v_1,v_2,v_3)

$\Rightarrow$ v_1,v_2,v_3 span R^3

هام جدا : في هذا المثال يمكن ايجاد قيمة المحدد للنظام و اذا كان قيمة المحدد ≠ صفر فان للنظام حل وحيد و يكون المتجهات تولد الفضاء

$$\begin{vmatrix}2&3&-3\\0&1&5\\2&1&5\end{vmatrix}\begin{matrix}2&3\\0&1\\2&1\end{matrix}=(10)+(30)+(0)-(0)-(10)-(-6)=36\neq0$$

ملحوظات هامة:

-1 ليكن $S=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$ فإنها تولد $\mathbb{R}^n$ اذا و فقط اذا كان النظام متسقا

-2 ليكن $S=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$ فإنها تولد $\mathbb{R}^n$ اذا و فقط اذا كان $\det(A)\neq 0$ (المصفوفة المربعة)

Ex : Determine whether the vectors $v_1=(2,0,2)$, $v_2=(3,1,1)$, $v_3=(-3,5,5)$ span the vector space $\mathbb{R}^3$

solution:

Let $v=(x,y,z)\in R^3$

* $(x,y,z)=\alpha_1(2,0,2)+\alpha_2(3,1,1)+\alpha_3(-3,5,5)$

$(x,y,z)=(2\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_3,\alpha_2+5\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3)$

$$2\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_3=x$$
$$\alpha_2+5\alpha_3=y$$
$$2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3=z$$

* $\det(A)=\begin{vmatrix}2&3&-3\\0&1&5\\2&1&5\end{vmatrix}\begin{matrix}2&3\\0&1\\2&1\end{matrix}=(10)+(30)+(0)-(0)-(10)-(-6)=36\neq 0$

the system is consistent , v is a linear comination of v_1,v_2 and v_3

v_1,v_2,v_3 span R^3

Ex : Determine whether the vectors $S=\{-x^2+1\ ,\ x^2+1\ ,\ 6x^2+5x+2\}$ span the vector space P_2

solution:

Let $h(x)=ax^2+bx+c$ in $P_2(x)$

* $ax^2+bx+c=\alpha_1(-x^2+1)+\alpha_2(x^2+1)+\alpha_3(6x^2+5x+2)$

$ax^2+bx+c=(-\alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3)x^2+(5\alpha_3)x+(\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)$

$$-\alpha_1+\alpha_2+6\alpha_3=a$$
$$5\alpha_3\ =b$$
$$\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=c$$

* $\det(A)=\begin{vmatrix}-1&1&6\\0&0&5\\1&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{matrix}=(0)+(5)+(0)-(0)-(-5)-(0)=10\neq 0$

the system is consistent , $h(x)$ is a linear comination of $\{-x^2+1\ ,\ x^2+1\ ,\ 6x^2+5x+2\}$

the vectors span $P_2(x)$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Determine whether the vectors $v_1=(0,1,1)$, $v_2=(1,-1,0)$, $v_3=(3,-5,-2)$ span the vector space $\mathbb{R}^3$

solution:

Let $v=(x,y,z)\in R^3$

* $(x,y,z)=\alpha_1(0,1,1)+\alpha_2(1,-1,0)+\alpha_3(3,-5,-2)$

$(x,y,z)=(\alpha_2+3\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2-5\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_3)$

$$\alpha_2+3\alpha_3=x$$
$$\alpha_1-\alpha_2-5\alpha_3=y$$
$$\alpha_1-2\alpha_3=z$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&3&x\\1&-1&-5&y\\1&0&-2&z\end{array}\right]\xrightarrow{R_{1,2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-5&y\\0&1&3&x\\1&0&-2&z\end{array}\right]\xrightarrow{-1R_{1,3}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-5&y\\0&1&3&x\\0&1&3&z-y\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1R_{2,3}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&-5&y\\0&1&3&x\\0&0&0&z-y-x\end{array}\right]$$

the system has no solution

the vectors do not span R^3

عند حل النظام وجدنا شروط على الحل فان المتجهات لا تولد الفضاء

Ex : Find all values of β where the vectors $v_1=x^2-2x+3$, $v_2=3x-1$, $v_3=\beta x^2-x$ span $P_2(x)$

solution:

v_1 , v_2 , v_3 span $P_2(x)$ $\Rightarrow$ $Ax=B$ is consistent $(\det(A)\neq 0)$

* $ax^2+bx+c=\alpha_1(x^2-2x+3)+\alpha_2(3x-1)+\alpha_3(\beta x^2-x)$

$ax^2+bx+c=(\alpha_1+\beta\alpha_3)x^2+(-2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3)x+(3\alpha_1-\alpha_2)$

$$\alpha_1+\beta\alpha_3=a$$
$$-2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3=b$$
$$3\alpha_1-\alpha_2=c$$

* $\det(A)\neq 0$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}1&0&\beta&1&0\\-2&3&-1&-2&3\\3&-1&0&3&-1\end{array}\right.\neq 0$$

$2\beta-1-9\beta\neq 0$, $-7\beta\neq 1$, $\beta\neq-\frac{1}{7}$

$\beta\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{7}\right\}$

Ex : Let W is subspace of $M_{2\times2}$ span of $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$, what is the condition of a,b,c,d to satisfy $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in W$

solution:

$$* \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&\alpha_1\\\alpha_2&\alpha_3\end{bmatrix}$$

$\alpha_1=b$, $\alpha_2=c$, $\alpha_3=d$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=a \longrightarrow a=b+c+d$

Ex : Let the vectors $v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(1,-2,3,-4)$ in R^4 , Find the values x and y so be the vector $(x,1,1,y)$ is an element of space that span of v_1 , v_2

solution:

حتى يكون المتجه $(x,1,1,y)$ ينتمي للفضاء المولد بالمتجهات v_1 , v_2 يجب أن يتحقق أن يكون النظام الخطي $AX=B$ متسقا

$(x,1,1,y)\in$ space that span by v_1 , v_2 $\Rightarrow$ $(x,1,1,y)=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2$ (consistent)

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x\\2&-2&1\\3&3&1\\4&-4&y\end{array}\right]\xrightarrow[-4R_1,R_4]{-2R_1,R_2\;\;-3R_1,R_3}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x\\0&-4&1-2x\\0&0&1-3x\\0&-8&y-4x\end{array}\right]\xrightarrow{R_{3,4}}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x\\0&-4&1-2x\\0&-8&y-4x\\0&0&1-3x\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_{2,3}}\left[\begin{array}{cc|c}1&1&x\\0&-4&1-2x\\0&0&y-2\\0&0&1-3x\end{array}\right]$$

the system is cosistent if $y-2=0$ and $1-3x=0$

$$y=2 \text{ and } x=\frac{1}{3}$$

ملاحظات:

- اذا كان النظام مربع ($m=n$) اذا كانت قيمة المحدد $\det(A)=0$ اذا المتجهات لا تولد اما $\det(A)\neq 0$ يولد
- اذا كان المصفوفة ($m>n$) دائما يعطي حل مشروط و لذلك لا يولد
- اذا كان المصفوفة ($m<n$) نحل النظام اما يعطي حل بشروط (لا يولد) او يعطي حل بدون شروط (حل وحيد) فانه(يولد)

Ex : Find the value of $x, y \in \mathbb{R}$ so be $v = (-2, x, y, 5)$ belongs to subspace in R^4 that is spanned by $v_1 = (-1,2,3,1)$, $v_2 = (1,-1,1,2)$

solution

بما أن المتجه v موجود في الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^4$ المولد $v_1 = (-1,2,3,1)$, $v_2 = (1,-1,1,2)$
اذا يتحقق $(-2, x, y, 5) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ أو النظام الخطي $AX = B$ متسقا

$\because$ v_1 and v_2 span $v = (-2, x, y, 5) \Rightarrow (-2, x, y, 5) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ (consistent)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & x \\ 1 & 3 & y \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{1R_1+R_2} \\ \xrightarrow{-R_1+R_3} \\ \xrightarrow{-2R_1+R_4} \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & x-2 \\ 0 & 4 & y+2 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-4R_{2,3}} \\ \xrightarrow{-3R_{2,4}} \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & x-2 \\ 0 & 0 & y-4x+10 \\ 0 & 0 & -3x+15 \end{array}\right]$$

the system is consistent if $-3x + 15 = 0$ and $y - 4x + 10 = 0$

$x = 5$ and $y = 10$

Ex : Determine the vectors that span the subspace $W = \{(a, b, -a, a+b)\}$ in $\mathbb{R}^4$

solution:

* $(a, b, -a, a+b) = (a, 0, -a, a) + (0, b, 0, b)$
$= a(1,0,-1,1) + b(0,1,0,1)$

$\Rightarrow (1,0,-1,1), (0,1,0,1)$ span W

Ex : Determine the vectors that span the subspace $W = \{(a, b, c, d) : a + b + c = 0\}$ in $\mathbb{R}^4$

solution:

$a + b + c = 0 \longrightarrow c = -a - b$

* $(a, b, c, d) = (a, b, -a-b, d)$
$= (a, 0, -a, 0) + (0, b, -b, 0) + (0, 0, 0, d)$
$= a(1,0,-1,0) + b(0,1,-1,0) + d(0,0,0,1)$

the vectors $(1,0,-1,0), (0,1,-1,0), (0,0,0,1)$ span W

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Linearly dependent and linearly independent
الارتباط الخطي والاستقلال الخطي

تعريف الاستقلال الخطي (linearly independent)

يكون المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ في فضاء المتجهات (مستقلة خطيا)(linearly independent) اذا كان الحل الوحيد للمعادلة $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ هو الحل الصفري (الحل التافه) $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$

- اذا كان النظام المتجانس $AX = 0$ الناتج من $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ له الحل الصفري أو $\det(A) \neq 0$ فان $v_1, v_2, ..., v_n$ مستقلة خطيا (linearly independent)

تعريف الارتباط الخطي (linearly dependent)

يكون المتجهات $v_1, v_2, ..., v_n$ في فضاء المتجهات V (مرتبطة خطيا) linearly dependent اذا كان الحل للمعادلة $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ ليست جميعها أصفار (عدد غير منته من الحلول)

- اذا كان النظام المتجانس $AX = 0$ الناتج من $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$ له عدد غير منته من الحلول أو $\det(A) = 0$ فان $v_1, v_2, ..., v_n$ مرتبطة خطيا (linearly dependent)

- النظام المتجانس $AX = 0$: اما يكون له الحل التافه (الحل الصفري) أو عدد غير منته من الحلول

أولا: النظام المربع $m = n$
اذا كان $|A| \neq 0$ فان الحل للنظام هو الحل الصفري و تكون المتجهات مستقلة خطيا (linearly independent)
اذا كان $|A| = 0$ فان الحل للنظام هو عدد غير منته من الحلول و تكون المتجهات مرتبطة خطيا(linearly dependent)

ثانيا : النظام الغير مربع $m < n$
اذا كان النظام المتجانس عدد المعادلات اقل من عدد المجاهيل فان له عدد غير منته من الحلول linearly dependent

ثالثا : النظام الغير مربع $m > n$
اذا كان النظام المتجانس عدد المعادلات اكبر من عدد المجاهيل لا بد من حل النظام بطريقتي جاوس أو جاوس جوردان او الاختزال و حسب الحلول نحدد المتجهات مرتبطة (عدد غير منتهي من الحلول) أو مستقلة خطيا (الحل التافه)

نظرية :

- اذا كان النظام $AX = 0$ و كانت المصفوفة A من الدرجة $m \times n$ حيث $m < n$ فان له عدد غير منته من الحلول (أي أن المتجهات linearly dependent مرتبطة خطيا)

Ex : Determine whether the vectors $S=\{(1,-1,0),(0,-1,2),(2,1,1)\}$ are linearly independent or linearly dependent in R^3

solution:

* $\alpha_1(1,-1,0)+\alpha_2(0,-1,2)+\alpha_3(2,1,1)=0$

$$\alpha_1 + 2\alpha_3=0$$
$$-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$$
$$2\alpha_2+\alpha_3=0$$

* $\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right| =(-1)+(0)+(-4)-(0)-(2)-(0)=-7\neq 0$

the homogenuous system has a trivial solution $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

the vectors v_1, v_2 and v_3 are linearly independent

Ex : Determine whether the vectors $S=\{(1,1,2),(1,4,5),(1,2,7),(-1,8,3)\}$ are linearly independent or linearly dependent in R^3

solution:

* $\alpha_1(1,1,2)+\alpha_2(1,4,5)+\alpha_3(1,2,7)+\alpha_4(-1,8,3)=0$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=0$$
$$\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3+8\alpha_4=0$$
$$2\alpha_1+5\alpha_2+7\alpha_3+3\alpha_4=0$$

The homogenuous system its matrix A is 3×4 $\Rightarrow$ the system has many infinitly solutions

the vectors are linearly dependent

Ex : For which real value of β the vectors $\{(\beta^2-5,1,0),(2,-2,3),(2,3,-3)\}$ form a linear independent set in R^3

solution:

* $\alpha_1(\beta^2-5,1,0)+\alpha_2(2,-2,3)+\alpha_3(2,3,-3)=0$

$$(\beta^2-5)\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=0$$
$$\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=0$$
$$3\alpha_2-3\alpha_3=0$$

the vectors are linearly independent $\Rightarrow$ has a trivial solution $\det(A)\neq 0$

* $\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} \beta^2-5 & 2 & 2 & \beta^2-5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 \end{array}\right| =6(\beta^2-5)+6+6-9(\beta^2-5)\neq 0$

$$-3\beta^2+27\neq 0 \quad , \quad \beta^2\neq 9 \quad , \quad \beta\neq \pm 3$$
$$\beta\in\mathbb{R}-\{-3,3\}$$

Ex : For which real value of a the vectors $B=\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,-1,-1,a)\}$ form a linear independent set in R^3

solution:

* $\alpha_1(1,1,1,1)+\alpha_2(1,-1,1,-1)+\alpha_3(1,-1,-1,a)=0$

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=0\\ \alpha_1-\alpha_2-\alpha_3&=0\\ \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3&=0\\ \alpha_1-\alpha_2+a\alpha_3&=0 \end{aligned}$$

* $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 1&-1&-1&0\\ 1&1&-1&0\\ 1&-1&a&0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{-R1+R2}\\ \xrightarrow{-R1+R3}\\ \xrightarrow{-R1+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&0\\ 0&-2&-2&0\\ 0&0&-2&0\\ 0&-2&a-1&0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Reduced}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&a+1&0 \end{array}\right]$$

we have $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

the vectors is linearly independent if $a+1=0$, $a=-1$

Ex : For which real value of a the vectors $S=\{1+x-2x^2,1-x+x^2,a-x^2\}$ form a linear dependent set in $P_2(x)$

solution:

* $\alpha_1(1+x-2x^2)+\alpha_2(1-x+x^2)+\alpha_3(a-x^2)=0$

$$\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2+a\alpha_3&=0\\ \alpha_1-\alpha_2\qquad&=0\\ -2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3&=0 \end{aligned}$$

the vectors are linearly dependent $\Rightarrow$ the system has nontrivial solution $\det(A)=0$

* $$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1&1&a&1&1\\ 1&-1&0&1&-1\\ -2&1&-1&-2&1 \end{array}\right| =1+a+1-2a=0$$

$-a+2=0$, $a=2$

Ex : For which real values of a and b the set $S=\{(1,-1,2,0),(1,a,2,b),(1,2,1,3)\}$ is a linear dependent

solution

* $\alpha_1(1,-1,2,0)+\alpha_2(1,a,2,b)+\alpha_3(1,2,1,3)=0$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$$
$$-\alpha_1+a\alpha_2+2\alpha_3=0$$
$$2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0$$
$$b\alpha_2+3\alpha_3=0$$

* $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\-1&a&2&0\\2&2&1&0\\0&b&3&0\end{array}\right]\xrightarrow[-2R1+R3]{R1+R2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&a+1&1&0\\0&0&-1&0\\0&b&3&0\end{array}\right]\rightarrow\quad \alpha_3=0$$

$$\alpha_1+\alpha_2=0$$
$$(a+1)\alpha_2=0$$
$$b\alpha_2=0$$

بما أن المتجهات مرتبطة خطيا فان قيم α_1 , α_2 لا تكون أصفار ومنها نستنتج قيم a,b كما يلي

the vectors is linearly dependent $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_2\neq 0$

$(a+1)\alpha_2=0 \xrightarrow{\alpha_2\neq 0} a+1=0$, $a=-1$

$b\alpha_2=0 \xrightarrow{\alpha_2\neq 0} b=0$

Ex : If $\{v_1,v_2,v_3\}$ are set of linearly independent in the space V . Determine whether $\{v_1+v_2\ ,\ v_2+v_3\ ,\ v_1+v_3\}$ are linearly dependent or linearly independent

solution:

$\because$ v_1,v_2,v_3 are linearly independent $\Rightarrow$ $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=0$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

$$\beta_1(v_1+v_2)+\beta_2(v_2+v_3)+\beta_3(v_1+v_3)=0$$
$$\beta_1 v_1+\beta_1 v_2+\beta_2 v_2+\beta_2 v_3+\beta_3 v_1+\beta_3 v_3=0$$
$$(\beta_1+\beta_3)v_1+(\beta_1+\beta_2)v_2+(\beta_2+\beta_3)v_3=0$$

$$\beta_1+\beta_3=\alpha_1=0$$
$$\beta_1+\beta_2=\alpha_2=0$$
$$\beta_2+\beta_3=\alpha_3=0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{-1R_{1,3}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{-1R_{2,3}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

then $\beta_1=\beta_2=\beta_3=0 \rightarrow \{v_1+v_2\ ,\ v_2+v_3\ ,\ v_1+v_3\}$ linearly independent

Ex : If $\{v_1 , v_2\}$ are set of linearly independent in the space V . Determine whether $\{v_1 , v_2 , v_1 + v_2\}$ are linearly dependent or linearly independent

solution:

$\because$ v_1 and v_2 are linearly independent $\Rightarrow$ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

*

$$\beta_1(v_1) + \beta_2(v_2) + \beta_3(v_1 + v_2) = 0$$
$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_1 + \beta_3 v_2 = 0$$
$$(\beta_1 + \beta_3)v_1 + (\beta_2 + \beta_3)v_2 = 0$$

$\beta_1 + \beta_3 = \alpha_1 = 0$

$\beta_2 + \beta_3 = \alpha_2 = 0$

the linear system $m < n \longrightarrow$ the system has many solution

$\{v_1, v_2 , v_1 + v_2\}$ linearly dependent

Ex : If V is a vector space and $S \subseteq V$ where $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $n \geq 2$. prove S is linearly dependent if and only if one of its vector is a linear combination of of other vectors

solution:

First : prove that if S are linearly dependent $\Rightarrow$ one of its vector is a linear combination

Let the set of vectors S are linearly dependent

if $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0 \rightarrow \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_3 \neq 0$ at least one of them $\neq 0$

$\alpha_1 \neq 0$

$-\alpha_1 v_1 = \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} v_3 + ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

v_1 is linear combination of other vectors

Second : Prove if one of the vectors is a linear combination of the other $\Rightarrow$ S dependent

Let v_n is a linear combination of the other

$v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ...$, for $\alpha_1, \alpha_2, ... \in \mathbb{R}$

$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... - v_n$

at least $\alpha_n = -1 \neq 0$ $\Rightarrow$ the set of vectors S are linearly dependent

Basis and Dimensions
الأساس و البعد

تعريف :

ليكن مجموعة متجهات $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ مجموعة جزئية من فضاء متجهات V .

فان هذه المتجهات هي(Basis) أساس للفضاء V

اذا تحقق شرطين

1- المتجهات $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ تولد V (span)

2- المتجهات $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ مستقلة خطيا (linearly independent)

و يكون بعد الأساس Dimension : عدد متجهات V

الأساس المعتاد (الأساس الطبيعي) Standard Basis

لكل فضاء يوجد له أساس معتاد (طبيعي) standard basis على سبيل المثال

1- الأساس المعتاد للفضاء R^2 هو $S = \{(1,0),(0,1)\}$ و يكون بعده (2)

2- الأساس المعتاد للفضاء R^3 هو $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ و يكون بعده (3)

3- الأساس المعتاد للفضاء $P_1(x)$ هو $S = \{x, 1\}$ و يكون بعده (2)

4- الأساس المعتاد للفضاء $P_2(x)$ هو $S = \{x^2, x, 1\}$ و يكون بعده (3)

5- الأساس المعتاد للفضاء $M_{2\times2}$ هو $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ و يكون بعده (4)

هام جدا : كيفية اثبات أن مجموعة المتجهات تمثل أساس (Basis)

1- اذا كان عدد متجهات المجموعة يساوي بعد الفضاء ($m = n$)

- اذا كان $\det(A) \neq 0$ تكون basis لأنها ستحقق الشرطين span and independent
- اذا كان $\det(A) = 0$ لا تكون basis لأنها تكون dependent

2- اذا كان عدد متجهات المجموعة أكبر من بعد الفضاء تكون not basis (لأن المتجهات ستكون linearly dependent)

3- اذا كان عدد متجهات المجموعة أصغر من بعد الفضاء ضروري اثبات الشرطين (span and independent) (بالاختزال)

Ex : Show that the set of vectors $S=\{(1,2,1),(1,3,1),(2,3,1)\}$ form a basis for the vector space $\mathbb{R}^3$

solution:

First: Prove S is span $\mathbb{R}^3$

Let $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

* $(x,y,z)=\alpha_1(1,2,1)+\alpha_2(1,3,1)+\alpha_3(2,3,1)$

$$\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=x$$
$$2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=y$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=z$$

$$\det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| =(3)+(3)+(4)-(2)-(3)-(6)=-1\neq 0$$

the system is consistent , S span R^3

Second : Prove the S are linearly independent

* $\alpha_1(1,2,1)+\alpha_2(1,3,1)+\alpha_3(2,3,1)=0$

$\det(A)\neq 0$

the homogenuous system has trivial solution $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

S are linearly independent

$\Rightarrow$ the set of vectors S are basis of R^3

**** يمكن ايجاد قيمة المحدد و نجد أن $\det(A)\neq 0$ و بالتالي يوجد حل وحيد للنظامين $\alpha_i v_i=0$, $\alpha_i v_i=v$

و بالتالي يتحقق أن المتجهات $\mathbb{R}^3$ independent and span in

Ex :Shoe that the polynomials $S=\{-x^2-x+1\,,\,x+5\,,\,2x^2+x+3\}$ form a basis of P_2

solution:

To show that the polynomials are linearly independent and span

$(ax^2+bx+c)\in P_2(x)$

$$\alpha_1(-x^2-x+1)+\alpha_2(x+5)+\alpha_3(2x^2+x+3)=0$$

$$(-\alpha_1+2\alpha_3)x^2+(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x+(\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3)=0 \qquad (1)$$

$$(-\alpha_1+2\alpha_3)x^2+(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x+(\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3)=ax^2+bx+c \qquad (2)$$

$$*\ \det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right| =(-3)+(0)+(-10)-(0)-(-5)-(2)=-10\neq 0$$

From equation (1) : the homogenuous has a trivial solution ,

polynomials are linearly independent

From equation (2) : the system has one solution ,the polynomials span $P_2(x)$

the polynomials form a basis for $P_2(x)$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Determine whether the vectors $S = \{(1,1,2),(1,2,3),(3,2,1),(1,0,-1)\}$ form a basis for R^3

solution:

* $\alpha_1(1,1,2)+\alpha_2(1,2,3)+\alpha_3(3,2,1)+\alpha_4(1,0,-1)=0$

$$\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4=0$$
$$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3 \quad =0$$
$$2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=0$$

* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$ $\quad m<n$, the system has many infinite solutions

the vectors are linearly dependent

the vectors do not form a basis for R^3

Ex : Determine whether the vectors $S = \left\{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ form a basis for $M_{2\times2}$

solution:

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}$

$$\alpha_1\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}=0$$

$$\alpha_1\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

* $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

the matrices are linearly dependent and not span $M_{2\times2}$

$\Rightarrow$ the matrices do not form a basis for $M_{2\times2}$

0559108708 (محمد ندا (ابو يوسف

Ex : Determine whether the vectors $S=\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,-1,-1,2)\}$ form a basis for R^4

solution:

* Prove S span R^4 (or not)

* $\alpha_1(1,1,1,1)+\alpha_2(1,-1,1,-1)+\alpha_3(1,-1,-1,2)=(x,y,z,w)$

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & -1 & y \\ 1 & 1 & -1 & z \\ 1 & -1 & 0 & w \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{-R_1+R2} \\ \xrightarrow{-R_1+R3} \\ \xrightarrow{-R_1+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -2 & -2 & y-x \\ 0 & 0 & -2 & z-x \\ 0 & -2 & -1 & w-x \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & -2 & z-x \\ 0 & -2 & -1 & w-x \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-R2+R1} \\ \xrightarrow{2R2+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & -2 & z-x \\ 0 & 0 & 1 & w-x \end{array}\right] \xrightarrow{R3\leftrightarrow R4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 1 & w-x \\ 0 & 0 & -2 & z-x \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-R3+R2} \\ \xrightarrow{2R3+R4} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y-w \\ 0 & 0 & 1 & w-x \\ 0 & 0 & 0 & z-3x+2w \end{array}\right]$$

the system is inconsistent , S not span R^4

$\Rightarrow$ S do not form a basis for R^4

Ex : For which real values of β do the vectors $S=\{1+\beta x^2 , 5+\beta x+3x^2 , 4+\beta x+x^2\}$ form a basis for P_2

solution:

$\because$ S is a basis for $P_2(x)$ $\rightarrow$ S is span of P_2 and linearly independent , $\det(A)=0$

$$* \det(A)=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & \beta & \beta & 0 & \beta \\ \beta & 3 & 1 & \beta & 3 \end{array}\right| \neq 0$$

$$(\beta)+(5\beta^2)+(0)-(0)-(3\beta)-(4\beta^2)\neq 0$$

$$\beta^2-2\beta\neq 0 \quad , \quad \beta(\beta-2)\neq 0 \rightarrow \beta\neq 0 \quad , \quad \beta\neq 2$$

$$\beta\in\mathbb{R}-\{0,2\}$$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Let $v_1=(1,1,\lambda)$, $v_2=(1,\lambda,1)$,$v_3=(\lambda,1,1)$. For which values λ do $\{v_1,v_2,v_3\}$ a basis for $\mathbb{R}^3$

solution:

$\because$ $\{v_1,v_2,v_3\}$ basis for $\mathbb{R}^3$ $\rightarrow$ the set is span and linerly independent $\det(A)\neq 0$

$$* \det(A)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 1 & \lambda & 1\\ \lambda & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & \lambda\\ \lambda & 1\end{matrix}\neq 0$$

$$(\lambda)+(\lambda)+(\lambda)-(1)-(1)-(\lambda^3)\neq 0$$

$$\lambda^3-3\lambda+2\neq 0$$

$$\lambda\neq -2\ ,\ \lambda\neq 1$$

the vectors v_1,v_2,v_3 are basis for $\mathbb{R}^3$ if $\lambda\notin\{-2,1\}$

Ex : Let V be space and $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ be a basis for V

If $u_1=v_1-v_2+v_3$, $u_2=v_2+2v_3$ and $u_3=v_1-2v_3$

prove that the set $C=\{u_1,u_2,u_3\}$ is a basis of V

solution:

$B=\{v_1,v_2,v_3\}$ is a basis of V $\Rightarrow$ $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ span V and linearly independent

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_2u_2=0$$

$$\alpha_1(v_1-v_2+v_3)+\alpha_2(v_2+2v_3)+\alpha_3(v_1-2v_3)=0$$

$$\alpha_1v_1-\alpha_1v_2+\alpha_1v_3+\alpha_2v_2+2\alpha_2v_3+\alpha_3v_1-2\alpha_3v_3=0$$

$$(\alpha_1+\alpha_3)v_1+(-\alpha_1+\alpha_2)v_2+(\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3)v_3=0 \quad (v_1,v_2,v_3 \text{ basis of } V\ )$$

$$\alpha_1+\alpha_3=0$$

$$-\alpha_1+\alpha_2=0$$

$$\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3=0$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-5\neq 0$$

the homogenuous system $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_2u_2=0$ has a trivial solution $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

$\rightarrow\{u_1,u_2,u_3\}$ independent

the nonhomogenuous sytem $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_2u_2=u\in V$ is consistent $\rightarrow\{u_1,u_2,u_3\}$ span

$\Rightarrow$ $\{u_1,u_2,u_3\}$ a basis for V

0559108708 (محمد ندا (ابو يوسف

Basis and Dimension of vector space
الأساس و البعد للفضاء الجزئي

Dimension of homogeneous system تعيين الأساس و البعد للنظام المتجانس

1- نحل النظام المتجانس باستخدام طريق جاوس – جوردان
2- نوجد الحل العام للنظام
3- مجموعة المتجهات الناتجة من الحل العام هي أساس لفضاء الحل
- اذا كان الحل هو الحل التافه فانه النظام المتجانس له الفضاء الصفري و بعده (صفر)

Ex : Find a basis for the dimensions of the solution space of the homogeneous system

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ 2x \quad\quad - z &= 0 \\ 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Reduced}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

the homogeneous has a trivial solution $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

zero vector space , Dimension = 0

Ex : Find a basis for and the dimensions of the solution space of the homogeneous system

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 \quad\quad\quad\quad - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

solution:

$$* \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Reduced}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_4 = 0 \longrightarrow x_1 = x_4$

$x_2 - 2x_3 = 0 \longrightarrow x_2 = 2x_3$

Let $x_4 = s$, $x_3 = t \rightarrow x_1 = s$, $x_2 = 2t$

$* \ (x_1, x_2, x_3, x_4) = (s\ ,\ 2t\ ,\ t\ ,\ s) = (0,2t,t,0) + (s,0,0,s) = t\,(0,2,1,0) + s\,(1,0,0,1)$

the vectors $\{(0,2,1,0),(1,0,0,1)\}$ span the solution and linearly independent

$S = \{(0,2,1,0),(1,0,0,1)\}$ be a basis of solution , Dimension = 2

متجهات حل النظام المتجانس دائما تكون basis لفضاء الحل

Ex : Find a basis for and the dimensions of the solution space of the homogeneuous system

$$x + 4y + z + 2t + u = 0$$
$$2x + y - z + t + 4u = 0$$
$$2x + y - z + 5t + 4u = 0$$

solution:

$$* \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-2R1+R3]{-2R1+R2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R2+R3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -3 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{4}R3]{-\frac{1}{7}R2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-4R2+R1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{15}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{3}{7}R_3+R2]{-\frac{2}{7}R_3+R1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 & \frac{15}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x - \frac{5}{7}z + \frac{15}{7}u = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{7}z - \frac{15}{7}u$$
$$y + \frac{3}{7}z - \frac{2}{7}u = 0 \longrightarrow y = -\frac{3}{7}z + \frac{2}{7}u$$
$$t = 0$$

Let $u = r$, $z = s$

$$* \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7}s - \frac{15}{7}r \\ -\frac{3}{7}s + \frac{2}{7}r \\ s \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7}s \\ -\frac{3}{7}s \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{15}{7}r \\ \frac{2}{7}r \\ 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -\frac{15}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

the vectors $S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{3}{7} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -\frac{15}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$

span the solution and linearly independent

S is a basis of solution , Dimension = 2

Ex : Determine the basis of subspace (coordinate vector) for

$$W=\left\{\begin{bmatrix} a & a+2b \\ a-b & 3b \end{bmatrix};\ a,b\in R\right\} \text{ in } M_{2\times 2}$$

solution:

$$* \begin{bmatrix} a & a+2b \\ a-b & 3b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a \\ a & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2b \\ -b & 3b \end{bmatrix}$$

$$=a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Then $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ are span of $M_{2\times 2}$

$$* \ \alpha_1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1+2\alpha_2 \\ \alpha_1-\alpha_2 & 3\alpha_2 \end{pmatrix}=0 \ \Rightarrow \ \alpha_1=\alpha_2=0$$

Then $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ are linearly independant

the basis for W is $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right\}$, dimension $=2$

Ex : Determine the basis of subspace for $W=\{(a,b,c):\ a+b+c=0\}$ in R^3

solution:

$a+b+c=0 \ \rightarrow \ c=-a-b$

$$* \ (a,b,c)=(a,b,-a-b)$$

$$=(a,0,-a)+(0,b,-b)$$

$$=a(1,0,-1)+b(0,1,-1)$$

Then $(1,0,-1)$ and $(0,1,-1)$ are span of $\mathbb{R}^3$

$$* \ \alpha_1(1,0,-1)+\alpha_2(0,1,-1)=0$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_1-\alpha_2)=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1=\alpha_2=0$$

Then $(1,0,-1)$ and $(0,1,-1)$ are linearly independant

the basis for W is $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$, dimension $=2$

Ex : Determine the basis of subspace for $W = \{(a,b,c,d):\ a+b=0\ ,\ b+c+d=0\ \}$ in R^4

solution:

$a+b=0 \quad \rightarrow \quad a=-b$

$b+c+d=0 \quad \rightarrow \quad d=-b-c$

* $(a,b,c,d)=(-b,b,c,-b-c)$

$=(-b,b,0,-b)+(0,0,c,-c)$

$=b(-1,1,0,-1)+c(0,0,1,-1)$

Then $(-1,1,0,-1)$ and $(0,0,1,-1)$ are span $\mathbb{R}^4$

* $\alpha_1(-1,1,0,-1)+\alpha_2(0,0,1,-1)=0$

$(-\alpha_1,\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_1-\alpha_2)=0$

$\alpha_1=0 \quad , \qquad \alpha_2=0$

Then $(-1,1,0,-1)$ and $(0,0,1,-1)$ are linearly independant

the basis for W is $\{(-1,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$, dimension = 2

Ex : Determine the basis of subspace (coordinate vector) for

$$W=\left\{A \in M_{2\times 2}\ ;\ A=-A^t\right\}$$

solution:

Let $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

* $A=-A^t \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a & -c \\ -b & -d \end{bmatrix}$$

$a=-a \longrightarrow a=0$

$d=-d \longrightarrow d=0$

$b=-c$

$A=\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}=b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Then $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ is span of W

* $\alpha_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}=0 \quad , \quad \alpha_1=0$

Then $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ is linearly independant

the basis for W is $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, dimension $=1$

نظرية :

ليكن $S=\{v_1,v_2,....,v_n\}$ أساسا basis لفضاء المتجهات V و لتكن $B=\{u_1,u_2,....,u_m\}$ مجموعة جزئية من V

-1 اذا كان $m>n$ فان B مرتبطة خطيا linearly dependent
-2 اذا كان $m=n$ فان B مستقلة خطيا linearly independent

أساس الفضاء الجزئي المولد بمجموعة متجهات

-1 طريقة الخوارزمية الأولى -2 طريقة الخوارزمية الأولى

Ex : Let V be subspace in $\mathbb{R}^4$ such that $v_1=(1,-1,1,0)$,$v_2=(2,1,-2,1)$, $v_3=(1,2,-3,1)$, $v_4=(3,3,-5,2)$ span V . Find a basis for V included in $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$

solution:

طريقة الخوارزمية الأولى

أولا: كون المصفوفة التي صفوفها المتجهات المعطاة و استخدم طريقة جاوس أو جاوس – جوردان للاختزال

$$* \begin{bmatrix}1&-1&1&0\\2&1&-2&1\\1&2&-3&1\\3&3&-5&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-R1+R3\\-3R1+R4}]{-2R1+R2}\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&3&-4&1\\0&3&-4&1\\0&6&-8&2\end{bmatrix}\xrightarrow[-2R2+R4]{-R2+R3}\begin{bmatrix}1&-1&1&0\\0&3&-4&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ثانيا : الصفوف الغير صفرية تمثل أساس الفضاء الجزئي من المتجهات

the basis for V is $S=\{(1,-1,1,0),(2,1,-2,1)\}$, dimensoin $=2$

$\dim(V)>\dim(S)$ $\rightarrow$ the vectors $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ are liearly dependent

Ex : Let $S=\{(1,0,2,3),(2,2,3,-1),(3,2,5,2),(-1,-2,-1,4),(1,1,4,-2)\}$,W be subspace in $\mathbb{R}^4$ such that S span W . Find a basis for W included in S

solution:

$$* \begin{bmatrix}1&0&2&3\\2&2&3&-1\\3&2&5&2\\-1&-2&-1&4\\1&1&4&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-3R1+R3\\R1+R4\\-R1+R5}]{-2R1+R2}\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&2&-1&-7\\0&2&-1&-7\\0&-2&1&7\\0&1&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R2+R4\\-\frac{1}{2}R2+R5}]{-R2+R3}\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&2&-1&-7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

the basis for W is $B=\{(1,0,2,3),(2,2,3,-1),(1,1,4,-2)\}$, dimensoin $=3$

$\dim(W)>\dim(B)$ $\rightarrow$ the vectors of S are liearly dependent

- هذه الطريقة لا يجوز تبديل الصفوف أثناء الأختزال الا بشروط

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Let $S=\{u_1=(1,1,0,0), u_2=(1,0,1,0), u_3=(0,0,1,1), u_4=(2,1,2,1)\}$ is a subset of R^4

Find a basis for subspace in R^4 in the set S

solution:

طريقة الخوارزمية الثانية

أولا : نكون مصفوفة أعمدتها المتجهات المعطاة و استخدم طريقة جاوس أو جاوس – جوردان للاختزال

$$*\begin{bmatrix}1&1&0&2\\1&0&0&1\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-R1+R2}\begin{bmatrix}1&1&0&2\\0&-1&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{R2+R1}\\\xrightarrow{-R2}\\\xrightarrow{R2+R3}\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R3+R4}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ثانيا : حدد الأعمدة ذات العناصر المتقدمة ستكون الأعمدة المقابلة لها هي أساس الفضاء

The basis is $B=\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$, dimension $=3$

$\dim(S)>\dim(B)\ \rightarrow$ the vectors of S are linearly dependent

Ex : Let $S=\{(1,7,-5),(4,-2,4),(3,1,1),(1,2,-1),(1,-3,3)\}$, W be subspace in $\mathbb{R}^4$

such that S span W . Find a basis for W included in S

solution:

$$*\begin{bmatrix}1&4&3&1&1\\7&-2&1&2&-3\\-5&4&1&-1&3\end{bmatrix}\begin{matrix}\xrightarrow{-7R1+R2}\\\xrightarrow{5R1+R3}\end{matrix}\begin{bmatrix}1&4&3&1&1\\0&-30&-20&-5&-10\\0&24&16&4&8\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{30}R2}\begin{bmatrix}1&4&3&1&1\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\0&24&16&4&8\end{bmatrix}\xrightarrow{-24R2+R3}\begin{bmatrix}1&4&3&1&1\\0&1&\frac{2}{3}&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\uparrow\quad\uparrow$$

the basis for W is $B=\{(1,7,-5),(4,-2,4)\}$, dimensoin $=2$

$\dim(S)>\dim(B)\ \rightarrow$ the vectors of S are liearly dependent

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : For which real values of λ do the vector $(9,3,\lambda)$ belongs to subspace in R^3 such that $\{(1,-2,5),(3,0,1),(1,1,-2),(2,-1,3)\}$ span the supsbace

solution:

شرط انتماء المتجه $(9,3,\alpha)$ للمجموعة $\{(1,-2,5),(3,0,1),(1,1,-2),(2,-1,3)\}$ لابد أن تكون تركيب خطي

$(9,3,\lambda) \in \{(1,-2,5),(3,0,1),(1,1,-2),(2,-1,3)\}$ if $(9,3,\lambda)$ is a linear combination of the vectors

$$* \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 & 3 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[-5R1+R3]{2R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 6 & 3 & 3 & 21 \\ 0 & -14 & -7 & -7 & \alpha-45 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}R2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -14 & -7 & -7 & \alpha-45 \end{bmatrix} \xrightarrow{14R2+R3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha+4 \end{bmatrix}$$

مجموعة المتجهات تركيب خطي (عدد متجهات الأساس اقل من 3)

the vectors are linearly dependent if diminsion of the basis <3

$\alpha+4=0 \quad , \quad \alpha=-4$

Ex : Let W is a subspace in R^4 and $\{(1,-1,1,-1),(1,1,1,1),(1,0,1,0),(0,1,0,t)\}$ span W for which value of t do $\dim(W)=2$

solution:

$$* \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & t \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-R1+R3 \\ R1+R4}]{R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{-R2+R4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$$

لكي يكون البعد (2) لابد أن يكون عمودين فقط ذات عناصر متقدمة (العمود الأول و الثاني)

$\dim(w)=2$ if $t-1=0$, $t=1$

Ex : Find a standard basis vectors in R^3 that can be added to $\{(1,1,1),(0,-1,-1)\}$ to produce a basis for R^3

solution:

هنا يطلب أساس يحتوي المجموعة المعطاة . نقوم بإضافة الأساس المعياري الى متجهات المجموعة و نضع مصفوفة أعمدتها المتجهات و نختزل الى الصيغة الدرجية المختزلة و نطبق طريقة الخوارزمية الثانية

$S=\{(1,1,1),(0,-1,-1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$$* \begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&-1&0&1&0\\1&-1&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-R1+R3]{-R1+R2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&-1&-1&1&0\\0&-1&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R2+R3]{-R2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&1&-1&0\\0&0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-R3]{R3+R2}\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&1&0&-1\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

الأعمدة ذات العناصر المتقدمة هي الأول و الثاني و الرابع

the basis is $\{(1,1,1),(0,-1,-1),(0,1,0)\}$

Ex : Find a standard basis vectors in R^4 that can be added to $\{(1,1,1,-2),(1,1,1,2)\}$ to produce a basis for R^4

solution:

$S=\{(1,1,1,-2),(1,1,1,2),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

$$* \begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\-2&2&0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{-R1+R2\\-R1+R3\\2R1+R4}}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&1&0\\0&4&2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{4}R4\\R2\leftrightarrow R4\\-R3}}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1&0\\0&0&-1&1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-R2+R1}\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1&0\\0&0&-1&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R3+R1\\-\frac{1}{2}R3+R2\\R3+R4}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&1&-1&0\end{bmatrix}$$

الأعمدة ذات العناصر المتقدمة هي الأول و الثاني و الثالث و الرابع

the basis is $\{(1,1,1,-2),(1,1,1,2),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$

Ex : Find a standard basis vectors in P_2 that can be added to $\{x^2+1, x^2+x\}$ to produce a basis for P_2

solution:

$S=\{x^2+1, x^2+x, x^2, x, 1\}$

$$* \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R1+R3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{-R2+R1} \\ \\ \xrightarrow{R2+R3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{R3+R1} \\ \\ \xrightarrow{-R3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

the basis is $\{x^2+1, x^2+x, x^2\}$

0559108708 (ابو يوسف) محمد ندا

Coordinate vector and changing of Basis
الاحداثيات و تغيير الأساس

The coordinate vector $[v]_B$ المتجه الاحداثي

اذا كانت المتجهات $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ أساس لفضاء المتجهات V و كان $v\in V$ تركيب خطي للمجموعة B

أي أن $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\dots+\alpha_nv_n$ فان $[v]_B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$ هو المتجه الإحداثي للمتجه v بالنسبة للأساس B

$[v]_B$: is the coordinate vector of v relative to B

Ex : If $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ is satndard basis for R^3 and $v(2,3,4)\in R^3$

compute the coordinate vector $[v]_S$

solution:

* $(2,3,4)=\alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1)$

$(2,3,4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$\alpha_1=2 \quad , \quad \alpha_2=3 \quad , \quad \alpha_3=4$

$[v]_S=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$

ملحوظة : المتجه الاحداثي للمتجه v بالنسبة للأساس المعتاد هو نفسه $[v]_S=v$

Remark: the coordinate vector of v relative to standard basis is same v

Ex : If $B=\{(1,1,1),(1,-1,1),(0,1,1)\}$ is satndard basis for R^3 and $v=(2,3,1)\in R^3$

compute the coordinate vector $[v]_B$

solution:

* $(2,3,1)=\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(1,-1,1)+\alpha_3(0,1,1)$

* $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\1&-1&1&3\\1&1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[-R1+R3]{-R1+R2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&-2&1&1\\0&0&1&-1\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{1}{2}R2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&2\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R2+R1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-1\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{2}R3+R2]{-\frac{1}{2}R3+R1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right]\quad \begin{array}{l}\alpha_1=3\\ \alpha_2=-1\\ \alpha_3=-1\end{array}$$

$$[v]_B=\begin{bmatrix}3\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

Ex : Let S is standard basis for $P_2(x)$ and $B=\{x^2-x+2\ ,\ x^2+x-1\ ,\ 1\}$ basis for P_2 and $p(x)=x^2+2x+3$. Compute $[p(x)]_s$ and $[p(x)]_B$

solution

* S is is standard basis for $P_2(x)$

$$[p(x)]_s=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

* To find $[p(x)]_B$

* $x^2+2x+3=\alpha_1(x^2-x+2)+\alpha_2(x^2+x-1)+\alpha_3(1)$

* $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\-1&1&0&2\\2&-1&1&3\end{array}\right]\xrightarrow[-2R1+R3]{R1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&2&0&3\\0&-3&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&1&0&\frac{3}{2}\\0&-3&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[3R2+R3]{-R2+R1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{11}{2}\end{array}\right]\qquad \begin{aligned}\alpha_1&=-\tfrac{1}{2}\\ \alpha_2&=\tfrac{3}{2}\\ \alpha_1&=\tfrac{11}{2}\end{aligned}\quad ,\quad [p(x)]_B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\\frac{11}{2}\end{bmatrix}$$

Ex : If $B=\{v_1=(1,1,1), v_2=(-1,1,2), v_3=(-1,-1,0)\}$ be a basis for $\mathbb{R}^3$

and $[v]_B=\begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix}$, Find the vector v

solution:

$[v]_B$ the coordinate vector of v relative to B

$$[v]_B=\begin{bmatrix}-3\\2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}v&=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3\\&=-3(1,1,1)+2(-1,1,2)+2(-1,-1,0)\\&=(-7,-3,1)\end{aligned}$$

Change of Basis
تغيير الأساس (الانتقال من أساس الى أساس لفضاء متجهات)

تعريف :

ليكن $B=\{v_1,v_2,....,v_n\}$ و $C=\{u_1,u_2,....,u_n\}$ هما two bases لفضاء

-1 ايجاد ${}_CP_B$ (transition matrix from B to C)

- نأخذ كل متجه من متجهات B و نكون له linear combination مع متجهات C
- نأخذ المتجه الاحداثي $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ لكل متجه من B ونضعها كأعمدة في مصفوفة

-2 ايجاد ${}_BP_C$ (transition matrix from C to B)

- نأخذ كل متجه من متجهات C و نكون له linear combination مع متجهات B
- نأخذ المتجه الاحداثي $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ لكل متجه من C ونضعها كأعمدة في مصفوفة

Rules:

1. $[v]_C={}_CP_B[v]_B$

2. $[v]_B={}_BP_C[v]_C$

3. ${}_CP_B={}_BP^{-1}{}_C$, B and C are bases for vector space V

Ex : Let $B=\{(1,2),(-1,1)\}$, $C=\{(1,1),(2,1)\}$ are bases for R^2

Find the transition matrix ${}_CP_B$ from B to C

solution:

* $(1,2)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,1)$

$\alpha_1+2\alpha_2=1$

$\alpha_1+\alpha_2=2$

$\alpha_1=3$, $\alpha_2=-1$, $[v_1]_B=[3 \quad -1]^T$

* $(-1,1)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,1)$

$\alpha_1+2\alpha_2=-1$

$\alpha_1+\alpha_2=1$

$\alpha_1=3$, $\alpha_2=-2$, $[v_2]_B=[3 \quad -2]^T$

* ${}_CP_B=\begin{bmatrix}3 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$

Ex : If $B=\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ and $C=\{(-1,1,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$ are bases for $\mathbb{R}^3$ and $v=(3,0,-7)$. Compute $[v]_B$, $[v]_C$, ${}_BP_C$, ${}_CP_B$

solution:

* Find $[v]_B$

$(3,0,-7)=\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(0,1,1)+\alpha_3(1,0,1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\1&1&0&0\\0&1&1&-7\end{array}\right]\xrightarrow{-R1+R2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\0&1&-1&-3\\0&1&1&-7\end{array}\right]\xrightarrow{-R2+R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\0&1&-1&-3\\0&0&2&-4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&3\\0&1&-1&-3\\0&0&1&-2\end{array}\right]\xrightarrow[R3+R2]{-R3+R1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&-5\\0&0&1&-2\end{array}\right]\ ,\quad [v]_B=\begin{bmatrix}5\\-5\\-2\end{bmatrix}$$

* Find $[v]_C$

$(3,0,-7)=\alpha_1(-1,1,0)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(1,1,0)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&3\\1&1&1&0\\0&1&0&-7\end{array}\right]\xrightarrow{\text{Reduced}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-\frac{3}{2}\\0&1&0&-7\\0&0&1&\frac{17}{2}\end{array}\right]\ ,\quad [v]_c=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\-7\\\frac{17}{2}\end{bmatrix}$$

* Find ${}_CP_B$

$(1,1,0)=\alpha_1(-1,1,0)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(1,1,0)$

$(0,1,1)=\alpha_1(-1,1,0)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(1,1,0)$

$(1,0,1)=\alpha_1(-1,1,0)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(1,1,0)$

$$*\quad\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}-1&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&0\\0&1&0&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{-R1}\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&-1&-1&-1&0&-1\\1&1&1&1&1&0\\0&1&0&0&1&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R1+R2}\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&-1&-1&-1&0&-1\\0&2&2&2&1&1\\0&1&0&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R2}\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&-1&-1&-1&0&-1\\0&1&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[-R2+R3]{R2+R1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&-1&-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow[-R3]{R3+R2}\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]\ ,\ {}_CP_B=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&1\\1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

* Find ${}_B P_C$ نأخذ كل متجه من متجهات C و نكون تركيب خطي مع متجهات B

* $(-1,1,0) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,0,1)$

$(1,1,1) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,0,1)$

$(1,1,0) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,1) + \alpha_3(1,0,1)$

* $$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R2+R3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}R3]{\xrightarrow[R3+R2]{-R3+R1}} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] , \; {}_B P_C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

يمكن استخدام العلاقة ${}_B P_C = {}_C P^{-1}{}_B$

تطبيق للعلاقات السابقة

* $[v]_B = {}_B P_C [v]_C$???

$${}_B P_C [v]_C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -7 \\ \frac{17}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} = [v]_B$$

* ${}_B P_C = {}_C P^{-1}{}_B$?????

$${}_B P_C \cdot {}_C P_B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Ex : If $B = \{u, v\}$ and $C = \{u - v, u + v\}$ are bases for R^2. Compute ${}_C P_B$

solution:

B is a standard basis for R^2

نلاحظ أن الأساس B هو اساس اقليدي ولذلك يمكن ايجاد ${}_B P_C$ مباشرة

$${}_B P_C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

* $${}_C P_B = {}_B P_C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex : If $B=\{1,x,x^2\}$ and $C=\{1-x, x+x^2, x-x^2\}$ are bases for $P_2[x]$

and $p(x)=3-x+2x^2$. Compute $[P]_B$, $[P]_C$, ${}_BP_C$, ${}_CP_B$

solution:

1. Find $[P]_B$

B is a standard basis for $P_2[x]$

$$[P]_B = p(x) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Find $[P]_C$

$$3-x+2x^2 = \alpha_1(1-x)+\alpha_2(x+x^2)+\alpha_3(x-x^2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R3+R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] , \quad [P]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Find ${}_BP_C$

transition matrix from basis C to standard basis B

$${}_BP_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Find ${}_CP_B$

$${}_CP_B = {}_BP^{-1}{}_C$$

$$* \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1+R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R2+R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R3+R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] , \quad {}_CP_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Consider $B=\{v_1=(0,1,1),v_2=(1,0,-2),v_3=(1,1,0)\}$ be a basis for $\mathbb{R}^3$

and $C=\{u_1=(1,0,0),u_2=(0,1,0),u_3=(0,0,1)\}$ be a standard basis for $\mathbb{R}^3$

(1) Compute ${}_CP_B$, ${}_BP_C$ and $[u_2]_B$

(2) Find $[V]_B$ if $[V]_C=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

solution:

(1) ${}_CP_B$ is transition matrix from B to standard basis C

$${}_CP_B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$$

* Find ${}_BP_C$

$(1,0,0)=\alpha_1(0,1,1)+\alpha_2(1,0,-2)+\alpha_3(1,1,0)$

$(0,1,0)=\alpha_1(0,1,1)+\alpha_2(1,0,-2)+\alpha_3(1,1,0)$

$(0,0,1)=\alpha_1(0,1,1)+\alpha_2(1,0,-2)+\alpha_3(1,1,0)$

$$* \left[\begin{array}{ccc|c|c|c}0&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\1&-2&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\1&-2&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-R_{13}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&-2&-1&0&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{2R23}\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&2&-1&1\end{array}\right]\begin{array}{c}\xrightarrow{-R31}\\\xrightarrow{-R32}\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&0&0&-2&2&-1\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&1&2&-1&1\end{array}\right] \quad , \quad {}_BP_C=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\-1&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix} \text{ and } [u_2]_B=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$$

(2)

* $[v]_B={}_BP_C\,[v]_C$

$$=\begin{pmatrix}-2&2&-1\\-1&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

رتبة المصفوفة ($RankA$)

تعريف :

ليكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$

1- الفضاء الصفي ($rowA$) : الفضاء الجزئي من R^n المولد بصفوف A

2- الفضاء العمودي ($colA$) : الفضاء الجزئي من R^m المولد بأعمدة A

شرح

اذا كان لدينا مصفوفة A من الدرجة $m \times n$. اذا أجرينا لها عمليات صفية درجية (echelon form)لنحصل على المصفوفة R فان

- الصفوف الغير صفرية في R هي أساس الفضاء الصفي (basis for row space)و يكون بعده هو $\dim(rowA)$ و تكون مستقلة خطيا
- الأعمدة ذات العناصر المتقدمة من R هي أساس الفضاء العمودي(basis for column space)ويكون بعده هو $\dim(colA)$
- $\dim(rowA) = \dim(colA) = rankA$
- $rankA \leq m \quad , \quad rankA \leq n$

نظريات :

1- اذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فان A لها معكوس $\Leftrightarrow$ $rank(A) = n$

2- اذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فان $rank(A) = rank(A^T)$

العلاقة بين رتبة المصفوفة A و صفريتها ($nullity(A)$)

- صفرية المصفوفة A $nullity(A)$: عدد متجهات أساس حل النظام المتجانس $AX = 0$ (بعد أساس حل النظام)
- نظرية البعد للمصفوفات $nullity(A) + rank(A) = n$
- $nullity(A) = n - r \quad (\quad nullity\ A^T = m - r$

Ex : Consider the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

(1) Find the reduced row echelon form

(2) Determine a basis for the row space

(3) Determine a basis for the column space

(4) Determine a basis for the null space and nullity

solution:

(1) Reduced row echelon form

$$* \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -2 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R1+R3]{-R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R2+R3]{-2R2+R1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R3+R2]{-3R3+R1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) Find a basis for the column space

basis for the column space $\{[1,1,2]^T,[2,3,6]^T,[1,0,1]^T\}$, $\dim(colA) = 3$

(3) Find a basis for the row space

basis for the row space $\{(1,-1,0,0,-1),(0,0,1,0,2),(0,0,0,1,-1)\}$, $\dim(rowA) = 3$

$\rightarrow$ Remark: $\dim(colA) = \dim(rowA) = rank(A) = 3$

(4) Find a basis for the null space and nullity

$$x - y - w = 0 \longrightarrow x = y + w$$

$$z + 2w = 0 \longrightarrow z = -2w$$

$$u - w = 0 \longrightarrow u = w$$

$$* \; X = (x, y, z, u, w) = (y + w, y, -2w, w, w)$$

$$= (y, y, 0, 0, 0) + (w, 0, -2w, w, w)$$

$$= y(1,1,0,0,0) + w(1,0,-2,1,1)$$

$$nullity(A) = 2$$

basis for null space $\{(1,1,0,0,0),(1,0,-2,1,1)\}$

نتحقق من العلاقة $nullity(A) + rank(A) = n$

$nullity(A) + rank(A) = 2 + 3 = 5$

$n = 5$

Ex : Consider the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(1) Find the reduced row echelon form

(2) Determine a basis for the row space

(3) Determine a basis for the column space

(4) Determine a basis for the null space and nullity for A and A^T

solution:

(1) Reduced row echelon form

$$* \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{-R1+R2} \\ \xrightarrow{-2R1+R3} \\ \xrightarrow{-2R1+R4} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{-2R2+R1} \\ \\ \\ \xrightarrow{-R2+R4} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \xrightarrow{2R3+R1} \\ \xrightarrow{-2R3+R2} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

(2) Find a basis for the column space

basis for the colmn space $\left\{[1,1,2,2]^T, [2,3,4,5]^T, [2,4,5,6]^T\right\}$, $\dim(colA) = 3$

(3) Find a basis for the row space

basis for the row space $\{(1,0,0,0,-2),(0,1,0,-1,6),(0,0,1,2,-3)\}$, $\dim(rowA) = 3$

$\rightarrow$ Remark: $\dim(colA) = \dim(rowA) = rank\,(A) = 3$

(4) Find a basis for the null space and nullity

$$x - 2w = 0 \longrightarrow x = 2w$$
$$y - u + 6w = 0 \longrightarrow y = u - 6w$$
$$z + u - 3w = 0 \longrightarrow z = -u + 3w$$

$$\begin{aligned} * \quad X = (x, y, z, u, w) &= (2w, u - 6w, -u + 3w, u, w) \\ &= (0, u, -u, u, 0) + (2w, -6w, 3w, 0, w) \\ &= u\,(0,1,-1,1,0) + w\,(2,-6,3,0,1) \end{aligned}$$

basis for null space $N(A) = \{(1,1,0,0,0),(1,0,-2,1,1)\}$

$nullity\,(A) = 2$

$nullity\,(A^T) = m - r = 4 - 3 = 1$

Ex : For which values of β do the rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & \beta \end{bmatrix}$ equals 2

solution:

$$* \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[-R1+R3]{-2R1+R2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & \beta+2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & \beta+2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R2+R3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-8 \end{bmatrix}$$

$rank(A) \rightarrow \beta - 8 = 0 \quad , \quad \beta = 8$

نظريات

نظرية (1)	نظرية (2)
اذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فان 1- للنظام $AX = 0$ الحل التافه trivial solution 2- أعمدة A مستقلة خطيا linearly independent 3- $rank(A) = n$ جميع العبارات السابقة متكافئة	اذا كانت A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ فان 1- النظام $AX = C$ هو consistent بحيث $C \in R^m$ 2- أعمدة A span R^m 3- $rank(A) = m$ 4- المصفوفة AA^T لها معكوس جميع العبارات السابقة متكافئة

Ex : If A be matrix of degree 7×3 and $rank(A) = 3$

$a)$ Columns of A are linearly independent $\quad B)$ Rows of A are linearly dependent

$c)$ $Col(A) = R^3$ $\quad d)$ $row(A) = R^7$

solution: $a)$

Ex : If A is nonzero matrix of degree 4 and $|A| = 0$ then

$a)$ $rank(A^2) = 4$ $\quad b)$ $rank(A) < 4$

c) $rank(A) = 4$ $\quad d)$ $rank(adj(A)) = 4$

solution:

$|A| = 0 \Rightarrow$ the system $AX = 0$ has many infinite solutions (nullity(A) $\neq 0$)

$\because rank(A) + nullity(A) = n = 4 \Rightarrow rank(A) < 4 \qquad (b)$

نستنتج ان (الصفوف و الأعمدة مرتبطة خطيا)

Ex : If A be matrix of degree 5×6 and dimension of the solution of $AX=0$ is 4 then dimansion of column space $col(A)$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

solution:

$rank(A) + nullity(A) = n$

$r + 4 = 6 \quad , \quad rank(A) = 2$

$\dim(colA) = 2$

Ex : Show that the set $B=\{v_1, v_2, v_3\}$ is linearly independent where

$v_1 = (1,2,-1,0) \quad , \quad v_2 = (2,1,0,2) \quad , \quad v_3 = (1,-1,2,1)$

solution:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R1+R3]{-2R1+R2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2R2+R4]{-2R2+R3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R3, R3+R4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim(colA) = 3 = n \Rightarrow$ the set $B=\{v_1, v_2, v_3\}$ is linearly independent

---

Ex : For which values of a and b do the following vectors linearly dependent in $\mathbb{R}^4$

$v_1 = (1,2,-1,3)$, $v_2 = (-2,-3,1,-1)$, $v_3 = (-1, a-2, a-1, b)$

solution:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & a-2 \\ -1 & 1 & a-1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R1+R2 \\ -3R1+R2}]{-2R1+R2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & a-2 \\ 0 & 5 & b+3 \end{pmatrix} \xrightarrow[5R2+R4]{R2+R3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2a-2 \\ 0 & 0 & b+3-5a \end{pmatrix}$$

ليكون المتجهات v_1, v_2, v_3 مرتبطة خطيا (dependent) لا بد أن تكون عدد أساس متجهات الأساس(رتبة المصفوفة) أقل من 3

the vectors will be linearly dependent if $rank(A) < 3$

$2a - 2 = 0 \longrightarrow a = 1$

$b + 3 - 5a = 0 \longrightarrow b = 2$

Chapter 5

Inner Products on Vector Space

فضاءات الضرب الداخلي

Deffinition : Inner Product

An inner product on a real vector space V is a function if each pair of vectors $\langle u,v \rangle$ in V are satisfied the following conditions

(1) $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

(2) $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$

(3) $\langle \alpha u,v \rangle = \alpha \langle u,v \rangle$

(4) $\langle u,u \rangle \geq 0$

(5) $u = 0 \iff \langle u,u \rangle = 0$

where $u,v,w \in V$ and $\alpha \in R$

الضرب الاقليدي

Euclidean inner product (Standard inner product)

If $u = (a_1,a_2,......,a_n)$, $v = (b_1,b_2,.....,b_n) \Rightarrow \langle u,v \rangle = u \cdot v = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

Ex : Determine whether the function $\langle u,v \rangle = 3a_1b_1 + 2a_2b_2$ defined inner product on R^2

solution:

Let $u = (a_1,a_2)$, $v = (b_1,b_2)$, $w = (c_1,c_2) \in \mathrm{R}^2$

(1) $\langle u,v \rangle = 3a_1b_1 + 2a_2b_2 = 3b_1a_1 + 2b_2a_2 = \langle v,u \rangle$

(2) $\langle u+v,w \rangle = \langle (a_1+b_1,a_2+b_2),(c_1,c_2) \rangle$

$= 3(a_1+b_1)c_1 + 2(a_2+b_2)c_2$

$= 3a_1c_1 + 3b_1c_1 + 2a_2c_2 + 2b_2c_2$

* $\langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle = 3a_1c_1 + 2a_2c_2 + 3b_1c_1 + 2b_2c_2$

$\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$

(3) $\langle \alpha u,v \rangle = \langle (\alpha a_1,\alpha a_2),(b_1,b_2) \rangle$

$= 3\alpha a_1b_1 + 2\alpha a_2b_2 = \alpha(3a_1b_1 + 2a_2b_2) = \alpha \langle u,v \rangle$

(4) $\langle u,u \rangle = \langle (a_1,a_2),(a_1,a_2) \rangle = 3a_1^2 + 2a_2^2 \geq 0$

(5) * If $u = (0,0) \Rightarrow \langle u,u \rangle = 3(0)^2 + 2(0)^2 = 0$

* If $\langle u,u \rangle = 0$ then $3a_1^2 + 2a_2^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow u = (0,0)$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Determine whether the function $\langle p(x),q(x)\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ defined inner product on $P_2(x)$

solution:

Let $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, $r(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ in $P_2(x)$

(1) $\langle p(x),q(x)\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$

$$= b_0a_0 + b_1a_1 + b_2a_2$$

$$= \langle q(x),p(x)\rangle$$

(2) $\langle p(x)+q(x),r(x)\rangle = \left\langle (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2 \,,\, c_0+c_1x+c_2x^2 \right\rangle$

$$= (a_0+b_0)c_0 + (a_1+b_1)c_1 + (a_2+b_2)c_2$$

$$= a_0c_0 + b_0c_0 + a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + b_2c_2$$

$$= (a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2) + (a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2)$$

* $\langle p(x),r(x)\rangle + \langle q(x),r(x)\rangle = a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2$

$\therefore \ \langle p(x)+q(x),r(x)\rangle = \langle p(x),r(x)\rangle + \langle q(x),r(x)\rangle$

(3) $\langle \alpha p(x),q(x)\rangle = \left\langle \alpha a_0 + \alpha a_1x + \alpha a_2x^2 \ , \ b_0 + b_1x + b_2x^2 \right\rangle$

$$= (\alpha a_0)b_0 + (\alpha a_1)b_1 + (\alpha a_2)b_2$$

$$= \alpha\left(a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2\right)$$

$$= \alpha\langle p(x),q(x)\rangle$$

(4) $\langle p(x),p(x)\rangle = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \quad \geq 0$

(5) If $p = 0$, $a_0 = a_1 = a_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle p,p\rangle = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 0$

The function is inner product

Ex : Determine whether the function $\langle (a,b),(c,d)\rangle = (a-b)(c-d)$ defined inner product on R^2

solution:

Let $u = (a,b) \in R^2$

$\langle u,u\rangle = \langle (a,b),(a,b)\rangle = (a-b)(a-b) = 0 \quad$ if $a = b$

not $u = 0$

not inner product

Ex : For which values of k that satisfy $\langle(a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle = -ka_1b_1 + (k+1)a_2b_2$ is inner product on R^2

solution:

Axiom(4)

$u = (a_1,a_2) \in R^2$

$\langle u,u\rangle = \langle(a_1,a_2),(a_1,a_2)\rangle = -ka_1^2 + (k+1)a_2^2$

$\because \langle u,u\rangle \geq 0 \Rightarrow k+1 \geq 0$ and $-k \geq 0$

$k \geq -1$ and $k \leq 0$

$-1 \leq k \leq 0$

Ex : Find the constants a and b for be $\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ax_1y_2 + bx_2y_1$ is inner product

solution

* Axiom (1)

$\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ax_1y_2 + bx_2y_1$

$\langle(y_1,y_2),(x_1,x_2)\rangle = y_1x_1 + y_2x_2 + ay_1x_2 + by_2x_1$

we deduce $a = b$

* Axiom: $\langle(x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle \geq 0$

$$\begin{aligned}
\langle(x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle &= x_1^2 + x_2^2 + ax_1x_2 + bx_2x_1 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_2 + a^2x_2^2 - a^2x_2^2 \\
&= \underline{x_1^2 + 2ax_1x_2 + a^2x_2^2} + x_2^2 - a^2x_2^2 \quad \text{(completing square)} \\
&= (x_1 + ax_2)^2 + (1-a^2)x_2^2 \geq 0
\end{aligned}$$

The function is inner product if: $1-a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 1$, $|a| < 1$, $-1 < a < 1$

Properties of the inner product

(1) $\langle 0,u\rangle = \langle u,0\rangle = 0$

(2) $\langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$

(3) $\langle u,\alpha v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$

(4) $\langle u-v,w\rangle = \langle u,w\rangle - \langle v,w\rangle$

(5) $\langle u,v-w\rangle = \langle u,v\rangle - \langle u,w\rangle$

Orthogonality in Inner Product Spaces
التعامد في فضاء الضرب الداخلي

Theorems:

1) The norm (length) of a vector in a real inner product space

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$$

2) The distance between two vectors u and v

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v \ , u - v \rangle}$$

* unit vector : a vector of norm 1

3) Cosine of the angle between vectors u and v

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\|v\|}$$

4) If u and v are non zero vectors

u and v are orthogonal $\Leftrightarrow$ $\langle u,v \rangle = 0$

Ex : Let $\langle (a,b),(c,d) \rangle = 2ac + 3bd$ is inner product in R^2 and $u = (2,1)$, $v = (-2,3)$

Find $\|u\|$, $\|v\|$ and $d(u,v)$

solution:

* $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle} = \sqrt{\langle (2,1),(2,1) \rangle} = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$

$= \sqrt{2(2)^2 + 3(1)^2} = \sqrt{11}$

* $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle} = \sqrt{\langle (-2,3),(-2,3) \rangle}$

$= \sqrt{2(-2)^2 + 3(3)^2} = \sqrt{35}$

* $u - v = (2,1) - (-2,3) = (4,-2)$

* $\langle u - v, u - v \rangle = \langle (4,-2),(4,-2) \rangle$

$= 2(4)^2 + 3(-2)^2 = 44$

** $d(u,v) = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

Ex : Let R^3 have the inner product $\langle (a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)\rangle = 3a_1a_2 + 5b_1b_2 + 2a_3b_3$

Evaluate the distance between the vectors $(3,0,2)$ and $(4,-2,3)$

solution:

$$* \ d(u,v) = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}$$
$$= \sqrt{\langle (-1,2,-1),(-1,2,-1)\rangle}$$
$$= \sqrt{3a^2 + 5b^2 + 2c^2}$$
$$= \sqrt{3(-1)^2 + 5(2)^2 + 2(-1)^2} = 5$$

Ex : Let $M_{2\times 2}$ have the inner product $< \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} > \ = 2aa' + 2bb' + 3cc' + dd'$

and $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ Evaluate $d(A,B)$

solution:

$$* \ A - B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$* \ d(A,B) = \sqrt{\langle A - B, A - B\rangle}$$
$$= \sqrt{2(3)^2 + 2(-2)^2 + 3(-2)^2 + (-2)^2}$$
$$= \sqrt{42}$$

Ex : Let R^2 have standard inner product and $u = (1,2)$, $v(-1,3)$

Evaluate the cosine of the angle between u and v

solution:

$$* \ \cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{\langle (1,2),(-1,3)\rangle}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+3^2}}$$
$$= \frac{(1)(-1)+(2)(3)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ex : Let R^3 have the inner product $\langle (a,b,c),(a_1,b_1,c_1)\rangle = 2aa_1 + bb_1 + 2cc_1$.

Find the constant α that satisfies the equation $\|\alpha(-3,2,1)\| = 12$

solution:

$\|\alpha(-3,2,1)\| = 12$

$|\alpha|\|(-3,2,1)\| = 12$

* $|\alpha|\sqrt{2(-3)^2 + (2)^2 + 2(1)^2} = 12$

$|\alpha|\left(2\sqrt{6}\right) = 12$

$|\alpha| = \frac{12}{2\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$\alpha \in \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$

$$\boxed{*\ \|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|}$$

Ex : Let R^2 have standard inner product and $u = (1,\frac{1}{a})$, $v = (\frac{1}{b},1)$.

Evaluate $\langle ab < v,u > u\ ,\ abv\rangle$

solution:

$\langle v,u\rangle = \left\langle (\frac{1}{b},1),(1,\frac{1}{a})\right\rangle = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$

* $\langle ab < v,u > u\ ,\ abv\rangle = \left\langle ab(\frac{1}{b} + \frac{1}{a})u\ ,\ abv\right\rangle$

$= \left\langle (a+b)\left(1,\frac{1}{a}\right)\ ,\ ab(\frac{1}{b},1)\right\rangle$

$= \left\langle (a+b, 1+\frac{b}{a})\ ,\ (a,ab)\right\rangle$

$= (a+b)(a) + (1+\frac{b}{a})(ab)$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

Ex : Let $P_2(x)$ have the inner product

$$\left\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2\right\rangle = 2a_0b_0 + 3a_1b_1 + 2a_2b_2$$

(1) Evaluate $\|P\|$ and $\|q\|$ where $p(x) = 1 + 2x$, $q(x) = 2 + x + 2x^2$

(2) Evaluate $\cos\theta$, where θ is the angle between $p(x)$ and $q(x)$

solution:

(1) * $\|p(x)\| = \sqrt{\langle p,p\rangle} = \sqrt{2a_0^2 + 3a_1^2 + 2a_2^2}$

$= \sqrt{2(1)^2 + 3(2)^2 + 2(0)^2} = \sqrt{14}$

* $\|q(x)\| = \sqrt{\langle q,q\rangle} = \sqrt{2b_0^2 + 3b_1^2 + 2b_2^2}$

$= \sqrt{2(2)^2 + 3(1)^2 + 2(2)^2} = \sqrt{19}$

(2) $\cos\theta = \frac{\langle p,q\rangle}{\|p\|\|q\|} = \frac{2(1)(2) + 3(2)(1) + 2(0)(2)}{\sqrt{14}\sqrt{19}} = \frac{10}{\sqrt{266}}$

Ex : Let $C[0,1]$ have the inner product $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Evaluate $\cos\theta$, where θ is the angle between x and $x+1$

solution:

* $\langle f,g\rangle = \langle x, x+1\rangle = \int_0^1 x(x+1)dx = \int_0^1 (x^2+x)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{5}{6}$

* $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} \longrightarrow \|x\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

* $\|x+1\|^2 = \langle x+1, x+1\rangle = \int_0^1 (x+1)^2 dx$

$= \frac{1}{3}(x+1)^3\Big|_0^1 = \frac{7}{3} \longrightarrow \|x+1\| = \sqrt{\frac{7}{3}}$

** $\cos\theta = \frac{\langle x, x+1\rangle}{\|x\|\|x+1\|} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$

Ex : Let $P_3(x)$ have the inner product

$$\langle p,q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

where $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, $q(x) = x^2 + x - 1$

(1) Evaluate $d(p,q)$

(2) Evaluate $\cos\theta$, where θ is the angle between $p(x)$ and $q(x)$

solution:

* $p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$ $\qquad q(x) = (-1)^2 + (-1) - 1 = -1$

$p(0) = 1$ $\qquad q(0) = 1$

$p(1) = 4$ $\qquad q(1) = 1$

$p(2) = 15$ $\qquad q(2) = 5$

$\|p\| = \sqrt{\langle p,p\rangle} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 4^2 + 15^2} = 11\sqrt{2}$, $\|q\| = 2\sqrt{7}$

* $(p-q)(x) = x^3 + 2$

$(p-q)(-1) = (-1)^3 + 2 = 1$

$(p-q)(0) = 2$

$(p-q)(1) = 3$

$(p-q)(2) = 10$

** $d(p,q) = \sqrt{\langle (p-q),(p-q)\rangle}$

$= \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (10)^2} = \sqrt{114}$

** $\cos\theta = \frac{\langle p,q\rangle}{\|p\|\|q\|} = \frac{(0)(-1) + (1)(1) + (4)(1) + (15)(5)}{(11\sqrt{2})(2\sqrt{7})} = \frac{40}{11\sqrt{14}}$

Ex : If V is a real inner product space , $u,v \in V$ and $\|v\|^2 = 4$, $\|u\|^2 = 6$ and $\langle u-v, 2u+v \rangle = 6$. Find $\langle u,v \rangle$

solution:

* $\langle u-v, 2u+v \rangle = \langle u, 2u \rangle + \langle u,v \rangle - \langle v, 2u \rangle - \langle v,v \rangle$

$$= 2\langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle - 2\langle v,u \rangle - \langle v,v \rangle$$

$$= 2\|u\|^2 - \langle u,v \rangle - \|v\|^2$$

$\Rightarrow \quad \langle u-v, 2u+v \rangle = 2\|u\|^2 - \langle u,v \rangle - \|v\|^2$

$6 \quad = 2(6) - \langle u,v \rangle - 4 \qquad \Rightarrow \quad \langle u,v \rangle = 2$

Ex : If V is a real inner product space . u and v are orthogonal vectors in V such that $\|v\| = 1$, $\|u\| = 2$, Evaluate $\|2u - 3v\|^2$

solution:

u and v are orthogonal $\Rightarrow \quad <u,v> = 0$

* $\|2u - 3v\|^2 = <2u - 3v, 2u - 3v>$

$$= <2u, 2u> - <2u, 3v> - <3v, 2u> + <3v, 3v>$$

$$= 4\|u\|^2 - 6<u,v> - 6<v,u> + 9\|v\|^2$$

$$= 4(2)^2 + 9(1)^2 = 25$$

Ex : If u and v are orthognal vectors in a real inner product space , prove that $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

solution:

u and v are orthognal then $\langle u,v \rangle = 0$

* $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$

$$= \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2$$

0559108708 (محمد ندا (ابو يوسف

Ex : If V is a real inner product space , $u,v \in V$

$\langle u+v, 2u-v\rangle = -5$, $\langle u,u\rangle = 1$, $\langle u-v, u+3v\rangle = -22$

(1) Evaluate the value of $\langle u,v\rangle$ and $\langle v,v\rangle$

(2) Find $\cos\theta$, where θ is the angle between u and v

solution:

(1) $\langle u,v\rangle$ and $\langle v,v\rangle$

* $\langle u+v, 2u-v\rangle = -5$

$\langle u,2u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,2u\rangle - \langle v,v\rangle = -5$

$2\langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + 2\langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle = -5$

$2(1) \quad + \langle u,v\rangle - \langle v,v\rangle = -5$

$\langle u,v\rangle - \langle v,v\rangle = -7$ equ (1)

* $\langle u-v, u+3v\rangle = -22$

$\langle u,u\rangle + \langle u,3v\rangle - \langle v,u\rangle - \langle v,3v\rangle = -22$

$\langle u,u\rangle + 3\langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle - 3\langle v,v\rangle = -22$

$(1) + 2\langle u,v\rangle - 3\langle v,v\rangle = -22$

$2\langle u,v\rangle - 3\langle v,v\rangle = -23$ equ (2)

بضرب equ (1) بـ(-2) و جمعها مع equ (2)

$-\langle v,v\rangle = -9 \longrightarrow \langle v,v\rangle = 9$

from equ (1) $\langle u,v\rangle - (9) = -7 \longrightarrow \langle u,v\rangle = 2$

* $\langle u-v, 2u+v\rangle = \langle u,2u\rangle + \langle u,v\rangle - \langle v,2u\rangle - \langle v,v\rangle$

$= 2\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle - 2\langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle$

$= 2\|u\|^2 - \langle u,v\rangle - \|v\|^2$

$\Rightarrow \quad \langle u-v, 2u+v\rangle = 2\|u\|^2 - \langle u,v\rangle - \|v\|^2$

$6 \quad = 2(6) - \langle u,v\rangle - 4 \quad \Rightarrow \quad \langle u,v\rangle = 2$

(2) Find $\cos\theta$

* $\cos\theta = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$

$= \dfrac{2}{(1)(3)} = \dfrac{2}{3}$

* $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{9} = 3$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : If u and v are vectors in an inner product space V . such that $\|u+v\|=\|u-v\|$

Prove that u and v are orthognal

solution:

$$\|u+v\|=\|u-v\| \quad \Leftrightarrow \quad <u+v,u+v> \;=\; <u-v,u-v>$$

$$\|u\|^2+2<u,v>+\|v\|^2=\|u\|^2-2<u,v>+\|v\|^2$$

$$2<u,v>=-2<u,v>$$

$$4<u,v>=0$$

$$<u,v>=0 \;\Rightarrow\; u \perp v$$

Theorems:

If u and v are vectors in a real inner product space V . then

(1) $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\|v\|$

(2) $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\|v\| \;\Leftrightarrow\; u$ and v are linear combination

Ex : If u and v are vectors in a real inner product space V .

Prove that $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$

solution:

$$* \quad \|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle$$

$$=\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle$$

$$=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle$$

$$=\langle u,u\rangle+2|\langle u,v\rangle|+\langle v,v\rangle$$

$$\le\|u\|^2+2\|u\|\|v\|+\|v\|^2=(\|u\|+\|v\|)^2$$

$$\Rightarrow \quad \|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$$

Ex : Let V be a real inner product space $\{u,v\}$ are linear combination

Evaluate $\begin{vmatrix}\langle 2u,u\rangle & \langle u,2v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle\end{vmatrix}$

solution:

$$* \quad \begin{vmatrix}\langle 2u,u\rangle & \langle u,2v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle\end{vmatrix}=\langle 2u,u\rangle\langle v,v\rangle-\langle u,2v\rangle\langle v,u\rangle$$

$$=2\|u\|^2\|v\|^2-2(\langle u,v\rangle)^2$$

بما أن $\{u,v\}$ مرتبطة خطيا فان $|\langle u,v\rangle|=\|u\|\|v\|$

$$=2\|u\|^2\|v\|^2-2(\|u\|\|v\|)^2$$

$$=\;0$$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

ORTHONORMAL BASIS
الأساسات العيارية المتعامدة

المتجه العياري unit vector

متجه طوله يساوي (1) و يمكن الحصول عليه لأي متجه u بالقاعدة $\frac{u}{\|u\|}$

مجموعة المتجهات المتعامدة Orthogonal Vectors Set

اذا كان كل متجهين مختلفين في المجموعة متعامدين

مجموعة المتجهات العيارية المتعامدة Orthonormal Vectors

اذا كان كل متجهين مختلفين في المجموعة متعامدين و طول كل متجه يساوي (1)

نظرية:

اذا كان مجموعة $B=\{v_1,v_2,......,v_n\}$ متعامدة orthogonal في فضاء ضرب داخلي (لا تحتوي المتجه الصفري)
فان المجموعة B مستقلة خطيا linearly independent

Ex : Let $B=\left\{ v_1=(1,0,0)\ ,\ v_2=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\ ,\ v_3=(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) \right\}$. Prove that the set B form an orthornormal basis with the Euclidean inner product for R^3

solution:

* Prove the vectors are orthogonal

$$\langle v_1,v_2\rangle=\left\langle(1,0,0)\ ,\ (0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle=(1)(0)+(0)(\tfrac{1}{\sqrt{2}})+(0)(\tfrac{1}{\sqrt{2}})=0$$

$$\langle v_1,v_3\rangle=\left\langle(1,0,0)\ ,\ (0,-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle=(1)(0)+(0)(-\tfrac{1}{\sqrt{2}})+(0)(\tfrac{1}{\sqrt{2}})=0$$

$$\langle v_2,v_3\rangle=\left\langle(0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}})\ ,\ (0,-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\tfrac{1}{\sqrt{2}})\right\rangle=(0)(0)+(\tfrac{1}{\sqrt{2}})(-\tfrac{1}{\sqrt{2}})+(\tfrac{1}{\sqrt{2}})(\tfrac{1}{\sqrt{2}})=0$$

*

$$\|v_1\|=\sqrt{(1)^2+(0)^2+(0)^2}=1$$

$$\|v_2\|=\sqrt{(0)^2+(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2+(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2}=1$$

$$\|v_3\|=\sqrt{(0)^2+(-\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2+(\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2}=1$$

the norm of every vector $=1$

The set B form orthonormal basis

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Find the values of a such that $S=\{(1,0,-1),(1,-2,1),(a,a^2,a^3)\}$ is an orthogonal set in the Euclidean inner product in R^3

solution:

The vectors are othogonal $\langle u,v\rangle=0$

* $\langle(1,0,-1);(a,a^2,a^3)\rangle=0$

$$a-a^3=0 \longrightarrow a(1-a^2)=0$$

$$a=0\ ,\quad a=-1\ ,\quad a=1$$

* $\langle(1,-2,1);(a,a^2,a^3)\rangle=0$

$$a-2a^2+a^3=0 \longrightarrow a(1-2a+a^2)=0$$

$$a(1-a)^2=0$$

$$a=0\ ,\quad a=1$$

$$a\in\{0,1\}$$

Ex : If the following set $B=\{\ v_1=(1,\sqrt{3})\ ,\ v_2=(-1,\sqrt{3})\ \}$ is orthonormal basis for R^2 such that the inner product defined as: $\langle(a,b),(a',b')\rangle=\alpha aa'+\beta bb'$. Find α , β

solution:

* $\langle v_1,v_2\rangle=0$

$$\langle(1,\sqrt{3}),(-1,\sqrt{3})\rangle=0$$

$$\alpha(1)(-1)+\beta(\sqrt{3})(\sqrt{3})=0$$

$$-\alpha+3\beta=0 \qquad \text{equ(1)}$$

بما أن $B=\{v_1,v_2\}$ أساس عياري متعامد

- المتجهات متعامدة $\langle v_1,v_2\rangle=0$
- المتجهات عيارية $\|v_1\|=\|v_2\|=1$

* $\|v_1\|=1\ ,\quad \|v_1\|^2=1$

$$\langle(1,\sqrt{3}),(1,\sqrt{3})\rangle=1$$

$$\alpha(1)(1)+\beta(\sqrt{3})(\sqrt{3})=1$$

$$\alpha+3\beta=1 \qquad \text{equ(2)}$$

$$6\beta=1\ ,\quad \beta=\tfrac{1}{6}\ ,\quad \alpha=\tfrac{1}{2}$$

Theorem:

If $B=\{u_1,u_2,.....,u_n\}$ is an orthonormal basis for an inner product space V . and $u\in V$
then $u=\langle u,u_1\rangle u_1+\langle u,u_2\rangle u_2+.........+\langle u,u_n\rangle u_n$

Ex : If $B=\{v_1,v_2\}$ is an orthonormal basis for an inner product space V . and $u\in V$
such that $\langle u,v_1\rangle=3$, $\langle u,v_2\rangle=-5$. Find $\|u\|$

solution:

* $u=\langle u,v_1\rangle v_1+\langle u,v_2\rangle v_2$

$u=3v_1-5v_2$

$\|u\|^2=\|3v_1-5v_2\|^2$

$=\langle 3v_1-5v_2,3v_1-5v_2\rangle$

$=9\|v_1\|^2-15\underbrace{\langle v_1,v_2\rangle}_{0}-15\underbrace{\langle v_2,v_1\rangle}_{0}+25\|v_2\|^2=9(1)^2+25(1)^2=34$

$\|u\|=\sqrt{34}$

بما أن $B=\{v_1,v_2\}$ أساس عياري متعامد
- المتجهات متعامدة $\langle v_1,v_2\rangle=0$
- المتجهات عيارية $\|v_1\|=\|v_2\|=1$

Ex : If $\{u_1,u_2,u_3\}$ is an orthonormal basis for an inner product space V . and $u\in V$
such that $\langle u,u_3\rangle=2\sqrt{3}$, $\langle u,u_2\rangle=2$, $\langle u,u_1\rangle=3$. Find $\|u\|$

solution:

* $u=\langle u,u_1\rangle u_1+\langle u,u_2\rangle u_2+\langle u,u_3\rangle u_3$

$=3u_1+2u_2+2\sqrt{3}u_3$

* $\|u\|^2=\langle 3u_1+2u_2+2\sqrt{3}u_3\ ,\ 3u_1+2u_2+2\sqrt{3}u_3\rangle$

$=9\|u_1\|^2+4\|u_2\|^2+12\|u_3\|^2$

$=9(1)^2+4(1)^2+12(1)^2=25$

$\|u\|=5$

* $\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_1,u_3\rangle=\langle u_2,u_3\rangle=0$
* $\|u_1\|=\|u_2\|=\|u_3\|=1$

Ex : If $B=\left\{u_1=\frac{1}{5\sqrt{2}}(3,4)\ ,\ u_2=\frac{1}{5\sqrt{2}}(4,-3)\right\}$ is an orthonormal basis for an inner product space R^2 defined by : $<(a,b);(a_1,b_1)>=2aa_1+2bb_1$. and $v=(-\sqrt{2},2\sqrt{2})$

Find $[v]_B$

solution:

$<v,u_1>=\left\langle(-\sqrt{2},2\sqrt{2}),(\frac{3}{5\sqrt{2}},\frac{4}{5\sqrt{2}})\right\rangle=2(-\sqrt{2})(\frac{3}{5\sqrt{2}})+2(2\sqrt{2})(\frac{4}{5\sqrt{2}})=2$

$<v,u_2>=\left\langle(-\sqrt{2},2\sqrt{2}),(\frac{4}{5\sqrt{2}},-\frac{3}{5\sqrt{2}})\right\rangle=2(-\sqrt{2})(\frac{4}{5\sqrt{2}})+2(2\sqrt{2})(-\frac{3}{5\sqrt{2}})=-4$

$v=<v,u_1>u_1+<v,u_2>u_2$

$v=2u_1-4u_2$

$[v]_B=\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$

Ex : If $S=\left\{u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\ ,\ u_2=(1,0,0)\ ,\ u_3=\frac{1}{2\sqrt{2}}(0,-2,2)\right\}$ is an orthonormal basis for the Eucolidean inner product space R^3 . and $u=(3,4,-1)0$. Find $[u]_S$

solution:

$<u,u_1>=\left\langle(3,4,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}((3)(0)+(4)(1)+(-1)(1))=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$<u,u_2>=\left\langle(3,4,-1),(1,0,0)\right\rangle=3$

$<u,u_3>=\left\langle(3,4,-1),\frac{1}{2\sqrt{2}}(0,-2,2)\right\rangle=\frac{1}{2\sqrt{2}}((3)(0)+(4)(-2)+(-1)(2))=-\frac{5}{\sqrt{2}}$

$u=<u,u_1>u_1+<u,u_2>u_2+<u,u_3>u_3$

$u=\frac{3}{\sqrt{2}}u_1+3u_2-\frac{5}{\sqrt{2}}u_3$

$[u]_S=\left[\frac{3}{\sqrt{2}},3,\frac{-5}{\sqrt{2}}\right]^T$

The Gram – Schmidt Process

To convert a basis $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ into an orthogonal basis $B=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$

* Orthogonal Basis

* $u_1=v_1$

* $u_2=v_2-\dfrac{\langle v_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$

* $u_3=v_3-\dfrac{\langle v_3u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2-\dfrac{\langle v_3u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$

$\vdots$

* $u_4=v_4-\dfrac{\langle v_4u_3\rangle}{\|u_3\|^2}u_3-\dfrac{\langle v_4u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2-\dfrac{\langle v_4u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$

** Orthonormal Basis $B=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$

* $w_1=\dfrac{u_1}{\|u_1\|}$

* $w_2=\dfrac{u_2}{\|u_2\|}$

$\vdots$

* $w_n=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$

Ex : Assume that the vector space R^2 has the inner product $\langle(a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle=2a_1b_1+3a_2b_2$
Apply the Gram – Schmidt process to transform the basis vectors
$\{v_1=(1,-3)\ ,\ v_2=(2,2)\}$ to orthonormal basis

solution:

1. Orthogonal Basis

* $u_1=v_1=(1,-3)$

* $u_2=v_2-\dfrac{\langle v_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1=(2,2)-\dfrac{\langle(2,2),(1,-3)\rangle}{\langle(1,-3),(1,-3)\rangle}(1,-3)$

$=(2,2)-\dfrac{2(2)(1)+3(2)(-3)}{2(1)^2+3(-3)^2}(1,-3)=\left(\dfrac{72}{29},\dfrac{16}{29}\right)$

2. Orthonormal Basis

* $w_1=\dfrac{u_1}{\|u_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{29}}(1,-3)$

* $w_2=\dfrac{u_2}{\|u_2\|}=\dfrac{29}{384}\left(\dfrac{72}{29},\dfrac{16}{29}\right)=\left(\dfrac{3}{16},\dfrac{1}{24}\right)$

Ex : Assume that the vector space R^3 has the Euclidean inner product . Apply the Gram – Schmidt process to transform the basis vectors $\{v_1 = (1,1,0)\ ,\ v_2 = (1,-1,1)\ ,\ v_3 = (0,1,-1)\}$ to orthonormal basis

solution:

1. Orthogonal Basis

* $u_1 = v_1 = (1,1,0)$

* $u_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (1,-1,1) - \dfrac{\langle (1,-1,1),(1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle}(1,1,0)$

$$= (1,-1,1) - \frac{(1)(1)+(-1)(1)+(1)(0)}{(1)^2+(1)^2+(0)^2}(1,1,0)$$

$$= (1,-1,1) - 0(1,1,0) = (1,-1,1)$$

* $u_3 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \dfrac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1$

$$= (0,1,-1) - \frac{\langle (0,1,-1),(1,-1,1)\rangle}{\langle (1,-1,1),(1,-1,1)\rangle}(1,-1,1) - \frac{\langle (0,1,-1),(1,1,0)\rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle}(1,1,0)$$

$$= (0,1,-1) - \frac{-2}{3}(1,-1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{-1}{3})$$

2. Orthonormal Basis

* $w_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

* $w_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

* $w_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|} = \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{6}}}(\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{-1}{3}) = \sqrt{6}(\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{-1}{3})$

The orthonormal basis $\{(1,1,0)\ ,\ (1,-1,1)\ ,\ \sqrt{6}(\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{-1}{3})\}$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Assume that the vector space R^3 has the inner product:

$\langle (a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)\rangle = a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3$. Apply the Gram – Schmidt process to transform the basis vectors $\{v_1 = (1,1,1)\ ,\ v_2 = (1,1,0)\ ,\ v_3 = (1,0,0)\}$ to orthonormal basis

solution:

1. Orthogonal Basis

* $u_1 = v_1 = (1,1,1)$

* $u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = (1,1,0) - \frac{\langle (1,1,0),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}(1,1,1)$

$$= (1,1,0) - \frac{(1)(1)+2(1)(1)+3(0)(1)}{(1)^2+2(1)^2+3(1)^2}(1,1,1)$$

$$= (1,1,0) - \frac{3}{6}(1,1,1) = \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{-1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}(1,1,-1)$$

* $u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2 - \frac{\langle v_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$

$$= (1,0,0) - \frac{\langle (1,0,0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2})\rangle}{\langle (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2})\rangle}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{-1}{2}) - \frac{\langle (1,0,0),(1,1,1)\rangle}{\langle (1,1,1),(1,1,1)\rangle}((1,1,1)$$

$$= (1,0,0) - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{-1}{2}) - \frac{1}{6}(1,1,1) = \left(\tfrac{2}{3},\tfrac{-1}{3},0\right) = \tfrac{1}{3}(2,-1,0)$$

2. Orthonormal Basis

* $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{(1)^2+2(1)^2+3(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1)$

* $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\frac{1}{2}(1,1,-1)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left((1)^2+2(1)^2+3(1)^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-1)$

* $w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{\frac{1}{3}(2,-1,0)}{\frac{1}{3}\sqrt{(2)^2+2(-1)^2+3(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,0)$

Ex : Assume that the vector space $P_2[x]$ has the inner product:

$\left\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2 \right\rangle = 2a_0b_0 + a_1b_1 + 2a_2b_2$. Apply the Gram – Schmidt process to transform the basis vectors $S = \left\{1, x, x^2\right\}$ to orthonormal basis

solution:

1. Orthogonal Basis

* $u_1 = v_1 = 1$

* $u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}(1)$

$= x - 0 = x$

* $u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3 u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 - \frac{\langle v_3 u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = x^2 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\langle x, x \rangle} x - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle}(1)$

$= x^2 - 0 - 0 = x^2$

2. Orthonormal Basis

* $w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{<1,1>}} = \frac{1}{\sqrt{2(1)(1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

* $w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{x}{\sqrt{<x, x>}} = \frac{x}{\sqrt{(1)(1)}} = x$

* $w_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{x^2}{\sqrt{<x^2, x^2>}} = \frac{x^2}{\sqrt{2(1)(1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} x^2$

The orthonormal basis $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} , x , \frac{1}{\sqrt{2}} x^2 \right\}$

Ex : Assume that the vector space $P_2[x]$ has the inner product:

$\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$. Apply the Gram – Schmidt process to transform the basis vectors $S = \{1, x, x^2\}$ to orthonormal basis

solution:

1. Orthogonal Basis

$p_1(x) = 1 \quad , \quad p_2(x) = x \quad , \quad p_3(x) = x^2$

* $q_1 = p_1 = 1$

* $q_2 = P_2 - \dfrac{\langle P_2, q_1\rangle}{\|q_1\|^2} q_1 = x - \dfrac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}(1)$

$\langle P_2, q_1\rangle = p_2(0)q_1(0) + p_2(1)q_1(1) + p_2(2)q_1(2)$

$\langle x, 1\rangle = (0)(1) + (1)(1) + (2)(1) = 3$

$\langle 1, 1\rangle = (1)(1) + (1)(1) + (1)(1) = 3$

$q_2 = x - \frac{3}{3}(1) = x - 1$

* $q_3 = P_3 - \dfrac{\langle P_3, q_2\rangle}{\|q_2\|^2} q_2 - \dfrac{\langle P_3, q_1\rangle}{\|q_1\|^2} q_1 = x^2 - \dfrac{\langle x^2, x-1\rangle}{\langle x-1, x-1\rangle}(x-1) - \dfrac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}(1)$

$\langle x^2, x-1\rangle = (0)(-1) + (1)(0) + (4)(1) = 4$

$\langle x-1, x-1\rangle = (-1)(-1) + (0)(0) + (1)(1) = 2$

$\langle x^2, 1\rangle = (0)(1) + (1)(1) + (4)(1) = 5$

$q_3 = x^2 - \frac{4}{2}(x-1) - \frac{5}{3} = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$

2. Orthonormal Basis

* $w_1 = \dfrac{q_1}{\|q_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{\langle 1, 1\rangle}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

* $w_2 = \dfrac{q_2}{\|q_2\|} = \dfrac{x-1}{\sqrt{\langle x-1, x-1\rangle}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-1)$

* $w_3 = \dfrac{q_3}{\|q_3\|^2} = \dfrac{x^2 - 2x + \frac{1}{3}}{\sqrt{\langle x^2 - 2x + \frac{1}{3}, x^2 - 2x + \frac{1}{3}\rangle}}$

$\langle x^2 - 2x + \frac{1}{3}, x^2 - 2x + \frac{1}{3}\rangle = (\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) + (\frac{-2}{3})(\frac{-2}{3}) + (\frac{1}{3})(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$

$w_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - 2x + \frac{1}{3}\right)$

The orthonormal basis $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \, , \, \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) \, , \, \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - 2x + \frac{1}{3}\right)\right\}$

ريض 244

الجبر الخطي و تطبيقاته

M-244

Chapter 6 & 7

Final

شرح و حل تمارين

محمد ندا (أبو يوسف)   0559108708

الفصل السادس : التحويلات الخطية
LINEAR TRANSFORMATION

تعريف (التحويل الخطي):

ليكن V و W فضاء متجهات و ليكن $T:V \to W$ تطبيق فان T (تحويل خطي) اذا تحقق الشرطان:

$$T(u+v)=T(u)+T(v) \quad (1)$$
$$T(\alpha u)=\alpha T(u) \quad (2)$$

لكل $u,v \in V$ و α عدد حقيقي

- اذا كان $V=W$ فأن T يسمى مؤثر خطي (linear operator)

يمكن صياغة الشرطين السابقين في شرط واحد كما يلي : $T(\alpha u+\beta v)=\alpha T(u)+\beta T(v)$

Examples:

Ex : Let the maping $T:R^3 \to R^2$ given by $T(x,y,z)=(z+x,z-y)$ for $(x,y,z)\in R^3$. Determine whether T is a linear transformation

solution:

Let $u=(x,y,z)$,$v=(x_1,y_1,z_1) \in R^3$, $\alpha \in R$

(1) $T(u+v)=T\left((x,y,z)+(x_1,y_1,z_1)\right)$
$$=T\left(x+x_1,y+y_1,z+z_1\right)$$
$$=\left((z+z_1)+(x+x_1),(z+z_1)-(y+y_1)\right)$$
$$=\left(x+z+x_1+z_1 , z-y+z_1-y_1\right)$$

* $T(u)+T(v)=T(x,y,z)+T(x_1,y_1,z_1)$
$$=\left(z+x,z-y\right)+\left(z_1+x_1,z_1-y_1\right)$$
$$=\left(x+z+x_1+z_1 , z-y+z_1-y_1\right)$$

then $T(u+v)=T(u)+T(v)$ (1)

(2) $T(\alpha u)=T(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$
$$=(\alpha z+\alpha x,\alpha z-\alpha y)$$

* $\alpha T(u)=\alpha\left(z+x,z-y\right)$
$$=\left(\alpha z+\alpha x,\alpha z-\alpha y\right)$$

then $T(\alpha u)=\alpha T(u)$ (2)

تحقق الشرطان . اذا T تحويل خطي linear transformation لكن ليس مؤثر خطي not linear operator لأن $R^3 \neq R^2$

Ex : Let the maping $T : R^2 \to R^3$ defined by $T(x,y) = (2x, x+y, x-2y)$ for $(x,y,z) \in R^3$. Determine whether T is a linear transformation

solution:

Let $v = (x_1, y_1)$, $u = (x,y) \in R^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(1) $T(u+v) = T\left((x,y)+(x_1,y_1)\right)$

$= T\left(x+x_1, y+y_1\right)$

$= \left(2(x+x_1)\,,\ (x+x_1)+(y+y_1)\,,\ (x+x_1)-2(y+y_1)\right)$

$= \left(2x+2x_1\,,\ x+y+x_1+y_1\,,\ x-2y+x_1-2y_1\right)$

* $T(u)+T(v) = T(x,y)+T(x_1,y_1)$

$= \left(2x, x+y, x-2y\right) + \left(2x_1, x_1+y_1, x_1-2y_1\right)$

$= \left(2x+2x_1\,,\ x+y+x_1+y_1\,,\ x-2y+x_1-2y_1\right)$

then $T(u+v) = T(u)+T(v)$ (1)

(2) $T(\alpha u) = T(\alpha x, \alpha y)$

$= (2\alpha x, \alpha x + \alpha y, \alpha x - 2\alpha y)$

$= \left(\alpha(2x), \alpha(x+y), \alpha(x-2y)\right)$

$= \alpha\left(2x, x+y, x-2y\right) = \alpha T(u)$ (2)

T is a linear transformation (not linear operator)

تحقق الشرطان . اذا T تحويل خطي لكن ليس مؤثر خطي لأن $R^2 \neq R^3$

Ex : Let the maping $T : M_{mn} \to M_{nm}$ given by $T(A) = A^T$ for $A \in M_{mn}$

Determine whether T is a linear transformation

solution:

Let $\alpha \in R$, $A, B \in M_{mn}$

(1) $T(A+B) = (A+B)^T$

$= A^T + B^T$

$= T(A) + T(B)$ (1)

(2) $T(\alpha A) = (\alpha A)^T$

$= \alpha A^T$

$= \alpha T(A)$ (2)

T is a linear transformation

تحقق الشرطان . اذا T تحويل خطي لكن ليس مؤثر خطي not a linear operator لأن $M_{mn} \neq M_{nm}$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : Let the maping $T : M_{nn} \to M_{nn}$ given by $T(A) = A^T + A$ for

. Determine wheather T is a linear operator

solution:

Let $A, B \in M_{nn}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(1)

$$* \; T(A+B) = (A+B)^T + (A+B)$$
$$= A^T + B^T + A + B$$

$$* \; T(A) + T(B) = \left(A^T + A\right) + \left(B^T + B\right)$$
$$= A^T + B^T + A + B$$

$$\Rightarrow \; T(A+B) = T(A) + T(B)$$

(2)

$$* \; T(\alpha A) = (\alpha A)^T + (\alpha A)$$
$$= \alpha A^T + \alpha A$$
$$= \alpha\left(A^T + A\right)$$
$$= \alpha T(A)$$

T is a linear operator

نظريات :

اذا كان $T : V \to W$ تحويل خطي و كان $u, v \in V$ فان

(1) $T(0) = 0$

(2) $T(-u) = -T(u)$

(3) $T(u - v) = T(u) - T(v)$

(4) $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots.. + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \ldots. + \alpha_n T(u_n)$ لكل $\alpha_n \in \mathbb{R}$

STANDARD MATRIX OF TRANSFORMATION ايجاد المصفوفة المعتادة للتحويل

نحصل على المصفوفة المعتادة للتحويل بإيجاد صور الأساس المعتاد بهذا التحويل و نضعه في أعمدة في مصفوفة

Ex : If $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ is a linear transformation defined as $T(x,y,z)=(y-z,x+z)$

Find the standard matrix of T

solution:

$T(e_1)=T(1,0,0)=(0-0,1+0)=(0,1)$

$T(e_2)=T(0,1,0)=(1-0,0+0)=(1,0)$

$T(e_3)=T(0,0,1)=(0-1,0+1)=(-1,1)$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

نظرية هامة : تستخدم في تعريف التحويل الخطي

اذا كان $S=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ أساس للفضاء V و كان $v\in V$ تركيب خطي لمتجهات S

$v=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots\dots+\alpha_2u_2$ فان $T(v)=\alpha_1T(u_1)+\alpha_2T(u_2)+\dots+\alpha_nT(u_n)$

Ex : If $T:R^2\to R^3$ be a linear transformation such that

$T(1,1)=(1,0,2)$, $T(2,1)=(1,-1,1)$. Find a formula of $T(x,y)$

solution:

Let $v=(x,y)\in R^2$, $\alpha_1,\alpha_2\in R$

$v=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,1)$

$(x,y)=(\alpha_1,\alpha_1)+(2\alpha_2,\alpha_2)$

$$\begin{bmatrix}1&2&x\\1&1&y\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&2&x\\0&-1&y-x\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_2}\begin{bmatrix}1&2&x\\0&1&x-y\end{bmatrix}\xrightarrow{-R_2+R_1}$$

$$\equiv\begin{bmatrix}1&0&2y-x\\0&1&x-y\end{bmatrix}$$

$\alpha_1=2y-x$ and $\alpha_2=x-y$

* we have $(x,y)=\alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,1)$

then $T(x,y)=\alpha_1T(1,1)+\alpha_2T(2,1)$

$=(2y-x)(1,0,2)+(x-y)(1,-1,1)$

$=(2y-x,0,4y-2x)+(x-y,-x+y,x-y)$

$=(y,-x+y,3y-x)$

$T(x,y)=(y,-x+y,3y-x)$

Ex : If $T : R^3 \to R^2$ be a linear transformation such that

$T(1,1,-1) = (3,3)$, $T(1,-1,1) = (1,-3)$, $T(-1,1,1) = (-1,1)$.

Find a formula of $T(x, y, z)$

solution:

Let $v = (x, y, z) \in R^3$ and $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$

$$v = \alpha_1(1,1,-1) + \alpha_2(1,-1,1) + \alpha_3(-1,1,1)$$

$$(x, y, z) = (\alpha_1, \alpha_1, -\alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_2) + (-\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & x \\ 1 & -1 & 1 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -R_1 + R_2 \\ R_1 + R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -2 & 2 & y - x \\ 0 & 2 & 0 & x + z \end{bmatrix} \frac{R_2}{-2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & -1 & \frac{x-y}{2} \\ 0 & 2 & 0 & x + z \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -R_2 + R_1 \\ \\ -2R_2 + R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{x-y}{2} \\ 0 & 0 & 2 & y + z \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{2}R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{x-y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y+z}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_3 + R_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x+y}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x+z}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y+z}{2} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(x + y) \quad , \quad \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(x + z) \quad , \quad \alpha_3 = \tfrac{1}{2}(y + z)$$

* we have $(x, y, z) = \alpha_1(1,1,-1) + \alpha_2(1,-1,1) + \alpha_3(-1,1,1)$

then $T(x, y, z) = \alpha_1 T(1,1,-1) + \alpha_2 T(1,-1,1) + \alpha_3 T(-1,1,1)$

$$= \tfrac{1}{2}(x + y)(3,3) + \tfrac{1}{2}(x + z)(1,-3) + \tfrac{1}{2}(y + z)(-1,1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(3x + 3y, 3x + 3y) + (x + z, -3x - 3z) + (-y - z, y + z)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[(4x + 2y, 4y - 2z)\right] = (2x + y, 2y - z)$$

$$T(x, y) = (2x + y, 2y - z)$$

تعريف :

اذا كان لدينا تحويل خطي $T : V \to W$ فان

1. الفضاء الصفري (نواة التحويل $\ker T$)

$\ker T = \{u \in v : T(u) = 0\}$ ، أي نحل قاعدة التحويل الخطي على أنها نظام متجانس و نستنتج منها نواة التحويل و أساسه و بعده

2. الفضاء العمودي (صورة التحويل $\operatorname{Im} T$)

$\operatorname{Im} T = \{u \in v : T(u) = w\}$ ، أي نحل قاعدة التحويل الخطي على أنها نظام غير متجانس

- التحويل أحادي one – to – one or injective (متباين) : اذا كان $\ker T = \{0\}$ (أي النظام المتجانس له الحل الصفري فقط)
- التحويل شامل onto or surjective: اذا كان بعد $\operatorname{Im} T$ يساوي بعد المجال المقابل W

Ex : If $T : R^3 \to R^3$ be a linear transformation defined as

$T(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, y)$. Find the kernal of T and its dimension

solution:

أي نحل قاعدة التحويل الخطي على أنها نظام متجانس و نستنتج منها نواة التحويل و أساسه و بعده

$(x,y,z) \in \ker T \Leftrightarrow T(x,y,z) = (0,0,0)$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ x-y+z &= 0 \\ y &= \end{aligned}$$

$$* \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بالاختزال}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x+z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$x = -z \quad , \; y = 0$

put $z = t \quad \Rightarrow \quad (x,y,z) = (-t,0,t) = t(-1,0,1)$

$\ker T = \{t(-1,0,1) : t \in R\}$

$\ker T = \{(-1,0,1)\}$ and $\dim(\ker T) = 1$

Not one – to – one

اساس النواة $\{(-1,01)\}$ و بعده = 1 (التحويل ليس احادي)

مثال : ليكن $T : R^3 \to R^2$ تحويلا خطيا معرفا بالقاعدة $T(x,y,z) = (x+y, y-z)$ ، أوجد أساس لفضاء الصورة و بعده

Ex : If $T : R^3 \to R^2$ be a linear transformation defined as

$T(x,y,z) = (x+y, y-z)$. Find the image of T ($\mathrm{Im}T$) and its dimension

solution:

- نوجد صور أساس الفضاء R^3 المعتاد

$T(1,0,0) = (1,0) \quad , \quad T(0,1,0) = (1,1) \quad , \quad T(0,0,1) = (0,-1)$

** المجموعة $\{(1,0),(1,1),(0,-1)\}$ تولد $\mathrm{Im}T$ نضعها بمصفوفة A كأعمدة و نختزلها لنحصل على اساس الصورة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Im}T = \{(1,0),(1,1)\}$, $\dim(\mathrm{Im}T) = 2$, onto or surjective

أساس $\mathrm{Im}T$ هو أول عمودين هو $\{(1,0),(1,1)\}$ و بعده يساوي 2 (التحويل شامل) لان بعد $\mathrm{Im}T$ يساوي بعد المجال المقابل W

تعريف :

1- بعد $\ker T$ هي صفرية T $\leftarrow$ $nullity(T) = \dim(\ker T)$

2- بعد $\mathrm{Im}T$ هي رتبة T $\leftarrow$ $rank(T) = \dim(\mathrm{Im}T)$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

Ex : If $T : R^3 \to R^3$ be a linear operator defined as

$$T(x,y,z) = (x+y-z, 2x+y-2z, 2x+2y-2z)$$

(1) Find the kernal of T

(2) Find the image of T

solution:

(1)

$(x,y,z) \in \ker T \quad \Leftrightarrow \quad T(x,y,z) = (0,0,0)$

$$x+y-z=0$$
$$2x+y-2z=0$$
$$2x+2y-2z=0$$

$$* \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_2+R_1 \\ -R_2 \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} x-z=0 \\ y=0 \\ \end{array}$$

let $z=t$

The solution is $x=t$, $y=0$, $z=t$, $t \in R$

$\ker T = \{t(1,0,1) : t \in R\}$

$kerT = \{(1,0,1)\}$, $nullity(T) = \dim(\ker T) = 1$

اساس $kerT$ هو $\{(1,0,1)\}$ و بعده $nullity(T) = \dim(\ker T) = 1$ (التحويل ليس احادي)

(2)

$T(e_1) = T(1,0,0) = (1,2,2)$, $T(e_2) = T(0,1,0) = (1,1,2)$, $T(0,0,1) = (-1,-2,-2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بالاختزال}} R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Im} T = \{(1,2,2),(1,1,2)\}$, $rank(T) = \dim(\operatorname{Im} T) = 2$

أساس الفضاء $\operatorname{Im} T$ هو $\{(1,2,2),(1,1,2)\}$ و بعده $rank(T) = \dim(\operatorname{Im} T) = 2$ (التحويل ليس شامل)

مبرهنة البعد للتحويلات Dimension Theorem for Linear Transformation :

اذا كان $T : V \to W$ تحويلا خطيا و $\dim V = n$ فان

- $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = n$
- $nullity(T) + rank(T) = n$

Ex : Let $T : R^5 \to R^3$ be a linear transformation defined by multiplication of matrix A

i.e $T(X) = AX$

$$\text{where } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(1) Find the kernal of T and its dimension

(2) Find the image of T and its dimension

(3) Verify (Dimension Theorem for linear transformation)

solution:

(1) Find $\ker T$

$X \in \ker T \Leftrightarrow AX = 0$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -R_2+R_1 \\ \\ -R_2+R_3 \end{array}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{3}R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 3R_3+R_1 \\ -2R_3+R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\equiv \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{c} x_1 - x_2 + 2x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{array}$$

put $x_2 = r$, $x_5 = t$

$x_1 = r - 2t$, $x_2 = r$, $x_3 = t$, $x_4 = -t$, $x_5 = t$

$$\begin{aligned} X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (r-2t, r, t, -t, t) \\ &= (r, r, 0, 0, 0) + (-2t, 0, t, -t, t) \\ &= r(1,1,0,0,0) + t(-2,0,1,-1,1) \end{aligned}$$

$\ker T = \{ r(1,1,0,0,0) + t(-2,0,1,-1,1) : r, t \in \mathbb{R} \}$

$\ker T = \{(1,1,0,0,0), (-2,0,1,-1,1)\}$, $\dim(\ker T) = 2$

(2) Find $\operatorname{Im} T$

$T(e_1) = (1,2,3)$, $T(e_2) = (-1,-2,-3)$, $T(e_3) = (1,3,4)$,$T(e_4) = (-1,0,2)$,$T(e_5) = (0,1,4)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Im} T = \{(1,2,3), (1,3,4), (-1,0,2)\}$, $\dim(\operatorname{Im} T) = 3$

(3) We get $\dim(\ker T) = 2$, $\dim(\operatorname{Im} T) = 3$ and $n = 5$

* $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{Im} T) = 2 + 3 = 5 = n$

Matrix of Linear Transformation مصفوفة التحويل الخطي

نظرية

1- اذا كان $T : V \to W$ تحويلا خطيا و كان $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ أساس للفضاء V و $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ اساس للفضاء W فان $[T(v)]_C = [T]_B^C [v]_B$ حيث $v \in V$

سيتم شرح مصفوفات التحويل في صورة مثال للتوضيح أكثر

Ex : Let $T : R^3 \to R^2$ be a linear transformation $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + 4y - 2z)$ and $B = \{(1,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$, $C = \{(1,1), (1,-1)\}$, $v = (1,-1,2)$

(1) Find the matrix for T relative to the bases B and C $\left([T]_B^C \right)$

(2) Find the coordinate matrix of T for vector v relative to the base C

(3) Find coordinate vector of v relative to B $[v]_B$

(4) Verify the theorem $[T(v)]_C = [T]_B^C [v]_B$

solution:

لايجاد $[T]_B^C$: نوجد صورة كل عنصر من B حسب قاعدة التحويل ثم نكون له تركيب خطي مع عناصر C ثم نضع كل حل كأعمدة في المصفوفة المطلوبة

(1) Find $[T]_B^C$

* $T(1,0,1) = (0,0) \longrightarrow \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (0,0)$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 0 \ , \ \alpha_2 = 0$$

* $T(0,1,0) = (2,4) \longrightarrow \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (2,4)$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 4 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = 3 \ , \ \alpha_2 = -1$$

* $T(1,0,0) = (1,2) \longrightarrow \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (1,2)$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \alpha_1 = \frac{3}{2} \ , \ \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Then $[T]_B^C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

محمد ندا (ابو يوسف) 0559108708

(2) Find $[T(v)]_C$

$T(1,-1,2)=(-3,-6) \longrightarrow \alpha_1(1,1)+\alpha_2(1,-1)=(-3,-6)$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_2&=-3 \\ \alpha_1-\alpha_2&=-6 \end{aligned}\right\} \alpha_1=-\frac{9}{2} \ , \ \alpha_2=\frac{3}{2}$$

Then $[T(v)]_C=\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

(3) Find $[v]_B$

$(1,-1,2)=\alpha_1(1,0,1)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(1,0,0)$

$$\alpha_1+\alpha_3=1$$
$$\alpha_2=-1$$
$$\alpha_1=2 \quad \rightarrow \quad \alpha_3=-1$$

then $[v]_B=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(4) Verify $[T(v)]_C=[T]_B^C[v]_B$

$$* \ [T]_B^C[v]_B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}=[T(v)]_C$$

Ex : Let $T : R^2 \to R^3$ be a linear transformation $T(x,y) = (x+y, x-y, x+2y)$

and $B = \{v_1 = (1,-1), v_2 = (0,1)\}$, $C = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$

Find the matrix for T relative to the bases B and C ($[T]_B^C$)

solution:

$* \; T(1,-1) = (0,2,-1) \quad \to \quad \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (0,2,-1)$

$\alpha_1 = 0 \; , \; \alpha_2 = 2 \; , \; \alpha_3 = -1$

$* \; T(0,1) = (1,-1,2) \quad \to \quad \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (1,-1,2)$

$\alpha_1 = 1 \; , \; \alpha_2 = -1 \; , \; \alpha_3 = 2$

Then $[T]_B^C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

- اذا كان التحويل $T : V \to V$ يسمى Linear Operator (المؤثر الخطي)
- و المصفوفة $[T]_B$ هي مصفوفة التحويل من الاساس B الى الأساس نفسه B

($[T]_B$ the matrix for T relative to the basis B)

- و يكون $[T(v)]_B = [T]_B [v]_B$

Ex : Let $T : R^3 \to R^3$ be a linear operator $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y + z,, y)$

(1) Find the matrix for T relative to the standard basis S

(2) Find the kernal of T

(3) Find the image of T and $rank(T)$

solution:

(1) Find $[T]_S$

$S = \{(1,0,0),(0,1.0),(0,0,1)\}$

$* T(1,0,0) = (1,1,0) \longrightarrow \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (1,1,0)$

$\alpha_1 = 1 \ , \ \alpha_2 = 1 \ , \ \alpha_3 = 0$

$* T(0,1,0) = (1,-1,1) \longrightarrow \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (1,-1,1)$

$\alpha_1 = 1 \ , \ \alpha_2 = -1 \ , \ \alpha_3 = 1$

$* T(0,0,1) = (1,1,0) \longrightarrow \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (1,1,0)$

$\alpha_1 = 1 \ , \ \alpha_2 = 1 \ , \ \alpha_3 = 0$

$$[T]_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) Find the keral of T

$(x, y, z) \in \ker T \Leftrightarrow T(x, y, z) = 0$

$$x + y + z = 0$$
$$x - y + z = 0$$
$$y = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{reduced} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

let $z = t$, the solution is $x = -t$, $y = 0$, $z = t$, $t \in R$

$\ker(T) = \{t(-1,0,1) : t \in R\} \rightarrow \ker(T) = \{(-1,0,1)\}$, $nullity(T) = \dim(\ker T) = 1$

(3) Find the image of T

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Im}(T) = \{(1,1,0),(1,-1,1)\}$, $rank(T) = 2$

Ex : Let $T : R^4 \to R^3$ be a linear transformation:

$$T(x,y,z,t) = (x-y+z-t, x-y+2z-t, 3x-3y+4z-3t)$$

and $B = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ be a basis of $\mathbb{R}^4$,

$C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ be a basis of $\mathbb{R}^3$

(1) Find the matrix for T relative to the bases B and C $\left([T]_B^C \right)$

(2) Find reduced echolen form of the matrix $[T]_B^C$

(3) Find the image of T ($\mathrm{Im}(T)$)

(4) Find $nullity(T)$, $rank(T)$

solution:

(1) Find $[T]_B^C$

$* \ T(1,0,0,0) = (1,1,3) \longrightarrow \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) = (1,1,3)$

لاحظ أن C أساس معتاد

$\alpha_1 = 1 \ , \ \alpha_2 = 1 \ , \ \alpha_3 = 3$

$* \ T(0,1,0,0) = (-1,-1,-3) \to \alpha_1 = -1 \ , \ \alpha_2 = -1 \ , \ \alpha_3 = -3$

$* \ T(0,0,1,0) = (1,2,4) \to \alpha_1 = 1 \ , \ \alpha_2 = 2 \ , \ \alpha_3 = 4$

$* \ T(0,1,0,0) = (-1,-1,-3) \to \alpha_1 = -1 \ , \ \alpha_2 = -1 \ , \ \alpha_3 = -3$

$$[T]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(2)

$$* \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -R_2+R_1 \\ \\ -R_2+R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) Find $\mathrm{Im}(T)$

$\mathrm{Im}T = \{(1,1,3),(1,2,4)\}$, $rank(T) = 2$

لاحظ اننا استخدمنا المصفوفة لايجاد فضاء الصورة $\mathrm{Im}T$

(4) Find $nullity(T)$, $rank(T)$

we have $n = 4$ and $rank(T) = 2$

$rank(T) + nullity(T) = n$

$2 + nullity(T) = 4 \to nullity(T) = 2$

نظرية :اذا كان $T:V \to V$ مؤثر خطي (Linear Operator) و كان $B=\{v_1,v_2,\dots\dots,v_n\}$ أساس للفضاء V .
حيث $[T(v)]_B=[T]_B[v]_B$ $[T]_B$ مصفوفة التحويل بالنسبة للأساس B

Ex : Let $T:R^2 \to R^2$ be a linear operator $T(x,y)=(x+y,x-y)$ and $B=\{(1,1),(2,1)\}$ and $v=(2,5)$

(1) Find the matrix for T relative to the basis B . $[T]_B$

(2) Find coordinate vector of v relative to B $[v]_B$

(3) Find $[T(v)]_B$

solution:

(1)

* $T(1,1)=(2,0) \longrightarrow \alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,1)=(2,0)$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+2\alpha_2=2\\ \alpha_1+\alpha_2=0\end{aligned}\right\} \alpha_1=-2 \quad , \quad \alpha_2=2$$

* $T(2,1)=(3,1) \longrightarrow \alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,1)=(3,1)$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+2\alpha_2=3\\ \alpha_1+\alpha_2=1\end{aligned}\right\} \alpha_1=-1 \quad , \quad \alpha_2=2$$

then $[T]_B=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

(2) $[v]_B$

$\alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,1)=(2,5)$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+2\alpha_2=2\\ \alpha_1+\alpha_2=5\end{aligned}\right\} \alpha_1=8 \quad , \quad \alpha_2=-3 \quad \Rightarrow \quad \text{Then } [v]_B=\begin{bmatrix}8\\ -3\end{bmatrix}$$

(3) $[T(v)]_B$

* $[T(v)]_B=[T]_B[v]_B$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13\\ 10\end{bmatrix}$$

Another solution

* $T(2,5)=(7,-3) \longrightarrow \alpha_1(1,1)+\alpha_2(2,1)=(7,-3)$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+2\alpha_2=7\\ \alpha_1+\alpha_2=-3\end{aligned}\right\} \alpha_1=-13 \quad , \quad \alpha_2=10$$

Then $[T(v)]_B=\begin{bmatrix}-13\\ 10\end{bmatrix}$

Ex : If $[T]_B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ be the matrix for $T : R^2 \to R^2$ with respect to the basis B

where $B = \{u_1(1,1)\ ,\ u_2 = (-1,1)\}$. Find the formula $T(x, y)$

solution:

$\boxed{[T(v)]_B = [T]_B [v]_B}$ نستخدم القاعدة :

Let $v \in R^2$

$v = (x, y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(-1,1)$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \end{aligned}\right\} \alpha_1 = \frac{x+y}{2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{y-x}{2}$$

Then $[v]_B = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{bmatrix}$

* $[T(v)]_B = [T]_B [v]_B$ نطبق القاعدة

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3x+y}{2} \\ x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$T(v) = \beta_1(1,1) + \beta_2(-1,0)$ لإيجاد العلاقة : نعلم أن

$T(v) = \left(\frac{3x+y}{2}\right)(1,1) + (x+y)(-1,1)$

$= \left(\frac{3x+y}{2}, \frac{3x+y}{2}\right) + (-x-y, x+y)$

$= \left(\frac{x-y}{2}, \frac{5x+3y}{2}\right)$

Ex : If $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be a linear transformation and $C=\{w_1=(1,1), w_2=(1,-1)\}$ a basis for $\mathbb{R}^2$ and $B=\{v_1=(1,1,0), v_2=(1,0,1), v_3=(0,1,1)\}$ a basis of $\mathbb{R}^3$ and $[T]_B^C=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Find $T(x,y,z)$

نستخدم القاعدة : $[T(v)]_C=[T]_B^C[v]_B$

solution:

Let $v \in R^3$

$$v=(x,y,z)=\alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,0,1)+\alpha_3(0,1,1)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2&=x\\ \alpha_1+\alpha_3&=y\\ \alpha_2+\alpha_3&=z\end{aligned}\right\} \to \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & x\\ 1 & 0 & 1 & y\\ 0 & 1 & 1 & z\end{array}\right] \xrightarrow{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & x\\ 0 & -1 & 1 & y-x\\ 0 & 1 & 1 & z\end{array}\right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & y\\ 0 & 1 & -1 & x-y\\ 0 & 0 & 2 & z+y-x\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & y\\ 0 & 1 & -1 & x-y\\ 0 & 0 & 1 & \frac{z+y-x}{2}\end{array}\right] \begin{matrix}-R_3+R_1\\ R_3+R_2\end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{x+y-z}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-y+z}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{z+y-x}{2}\end{array}\right]$$

Then $[v]_B=\begin{bmatrix}\frac{x+y-z}{2}\\ \frac{x-y+z}{2}\\ \frac{z+y-x}{2}\end{bmatrix}$

* $[T(v)]_C=[T]_B^C[v]_B$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x+y-z}{2}\\ \frac{x-y+z}{2}\\ \frac{z+y-x}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3x-y-3z}{2}\\ z-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$$

* $T(v)=\beta_1(1,1)+\beta_2(-1,0)$

$$T(v)=\left(\frac{3x-y-3z}{2}\right)(1,1)+(z-y)(1,-1)$$

$$=\left(\frac{3x-y-3z}{2},\frac{3x-y-3z}{2}\right)+(z-y,y-z)$$

$$=\left(\frac{3x-3y-z}{2},\frac{3x+y-5z}{2}\right)$$

Ex : Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear operator for which $[T]_S = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ with respect to the standard basis S for $\mathbb{R}^3$. Find $[T]_B$ the matrix for T relative for B where $B = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,1,0)\ ,\ u_3 = (0,1,-1)\}$

solution:

نستخدم القاعدة $[T(v)]_S = [T]_S [v]_S$ لاستخدامها في ايجاد قاعدة التحويل

Let $v \in \mathbb{R}^3$

$v = (x, y, z) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)$

$\alpha_1 = x \quad , \quad \alpha_2 = y \quad , \quad \alpha_3 = z$

Then $[v]_S = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

* $[T(v)]_S = [T]_S [v]_S$ نطبق القاعدة

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3x + 2y + 2z \\ -5x + 4y + 2z \\ x - y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

نوجد قاعدة التحويل

* $T(v) = \beta_1(1,0,0) + \beta_2(0,1,0) + \beta_3(0,0,1)$

$= (-3x + 2y + 2z)(1,0,0) + (-5x + 4y + 2z)(0,1,0) + (x - y + z)(0,0,1)$

$= (-3x + 2y + 2z, -5x + 4y + 2z, x - y + z)$

$T(1,1,1) = (1,1,1) \quad \to \quad \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,-1) = (1,1,1)$

$T(1,1,0) = (-1,-1,0) \to \quad \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,-1) = (-1,-1,0)$

$T(0,1,-1) = (0,2,-2) \to \quad \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,-1) = (0,2,-2)$

* $T(1,1,1) = (1,1,1) = u_1$ then $\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_3 = 0$

$T(1,1,0) = (-1,-1,0) = -u_2$ then $\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = -1 \quad , \quad \alpha_3 = 0$

$T(0,1,-1) = (0,2,-2) = 2u_3$ then $\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_3 = 2$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Theorem:

If $T : V \to V$ is a linear operator, B and C are bases for V

then $[T]_B = {}_C P_B^{-1} \, [T]_C \; {}_C P_B$

Ex : Let $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a linear operator for which $[T]_S = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ with respect to the standard basis S for $\mathbb{R}^3$. Find $[T]_B$ the matrix for T relative for B where $B = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (2,3,3),\ u_3 = (1,3,4)\}$

solution:

* Find ${}_S P_B$

$$ {}_S P_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} $$

* Find ${}_B P_S = {}_S P_B^{-1}$

$$ {}_S P_B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} $$

* $[T]_B = {}_B P_S^{-1} \, [T]_S \; {}_S P_B$

$$ = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} $$

$$ = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} $$

EIGENVALUES , EIGENVECTORS AND DIAGONALIZATION

خطوات الحل لإيجاد القيم المميزة و المتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

1- نحسب قيمة المحدد $\det(\lambda I - A) = 0$ لإيجاد قيم λ Eigenvalues (القيم المميزة)

2- نعوض عن كل قيمة مميزة λ في النظام المتجانس $(\lambda I - A)X = 0$ و المتجه الناتج هو Eigenvectors (المتجه المميز) لهذه القيمة

Ex : Find the eigenvalues and eigen vectors of $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

solution:

1) لايجاد القيم المميزة نحل المعادلة $\det(\lambda I - A) = 0$

$$(\lambda I - A) = \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -4 & \lambda + 3 \end{bmatrix}$$

$$* \ \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3) - 16 = 0 \quad , \quad \lambda^2 - 9 - 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 25 = 0 \longrightarrow \lambda = 5 \quad , \quad \lambda = -5$$

2) ايجاد المتجهات المميزة بحل النظام المتجانس $(\lambda I - A)X = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -4 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* At $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{2R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad 2x_1 - 4x_2 = 0$$

$$x_2 = t \quad , \quad x_1 = 2t \quad , \quad t \in R$$

$$X = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$* \text{ At } \lambda = -5$

$$\begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -8 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{reduced}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad 2x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = t \quad , \quad x_2 = -2t \quad , \quad t \in R$$

$$X = \begin{bmatrix} t \\ -2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \to \quad E_{-5} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ex : Find the eigenvalues and the bases for the eignspaces of $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

solution:

الحل :

1) لايجاد القيم المميزة نحل المعادلة $\det(\lambda I - A) = 0$

$$* \ \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

استخدمنا العمود الثاني لإيجاد قيمة المحدد

$$(\lambda - 1)\left[(\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2\right] = 0$$

$$(\lambda - 1)\left[\lambda^2 - 5\lambda + 6\right] = 0$$

$$\lambda = 1 \quad , \quad \lambda = 2 \quad , \quad \lambda = 3$$

2) ايجاد المتجهات المميزة بحل النظام المتجانس $(\lambda I - A)X = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$* \text{ At } \lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} -3x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = t \ , \ x_3 = 0 \ , \ t \in R$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* At $\lambda = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{reduced}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array}$$

$$x_3 = t \ , \ x_1 = -\tfrac{1}{2}t \ , x_2 = t \in R$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

* At $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array}$$

$$x_3 = t \ , \ x_1 = -t \ , \ x_2 = t \ , \ t \in R$$

$$X = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ex : Find the eigenvalues and the bases for the eignspaces of $A=\begin{bmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{bmatrix}$

solution:

الحل :

1) لايجاد القيم المميزة نحل المعادلة $\det(\lambda I-A)=0$

$$* \ \det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-10 & 9\\ -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-10)(\lambda+2)+36=0 \quad , \quad \lambda^2-8\lambda+16=0$$

$$\lambda=4 \quad , \quad \lambda=4$$

2) ايجاد المتجهات المميزة بحل النظام المتجانس $(\lambda I-A)X=0$

$$\begin{bmatrix}\lambda-10 & 9\\ -4 & \lambda+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

* At $\lambda=4$

$$\begin{bmatrix}-6 & 9\\ -4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}-6 & 9 & 0\\ -4 & 6 & 0\end{array}\right]\approx\left[\begin{array}{cc|c}1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right] \quad x_1-\tfrac{3}{2}x_2=0$$

$$x_2=t \quad , \quad x_1=\tfrac{3}{2}t \quad , \quad t\in R$$

$$X=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_4=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

بعد الفضاء المميز المقابل $\dim(E_4)=1$

Ex : Find the eigenvalues and the bases for the eignspaces of $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

solution:

1) لايجاد القيم المميزة نحل المعادلة $\det(\lambda I - A) = 0$

$$* \ \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda+1 & -1 \\ 3 & -2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)\left[(\lambda+1)(\lambda-3)-2\right]-\left[4-3(\lambda+1)\right]=0$$

$$(\lambda-1)\left[\lambda^2-2\lambda-5\right]-\left[-3\lambda+1\right]=0$$

$$\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda-\lambda^2+2\lambda+5+3\lambda-1=0$$

$$\lambda^3-3\lambda^2+4=0$$

$$\lambda=-1 \ , \ \lambda=2 \ , \ \lambda=2$$

2) ايجاد المتجهات المميزة بحل النظام المتجانس $(\lambda I - A)X = 0$

$$\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda+1 & -1 \\ 3 & -2 & \lambda-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$* \text{ At } \lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{9}{4}x_3 \end{array}$$

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}t \ , \ x_2 = -\tfrac{9}{4}t \ , \ x_3 = t \ , \ t \in R$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ -\frac{9}{4}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{9}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{9}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$* \text{ At } \lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ \end{array}$$

$$x_1 = t \;,\; x_2 = t \;,\; x_3 = t \;,\; t \in R$$

$$X = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نظريات :

1) القيم المميزة للمصفوفة A هي نفس القيم المميزة للمصفوفة A^T
2) اذا كانت λ قيمة مميزة للمصفوفة A فان λ^{-1} هي قيمة مميزة للمصفوفة A^{-1} (ان وجدت)
3) اذا كانت القيم المميزة للمصفوفة A هي $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ فان قيمة محدد المصفوفة A هو حاصل ضرب القيم المميزة

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

4) اذا كانت أي قيمة مميزة تساوي صفر فان المصفوفة A ليس لها معكوس
5) اذا كانت المصفوفة A هي مصفوفة مثلثية فان القيم المميزة هي عناصر القطر الرئيسي

الاستقطار Diagonalization

تعريف :

المصفوفة المربعة A من الدرجة n تكون قابلة للاستقطار اذا وجدنا مصفوفة P لها معكوس من الدرجة n بحيث $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية

<u>خطوات الحل لايجاد مصفوفة قطرية للمصفوفة A من الدرجة n</u>

1- نستنتج القيم المميزة $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ للمصفوفة A
2- نستنتج المتجهات المميزة لكل قيمة مميزة (ملحوظة : عدد المتجهات المميزة لابد أن يساوي درجة المصفوفة A)
3- نضع المتجهات المميزة كأعمدة في المصفوفة P (المتجهات تكون مستقلة خطيا) ولذلك P لها معكوس
4- نستنتج المصفوفة القطرية $D = P^{-1}AP$
مع ملاحظة أن المصفوفة D ستكون مصفوفة قطرية قطرها الرئيسي هو القيم المميزة

- ملحوظة : ليست كل المصفوفات قابلة للاستقطار

$$Ex: \text{ Let } A=\begin{bmatrix}3&0&-2\\0&4&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

$a)$ Prove that $\{1,4\}$ is the eigenvalues of A

$b)$ Find the bases for the eigenspaces of the matrix

c) Is A diagonalizable ? Justify your conclusion

$d)$ Find the matrix P that diagonalizes A such that $P^{-1}AP=D$ is a diagonal matrix

solution:

$a)$ To find the eignvalues . Solve $\det(\lambda I-A)=0$

$$* \det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3&0&2\\0&\lambda-4&0\\1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-4)[(\lambda-3)(\lambda-2)-2]=0$$

$$(\lambda-4)\left[\lambda^2-5\lambda+4\right]=0$$

$$\lambda=4\ ,\ \lambda=4\ ,\ \lambda=1$$

The eignvalues $\{1,4\}$

$b)$ Finding the eignvectors. Solve the homogenuous system $(\lambda I-A)X=0$

$$\begin{bmatrix}\lambda-3&0&2\\0&\lambda-4&0\\1&0&\lambda-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

* At $\lambda=1$

$$\begin{bmatrix}-2&0&2\\0&-3&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-2&0&2&0\\0&-3&0&0\\1&0&-1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}x_1=x_3\\x_2=0\\\ \end{array}$$

$$x_1=t\ ,\ x_2=0\ ,\ x_3=t\ ,\ t\in R$$

$$X=\begin{bmatrix}t\\0\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\ \rightarrow\ E_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

* At $\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad x_1 = -2x_3$$

$x_3 = t \ , \ x_1 = -2t \ , \ x_2 = s \ , \ t, s \in R$

$$X = \begin{bmatrix} -2t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow E_4 = \left< \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right>$$

$c)$ A is diagonalizable , because degree of A equal to the eigenvectors

حيث أن المصفوفة A من الدرجة 3 و لها 3 متجهات مميزة مستقلة فان المصفوفة A قابلة للاستقطار

$d)$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ diagonal matrix}$$

التعدد الجبري و التعدد الهندسي

- التعدد الجبري : عدد تكرار القيم المميزة
- التعدد الهندسي : بعد الفضاء المميز المقابل للقيمة المميزة (عدد المتجهات المميزة المقابلة لكل قيمة مميزة)
- التعدد الهندسي أقل من يساوي التعدد الجبري
- اذا كان التعدد الجبري يساوي التعدد الهندسي فان المصفوفة قابلة للاستقطار و يكون مجموع التعددات الجبرية = التعددات الهندسية = درجة المصفوفة
- اذا كان مجموع التعددات الهندسي أقل من درجة المصفوفة فان المصفوفة غير قابلة للاستقطار

$$Ex : \text{Let } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$a)$ Prove that $\{-1,1,2\}$ is the eigenvalues of A.

Is A diagonalizable ? Justify your conclusion

$b)$ Find the matrix P that diagonalizes A such that $P^{-1}AP = D$ is a diagonal matrix

c) Find P^{-1}

$d)$ Find A^5 using (c)

solution:

(1) $\det(\lambda I - A) = 0$

$$* \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda)[(\lambda)(\lambda - 2) - 1] + 2[1] = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 1 \ , \ \lambda = -1 \ , \ \lambda = 2$$

the eigen values $\{-1,1,2\}$

A is diagonalizable , because number of eigenvalues is equal to degree of the matrix

or (the algebraic multiplicity is equal to the geometric multiplicity)

المصفوفة A قابلة للاستقطار لأن عدد القيم المميزة تساوي درجة المصفوفة = 3
أو لأن التعدد الجبري = التعدد الهندسي

$$* \ (\lambda I - A)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$* \text{ At } \lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ \end{array}$$

$$x_1 = t \ , \ x_2 = t \ , \ x_3 = t \ , \ t \in R$$

$$X = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad E_1 = < \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} >$$

* At $\lambda=-1$

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & -3 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \begin{array}{l}x_1=x_3\\ x_2=-x_3\end{array}$$

$x_1=t \;,\; x_2=-t \;,\; x_3=t \;,\; t\in R$

$$X=\begin{bmatrix}t\\ -t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix} \rightarrow E_{-1}=<\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}>$$

* At $\lambda=2$

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \begin{array}{l}x_1=\frac{1}{4}x_3\\ x_2=\frac{1}{2}x_3\end{array}$$

put $x_3=4t \;,\; x_1=t \;,\; x_2=2t \;,\; t\in R$

$$X=\begin{bmatrix}t\\ 2t\\ 4t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix} \rightarrow E_2=<\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 4\end{bmatrix}>$$

c) $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$

$$D=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

d) Find P^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \begin{array}{l}\\ -R_1+R_2\\ -R_1+R_3\end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \begin{array}{l}\\ -\frac{1}{2}R_2\\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&3&-1&0&1\end{array}\right]\begin{array}{l}-R_2+R_3\\ \\ ,\frac{1}{3}R_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{array}\right]\begin{array}{l}-\frac{3}{2}R_3+R_1\\ \frac{1}{2}R_3+R_2\\ \end{array}$$

$$\approx\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{array}\right] \quad , \quad P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{bmatrix}$$

(1)

$$A=PDP^{-1} \quad\rightarrow\quad A^5=PD^5P^{-1}$$

$$* \; A^5=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}^5\begin{bmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&32\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-1&32\\1&1&64\\1&-1&128\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&3&-3\\2&-3&1\\-2&0&2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-60&6&60\\-120&0&126\\-252&6&252\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10&1&10\\-20&0&21\\-42&1&42\end{bmatrix}$$

- معلومة اضافية : المصفوفة A لها معكوس بدون حساب محددها . لماذا ؟

المصفوفة لها القيم المميزة $\{1,-1,2\}$ فان قيمة محدد المصفوفة حاصل ضرب القيم المميزة يساوي $\det(A)=-2$
أي لا تساوي صفر

نظريات:

1- اذا كان A مصفوفة من الدرجة n عدد القيم المميزة المختلفة يساوي n فان المصفوفة A قابلة للاستقطار

2- اذا كان لدينا مصفوفة A من الدرجة n و لها قيم مميزة مختلفة عددهم n و كانت لها متجهات مميزة مقابلة للقيم المميزة فان المتجهات المميزة مستقلة خطيا

3- اذا كان A مصفوفة من الدرجة n فان
- القيم المميزة للمصفوفة A هي نفس القيم المميزة للمصفوفة A^T
- اذا كان للمصفوفة A معكوس و لها القيمة الذاتية λ فان للمصفوفة A^{-1} قيمة مميزة هي λ^{-1}

4- المصفوفة القطرية و المصفوفة المثلثية العلوية و السفلية القيم المميزة هي عناصر قطرها

أمثلة

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1&3&-3\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ فان القيم المميزة للمصفوفة A^T هي

(أ). $1,2,-1$ (ب). $1,-1$ (ج). $1,2$ (د). $1,-1,\frac{1}{2}$

الحل:

بما أن المصفوفة A مثلثية علوية فان لها القيم المميزة $1,2,-1$ فان القيم المميزة لـ A^T هي نفس القيم المميزة لـ A (أ)

مثال: اذا كانت المصفوفة A مصفوفة مربعة من الدرجة 3 و كانت القيم المميزة لها هي 5 , 2 , 0 فان احدى العبارات التالية خاطئة

(أ). القيمة 2 قيمة مميزة لمنقولها A^T (ب). A قابلة للاستقطار (ج). $|A|=0$ (د). A لها معكوس

الحل :
بما أن 2 قيمة مميزة للمصفوفة A فانها قيمة مميزة للمصفوفة A^T
بما أن عدد القيم المميزة المختلفة هي 5 , 2 , 0 نفس درجة المصفوفة 3 فان A قابلة للاستقطار
بما أن محدد المصفوفة يساوي حاصل ضرب القيم المميزة فان $|A|=0$
بما أن قيمة محدد A حاصل ضرب القيم المميزة = 0 و بالتالي ليس لها معكوس (الحل (د))

مثال : اذا كان A مصفوفة من الدرجة 3×3 و كانت القيم المميزة لها هي $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ أوجد $|A^{-1}|$

الحل :
درجة المصفوفة يساوي عدد القيم المميزة

$$\det(A)=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

اذا $|A^{-1}|=24$

مثال : اذا كانت $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&0\\1&-2\end{bmatrix}$ فان

(أ). A و B قابلتان للاستقطار (ب). A قابلة للاستقطار بينما B ليست كذلك
(ج) B قابلة للاستقطار بينما A ليست كذلك (د). A و B غير قابلتين للاستقطار

الحل :
المصفوفة A مثلثية و لذا قيمها المميزة هي 1 و 1
نبحث الأن المتجهات الذاتية للقيمة الذاتية

$$(\lambda I-A)X=0 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&0\end{array}\right]$$

$$\text{If } \lambda=1 \quad \left[\begin{array}{cc|c}0&-1&0\\0&0&0\end{array}\right] \quad x_2=0 \text{ and } x_1=t$$

$$E_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

اذا التعدد الجبري لا يساوي التعدد الهندسي , اذا المصفوفة غير قابلة للاستقطار
اما المصفوفة B مصفوفة مثلثية اذا القيم المميزة $\lambda=-2$, $\lambda=4$ مختلفتين و عددها تساوي درجة المصفوفة
B قابلة للاستقطار (ج)

مثال : اذا كانت A المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-1&2\\0&0&2&4\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$ فان مجموعة القيم المميزة للمصفوفة A^2 هي

(أ). $\{1,-1,2\}$ (ب) $\{1,-1,2,-3\}$ (ج) $\{1,4\}$ (د) $\{1,4,9\}$

الحل : (د)

عند ايجاد A^2 سيكون الناتج مصفوفة مثلثية علوية أقطارها مربعات قطر المصفوفة A و لذلك القيم المميزة لـ A^2 هي $\{1,4,9\}$

مثال : مجموعة قيم الثابت α التي تجعل المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\\alpha&2&1\\-1&0&3\end{pmatrix}$ قابلة للاستقطار

(أ). $\{1,3\}$ (ب). $\mathbb{R}$ (ج). $\mathbb{R}/\{1,3\}$ (د). ϕ

الحل:

نوجد القيم المميزة

$$\det(\lambda I-A)=0$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-\alpha&\lambda-2&-1\\1&0&\lambda-3\end{vmatrix}=0$$

$$(\lambda-1)\big((\lambda-2)(\lambda-3)\big)=0$$

$$\lambda=1 \quad , \quad \lambda=2 \text{ and } \lambda=3$$

بما أن القيم المميزة المختلفة = درجة المصفوفة و بالتالي المصفوفة قابلة للاستقطار و لا تعتمد على قيمة α (ب)

ملحوظة هامة :
نعلم لايجاد المتجهات المميزة للقيم المميزة نستخدم القاعدة $AX = \lambda X$
اذا العلاقة تتحقق عند أي قيمة مميزة مع المتجه المميز المرافق له . أي أن $AE = \lambda E$ حيث E هو المتجه المميز للقيمة λ

مثال : اذا كان $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجها مميزا مرافقا للقيمة المميزة 1 و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجها مميزا مرافقا للقيمة المميزة 1-

للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فان A

الحل:

نستخدم العلاقة $AE = \lambda E$

بما ان $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجها مميزا مرافقا للقيمة المميزة 1 اذا $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a+b \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a+b=1 \quad \text{and} \quad c+d=1 \qquad (1)$$

بما أن $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجها مميزا مرافقا للقيمة المميزة 1- اذا $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$b=0 \quad \text{and} \quad d=-1$$

و بالتعويض في المعادلات (1) نستنتج $a=1 \ , \ c=2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال : اذا كان $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ متجها مميزا للمصفوفة A مقابلا للقيمة المميزة 2 أوجد قيمة $A^3 v$

الحل

$$* \ Av = \lambda v \xrightarrow{\cdot A} A^2 v = A\lambda v = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 v$$

$$\Rightarrow \quad A^2 v = \lambda^2 v$$

$$\xrightarrow{\cdot A} \quad A^3 v = A\lambda^2 v = \lambda^2(Av) = \lambda^2(\lambda v) = \lambda^3 v$$

$$* \quad A^3 v = \lambda^3 v = (2)^3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$