ملخص الفصول الثلاثة
فصل (1) (2) (3)

- المصفوفات والمحددات وحل الانظمة الخطية :

* العمليات على المصفوفات :

تساوي مصفوفتين - جمع وطرح المصفوفات

ضرب المصفوفة بعدد - ضرب المصفوفات

المنقول - الاختزال - المعكوس .

ملاحظات عامة :

- عند ضرب مصفوفتين : $A_{m\times n} \times B_{n\times L} = C_{m\times L}$

$m\times L$ حجم المصفوفة الناتجة من الضرب

الضرب في المصفوفات غير ابدالي

$AB \neq BA$

إلا اذا اعطى ذلك

- المصفوفة المتماثلة : $A=A^t$

والمتماثلة تخالفياً $A=-A^t$

- معكوس المصفوفة : $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

حساب المعكوس :

1) $(A|I) \xrightarrow[rref]{\text{بعد}} (I|A^{-1})$

او 2) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,adj(A)$

$|A|$ محدد A ، $adj(A)$ المصفوفة المرافقة لـ A

الطريقة الثانية للمصفوفة 2x2

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

* ليس لكل مصفوفة معكوس :

A ليس لها معكوس : $|A|=0 \rightarrow A^{-1}$ غير موجود

A لها معكوس : أما $|A|\neq 0 \rightarrow A^{-1}$ موجود

---

* المحددات والمصفوفة المرافقة :

حساب المحدد : 2x2 او 3x3 فقط

1) الاقطار

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$$

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}\begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{matrix}$$

2) أحد الصفوف أو احد الاعمدة

نختار اي صف او اي عمود

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a} & \overset{-}{b} & \overset{+}{c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

ونضع عليه الاشارات مثلاً لو اخترنا الصف الاول

$$|\;\;| = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

اذا كان مطلوب في السؤال المصفوفة المرافقة فإننا نكون قد حسبنا المصفوفة C (Cofactor matrix)

نحسب المحدد عن طريقها

$|\;\;| =$ نظيره من A $\times$ اي صف من C

3) عن طريق الخواص (الاختزال) :

نختزل المصفوفة المراد حساب محددها حتى تكون مثلثية مع مراعاة اثناء الاختزال

اذا بدلنا صفين نضرب المحدد في (-1) اذا قسمنا صف من مصفوفة المحدد على رقم نضرب المحدد في ذلك الرقم.

ويكون محدد المصفوفة المثلثية هو حاصل ضرب عناصر قطرها.

ملاحظة $|I|=1$

خصائص عامة $|A|$ و A^{-1} و A^t

r : عدد ، n درجة المصفوفة ، A ، B مصفوفات

$\lvert\,\lvert A\rvert\,\rvert=\lvert A\rvert^n$	$(A^{-1})^{-1}=A$	$(A^t)^t=A$
$\lvert rA\rvert=r^n\lvert A\rvert$	$(rA)^{-1}=\frac{1}{r}A^{-1}$	$(rA)^t=rA^t$
$\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$(AB)^t=B^tA^t$
$\lvert A\pm B\rvert\neq\lvert A\rvert\pm\lvert B\rvert$	$(A\pm B)^{-1}\neq A^{-1}\pm B^{-1}$	$(A\pm B)^t=A^t\pm B^t$

هام : $|A^t|=|A|$ و $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

ملاحظة : اذا وجد صف صفري في صفوف A فإن $|A|=0$ واذا تناسب صفان كذلك فإن $|A|=0$

حساب adj(A)

$$(A) \longrightarrow minors \xrightarrow[\text{الاشارات}]{\text{نركب}} C \xrightarrow[\text{منقول}]{\text{نعمل}} adj(A)$$

C مصفوفة Cofactor ، adj(A) المرافقة لـ A

هام

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A) \rightarrow adj(A)=|A|A^{-1} \rightarrow$

$(A)(adj(A))=|A|I$

حل أنظمة المعادلات الخطية

النظام : $AX=B$

١- جاوس : نضع المصفوفة الموسعة ثم نختزلها ref ثم نحول المختزلة الى معادلات ثم نحلها بالتعويض الخلفي

٢- جاوس جوردان : نضع المصفوفة الموسعة ثم نختزلها rref ثم نحول المختزلة الى معادلات ثم نوجد الحل

٣- عن طريق المعكوس : يجب أن تكون مصفوفة المعاملات مربعة ولها معكوس $|A|\neq 0$

$$AX=B \rightarrow X=A^{-1}B$$

٤- قاعدة كرامر : يجب أن تكون مصفوفة المعاملات مربعة ولها معكوس $|A|\neq 0$

نوجد $|A|$ ثم $|A_1|$ وذلك باستبدال العمود الاول من $|A|$ بالنواتج ثم نوجد $|A_2|$ وذلك باستبدال العمود الثاني من $|A|$ بالنواتج

وهكذا ويكون ... $x=\frac{|A_1|}{|A|}$, $y=\frac{|A_2|}{|A|}$

---

* في جاوس و جاوس جوردان

بعد الاختزال : (أ) اذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل $(m=n)$ one s.

(ب) واذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل $(m<n)$ I.m.s.

(ج) اذا كان هناك صف $0000 \mid$ عدد $\neq 0$ بغض النظر عن n ، m No s.

ويكون دائما في الانظمة التي مصفوفة معاملاتها $(m<n)$ I.m.s أو No s. فقط

ملاحظة : النظام الذي له [ones. أو Ims] يسمى متسق (متآلف) والذي له [No s.] غير متسق (غير متآلف)

النظام : $AX=0$ (المتجانس)

١- جاوس و ٢- جاوس جوردان فقط

لا يحل باستخدام المعكوس ولا كرامر

ويكون للنظام أيا كان :

(أ) حل صفري فقط $x_1=x_2=...=0$

(ب) أو له حلول غير صفرية أيضا $x_1=t,...$

ولا يكون No s. أبداً .

الحل الصفري فقط (عدد المعادلات بعد الاختزال يساوي عدد المجاهيل)

الحلول الغير صفرية (عدد المعادلات بعد الاختزال أقل من عدد المجاهيل)

الشروط على الانظمة

النظام $AX=B$

الحل	ما بعد اليساوي	معامل المتغير طرف أيسر
one s	أي شيء	$\neq 0$
Ims.	$=0$	$=0$
No s.	$\neq 0$	$=0$

أو نبحث (عدد المعادلات وعدد المجاهيل بعد الاختزال)

ملاحظة : اذا كانت مربعة وطلب الحل الوحيد يمكن الاستفادة من المحدد (نوجد المحدد ونضعه $\neq 0$)

النظام $AX=0$

الحل	معامل المتغير طرف أيسر
حل صفري	$\neq 0$
حلول غير صفرية	$=0$

أو نبحث (عدد المعادلات بعد الاختزال وعدد المجاهيل)

ملاحظة : اذا كانت مربعة يمكن الاستفادة من المحدد

(نضع المحدد $\neq 0$ للحل الصفري ونضعه $=0$ للحلول الغير صفرية)

ملاحظة دائما لها حلول غير صفرية

الفصل الرابع

4.1, 2

* الفضاءات - الفضاء الجزئي

نقول انه $W = \{ \dots \}$ فضاء جزئي من الفضاء V اذا كان

1. $W \neq \phi$ يوجد على الأقل متجه واحد ينتمي إلى W (أي يحقق شرطها).
2. لكل $u_1, u_2 \in W$ يجب $(u_1+u_2) \in W$
3. لكل $u_1 \in W$ ، $k \in R$ يجب $(ku_1) \in W$

4.3, 4

* التركيبات الخطية - المجموعات المولدة - الاستقلال والارتباط.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{cases} v \\ v \\ 0 \end{cases}$$

- متجه معطى لدراسة التركيب
- متجه عام لدراسة التوليد
- متجه صفري لدراسة الاستقلال والارتباط

بالاختزال

التركيب (v)	التوليد (v)	استقلال وارتباط (0)
• النظام متسق (حل وحيد - عدد لا نهائي من الحلول) تركيب	• للنظام حل غير مشروط تولد	• للنظام حل صفري (تافه) مستقله
• ليس للنظام حل ليس تركيب	• للنظام حل مشروط لا تولد	• للنظام عدد لا نهائي حلول غير صفرية مرتبطة

اذا كانت (النظام) مربع

بالمحدد

- $|\ \ | \neq 0$: تركيب - مولدة - لأى متجه - مستقله
- $|\ \ | = 0$: لا ندري: تركيب ام لا - لا تولد - مرتبطه

4.5 **الأساس والبعد**

الاساس المعتاد: هو مصفوفه الوحدة من المتجهات

$\dim(R^n) = n$ ، $\dim(P_n(x)) = n+1$

$\dim(M_{n\times n}) = n\times n$

في هذا الموضوع

- تعطى مجموعه متجهات ويسأل هل هي اساس للفضاء أم لا ؟
- يعطى فضاء ويطلب تعيين (استخراج) الاساس لهذا الفضاء العناصر الاربعه

---

* نقول انه مجموعه متجهات اساس للفضاء اذا كانت (مولدة - ومستقله)

في النظام المربع $\boxed{m=n}$

- كل مولدة مستقله وكل مستقله مولده وهي اساس $|\ \ | \neq 0$
- كل غير مولدة غير مستقله (مرتبطه) وكل غير مستقل غير مولدة أى ليست اساس $|\ \ | = 0$

في الانظمه الغير مربعه

بالاختزال: ونبدأ بالتوليد ثم الاستقلال

- $\boxed{m>n}$: دائما لا تولد أى ليست اساس لكن ربما تكون مستقله او مرتبطه
- $\boxed{m<n}$: دائما مرتبطه أى ليست اساس لكن ربما تولد أو لا

تعيين أساس وبعد

1. فضاء الحل للنظام المتجانس
2. فضاء جزئي مولد
3. يحوي عددا من المتجهات
4. فضاء معطى بالوصف $\{\dots\}$
5. فضاء الصفوف rowA والاعمدة colA وتعيين رتبه مصفوفه A

أنظر الصفحه التاليه

4.6

* الاحداثيات وتغيير الاساس

$[v]_S$: المتجه الاحداثي للمتجه v بالنسبه للاساس S

قيم α_1, α_2 ... التى تجعل v تركيب لمتجهات S

• مصفوفه الانتقال من أساس إلى أساس

$$\left[\ \text{مصفوفه } C \text{ منتقل اليه} \ \middle|\ \text{مصفوفه } B \text{ منتقل منه}\ \right] \xrightarrow{rref} \left[\ I \ \middle|\ \text{مصفوفه الانتقال } {}_C P_B\ \right]$$

• ملحوظة: $[v]_C = {}_C P_B [v]_B$ وكذلك $[v]_B = {}_B P_C [v]_C$

نتيجة: ${}_C P_B = {}_B P_C^{-1}$

• هام $[v]_S = v$ اذا كانت S اساس معتاد

كذلك ${}_C P_B = $ المصفوفه B اذا كانت C اساس معتاد

(أى الانتقال الى اساس معتاد يعطي نفس مصفوفه متجهات الاساس المنتقل منه)

1 أساس فضاء الحل للنظام المتجانس (nullity A) - (صفرية المصفوفة A)

عبارة

المعطى: نظام متجانس. $AX=0$

نحل النظام بالاختزال

(أ) اذا كان حل النظام حل صفري فقط فإنه: ليس هناك أساس والبعد 0

(ب) اذا كان للنظام عدد لانهائي من الحلول الغير صفرية وبجموعة الحل $S=\{t, s, \ldots\}$

نصيغ الحل على هيئة

$$\begin{bmatrix} t \\ 2t \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 2s \\ \vdots \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

فيكون الأساس هو الاعمدة بدون s و t أو تكتب

$\{(1,2,\ldots)^t, (1,0,2,\ldots)^t, \ldots\}$

وعددها (عدد البرفضيات t و s ..) هو البعد

2 أساس الفضاء الجزئي المولد

عبارة

المعطى: مجموعة متجهات تولد فضاء جزئي

* نضع المتجهات كصفوف ونختزل. فتكون الصفوف الغير صفرية من المصفوفة المختزلة

ما يقابلها من المصفوفة الاصلية هو الاساس والبعد عددها

أو* نضع المتجهات كأعمدة ونختزل وبعد الاختزال نأخذ من المصفوفة الاصلية الاعمدة التي تقابل واحدات متقدمة في المصفوفة المختزلة فتكون هي الاساس. والبعد عددها

نتيجة:

اذا كان البعد (عدد الصفوف الغير صفرية من R - أو عدد الواحدات المتقدمة من R بالطريقة الثانية) أقل من عدد المتجهات الاصلية فإن المتجهات الاصلية مرتبطة. واذا تساوو مستقلة

3 تعيين اساس يحوي (يضم) متجهات معينة.

عبارة

المعطى: متجه أو اكثر والمطلوب تعيين اساس يحوي معه (تكوين مدضمن متجهاته) المتجهات المعطاة

. نضع المتجهات المعطاة كأعمدة اولى في مصفوفة ونكمل الاعمدة المصفوفة بأعمدة تشكل الاساس المعتاد للفضاء (مصفوفة وحدة) ونختزل.

نأخذ من المصفوفة الاصلية الاعمدة التي تقابل واحدات متقدمة من R فتكون هي الاساس المطلوب

نتيجة: الشروط الواجب توافرها في متجه ما لكي يكون هو ومجموعة متجهات اساس. انه يكون تركيب خطي منهم أولهم.

-أي نضعه كعمود نواتج معهم ثم نوجد الشروط التي تجعل للنظام حل وحيد أو عدد لا نهائي من الحلول

4 تعيين أساس متجهات تحقق شروط خاصة $\{\ldots, \ldots\}$ (موصوفة - أو معروضة)

عبارة

المعطى فضاء مشروط مثل $\{A_{2\times2} ; A=A^t\}$

والمطلوب تعيين اساس لها

نحل الشرط (النظام المعطى) كما لو كان نظام

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow a=a$

$\Rightarrow a=t$, $b=c \Rightarrow c=s, b=s$

, $d=d \Rightarrow d=m$

فتكون

$A=\begin{pmatrix} t & s \\ s & m \end{pmatrix} = (\quad)+(\quad)+(\quad)$

$= t(\quad)+s(\quad)+m(\quad)$

والاساس هو المصفوفات بدون s و t ... وعددها هو البعد

مثال آخر

$\{(a,b,c) ; a+b+c=0\}$

$a=-b-c \Rightarrow b=t$

, $c=s \Rightarrow a=-t-s$

$(-t-s, t, s) = (\ ,\ ,\ ) +$

$(\ ,\ ,\ ) = t(\ ,\ ,\ )+s(\ ,\ ,\ )$

الاساس هو المتجهات بدون t و s وعددها هو البعد

5 أساس الفضاء الصفي وأساس الفضاء العمودي للمصفوفة.

عبارة

4.7

المعطى مصفوفة A

نختزلها إلى مصفوفة R

- فتكون الصفوف الغير صفرية من R هي اساس فضاء الصفوف للمصفوفة A (Row A) وعددها هو بعد فضاء الصفوف dim (row A)

- نأخذ من A الاعمدة التي تقابل واحدات متقدمة من R فتكون هي اساس فضاء الاعمدة Col(A) وعددها هو بعد فضاء الاعمدة. dim(Col A)

رتبة المصفوفة A
rank A
هي بعد فضاء الصفوف وهي بعد فضاء الاعمدة

$\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{row} A) = \dim(\operatorname{Col} A)$

نتيجة:

$\operatorname{rank} < m \Rightarrow$ الصفوف مرتبطة

$\operatorname{rank} = m \Rightarrow$ الصفوف مستقلة

$\operatorname{rank} < n \Rightarrow$ الاعمدة مرتبطة

$\operatorname{rank} = n \Rightarrow$ الاعمدة مستقلة

. وهناك نتائج أخرى ومبرهنات نأتي على ذكرها

تابع الفصل الرابع

* مبرهنة الرتبة : $rank(A) + nullity(A) = n$

رتبة المصفوفة — بعد فضاء الحل للنظام المتجانس — عدد الاعمدة

تذكر أنه

$$rank(A) = \dim row(A) = \dim col(A) = rank A^t$$

نتيجة

$$rank A^t + nullity A^t = m$$

* دائماً : $rank A \leq m$ and $rank A \leq n$

علاقة $rank(A)$ بالأنظمة

في النظام المتجانس $AX=0$

إذا كان النظام المتجانس له حل صفري فقط يلزم

$rank A = n$

$nullity A = 0$

وأعمدة A مستقلة

• والعكس صحيح كل مصفوفة رتبتها $= n$ فإنها لو وضعت في نظام متجانس فإنه يكون له حل صفري فقط

في النظام الغير متجانس $AX=B$

اذا كان النظام متسق فإنه

$rank A = m$

وأعمدة A لا تولد R^m

• العكس ليس بالضرورة أي اذا كانت هناك مصفوفة رتبتها m فليس بالضرورة اذا وضعت في نظام غير متجانس ان يكون هذا النظام متسق

• اما اذا كان :

$AX=B$ متسق $\longleftrightarrow rank A = rank[A:B]$

مبرهنة • اذا كانت W مجموعة جزئية من V فانه $\dim(W)$ أصغر من أو يساوي $\dim(V)$

• العكس ليس بالضرورة صحيح : أي اذا كان $\dim(W)$ أصغر من أو يساوي $\dim(V)$ فليس بالضرورة انه W مجموعة جزئية من V

• اما اذا كانت $W=V$ فانه $\dim(W)=\dim(V)$

والعكس اذا : $\dim(W)=\dim(V)$ فانه $W=V$

* راجع أيضاً : المبرهنة : كل مجموعة متجهات تكون مرتبطة اذا واذا فقط كانه احدها تركيب خطي من الأخرى

• اذا اعطيت مجموعة متجهات مستقلة ثم اعطيت مجموعة أخرى خليط من المتجهات المستقلة فهل الجديدة مستقلة ام مرتبطة

الفصل الخامس

5.1

* فضاء الضرب الداخلي : نقول عن قاعدة ضرب داخلي $\langle u,v\rangle = \dots$ حيث $u,v \in W$ اذا كانه :

1) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

2) $\langle (u+v),w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$

3) $\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$

4) $\langle u,u\rangle \geq 0$

5.2

* التعامد

• اذا كانه $\langle u,v\rangle = 0$ فانه $u \perp v$

• لايجاد طول المتجه u

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

ويكون $\|u\|^2 = \langle u,u\rangle$

• اذا كانه $\|u\|=1$ فانه u يسمى متجه عياري

• لايجاد متجه عياري من متجه غير عياري

$$v = \frac{u}{\|u\|}$$

• لايجاد الزاوية بين متجهين u,v :

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

• لايجاد المسافة بين متجهين u,v :

$$d = \|(u-v)\| = \sqrt{\langle (u-v),(u-v)\rangle}$$

* ملحوظة اذا كانه $u \perp v$ فانه

$$\|(\alpha u \pm \beta v)\|^2 = \alpha^2\|u\|^2 + \beta^2\|v\|^2$$

ويكون $\|(\alpha u \pm \beta v)\| = \sqrt{\alpha^2\|u\|^2 + \beta^2\|v\|^2}$

أما اذا كانا غير متعامدين نفك اقواس فك عادي

$$\|(\alpha u \pm \beta v)\|^2 = \alpha^2\|u\|^2 \pm 2\alpha\beta\langle u,v\rangle + \beta^2\|v\|^2$$

مبرهنة • اذا كانه $|\langle u,v\rangle| = \|u\|\,\|v\|$ فانه u,v مرتبطين خطياً والعكس اذا كانه مرتبطين خطياً فانه القيمة المطلقة لضربهما تساوي حاصل ضرب طوليهما

مبرهنة • اذا كانه u,v غير صفريين ومتعامدين فانهما مستقلين لكن العكس ليس بالضرورة أي كل متجهين غير صفريين ومستقلين ليس بالضرورة متعامدين