

الفصل الأول

المصفوفات

أنواع المصفوفات

(١) مربعة

كسور \times صف

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

2×2

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -9 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

3×3

(٢) مستطيلة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3×2

(٣) صفرية

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(٤) قطرية

مربعة

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(٥) وحدة

مربعة

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I

(٦) صف

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1×2

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1×3

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{2 \times 1} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

(٧) عمود

(٨) مثلثية

مربعة

سلمية

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

سُلمية

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات

(١) تساوي مصفوفتان ✓

(٢) جمع وطرح المصفوفات ✓

(٣) ضرب عدد في مصفوفة ✓

(٤) منقول المصفوفة ✓

(٥) ضرب مصفوفتان ✓

(٦) اختزال المصفوفات ✓

(٧) معكوس المصفوفة ✓

مهم جداً

(١) تساوي مصفوفتانتمرين: ليكن

$$\begin{bmatrix} 3 & a+c \\ d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 5 \\ -6 & b \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة

a, b, c, d

$$\begin{aligned} a &= 3 & a + c &= 5 \\ d &= -6 & 3 + c &= 5 \\ b &= 0 & c &= 2 \end{aligned}$$

(٢) جمع وطرح المصفوفاتتمرين: ليكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$1) A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2) B - A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$$

$$3) A + C = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} = \text{مطلوب}$$

٣) ضرب عدد في مصفوفة

4) $3B =$

$$3 \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 18 & 15 \end{bmatrix}$$

من الجدول
النسبة

5) $B - 2A =$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ 18 & 5 \end{bmatrix}$$

٤) Transpose (منقول المصفوفة)

تمرين: لتكن

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

فإن

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

خواص المنقول:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(rA)^T = r A^T$

3) $(AB)^T = B^T A^T$

4) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

نقطة

عدد r

نقول أن مصفوفة A

كيفية

متماثلة تخالفياً

$$A^T = -A$$

متماثلة

$$A^T = A$$

إذا كان

تمرين: إذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

أوجد:

$$A^T, B^T$$

الحل

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A$$

$\therefore A$ مصفوفة متماثلة

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = -B$$

$\therefore B$ مصفوفة متماثلة تخالفياً

٥) ضرب المصفوفات

نوع X صف

$$A \times B =$$

$n \times r$ $r \times m$

$$n \times m$$

تمرين : إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

 2×2

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

 2×3

أوجد

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2×2 2×3

$$= \begin{bmatrix} 20-6 & 10-0 & -15-2 \\ 0+9 & 0+0 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 & -17 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2×3 2×2

X بيك

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25+0 & -10-6 \\ 0+0 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -16 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

٦ اختزال المصفوفاتالصيغة الدرجية الصفية المختزلة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الصيغة الدرجية الصفية

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

العمليات الصفيةالصف الأول R_1 $R_{13} \rightarrow$ تبديل الصف الأول بالثالث $2R_{12} \rightarrow$ $2R_1 + R_2$ ثابت R_1 متغير R_2 $-3R_{24}$ ثابت R_2 متغير R_4

يجو جد المصفوف العكسية استخدم المسطرة

 $-2R_1$ تُضرب الصف الأول (-2)

تمرين:

ضع المصفوفة علي الصيغة الدرجية الصفية

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

تحية
أستاذ

الحل

$$\xrightarrow{R_1/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -7R_{12} \\ -6R_{13} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -10 \\ 0 & -5 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1R_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{5R_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

تمرين:

ضع المصفوفة علي الصيغة الدرجية الصفية المختزلة

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لصفت
مصفوفة صفية

$$\begin{aligned} & \checkmark \\ & \xrightarrow{-1R_3} \\ & \xrightarrow{-1R_3 + R_1} \\ & \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{7}{1}\right) + 2$$

$$\frac{-14}{5} + \frac{2}{1} = \frac{-14+10}{5} = \frac{-4}{5}$$

$$\xrightarrow{-1R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{5}{4}R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-7R_{12}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-6R_{13}}$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{5}R_{32}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{5}R_{31}}$$

$$\xrightarrow{R_2/10}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{10} = \left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{1R_{21}} \\ & \xrightarrow{-7R_{23}} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

تمرين:

ضع المصفوفة علي الصيغة الدرجية الصفية

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & -2 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -1R_{12} \\ -2R_{13} \\ -2R_{14} \\ -1R_{15} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2/3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -3R_{23} \\ -6R_{24} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{45} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{34} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3/5 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_4/(-5) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$