خواص المحدد:

1) $|AB| = |A| \cdot |B|$

2) $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$

3) $|A^n| = (|A|)^n$

4) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

5) $|A^t| = |A|$

6) $|rA| = r^n |A|$

عدد = r

درجة المصفوفة A = n

7) $|I| = 1$

خواص المنقول :

1) $(A^T)^T = A$

2) $(rA)^T = r A^T$

3) $(AB)^T = B^T A^T$

4) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

خواص المعكوس :

1) $(A^{-1})^{-1} = A$

2) $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} A^{-1}$

3) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

4) $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$

5) $I^{-1} = I$

تمرين:عين قيمة β بحيث

$$\begin{vmatrix} \beta-1 & 1 \\ 2 & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$\beta(\beta-1) - 2 = 0$

$\beta^2 - \beta - 2 = 0$

$(\beta-2)(\beta+1) = 0$

$\beta = 2 \quad | \quad \beta = -1$

تمرين:عين قيمة λ بحيث

$$\begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & \lambda & -6 \\ 1 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & \lambda & -6 \\ 1 & 3 & \lambda-5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & \lambda \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$\lambda^2 - 4 = [\lambda(\lambda-5) + 0 - 18] - [0 - 18 - 3\lambda]$

$\lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 5\lambda \cancel{-18} \cancel{+18} + 3\lambda$

$\lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda$

$\cancel{\lambda^2} - 4 - \cancel{\lambda^2} + 2\lambda = 0$

$-4 + 2\lambda = 0$

$2\lambda = 4$

$\lambda = 2$

توضيح

ضرب

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-3)(x-2) = 0$$

3 , 2
6 , 1

$x = 3$ | $x = 2$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$(x+8)(x-1) = 0$$

4 , 2
8 , 1

$x = -8$ | $x = 1$

$|A| = 2$

تمرين:

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 3 وكان det (A) = 2 فاحسب

det ($2A^2 A^t$)

الحل

$|2 A^2 A^t|$

$= 2^3 |A^2| |A^t|$

$= 8 \cdot |A|^2 \cdot |A| = 8 \cdot 2^2 \cdot 2 = 64$

تمرين:

إذا كانت A و B مصفوفتين من الدرجة 3 وكان det (A) = 2 و $|B^t| = 4$

فاحسب

det ($2A^{-2}(B A^t)^{-1}$)

الحل

$= |2 A^{-2} (B A^t)^{-1}|$

$= 2^3 |A^{-2}| \, |(B A^t)^{-1}|$

$= 8 \cdot \frac{1}{|A|^2} \cdot \frac{1}{|B A^t|}$

$= 8 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{|B| |A^t|}$

$= \cancel{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4 \cdot 2}} = \frac{1}{4}$

قاعدة نقول أن المصفوفة A

لها معكوس

$|A| \neq 0$

ليس لها معكوس

$|A| = 0$

حفظ

مهم جدا

تمرين : إذا كانت المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & a^3 & 16 \end{bmatrix}$$

أوجد قيمة a التي تجعل المصفوفة ليس لها معكوس

الحل

$|A| = 0$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & a^3 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

$$+1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^3 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

$16 - a^4 = 0$

$16 = a^4$

$a = \pm \sqrt[4]{16}$

$a = \pm 2$

ملاحظة

إذا كان السؤال له معكوس

$a \neq \pm 2$

$a = R - \{\pm 2\}$

اوجد قيم الثابت a الذي يحقق

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 3a & 0 \\ -2 & a & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

الحل

$$\left|\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} + \left|\begin{matrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 3a & 0 \\ -2 & a & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & a \\ 1 & 3a \\ -2 & a \end{matrix} = 6$$

$$(-2a+0+0)-(0+6+0)+(0+0+a)-(2a+0+-6a) = 6$$

$$-2a-6+a+4a=6$$

$$3a=6+6$$

$$3a=12$$

$$\boxed{a=4}$$

المصفوفة المرافقة

Adjoint Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & d \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} c & -d \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$C_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	$C_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$	$C_{13} = +$
$C_{21} = -$	$C_{22} = +$	$C_{23} = -$
$C_{31} = +$	$C_{32} = -$	$C_{33} = +$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow adj A = C^T$$

تمرين: أوجد adj A , adj B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(-2-3) = -5$	$C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$	$C_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +(2+1) = 3$
$C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-2) = 4$	$C_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = +(2-2) = 0$	$C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1+1) = -2$
$C_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = +(-3+2) = -1$	$C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$	$C_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +(-1+2) = 1$

$$C = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

قاعدة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A$$

احفظ

نستنتج $\leftarrow \cdot |A|$

$$\text{adj } A = |A| \, A^{-1}$$

احفظ

نستنتج $\leftarrow \cdot A$ $\quad AA^{-1} = I$

$$A \text{ adj } A = |A| \, I$$

احفظ

تمرين:

اوجد معكوس المصفوفة A باستخدام ال adj

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

حل 1

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-9+12} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

واجب

لتكن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

أ) احسب $adj(A)$.

ب) احسب A^{-1} باستخدام (أ).

$|A| = -2$

تمرين: إذاكانت A مصفوفة من الدرجة 2 وكان det A = -2 فاحسب قيمة

$|2(adj\ A)^{-1} + 3A|$

الحل

$$= |2(|A|A^{-1})^{-1} + 3A|$$

$$= |2|A|^{-1}A + 3A|$$

$$= |2 \cdot \frac{1}{|A|}A + 3A|$$

$$= |2 \cdot \frac{1}{-2}A + 3A|$$

$$= |-A + 3A|$$

$$= |2A| = 2^2|A| = 4(-2) = -8$$

ليكن كل من A, B مصفوفة من درجة 3×3 بحيث $|A| = 3, |B| = 2$.

احسب $|2B^T A^2 adj(A) B^{-2}|$

الحل

$$|2B^T A^2 adj(A) B^{-2}|$$

$$= |2B^T A^2 |A| A^{-1} B^{-2}|$$

$$= |2B^T A^2 \cdot 3 A^{-1} B^{-2}|$$

$$= 6^3 |B^T| |A^2| |A^{-1}| |B^{-2}|$$

$$= 6^3 \cancel{|B|} |A|^2 \cdot \frac{1}{\cancel{|A|}} \cdot \frac{1}{|B|^2}$$

$$= 6^3 |A| \cdot \frac{1}{|B|}$$

$$= 6^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= (\overset{108}{\cancel{216}})(3) \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$$

$$= 324$$

تمرين: إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&-3\\2&-2&5\end{bmatrix}$$

فأوجد المصفوفة B إذا كانت $(\frac{3}{2}A+B)^{-1}=adjA$

الحل 1

$$\left(\frac{3}{2}A+B\right)^{-1} = |A|\,A^{-1}$$

بأخذ المعكوس للطرفين

$$\left[\left(\frac{3}{2}A+B\right)^{-1}\right]^{-1} = \left[|A|\,A^{-1}\right]^{-1}$$

$$\frac{3}{2}A+B = |A|^{-1}A$$

$$B = \frac{1}{|A|}A - \frac{3}{2}A$$

$$B = \frac{1}{2}A - \frac{3}{2}A$$

$$B = \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)A$$

$$B = \frac{-2}{2}A$$

$$B = -1A$$

$$B = -1\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&2&-3\\2&-2&5\end{bmatrix}$$

نوجد $|A|$

$$|A| = \left|\begin{matrix}1&-1&2\\0&2&-3\\2&-2&5\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&-1\\0&2\\2&-2\end{matrix}$$

$$= (10+6+0)-(0+6+8)$$

$$= 16-14$$

$$= 2$$

$$B = \begin{bmatrix}-1&1&-2\\0&-2&3\\-2&2&-5\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{5-6}{15} = \frac{-1}{15}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{3}$$

إذا كانت المصفوفة A تحقق المعادلة $\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}A^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}$ فاوجد A .

الحل

(-1)

$$\frac{1}{\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{1-0}\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}$$

(-1)

$$\frac{1}{\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}=\frac{1}{1-0}\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$$

بالضرب

$$\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-2\\1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}$$

بأخذ (-1) للطرفين

$$A=\frac{1}{\begin{vmatrix}3&-2\\-1&1\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$$

$$A=\frac{1}{3-2}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$$

A ، B ، C مصفوفات

$$\boxed{AB = C}$$

$\boxed{\text{التخلص من } \underline{B}}$

نضرب B^{-1}

$\xleftarrow[\text{اتجاه}]{}$

$$A B B^{-1} = C B^{-1}$$

$$A = C B^{-1}$$