مقدمة في البرمجة غير الخطية

Introduction to Non-Linear Programming

مقدمة في البرمجة غير الخطية

- **تعريف:**

يقال أن الدالة $f\,(x_1, \ldots, x_n)$ دالة غير خطية إذا لا يمكن تمثيلها على الصورة:

$$f\,(x_1\,, \ldots\,, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

بحيث أن $c_1\,, c_2\,, \ldots\,, c_n$ هي ثوابت.

- **تعريف:**

لأي دالة غير خطية $f\,(x_1\,, \ldots\,, x_n)$ وثابت b فإن:

$$f\,(x_1\,, \ldots\,, x_n) \le b \quad \text{أو} \quad f\,(x_1\,, \ldots\,, x_n) \ge b$$

تسمى متراجحة غير خطية ،

و $f\,(x_1\,, \ldots\,, x_n) = b$ تسمى معادلة غير خطية.

مقدمة في البرمجة غير الخطية

ليكن لدينا البرنامج الرياضي التالي:

Maximize or Minimize $f(\mathbf{x})$ ⟵ دالة الهدف

subject to:

$$d_i(\mathbf{x}) \le a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$ ⟵ قيود متراجحات

$$e_i(\mathbf{x}) = b_i \quad i = 1, 2, \ldots, p$$ ⟵ قيود معادلات

حيث $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

مقدمة في البرمجة غير الخطية

- إذا كانت دالة الهدف غير خطية و/أو يوجد قيد غير خطي فإنه لدينا برنامج غير خطي.
- يوجد أنواع كثيرة من البرامج غير الخطية، مثل:
  – إذا كان لدينا برنامج غير خطي بحيث أن دالة الهدف دالة تربيعية والقيود خطية فإنه يسمى برنامج تربيعي (**Quadratic Programming**).
  – عندما لا يوجد قيود في البرنامج الرياضي فإنه لدينا برنامج غير خطي وغير مقيد.
  – مهم جدا نوع الدوال في البرامج غير الخطية، مثل التحدب والتقعر والاتصال والقابلية للاشتقاق ...

مثال تطبيقي: تحديد الموقع الأمثل

إحدى الشركات تحاول أن تحدد موقع لبناء مستودع. إحداثيات مواقع الأربعة عملاء (في الفضاء الإقليدي) الذين سيخدمهم المستودع (بالكيلوات) وعدد الشحنات التي يطلبها كل عميل سنوياً معطاه في الجدول التالي:

العميل	إحداثيات الموقع y	x	عدد الشحنات
1	10	5	200
2	5	10	150
3	12	0	200
4	0	12	300

الشركة تريد تحديد موقع بناء المستودع بحيث تقلل إجمالي المسافة التي ستقطعها الشاحنات سنويا لتوصيل طلبات العملاء الأربعة.

مثال تطبيقي: تحديد الموقع الأمثل

الحل:

نعلم أن المسافة الإقليدية بين نقطتين (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2) هي:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

المتغيرات:

$x =$ إحداثي المحور x للمستودع

$y =$ إحداثي المحور y للمستودع

$d_i =$ المسافة من المستودع للعميل i

مثال تطبيقي: تحديد الموقع الأمثل

ويكون لدينا البرنامج غير الخطي التالي:

$$\min \quad z = 200d_1 + 150d_2 + 200d_3 + 300d_4$$

s.t.

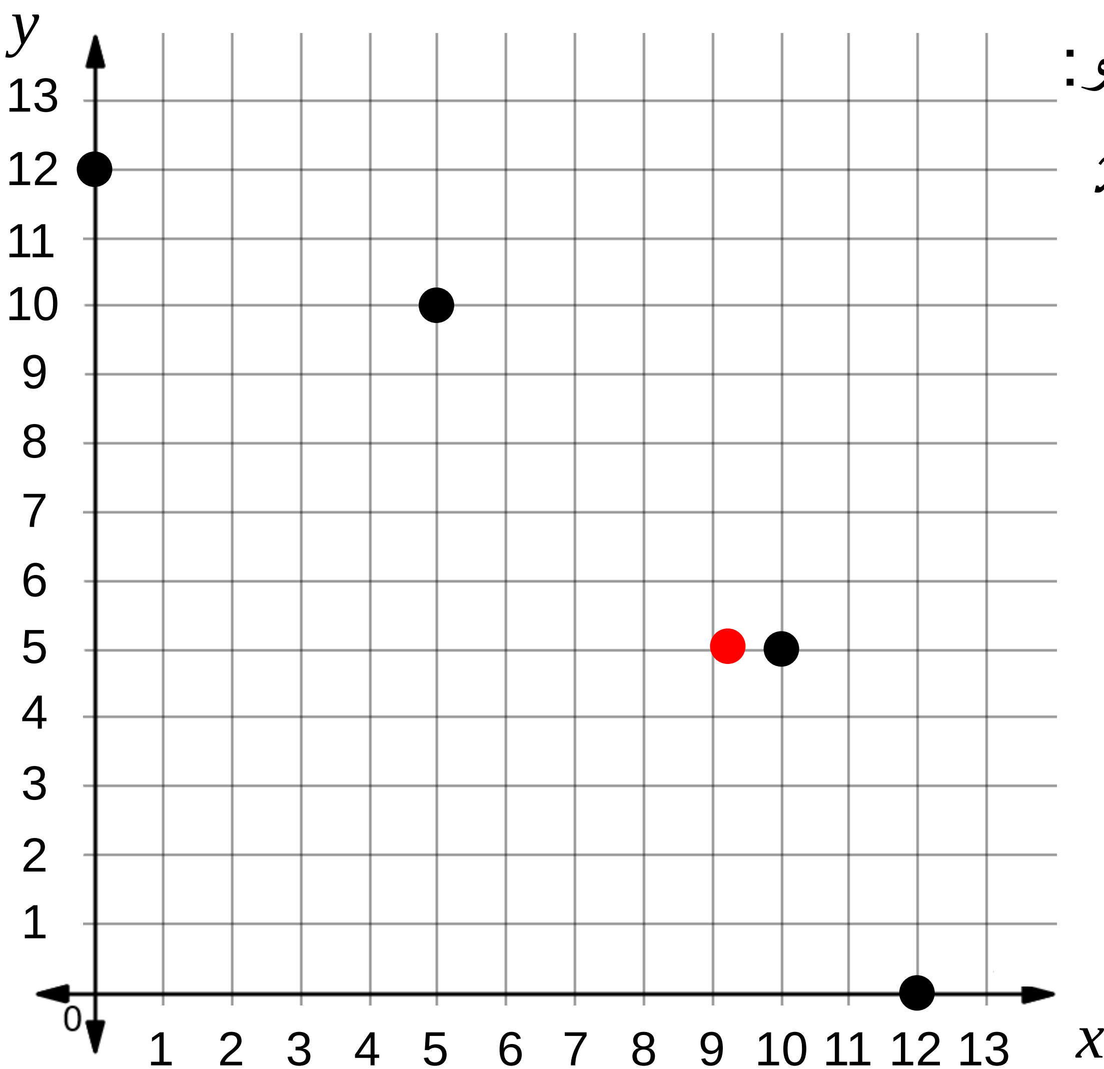
$$d_1 = \sqrt{(x-5)^2 + (y-10)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2}$$

$$d_3 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-12)^2}$$

$$d_4 = \sqrt{(x-12)^2 + (y-0)^2}$$

مثال تطبيقي: تحديد الموقع الأمثل



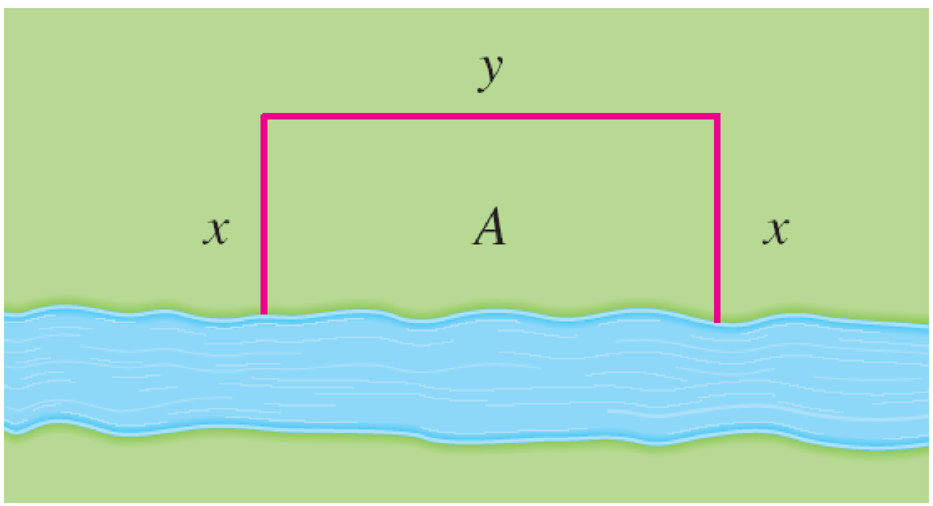
سنجد فيما بعد أن الحل الأمثل هو:

$$x^* = 9.31 \;,\; y^* = 5.03$$

$$z^* = 5456.54$$

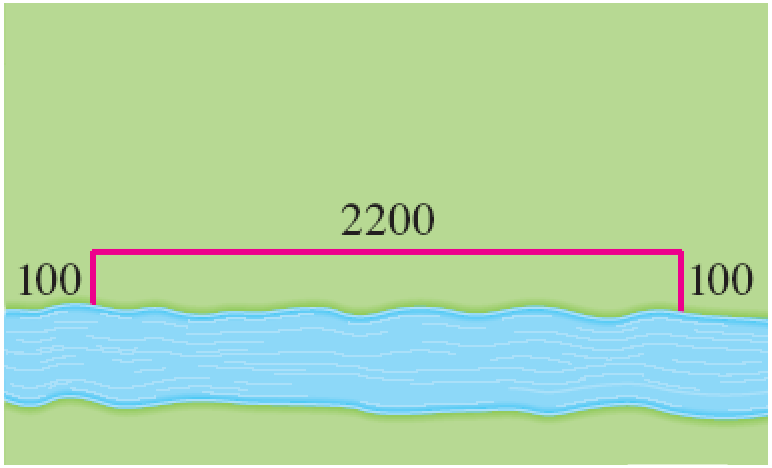
مثال تطبيقي: تحديد أبعاد مزرعة

- أحد المزارعين لدية 2400 متر من السياج ويريد تسييج حقل بشكل مستطيل على شاطئ النهر لزراعته وحمايته.
- ماهي أبعاد هذا الحقل المستطيل الذي يعطيه أكبر مساحة للحقل؟
- نعلم أن مساحة الحقل هي: $A = xy$

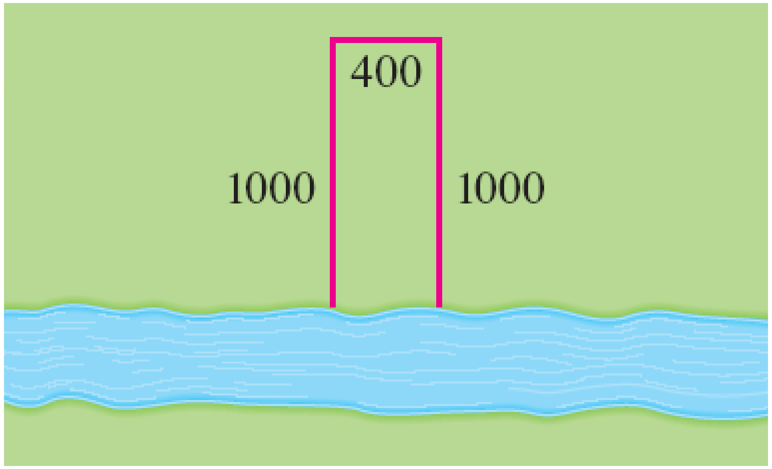


مثال تطبيقي: تحديد أبعاد مزرعة

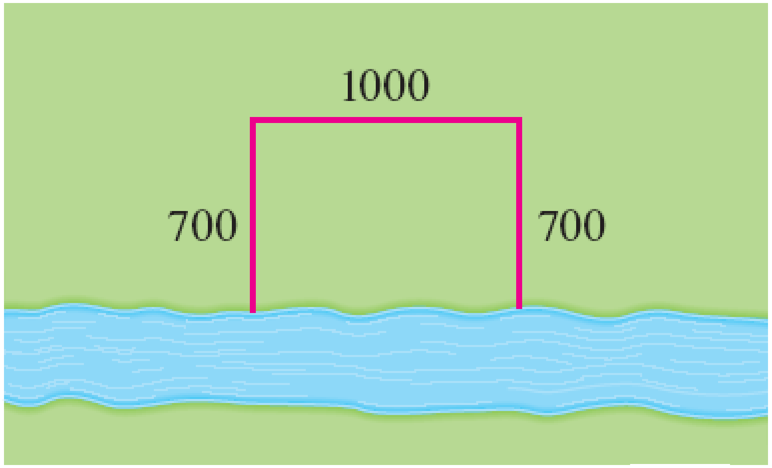
- أمثلة لحلول ممكنة
لهذه المسألة:



Area = 100 · 2200 = 220,000 m^2



Area = 1000 · 400 = 400,000 m^2



Area = 700 · 1000 = 700,000 m^2

مثال تطبيقي: تحديد أبعاد مزرعة

- سنحاول تمثيل المسألة بمتغير واحد.
- حيث أن طول السياج المتوفر هو: $2x + y = 2400$
- إذاً نستطيع أن نعبر عن y بدلالة x كما يلي:

$$y = 2400 - 2x$$

- وبالتالي فإن مساحة الحقل هي:

$$A = x(2400 - 2x) = -2x^2 + 2400x$$

- لاحظ أنه يجب أن يكون $0 \le x \le 1200$ وإلا ستصبح قيمة A سالبة.

مثال تطبيقي: تحديد أبعاد مزرعة

- إذا لدينا البرنامج غير الخطي التالي:

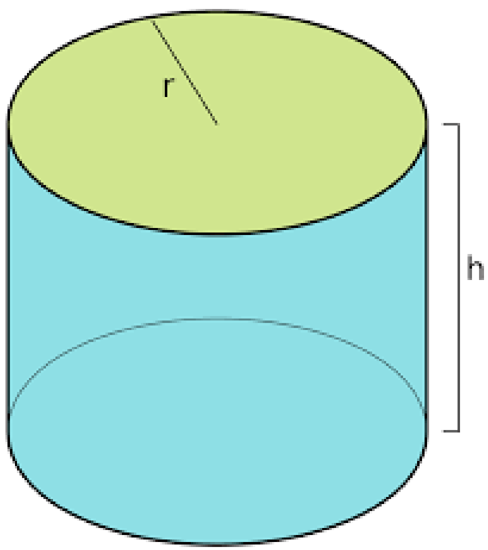
$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) = -2x^2 + 2400x \\ \text{s.t.} \quad & 0 \le x \le 1200 \end{aligned}$$

- سنجد فيما بعد أن الحل الأمثل لهذا البرنامج غير الخطي هو:

$$x = 600 \quad , \quad y = 1200 \quad , \quad A = 720{,}000$$

مثال تطبيقي: تحديد أبعاد علبة اسطوانية

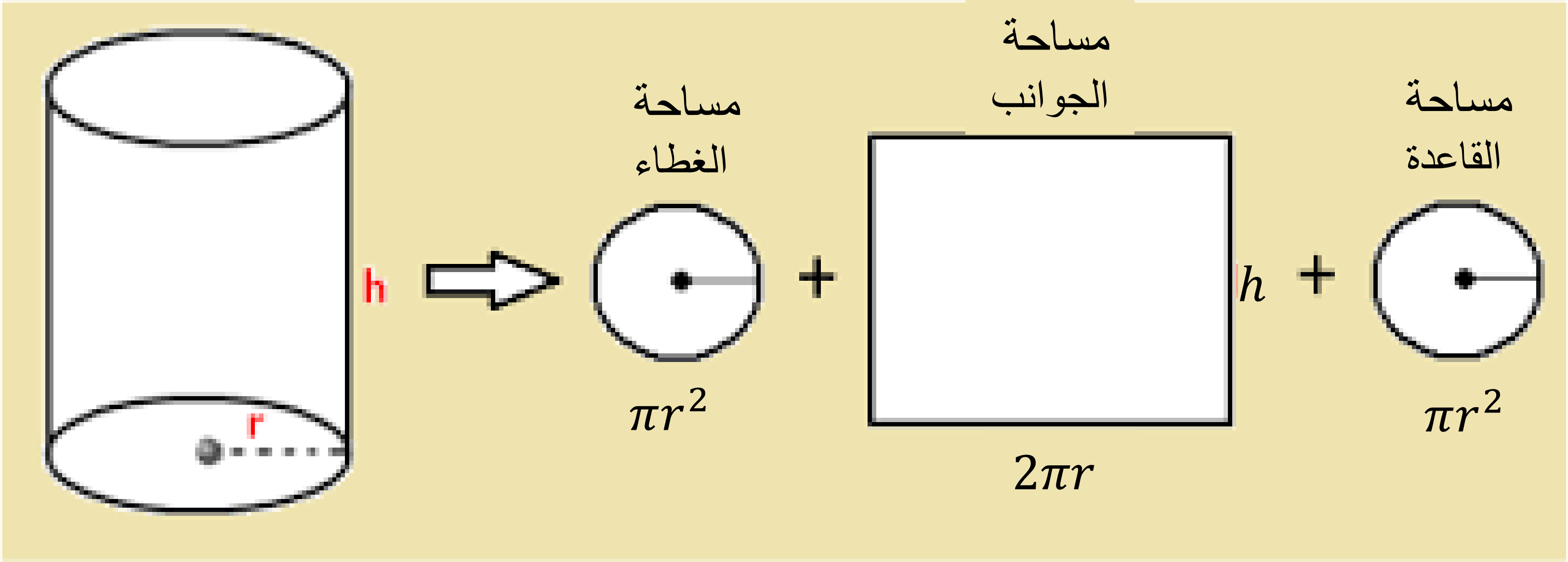
- إحدى الشركات تريد تصنيع علبة زيت ستحتوي على لتر واحد من الزيت.
- ماهي أبعاد هذه العلبة التي تقلل من تكلفة الألومنيوم المستخدم لتصنيعها؟
- أي أننا سنحتاج تقليل مساحة سطوح العلبة.



مثال تطبيقي: تحديد أبعاد علبة اسطوانية

- نعلم أن مساحة سطوح العلبة هي:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$



مثال تطبيقي: تحديد أبعاد علبة اسطوانية

- لتحويلها إلى مسألة في متغير واحد ، نعلم أن حجم الزيت في العلبة هو: $\pi r^2 h = 1\ \text{litre} = 1000\ \text{cm}^3$
- وبالتالي: $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$
- أي أننا سنحتاج تقليل مساحة سطوح العلبة:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

- يجب أن تكون قيمة r أكبر من الصفر.

مثال تطبيقي: تحديد أبعاد علبة اسطوانية

- إذا لدينا البرنامج غير الخطي التالي:

$$\min \quad f(x) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$\text{s.t.} \qquad r > 0$$

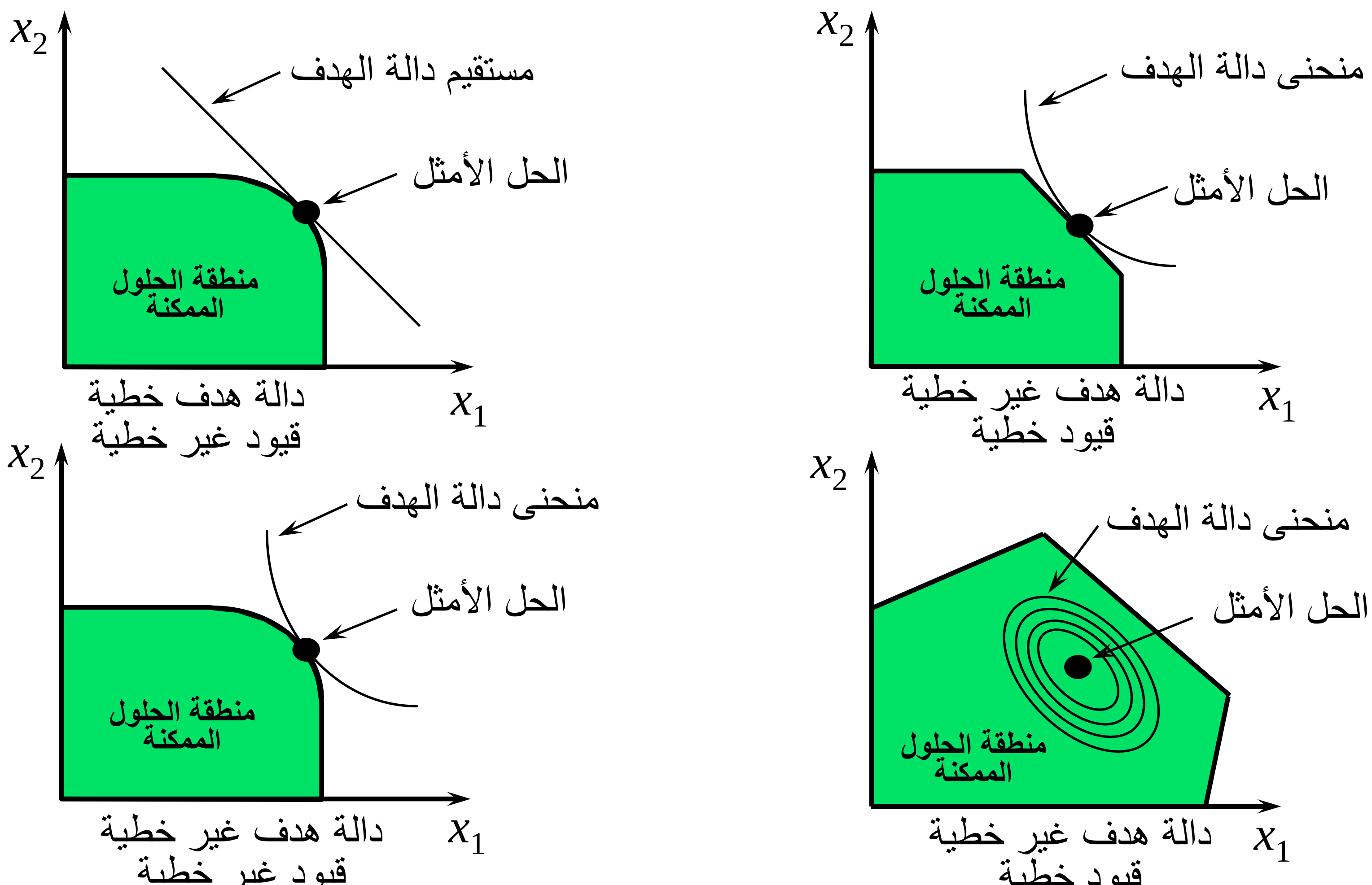
- سنجد فيما بعد أن الحل الأمثل لهذا البرنامج غير الخطي هو:

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 5.42\,, \qquad A = 553.58$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = 2\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right) = 2r = 10.84$$

إذا الارتفاع = القطر

أمثلة لحالات البرامج غير الخطية



البرمجة غير الخطية

- سندرس فقط كيفية حل البرامج غير الخطية الغير مقيدة التي تحتوي على متغير واحد فقط.

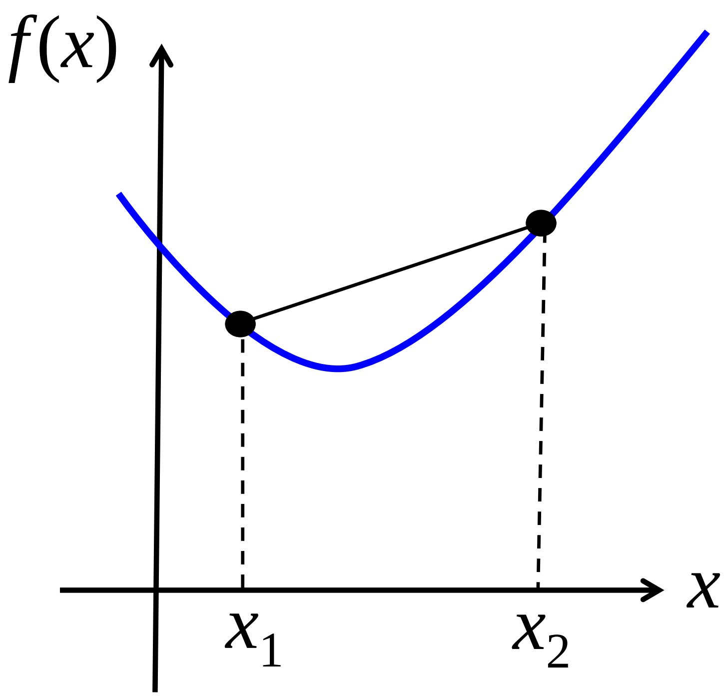
أي سندرس فقط المسألة غير الخطية التالية:

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ \text{s.t.} & a \le x \le b \end{array} \quad \text{أو} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & a \le x \le b \end{array}$$

- سنفترض أن الدالة $f(x)$ معرفة ومتصلة على الفترة الحقيقية $[a\,,b]$.
- سنفترض وجود ... $f'(x)\,, f''(x)\,,$ حسب الحاجة في الفترة الحقيقية $[a\,,b]$.

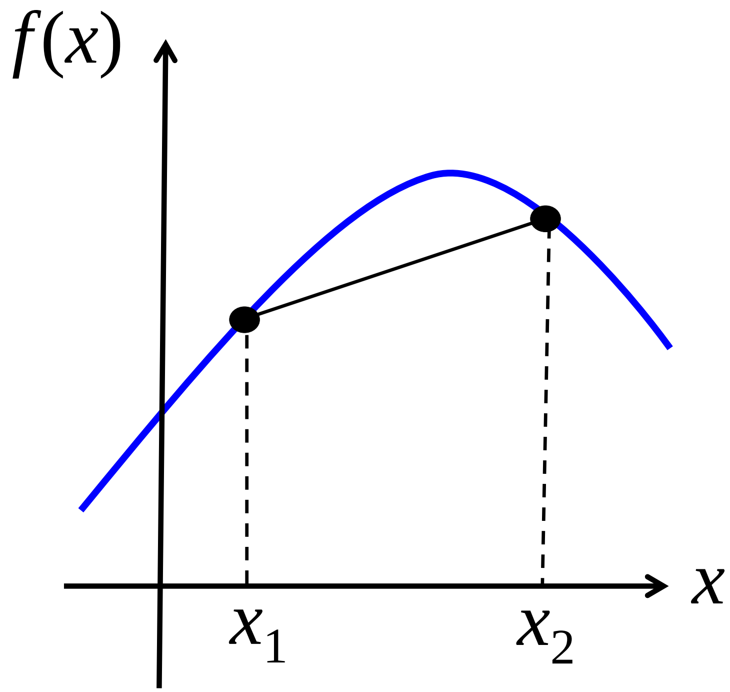
الدوال المحدبة والدوال المقعرة

- الدالة $f(x)$ هي دالة محدبة (convex) إذا كان الخط المستقيم الرابط بين أي نقطتين على رسم الدالة يقع فوق الرسم.



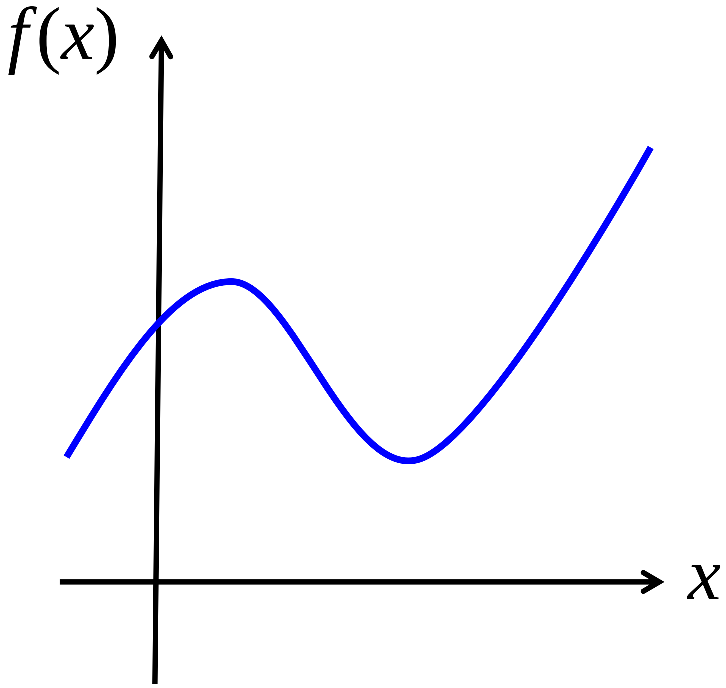
الدوال المحدبة والدوال المقعرة

- الدالة $f(x)$ هي دالة مقعرة (concave) إذا كان الخط المستقيم الرابط بين أي نقطتين على رسم الدالة يقع تحت الرسم.



الدوال المحدبة والدوال المقعرة

مثال لدالة غير محدبة ولا مقعرة



النقاط الصغرى والعظمى المحلية (Local)

للدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $[a , b]$

يقال أن النقطة $x^* \in [a , b]$ هي:

- نقطة صغرى محلية (أو موضعية) للدالة $f(x)$

إذا وجدت فترة $(c , d) \subseteq [a , b]$ بحيث أن:

$$f(x^*) \leq f(x) \qquad \forall \ x \in (c , d)$$

- نقطة عظمى محلية (أو موضعية) للدالة $f(x)$

إذا وجدت فترة $(c , d) \subseteq [a , b]$ بحيث أن:

$$f(x^*) \geq f(x) \qquad \forall \ x \in (c , d)$$

النقاط الصغرى والعظمى الشاملة (Global)

للدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة $[a\,,b]$

يقال أن النقطة $x^* \in [a\,,b]$ هي:

- نقطة صغرى شاملة (أو كلية) للدالة $f(x)$ إذا كانت

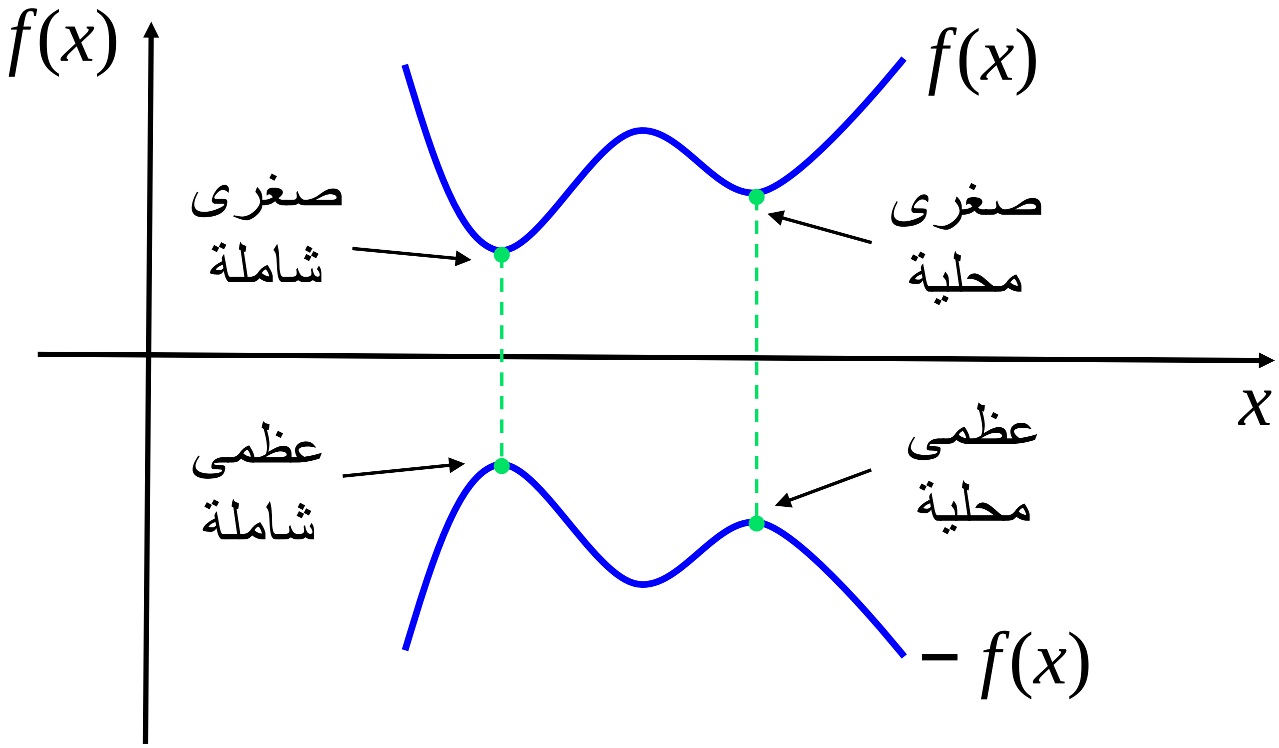
$$f(x^*) \le f(x) \qquad \forall\ x \in [a\,,b]$$

- نقطة عظمى شاملة (أو كلية) للدالة $f(x)$ إذا كانت

$$f(x^*) \ge f(x) \qquad \forall\ x \in [a\,,b]$$

النقاط الصغرى والعظمى

$$\text{Minimize } f(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \text{Maximize } -f(x_1, \ldots, x_n)$$



الدالة وحيدة المنوال (Unimodal)

- يقال للدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة الحقيقية $[a\,,b]$ أنها وحيدة المنوال بشكل تام إذا وجد نقطة $x^* \in [a\,,b]$ بحيث أنه لأي $x_1\,,x_2 \in [a\,,b]$:

لمسألة $\min f(x)$:

1. $x_1 < x_2 < x^* \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) > f(x^*)$
2. $x^* < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x^*) < f(x_1) < f(x_2)$

أي أن الدالة لها نقطه صغرى وحيدة x^* (وبالتالي شاملة)

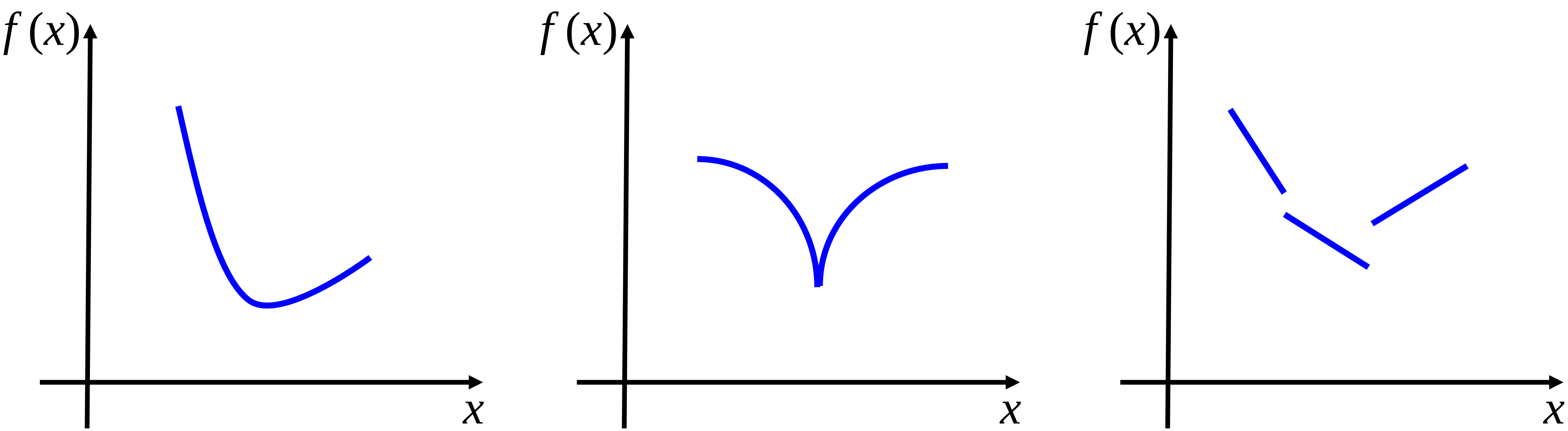
لمسألة $\max f(x)$:

1. $x_1 < x_2 < x^* \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) < f(x^*)$
2. $x^* < x_1 < x_2 \Rightarrow f(x^*) > f(x_1) > f(x_2)$

أي أن الدالة لها نقطه عظمى وحيدة x^* (وبالتالي شاملة)

الدالة وحيدة المنوال

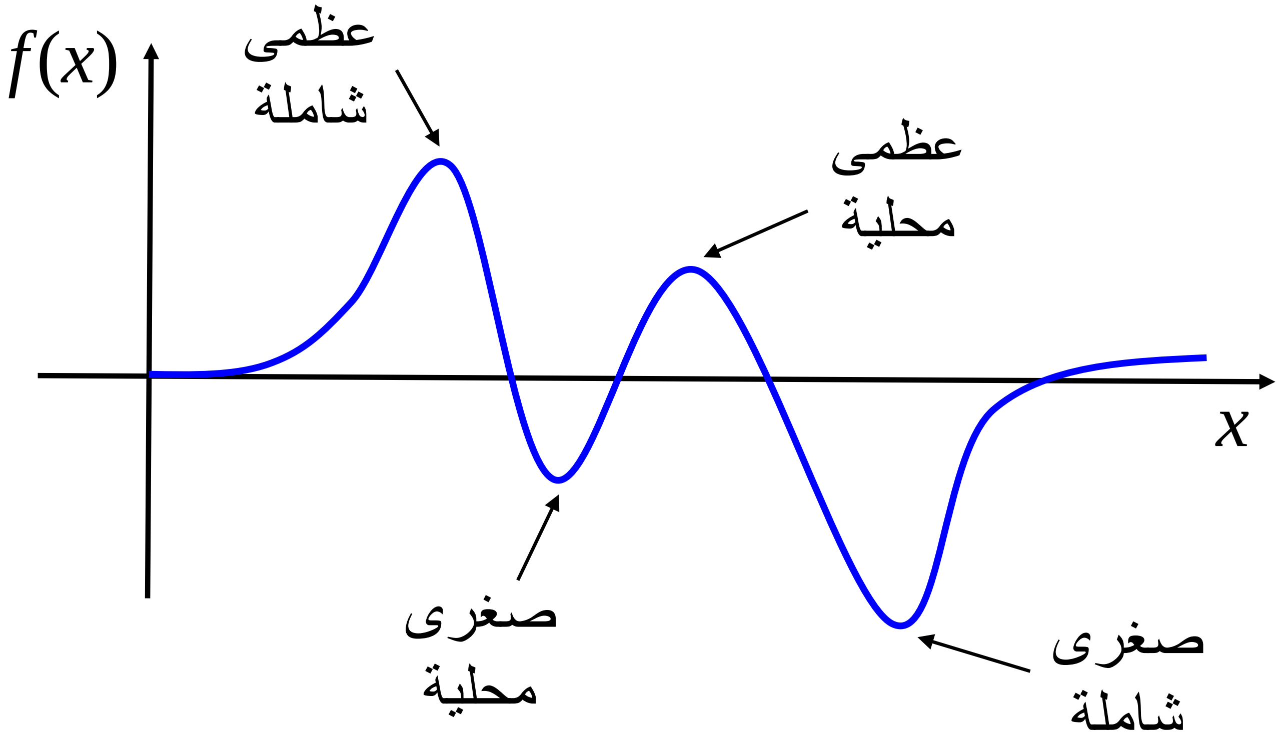
- للاختصار فإننا سنستخدم مصطلح دالة وحيدة المنوال ونعني دالة وحيدة المنوال بشكل تام. أمثلة لدوال وحيدة المنوال لمسألة $\min f(x)$:



- وبالتالي يمكن أن تكون الدالة وحيدة المنوال دالة غير قابلة للاشتقاق ويمكن أن تكون غير متصلة ويمكن انت تكون غير محدبة وغير مقعرة

الدالة متعددة المنوال

مثال لدالة متعددة المنوال:



تعريفات

فيما يلي سنعرف كل من:

- نقاط الجذور للدالة $f(x)$ (root points)
- النقاط الثابتة للدالة $f(x)$ (fixed points)
- النقاط الساكنة للدالة $f(x)$ (stationary points)
- نقاط السرج للدالة $f(x)$ (saddle points)
- نقاط الانقلاب للدالة $f(x)$ (inflection points)

تعريفات

- نقاط الجذور للدالة $f(x)$ هي قيم x التي تحقق $f(x) = 0$
- النقاط الثابتة للدالة $f(x)$ هي قيم x التي تحقق $f(x) = x$
- النقاط الساكنة للدالة $f(x)$ هي قيم x التي تحقق $f'(x) = 0$
- مثال: للدالة $f(x) = x^2 - 2x$

النقطة $x = 1$ تعتبر ساكنة

النقطة $x = 2$ تعتبر جذر

النقطة $x = 3$ تعتبر ثابتة

تعريفات

- مسألة إيجاد جذور دالة له علاقة بمسألة إيجاد النقاط الثابتة لدالة.
- إذا كانت النقطة x_o هي نقطة ثابتة للدالة $f(x)$ ، فإن الدالة $g(x) = f(x) - x$ لها جذر عند النقطة x_o .
- إذا كانت النقطة x_o هي جذر للدالة $f(x)$ ، فإنه يوجد دوال كثيرة لها نقطة ثابتة عند النقطة x_o . مثلا:

$$g(x) = x - f(x)$$

$$g(x) = x + 3f(x)$$

تعريفات

- النقطة x تكون نقطة سرج للدالة $f(x)$ عندما تكون نقطة ساكنة ولكن ليست نقطة صغرى أو عظمى.
- نقطة الانقلاب هي نقطة واقعة على منحنى الدالة $f(x)$، يحدث عندها تغير في إشارة الانحناء $f''(x)$. أي أن المنحنى يتغير من كونه محدباً ويصير مقعراً ، أو العكس.
- لمعرفة هل النقطة x_o هي نقطة انقلاب للدالة $f(x)$:
  - شرط ضروري: أن تكون $f''(x) = 0$
  - شرط كافي: أن تكون $f''(x+\varepsilon)$ و $f''(x-\varepsilon)$ مختلفتين الإشارة. حيث ε عدد صغير.

تعريفات

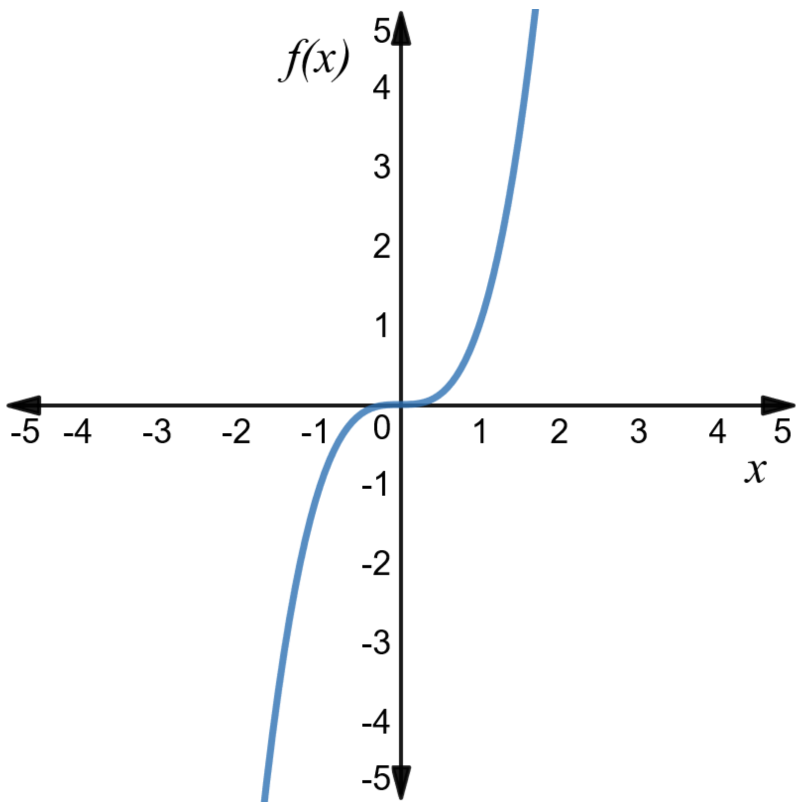
في المسائل ذات المتغير الواحد:

- إذا كانت النقطة x_o هي نقطة سرج فإنها كذلك نقطة انقلاب.
- إذا كانت النقطة x_o هي نقطة انقلاب فإنها ليست بالضرورة نقطة سرج.
  - إذا كانت $f'(x_o) = 0$ فإنها نقطة سرج.
  - إذا كانت $f'(x_o) \neq 0$ فإنها ليست نقطة سرج.

تعريفات

مثال:

النقطة $x = 0$ هي نقطة سرج وانقلاب للدالة $f(x) = x^3$



$$f'(x) = 3x^2,\ f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 6x,\ f''(0) = 0$$

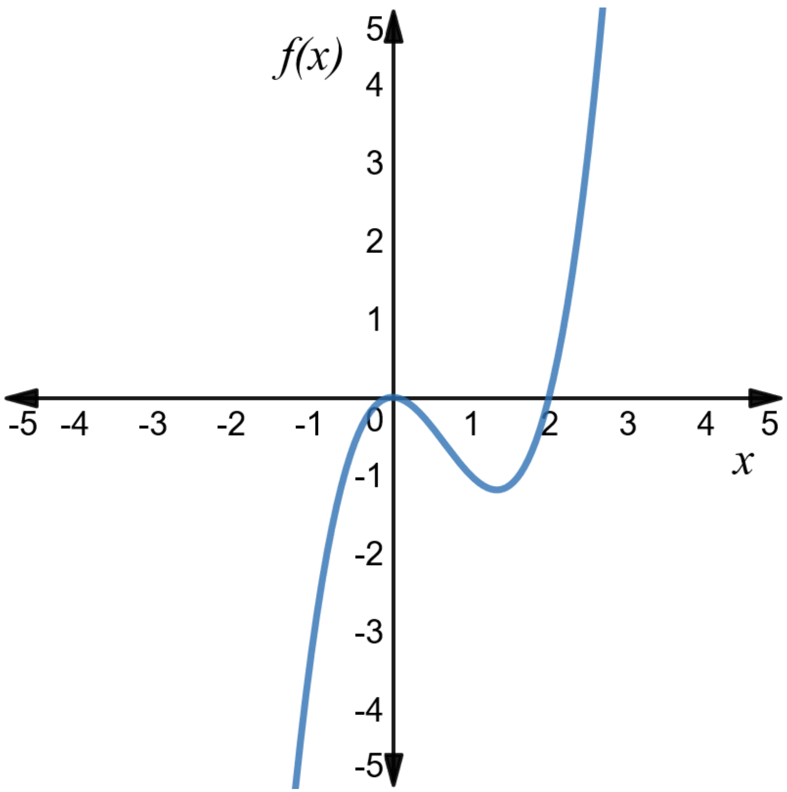
$$f''(0 - 0.01) = -0.06$$

$$f''(0 + 0.01) = +0.06$$

تعريفات

مثال:

النقطة $x = \frac{2}{3}$ هي نقطة انقلاب وليست سرج للدالة $f(x) = x^3 - 2x^2$



$$f'(x) = 3x^2 - 4x \;,\; f'\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$$

$$f''(x) = 6x - 4 \;,\; f''\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$f''\left(\frac{2}{3} + 0.01\right) = +0.06$$

$$f''\left(\frac{2}{3} - 0.01\right) = -0.06$$

المعنى الهندسي للمشتقة

للدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة الحقيقية $[a , b]$ ، والنقطة $x_o \in (a , b)$

- $f'(x_o) > 0$ تعني أن الدلة $f(x)$ تتزايد في فترة صغيرة تحتوي x_o
- $f'(x_o) < 0$ تعني أن الدلة $f(x)$ تتناقص في فترة صغيرة تحتوي x_o
- $f'(x_o) = 0$ تعني أن الدلة $f(x)$ يتوقف تزايدها أو تناقصها عند x_o (أي أنها نقطة عظمى أو صغرى أو أنها نقطة سرج).

ويمكن استخدام نفس ما سبق لفهم المعنى الهندسي للدالة $f''(x_o)$ التي تبين تزايد أو تناقص الدالة $f'(x_o)$ حول x_o .

شروط الأمثلية

- للدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة الحقيقية $[a\,,b]$ ،
  والنقطة $x_o \in (a\,,b)$
- لتكون النقطة x_o نقطة صغرى محلية ، يجب أن تحقق ما يلي:
  - $f'(x_o) = 0$
  - $f''(x_o) \geq 0$

  شرطين ضروريين ولكن ليس كافيين
- لتكون النقطة x_o نقطة عظمى محلية ، يجب أن تحقق ما يلي:
  - $f'(x_o) = 0$
  - $f''(x_o) \leq 0$

  شرطين ضروريين ولكن ليس كافيين

شروط الأمثلية

- للدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة الحقيقية $[a\, , b]$ ،
  والنقطة $x_o \in (a\, , b)$
- لتكون النقطة x_o نقطة صغرى محلية ، يكفي أن تحقق ما يلي:
  - $f'(x_o) = 0$
  - $f''(x_o) > 0$

  شرطين ضروريين وكافيين
- لتكون النقطة x_o نقطة عظمى محلية ، يكفي أن تحقق ما يلي:
  - $f'(x_o) = 0$
  - $f''(x_o) < 0$

  شرطين ضروريين وكافيين

شروط الأمثلية

- للدالة $f(x)$ المعرفة على الفترة الحقيقية $[a\ , b]$ ، والنقطة الساكنة $(a\ , b) \in x_o$ ، أي أن $f'(x_o) = 0$
- ماذا تكون x_o عندما $f''(x_o) = 0$ ؟
  - قد تكون نقطة صغرى أو نقطة عظمى أو نقطة سرج (انقلاب).
  - سنحتاج لإيجاد المشتقة (أو المشتقات) من رتبة أعلى.
  - سنرمز للمشتقة من الرتبة n بالرمز $f^n(x_o)$.

أي أن:

$$f^2(x_o) = f''(x_o)$$
$$f^3(x_o) = f'''(x_o)$$

شروط الأمثلية

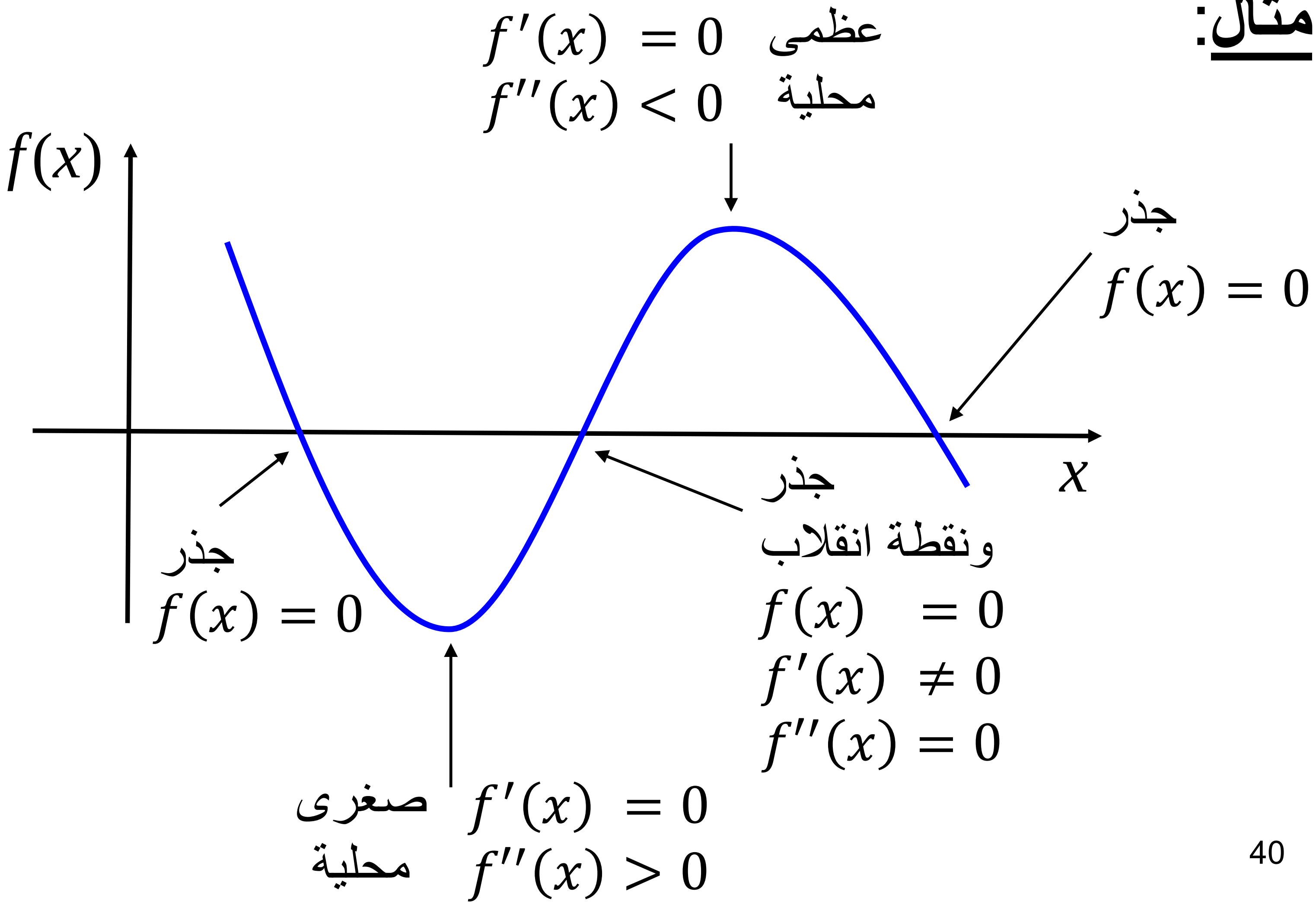
- لنفرض أن n هو ترتيب أول مشتقة عليا لا تساوي الصفر.

أي أن $f^{n}(x_o) \neq 0$

  - إذا كان n عدد فردي ، فإن x_o هي نقطة سرج (انقلاب).
  - إذا كان n عدد زوجي وقيمة $f^{n}(x_o)$ موجبة ، فإن x_o هي نقطة صغرى محلية.
  - إذا كان n عدد زوجي وقيمة $f^{n}(x_o)$ سالبة ، فإن x_o هي نقطة عظمى محلية.

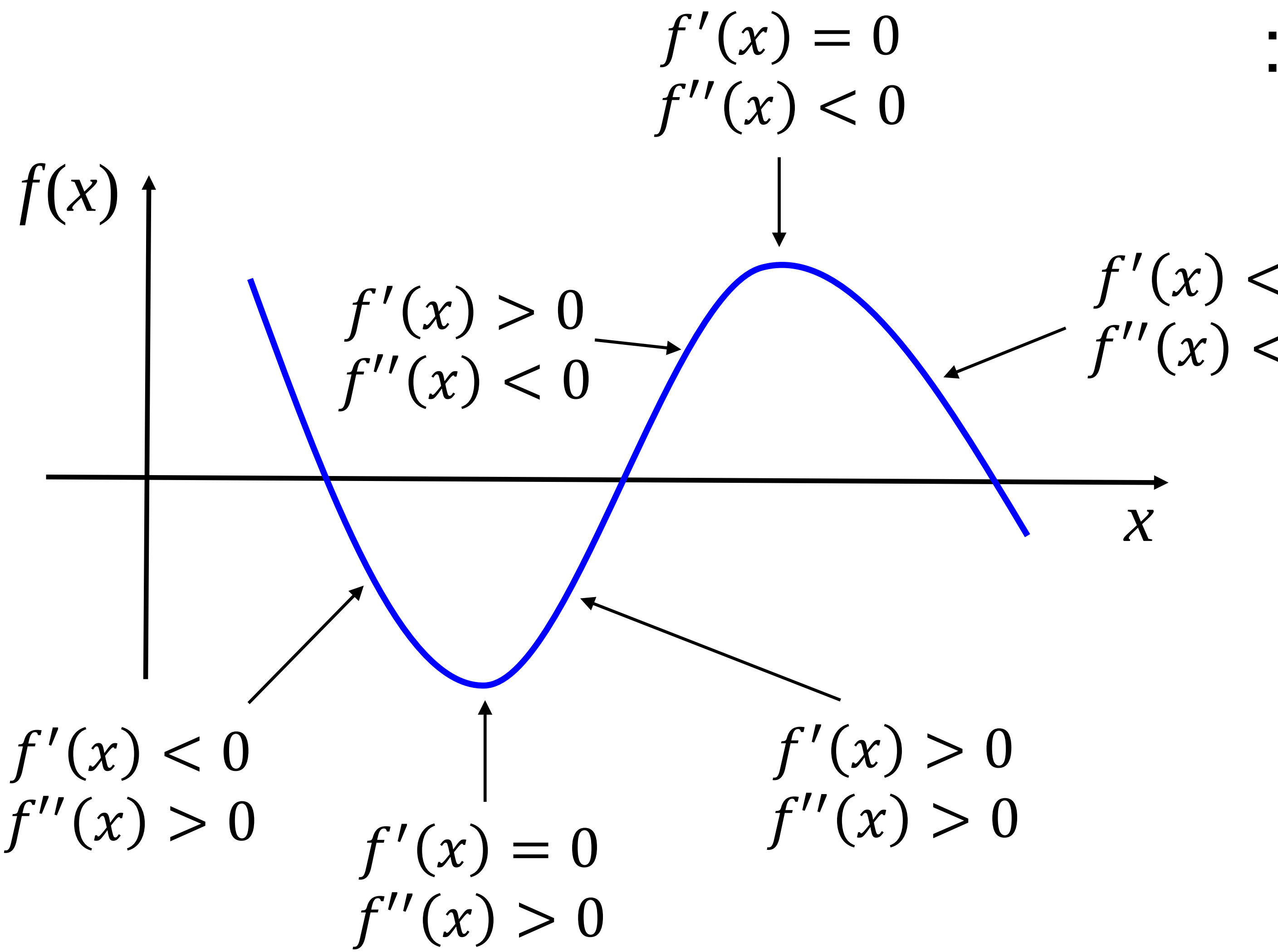
شروط الأمثلية

مثال:



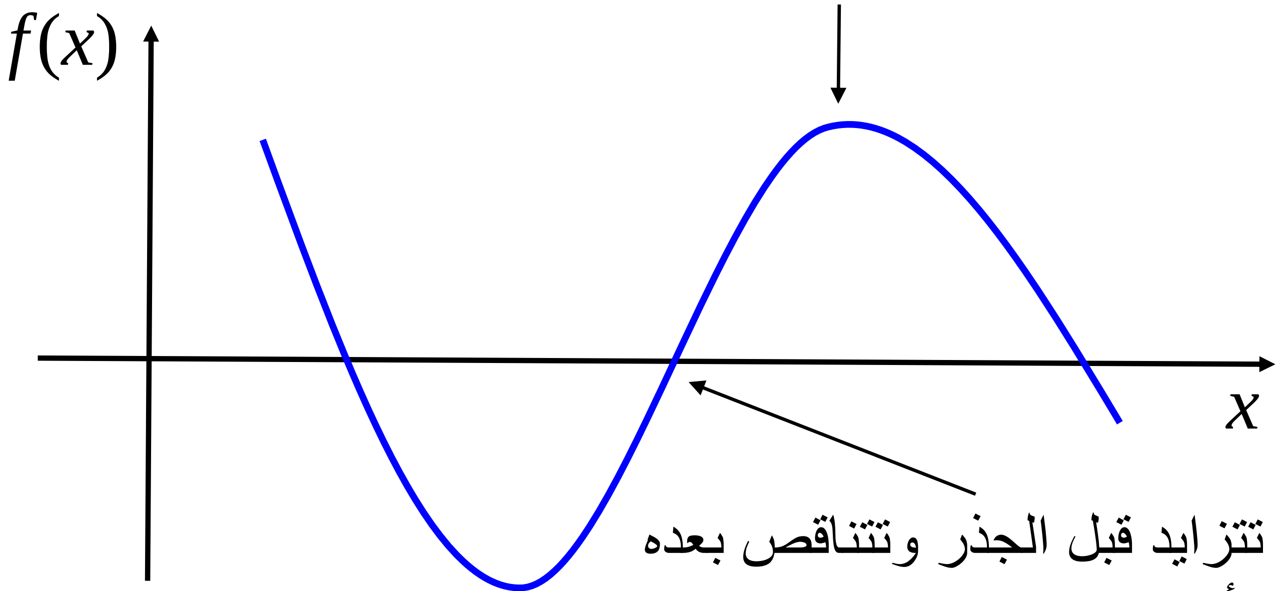
شروط الأمثلية

مثال:



شروط الأمثلية

مثال: الدالة $f'(x)$ تتناقص قبل النقطة العظمى المحلية ، ثم تساوي الصفر عندها ، ثم تتناقص بعدها ، وبالتالي تكون $f''(x) < 0$



الدالة $f'(x)$ تتزايد قبل الجذر وتتناقص بعده (أي أنها تتغير إشارتها)

الدالة $f'(x)$ تتزايد قبل النقطة الصغرى المحلية ، ثم تساوي الصفر عندها ، ثم تتزايد بعدها ، وبالتالي تكون $f''(x) > 0$

طرق حل البرمجة غير الخطية

- يوجد طرق كثيرة لحل البرامج غير الخطية تعتمد على خصائص البرنامج غير الخطي المراد حله. ومنها:
- طريقة الحل المباشر
  - تقوم على إيجاد جميع الحلول المحتملة (النقاط الساكنة) ، ومن ثم اختيار الأمثل منها.
  - تتطلب أن تكون الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق (أحيانا مرتين وأكثر).
  - غير ممكنة عندما لا نستطيع إيجاد أو حصر جميع النقاط الساكنة.

طرق حل البرمجة غير الخطية

- طرق الإلغاء (Elimination)
  - تقوم على تجزيئ منطقة الحل ثم إبقاء جزء واحد الذي يحتوي الحل الأمثل وحذف البقية.
  - يمكن استخدامها للدوال غير المتصلة والدوال غير القابلة للاشتقاق.
  - طريقة التنصيف (Bisection)
  - طريقة المقطع الذهبي (Golden Section)
  - طريقة فيبوناشي (Fibonacci)
  - طريقة البحث ثنائي التفرع (Dichotomous Search)

طرق حل البرمجة غير الخطية

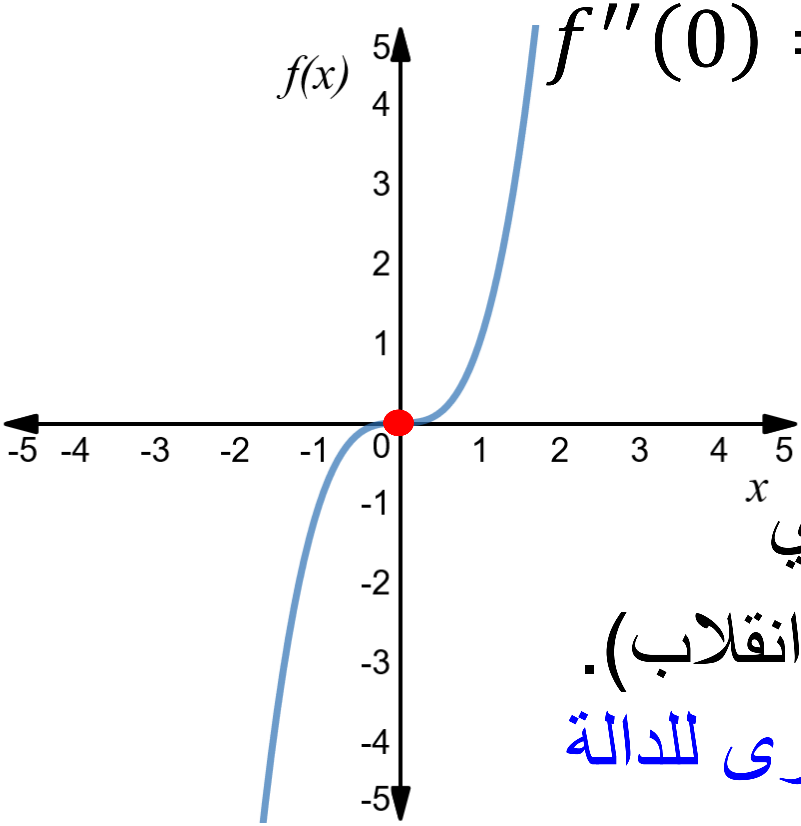
- طرق الاستنباط (Interpolation)
  - الاستنباط (أو الاستقراء أو الاستكمال) هي طريقة أو عملية رياضية لإنشاء نقاط بيانات جديدة اعتمادا على مجموعة من النقاط المنفصلة (أو المتفرقة) المعلومة مسبقا.
  - طريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson)
  - طريقة شبه-نيوتن (Quasi-Newton)
  - طريقة قاطع القوس (Secant)
  - طريقة الانحدار الحاد (Steepest descent)
  - بعضها لا يحتاج المشتقات مثل طريقة الاستنباط التربيعي (Quadratic Interpolation).

طريقة الحل المباشر لإيجاد نقاط الأمثلية لدالة

مثال: $f(x) = x^3$

- لدينا $f'(x) = 3x^2$ ، وبالتالي النقطة الساكنة هي: $x = 0$
- لدينا $f''(x) = 6x$ وكذلك $f''(0) = 0$
- لدينا $f'''(x) = 6$

إذاً $f'''(0) = 6 \neq 0$



- إذاً $n = 3$ ، وبالتالي لأنه عدد فردي

فإن النقطة $x = 0$ هي نقطة سرج (انقلاب).

لا يوجد نقاط عظمى أو صغرى للدالة

طريقة الحل المباشر لإيجاد نقاط الأمثلية لدالة

مثال: $f(x) = 3x^2 - 30x + 4$

- لدينا $f'(x) = 6x - 30$

وبالتالي النقطة الساكنة هي: $x = 5$

- لدينا $f''(x) = 6$ ، إذاً $f''(5) = 6 \neq 0$

- إذا $n = 2$ ، وبالتالي لأنه عدد زوجي

ولأن قيمة $f''(5)$ موجبة

فإن النقطة $x = 5$ هي نقطة صغرى محلية.

طريقة الحل المباشر لإيجاد نقاط الأمثلية لدالة

<u>مثال</u>: $f(x) = -5x^3 + 10x^2$

اختبر النقطة الساكنة $x = \frac{4}{3}$.

- لدينا $f'(x) = -15x^2 + 20x$ ،
- لدينا $f''(x) = -30x + 20$ ، إذاً $f''\left(\frac{4}{3}\right) = -20 \neq 0$
- إذا $n = 2$ ، وبالتالي لأنه عدد زوجي

ولأن قيمة $f''(2)$ سالبة

فإن النقطة $x = \frac{4}{3}$ هي نقطة عظمى محلية.

طريقة الحل المباشر لإيجاد نقاط الأمثلية لدالة

مثال: $f(x) = 5x^6 - 36x^5 + \frac{165}{2}x^4 - 60x^3 + 36$

$$f'(x) = 30x^5 - 180x^4 + 330x^3 - 180x^2$$
$$= 30x^2(x-1)(x-2)(x-3)$$

النقاط الساكنة هي: $x = 0 , 1 , 2 , 3$

$$f''(x) = 150x^4 - 720x^3 + 990x^2 - 360x$$

طريقة الحل المباشر لإيجاد نقاط الأمثلية لدالة

لدينا

x	$f''(x)$	
0	0	
1	60	نقطة صغرى محلية
2	-120	نقطة عظمى محلية
3	540	نقطة صغرى محلية

عند النقطة الساكنة $x = 0$ نحتاج المشتقة الثالثة:

$$f'''(x) = 600x^3 - 2160x^2 + 1980x - 360$$

$$f'''(0) = -360 \neq 0$$

إذاً $n = 3$ ، وبالتالي $x = 0$ هي نقطة سرج (انقلاب).

طريقة الحل المباشر للبرمجة غير الخطية

للمسألة غير الخطية التالية:

$$\begin{aligned}&\min \ f(x)\\ &\text{s.t.} \ a \le x \le b\end{aligned} \quad \text{or} \quad \begin{aligned}&\max \ f(x)\\ &\text{s.t.} \ a \le x \le b\end{aligned}$$

1. أوجد جميع النقاط الساكنة للدالة $f(x)$ التي تنتمي للفترة $[a,b]$
2. احسب قيمة $f(x)$ لجميع النقاط الساكنة بالإضافة لـ $f(a)$ و $f(b)$
3. الحل الأمثل هي النقطة في الخطوة السابقة التي تعطي أقل أو أكبر قيمة لـ $f(x)$

طريقة الحل المباشر للبرمجة غير الخطية

<u>مثال</u>: أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير خطية التالية:

$$\max \quad f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 10$$
$$\text{s.t.} \quad -2 \le x \le 4$$

الحل: نضع $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$

$$= (3x+3)(-x+3) = 0$$

وبالتالي نجد أن النقاط الساكنة هي: $x = -1\,,3$

نحسب: $f(-1) = 5$ ، $f(3) = 37$

$f(-2) = 12$ ، $f(4) = 30$

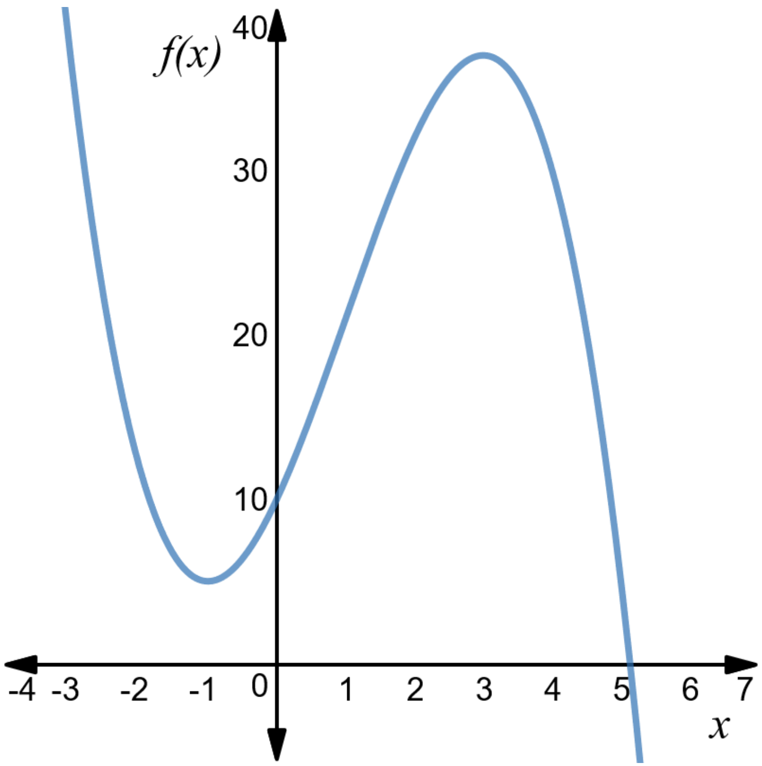
وبالتالي الحل الأمثل هو: $x^* = 3$

طريقة الحل المباشر للبرمجة غير الخطية

<u>مثال</u>: أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة غير خطية التالية:

$$\min \quad f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 10$$

$$\text{s.t.} \quad -2 \le x \le 4$$



الحل الأمثل هو: $x^* = -1$

خطأ التقريب

- لتخزين قيمة $\sqrt{2}$ في أجهزة الحاسب الآلي أو عند إجراء الحسابات باليد ، سيتم حذف جزء من قيمة الجذر.

$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880...$$

- سنقربه مثلا إلى $\sqrt{2} = 1.414$ وبالتالي هنالك خطأ مقداره

$$0.00021356237309504880...$$

هذا يسمى خطأ التقريب (Rounding Error)

- تراكم أخطاء التقريب تمثل مشكلة عند استخدام الطرق العددية في حل الأنظمة والبرامج الرياضية.

خطأ التقريب

- الرقم من 0 إلى 4 يحذف ، والرقم من 5 إلى 9 يجبر للأعلى.

التقريب إلى أربع خانات عشرية	التقريب إلى ثلاث خانات عشرية	العدد	
1.4142	1.414	1.41421356237309504880...	$\sqrt{2}$
3.1416	3.142	3.14159265358979323846...	π
2.7183	2.718	2.71828182845904523536...	e
0.6931	0.693	0.69314718055994530941...	$\ln 2$
1.2599	1.260	1.25992104989487316476...	$\sqrt[3]{2}$
0.6667	0.667	0.66666666666666666666...	$2/3$
0.1429	0.143	0.14285714285714285714...	$1/7$

سنستخدم في هذا المقرر التقريب إلى ثلاث أو أربع خانات عشرية

طريقة التنصيف لإيجاد جذر دالة

- لنفرض لدينا الدالة غير الخطية $f(x)$ المعرفة على الفترة الحقيقية $[a\ ,b]$ ، بحيث أن الدالة متصلة في هذه الفترة ، وأن $f(a)f(b) < 0$. (هذا يضمن وجود جذر للدالة)
- طريقة التنصيف تستخدم لإيجاد جذر الدالة ($f(x^*) = 0$).
- طريقة التنصيف تكرر تنصيف الفترة ومن ثم نختار نصف الفترة التي تحتوي على الجذر ، ونلغي الأخرى ، حتى نحصل على جذر الدالة أو نكون قريبين منه بصورة كافية.
- طريقة بسيطة جدا وفعالة ، ولكنها أيضا بطيئة نسبيا.

طريقة التنصيف لإيجاد جذر دالة

- الخطوة 1:

نحسب النقطة التي في منتصف الفترة الحالية: $x_{\text{mid}} = \frac{a+b}{2}$

- الخطوة 2:

- إذا كان $|f(x_{\text{mid}})| \le \varepsilon$ نتوقف. وصلنا للحل الأمثل أو قريباً منه. $x^* = x_{\text{mid}}$. حيث ε قيمة موجبة قريبة من الصفر.
- إذا كانت $f(x_{\text{mid}})f(a) > 0$ فإننا نضع $a = x_{\text{mid}}$.

إما إذا كانت $f(x_{\text{mid}})f(b) > 0$ فإننا نضع $b = x_{\text{mid}}$.

اذهب للخطوة الأولى.

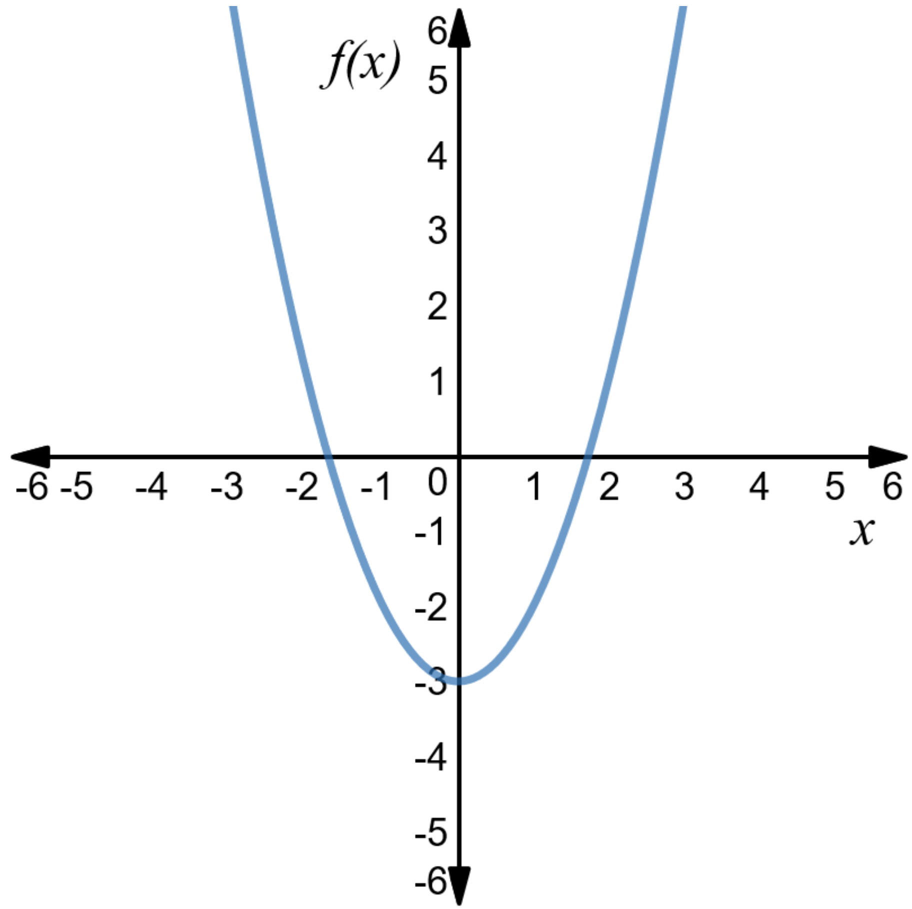
طريقة التنصيف لإيجاد جذر دالة

مثال: أوجد جذر الدالة التالية باستخدام طريقة التنصيف:

$$f(x) = x^2 - 3$$

في الفترة $[1 , 2]$

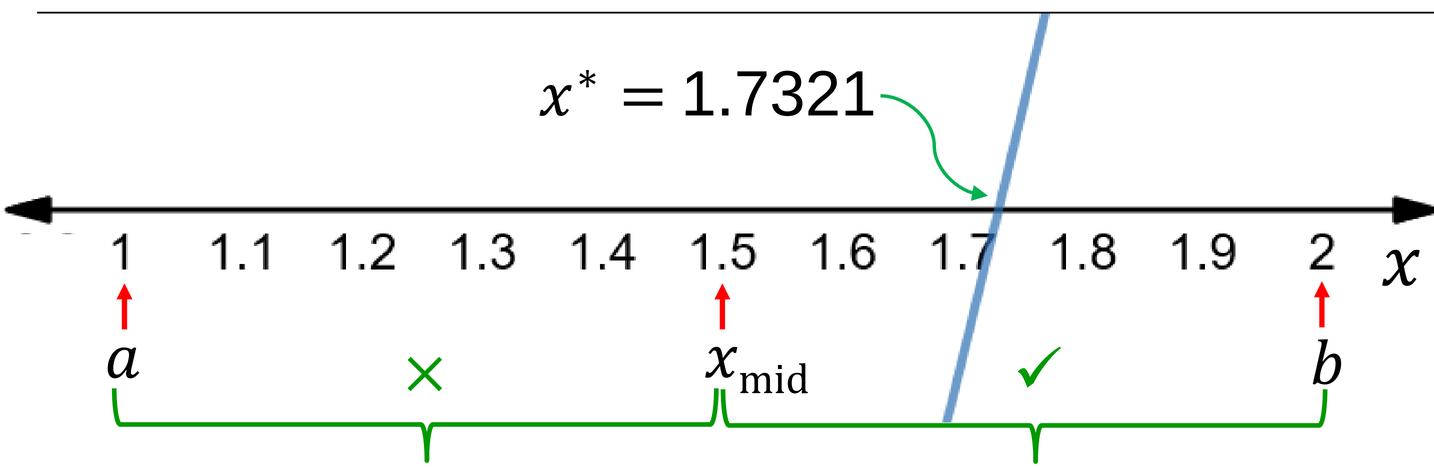
مستخدما $\varepsilon = 0.01$



طريقة التنصيف لإيجاد جذر دالة

الحل:

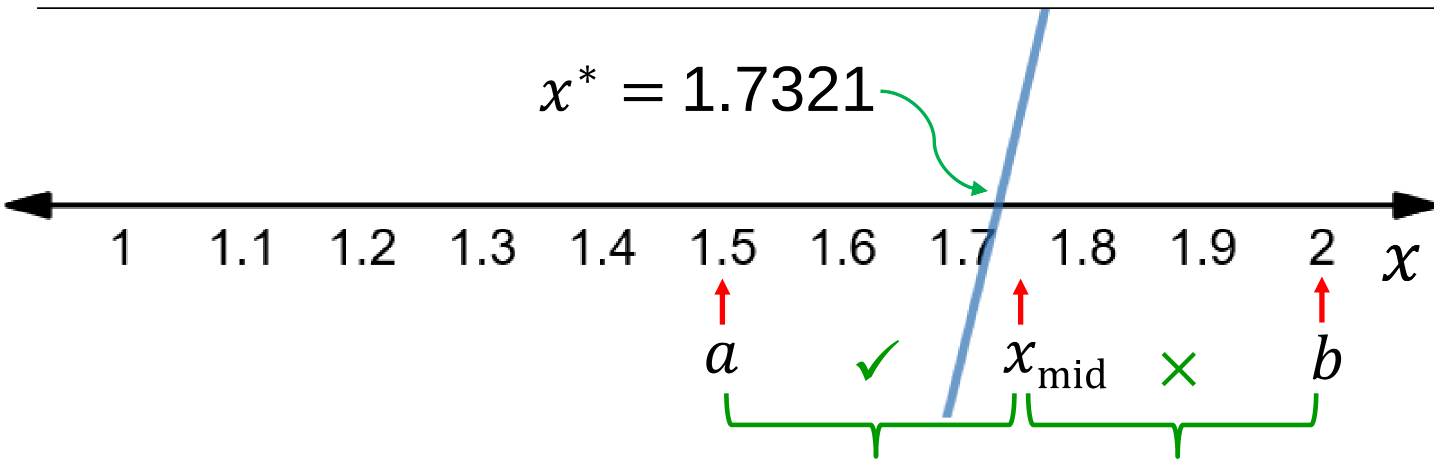
تكرار	a	b	x_{mid}	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_{\text{mid}})$	تحديث الفترة



طريقة التنصيف لإيجاد جذر دالة

الحل:

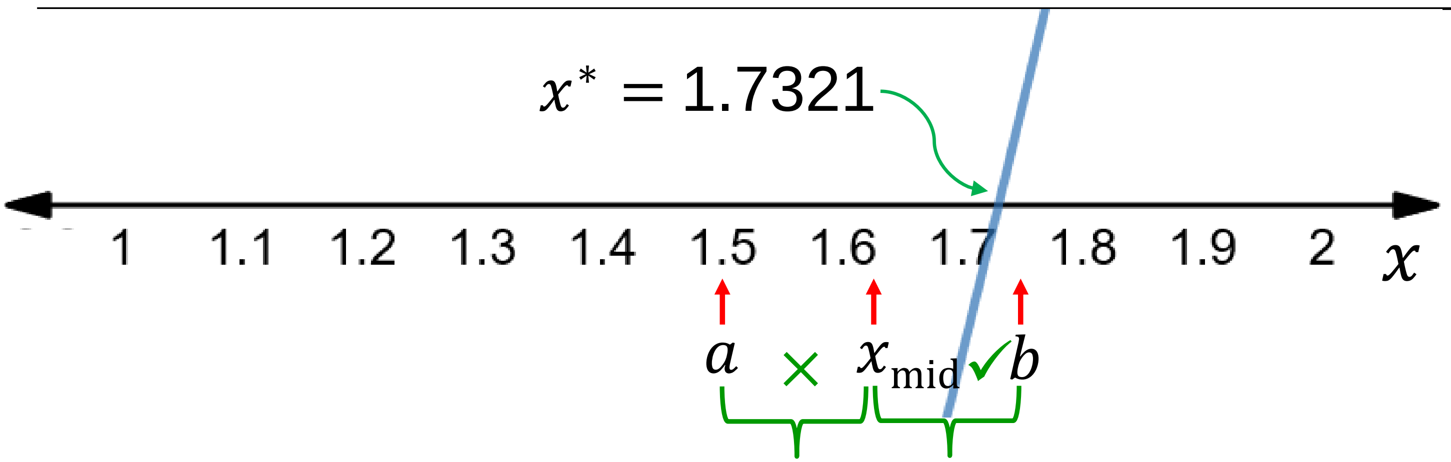
تكرار	a	b	x_{mid}	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_{\text{mid}})$	تحديث الفترة
1	1	2	1.5	-2	1	-0.75	$a = 1.5$
2	1.5	2	1.75	-0.75	1	0.0625	



طريقة التنصيف لإيجاد جذر دالة

الحل:

تكرار	a	b	x_{mid}	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_{\mathrm{mid}})$	تحديث الفترة
1	1	2	1.5	-2	1	-0.75	a = 1.5
2	1.5	2	1.75	-0.75	1	0.0625	b = 1.75
3	1.5	1.75	1.625	-0.75	0.0625	-0.3594	



طريقة التنصيف لإيجاد جذر دالة

الحل:

تكرار	a	b	x_{mid}	$f(a)$	$f(b)$	$f(x_{\text{mid}})$	تحديث الفترة
1	1	2	1.5	-2	1	-0.75	a = 1.5
2	1.5	2	1.75	-0.75	1	0.0625	b = 1.75
3	1.5	1.75	1.625	-0.75	0.0625	-0.3594	a = 1.625
4	1.625	1.75	1.6875	-0.3594	0.0625	-0.1523	a = 1.6875

نلاحظ أن $\varepsilon \geq |f(x_{\text{mid}})|$

إذا $1.7344 = x_{\text{mid}} = x^*$

طريقة التنصيف للبرمجة غير الخطية

للمسألة غير الخطية التالية:

$$\begin{array}{lcl} \min\ f(x) & & \max\ f(x) \\ & \text{or} & \\ \text{s.t.}\ a \le x \le b & & \text{s.t.}\ a \le x \le b \end{array}$$

بحيث أن الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق وأحادية المنوال في الفترة $[a,b]$ و $f'(a)f'(b) < 0$.

- نستخدم طريقة التنصيف لإيجاد جذر الدالة $f'(x)$ ، أي نجد قيمة x^* التي تحقق $f'(x^*) = 0$.

طريقة التنصيف للبرمجة غير الخطية

- الخطوة 1:

نحسب النقطة التي في منتصف الفترة الحالية: $x_{\text{mid}} = \frac{a+b}{2}$

- الخطوة 2:
  - إذا كان $|f'(x_{\text{mid}})| \leq \varepsilon$ نتوقف. وصلنا للحل الأمثل أو قريباً منه. $x^* = x_{\text{mid}}$. حيث ε قيمة موجبة قريبة من الصفر.
  - إذا كانت $f'(x_{\text{mid}})f'(a) > 0$ فإننا نضع $a = x_{\text{mid}}$.

إما إذا كانت $f'(x_{\text{mid}})f'(b) > 0$ فإننا نضع $b = x_{\text{mid}}$.

اذهب للخطوة الأولى.

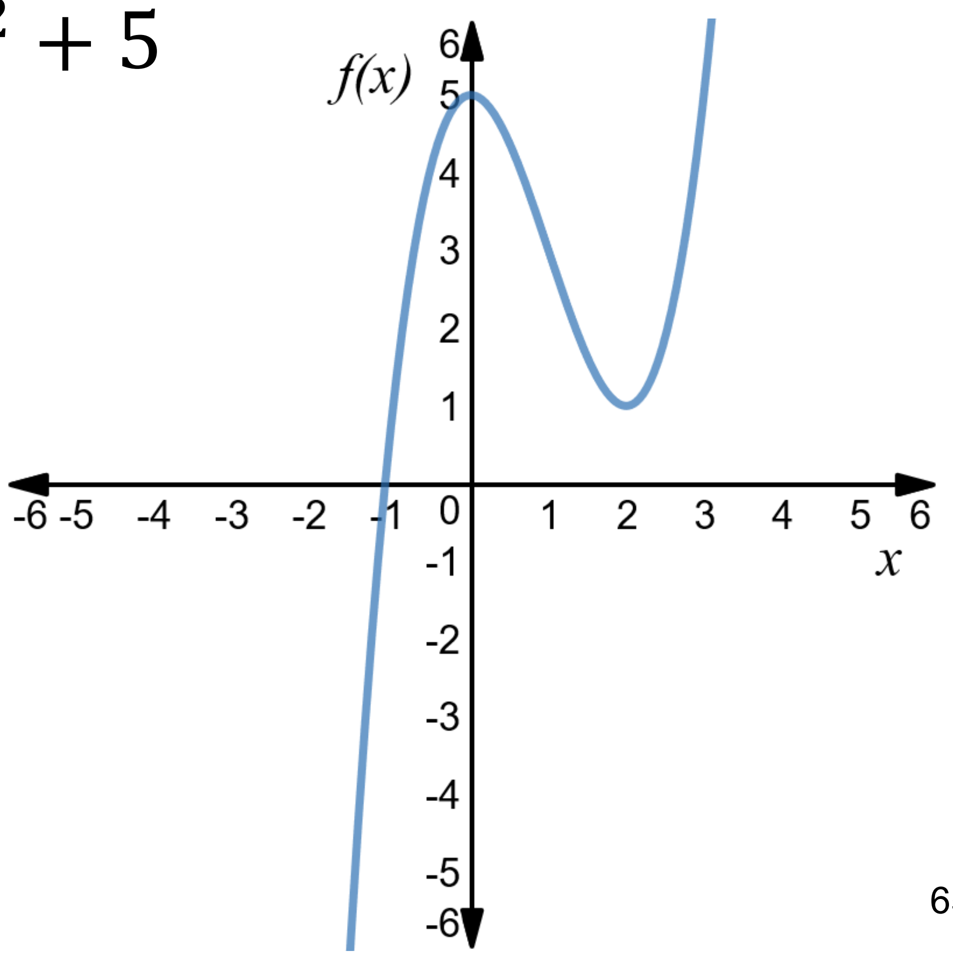
طريقة التنصيف للبرمجة غير الخطية

<u>مثال</u>: أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة التنصيف:

$$\min \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

$$\text{s.t.} \quad 1 \le x \le 5$$

$\varepsilon = 0.01$ مستخدما



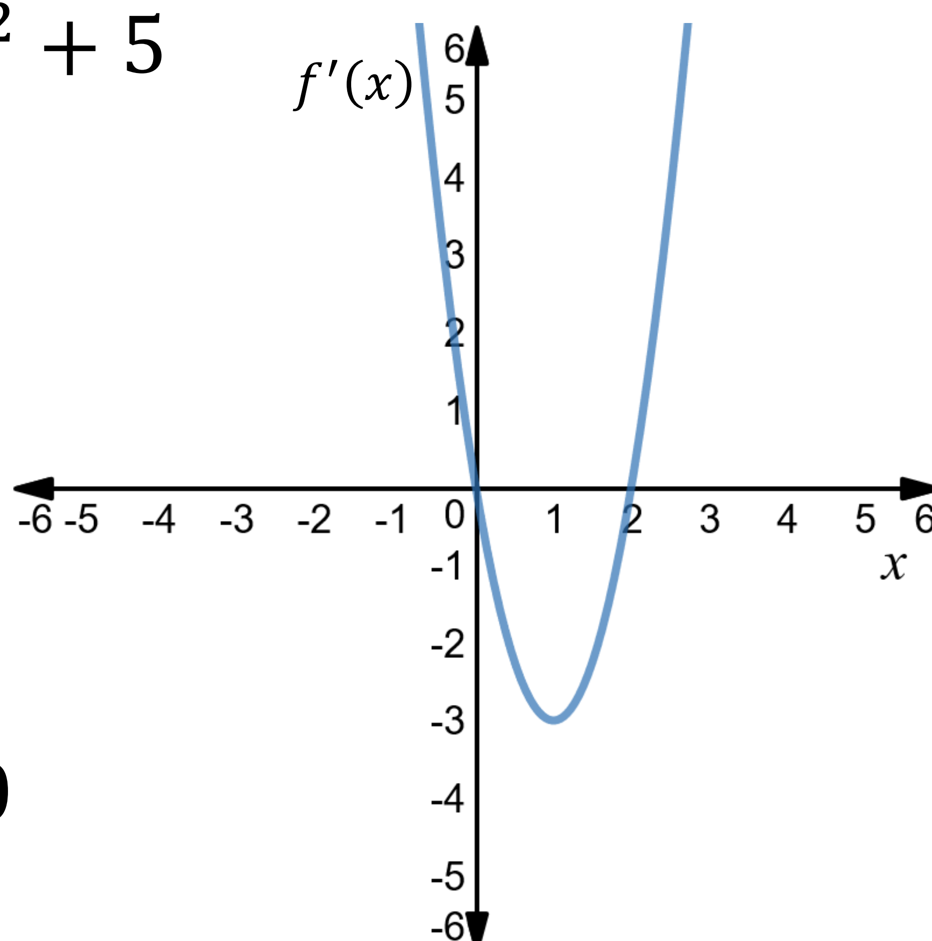
طريقة التنصيف للبرمجة غير الخطية

مثال: أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة التنصيف:

$$\min \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

$$\text{s.t.} \quad 1 \leq x \leq 5$$

$\varepsilon = 0.01$ مستخدما



- الحل -

سنحتاج إيجاد جذر المشتقة:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$$

طريقة التنصيف للبرمجة غير الخطية

تحديث الفترة	$f'(x_{\text{mid}})$	$f'(b)$	$f'(a)$	x_{mid}	b	a	تكرار
b = 3	9	45	-3	3	5	1	1
	0	9	-3	2	3	1	2

نلاحظ أن $|f'(x_{\text{mid}})| \leq \varepsilon$ ، إذا $x^* = x_{\text{mid}} = 2$

مهم جدا اختيار فترة البحث.

ماذا لو كانت فترة البحث هي: $1 \leq x \leq 6$ ؟

طريقة التنصيف للبرمجة غير الخطية

تكرار	a	b	x_{mid}	$f'(a)$	$f'(b)$	$f'(x_{\text{mid}})$	تحديث الفترة
1	1	6	3.5	-3	72	15.75	b = 3.5
2	1	3.5	2.25	-3	15.75	1.6875	b = 2.25
3	1	2.25	1.625	-3	1.6875	-1.8281	a = 1.625
4	1.625	2.25	1.9375	-1.8281	1.6875	-0.3633	a =1.9375
5	1.9375	2.25	2.0938	-0.3633	1.6875	0.5892	b =2.0938
6	1.9375	2.0938	2.0157	-0.3633	0.5892	0.0949	b =2.0157
7	1.9375	2.0157	1.9766	-0.3633	0.0949	-0.1388	a =1.9766
8	1.9766	2.0157	1.9962	-0.1388	0.0949	-0.0228	a =1.9962
9	1.9962	2.0157	2.0060	-0.0228	0.0949	0.0361	b =2.006
10	1.9962	2.0060	2.0011	-0.0234	0.0361	0.0066	

نلاحظ أن $|f'(x_{\text{mid}})| \leq \varepsilon$ ، إذا $x^* = x_{\text{mid}} = 2.0011$

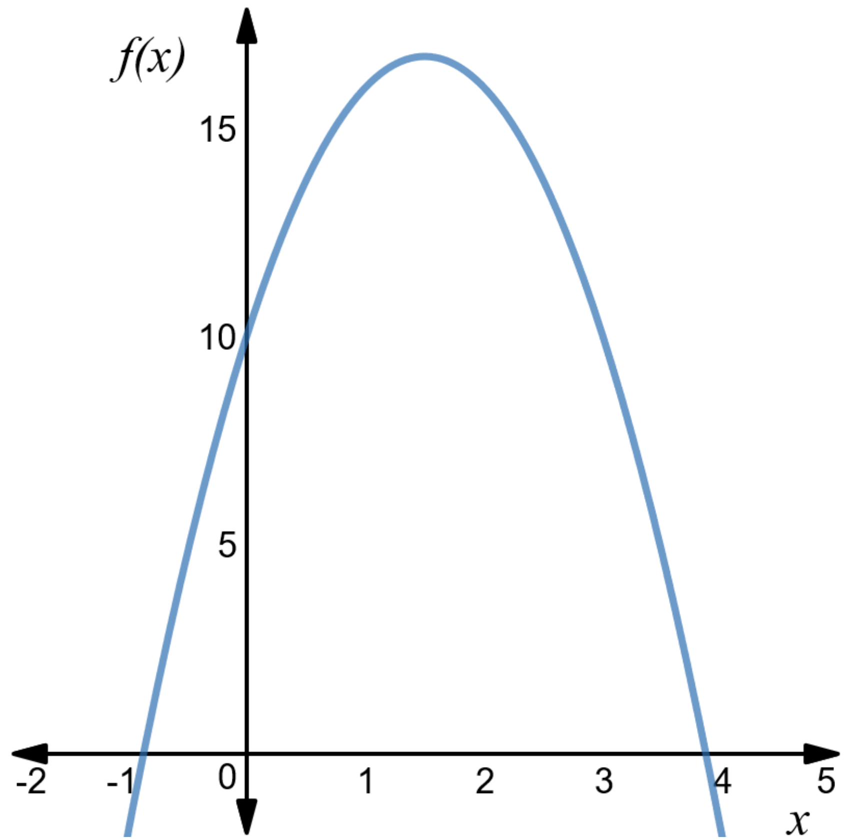
طريقة التنصيف للبرمجة غير الخطية

<u>مثال</u>: أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة التنصيف:

$$\max \quad f(x) = -3x^2 + 9x + 10$$

$$\text{s.t.} \quad -1 \le x \le 5$$

$\varepsilon = 0.02$ مستخدما



- الحل -

سنحتاج إيجاد جذر المشتقة:

$$f'(x) = -6x + 9 = 0$$

طريقة التنصيف للبرمجة غير الخطية

تكرار	a	b	x_{mid}	$f'(a)$	$f'(b)$	$f'(x_{\text{mid}})$	تحديث الفترة
1	-1	5	2	15	-21	-3	b = 2
2	-1	2	0.5	15	-3	6	a = 0.5
3	0.5	2	1.25	6	-3	1.5	a = 1.25
4	1.25	2	1.625	1.5	-3	-0.75	b = 1.625
5	1.25	1.625	1.438	1.5	-0.75	0.372	a = 1.438
6	1.438	1.625	1.532	0.372	-0.75	-0.192	b = 1.532
7	1.438	1.532	1.485	0.372	-0.192	0.09	a = 1.485
8	1.485	1.532	1.509	0.09	-0.192	-0.054	b = 1.509
9	1.485	1.509	1.497	0.09	-0.054	0.018	

نلاحظ أن $|f'(x_{\text{mid}})| \leq \varepsilon$ ، إذا $x^* = x_{\text{mid}} = 1.497$

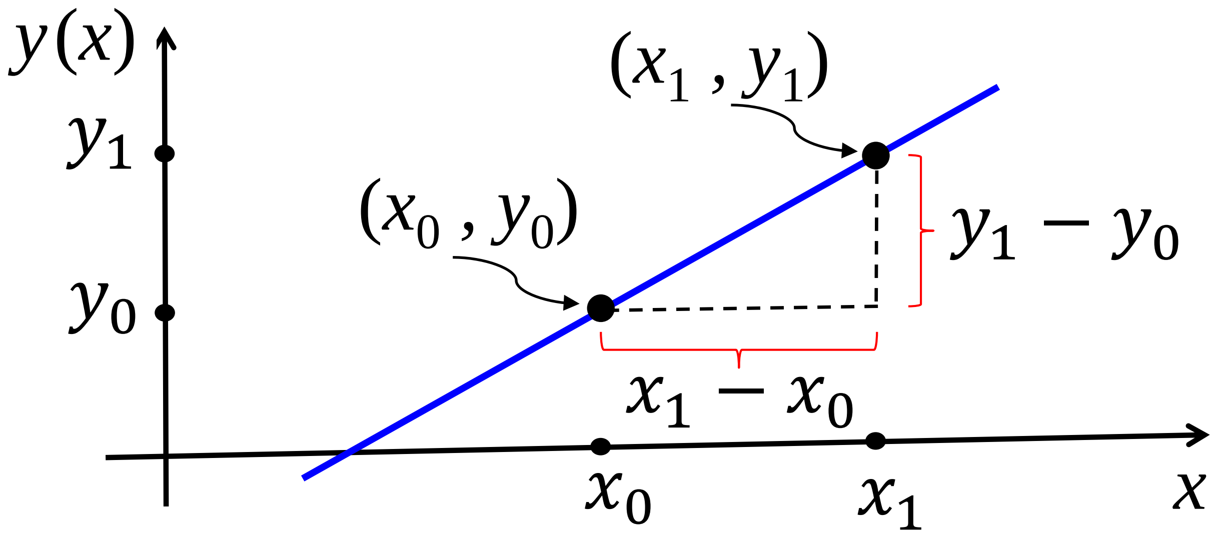
طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة

- لنفترض لدينا الدالة غير الخطية $f(x)$ المعرفة على الفترة $[a, b]$ بحيث أن الدالة $f(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق في هذه الفترة.
- تستخدم طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد x^* جذر الدالة $f(x)$ ، أي أن $f(x^*) = 0$.
  - تبدأ بتخمين لقيمة جذر الدالة ، لنسميه x_0 .
  - نرسم خط المماس للدالة عند النقطة $\left(x_0, f(x_0)\right)$.
  - نقطة تقاطع خط المماس مع المحور x هي النقطة التخمينية الجديدة x_1 .
  - نعيد هذه العملية من النقطة التخمينية الجديدة x_1 ، وهكذا حتى نصل لجذر الدالة أو قريبا منه.

طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة

- طريقة بسيطة وسريعة وتستخدم بشكل واسع، ولكن في بعض الحالات تكون بطيئة أو تفشل في الوصول للجذر:
  - في بعض الأحيان من الصعب إيجاد المشتقة أو ليس سهلا حسابها.
  - التخمين المبدئي لقيمة جذر الدالة ، x_0 ، يؤثر على فعالية الطريقة ، كلما كانت قريبة من الجذر كان أفضل. قد تفشل الطريقة أو تكون بطيئة بسبب اختيار x_0 .
  - عندما تواجه الطريقة نقطة ساكنة ، أي أن $f'(x_n) = 0$ ، مما يعني التوقف.

طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة



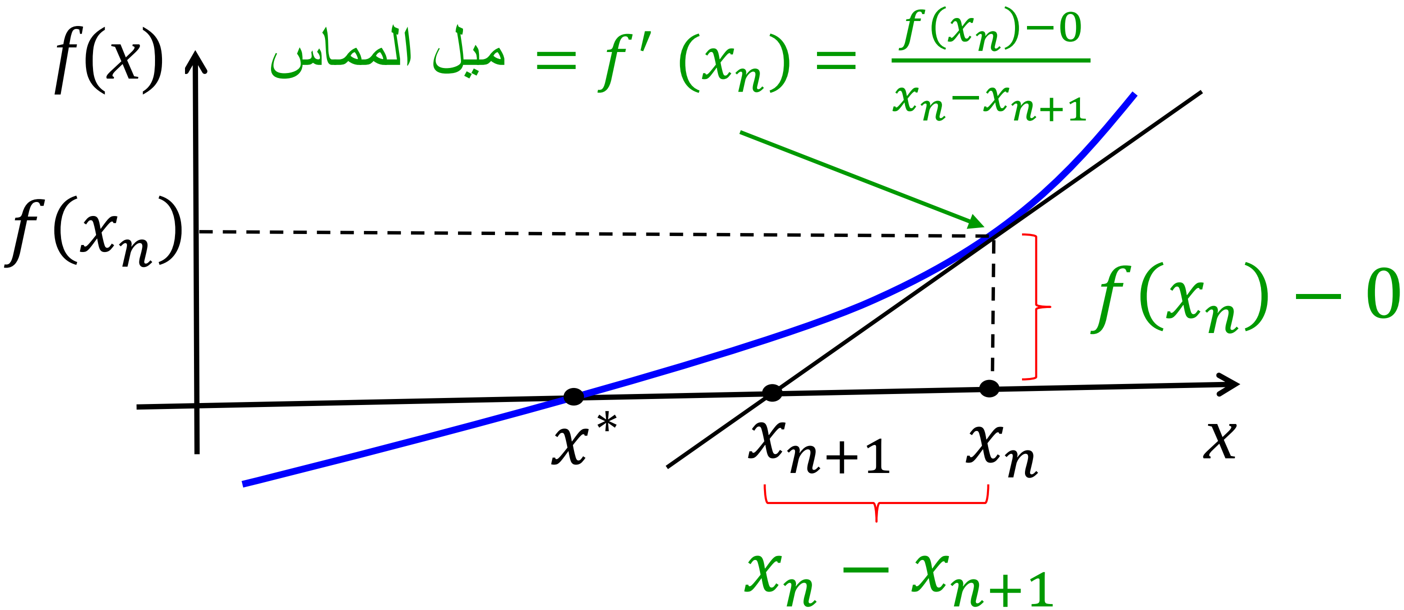
ميل المستقيم:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

- معادلة المستقيم هي: $y(x) = mx + c$
- معادلة المستقيم المار في النقطة المعلومة $(x_0\,, y_0)$ وأي نقطة أخرى $(x\,, y)$ على المستقيم هي:

$$y(x) = y_0 + m(x - x_0)$$

طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة



- معادلة مستقيم المماس (التقريب الخطي) للمنحنى عند النقطة $(x_n, f(x_n))$:

$$y(x) = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$$

- لنفترض أن $y(x) = 0$ عند النقطة x_{n+1} . أي أن:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n)$$

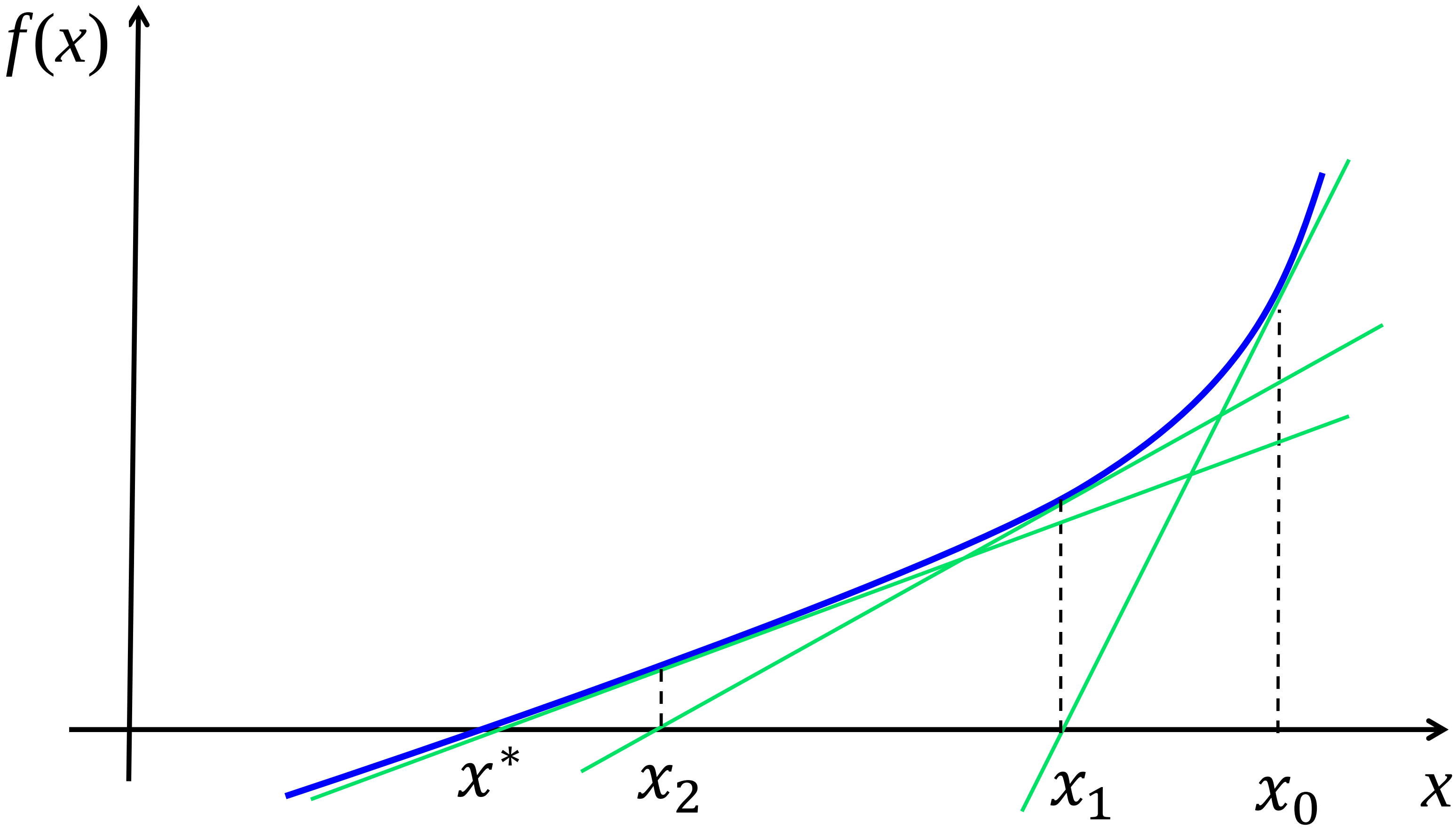
طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة

- بإعادة ترتيبها ، نحصل على صيغة نيوتن – رافسون :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- النقطة x_{n+1} تكون في العادة تخمين أفضل لقيمة الجذر x^* .
- نخمن قيمة x_0 ، ثم نستمر إلى نحصل على $|f(x_{n+1})| \leq \varepsilon$ حيث ε قيمة موجبة قريبة من الصفر.

طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة



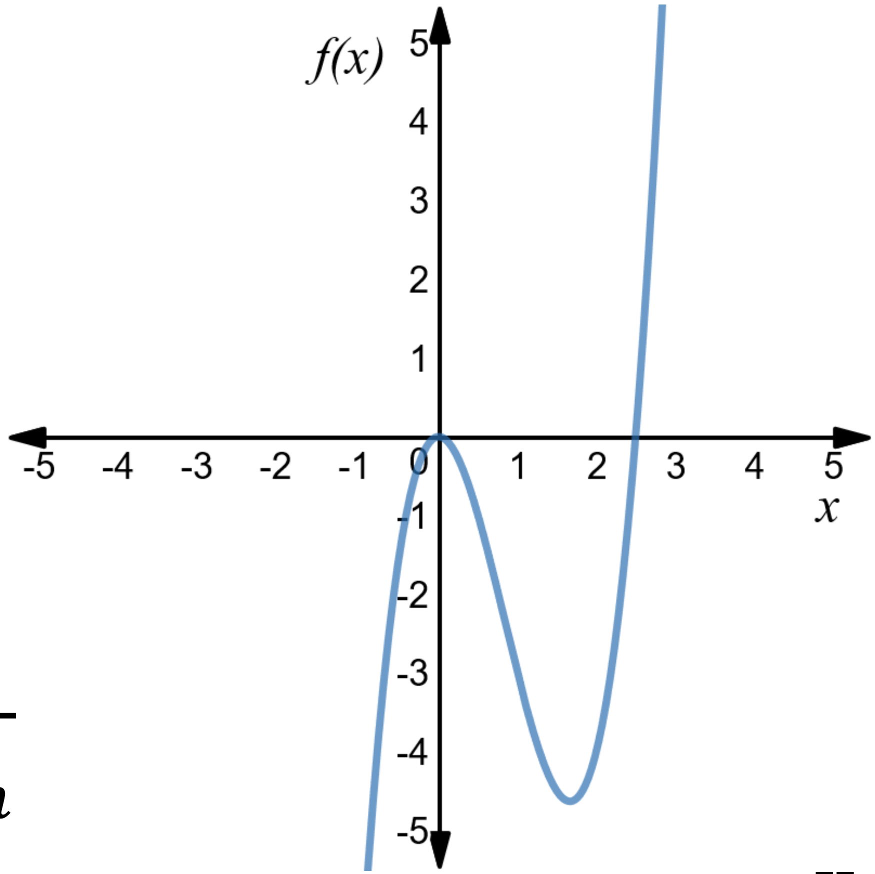
طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة

<u>مثال</u>: أوجد جذر الدالة التالية باستخدام طريقة نيوتن-رافسون:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2$$

مستخدما $x_0 = 4$

و $\varepsilon = 0.01$



- الحل -

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n^3 - 5x_n^2}{6x_n^2 - 10x_n}$$

طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة

الحل:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$
0	4	48	56	3.143	12.704
1	3.143	12.704	27.841	2.687	2.7
2	2.687	2.7	16.45	2.523	0.293
3	2.523	0.293	12.963	2.5	0

نلاحظ أن $\lvert f(x_{n+1})\rvert \le \varepsilon$

إذا $x^* = x_4 = 2.5$

طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة

مثال: أوجد قيمة $\sqrt{3}$ باستخدام طريقة نيوتن–رافسون.

- الحل -

نحتاج إيجاد قيمة $x = \sqrt{3}$

أو $x^2 = 3$ بحيث أن $x > 0$

أو $x^2 - 3 = 0$ بحيث أن $x > 0$

هذا مكافئ لإيجاد جذر موجب للدالة: $f(x) = x^2 - 3$

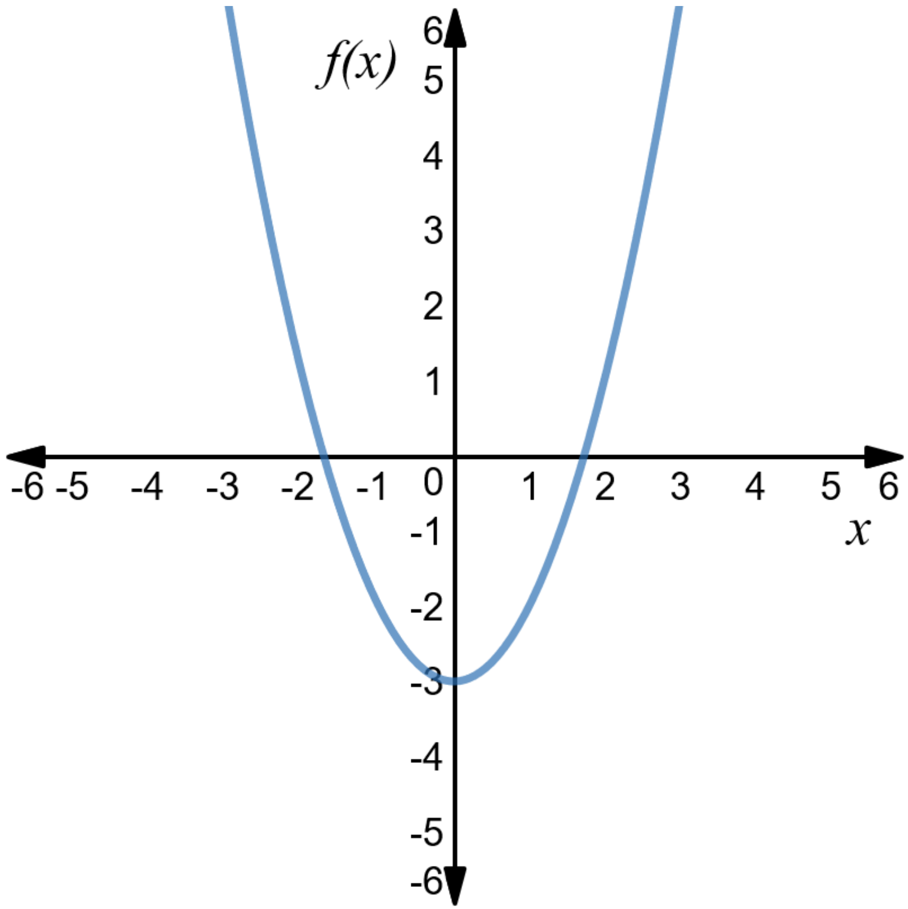
طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة

<u>مثال</u>: أوجد جذر الدالة التالية باستخدام طريقة نيوتن-رافسون:

$$f(x) = x^2 - 3$$

مستخدما $x_0 = 2$

و $\varepsilon = 0.01$



- الحل -

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n}$$

طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة

الحل:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$
0	2	1	4	1.75	0.0625
1	1.75	0.0625	3.5	1.7321	0.0002

نلاحظ أن $\varepsilon \geq \lvert f(x_{n+1})\rvert$

إذا $x^* = x_2 = 1.7321$

لو بدأنا بـ $x_0 = 4$ ، سنحصل على:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$
0	4	13	8	2.375	2.641
1	2.375	2.641	4.75	1.819	0.309
2	1.819	0.309	3.638	1.734	0.007

طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد جذر الدالة

<u>مثال</u>: لإيجاد قيمة $\sqrt{2}$ باستخدام طريقة نيوتن – رافسون، سنحصل على القيم التالية (باستخدام التقريب لـ 61 خانة عشرية و $x_0 = 1$):

```
1
1.5
1.41666666666666666666666666666666666666666666666666666666666675
1.41421568627450980392156862745098039215686274509803921568627450
1.41421356237468991062629557889013491011655962211574404458490 57
1.4142135623730950488016896235025302436149819257761974284982890
1.4142135623730950488016887242096980785696718753772340015610125
1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766796
```

الارقام الغامقة هي الخانات الصحيحة لقيمة $\sqrt{2}$. لاحظ احتجنا فقط لسبع خطوات لنحصل على قيمة صحيحة لـ $\sqrt{2}$ إلى حد 61 خانة عشرية !

طريقة نيوتن-رافسون للبرمجة غير الخطية

للمسألة غير الخطية التالية:

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &\text{s.t.} \quad a \le x \le b \end{aligned} \qquad \text{or} \qquad \begin{aligned} &\max \quad f(x) \\ &\text{s.t.} \quad a \le x \le b \end{aligned}$$

بحيث أن الدالة $f(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق مرتين وأحادية المنوال في الفترة $[a\,,b]$.

- نستخدم طريقة نيوتن-رافسون لإيجاد x^* جذر الدالة $f'(x)$ ، أي أن $f'(x^*) = 0$.
- نستخدم الصيغة التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

طريقة نيوتن-رافسون للبرمجة غير الخطية

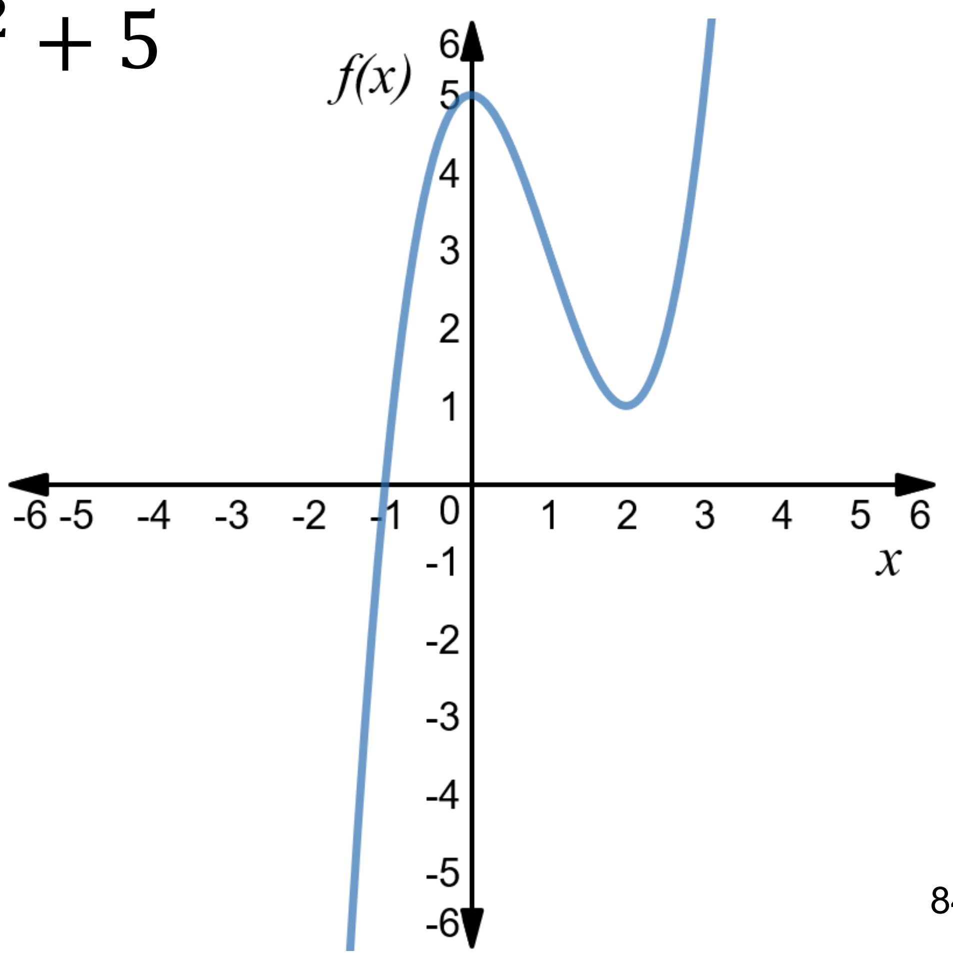
<u>مثال</u>: أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة نيوتن-رافسون:

$$\min \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

$$\text{s.t.} \quad 1 \le x \le 5$$

مستخدما $x_0 = 4$

و $\varepsilon = 0.01$



طريقة نيوتن-رافسون للبرمجة غير الخطية

مثال: أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة نيوتن-رافسون:

$$\min \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

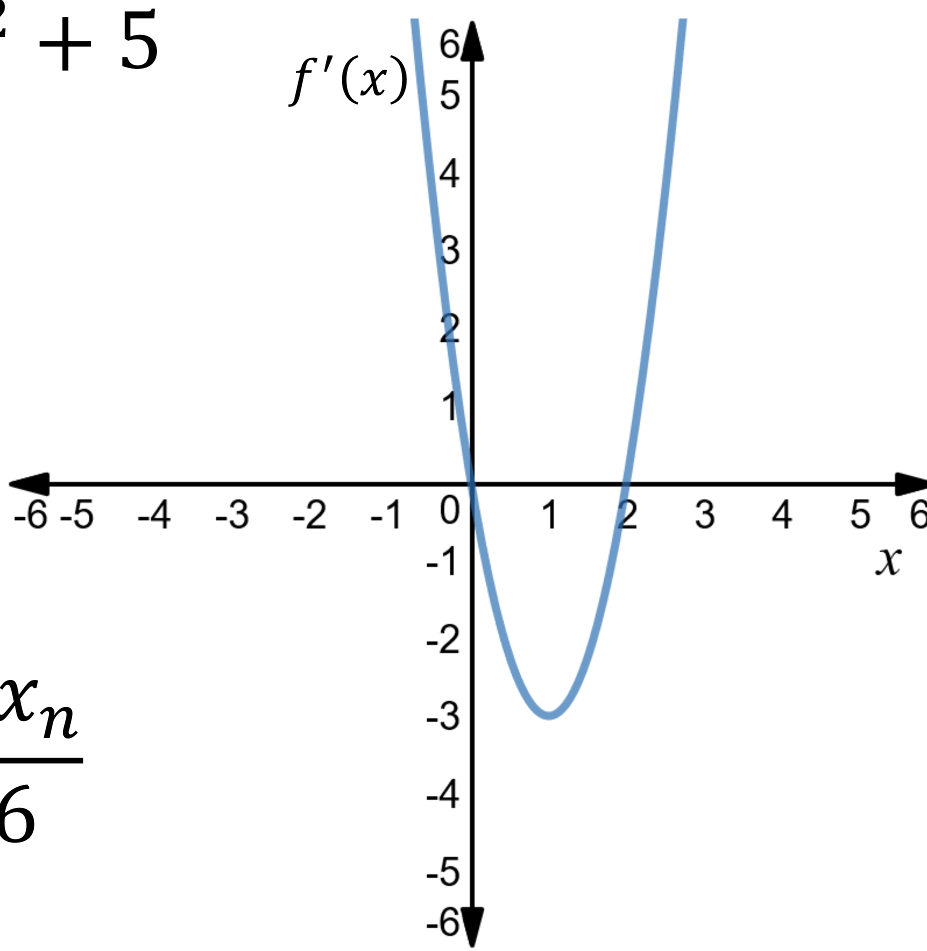
$$\text{s.t.} \quad 1 \le x \le 5$$

مستخدما $x_0 = 4$

و $\varepsilon = 0.01$

- الحل -

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n^2 - 6x_n}{6x_n - 6}$$



طريقة نيوتن-رافسون للبرمجة غير الخطية

n	x_n	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	x_{n+1}	$\lvert f'(x_{n+1})\rvert$
0	4	24	18	2.667	5.337
1	2.667	5.337	10.002	2.133	0.851
2	2.133	0.851	6.798	2.008	0.048
3	2.008	0.048	6.048	2.000	0

نلاحظ أن $\lvert f'(x_{n+1})\rvert \leq \varepsilon$ ، إذا $x^* = x_4 = 2.000$

طريقة نيوتن-رافسون للبرمجة غير الخطية

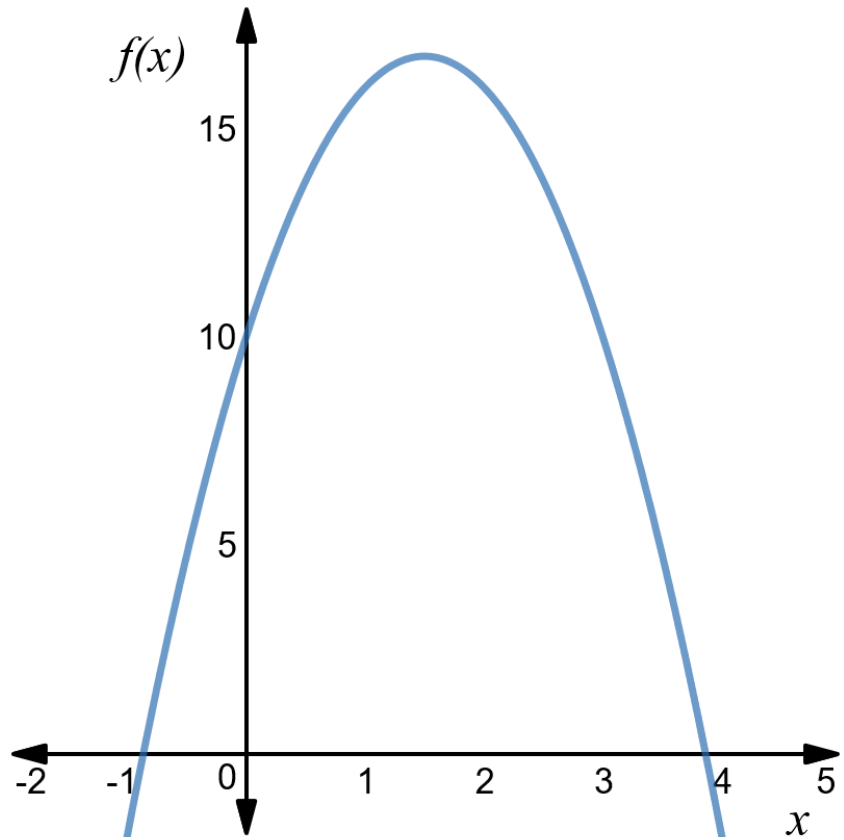
مثال: أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة نيوتن-رافسون:

$$\max \quad f(x) = -3x^2 + 9x + 10$$

$$\text{s.t.} \quad -1 \le x \le 5$$

مستخدما $x_0 = 4$

و $\varepsilon = 0.01$



طريقة نيوتن-رافسون للبرمجة غير الخطية

<u>مثال</u>: أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة نيوتن-رافسون:

$$\max \quad f(x) = -3x^2 + 9x + 10$$

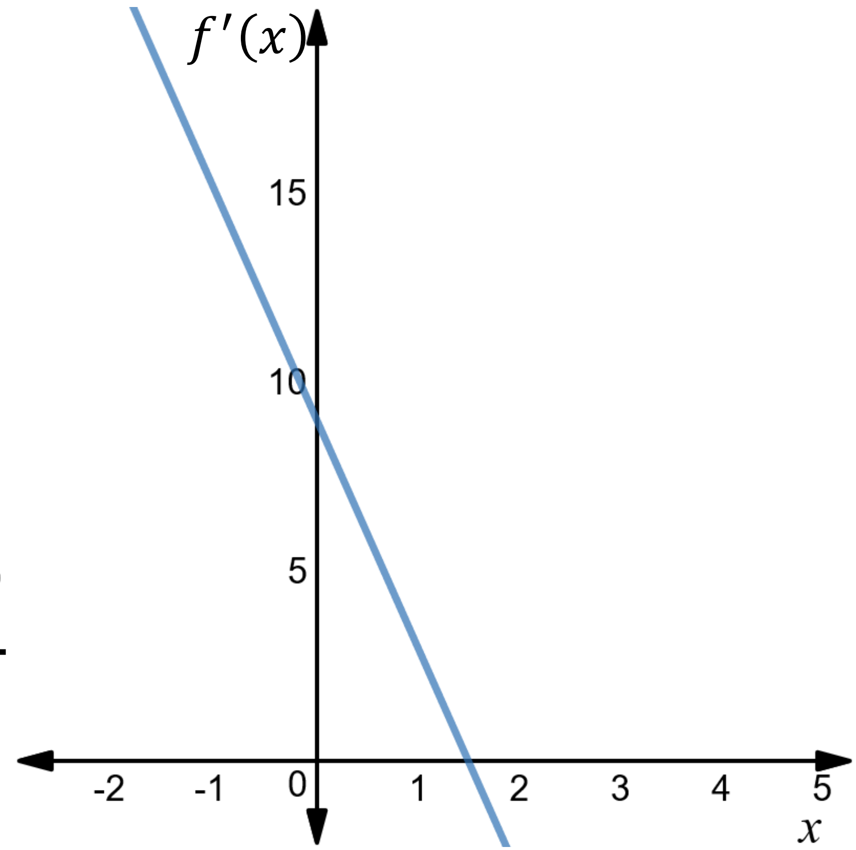
$$\text{s.t.} \quad -1 \leq x \leq 5$$

مستخدما $x_0 = 4$

و $\varepsilon = 0.01$

- الحل -

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-6x_n + 9}{-6}$$



طريقة نيوتن-رافسون للبرمجة غير الخطية

n	x_n	$f'(x_n)$	$f''(x_n)$	x_{n+1}	$\|f'(x_{n+1})\|$
0	4	-15	-6	1.5	0

نلاحظ أن $|f'(x_{n+1})| \leq \varepsilon$ ، إذا $x^* = x_1 = 1.5$

لاحظ أنه لأي قيمة نفترضها لـ x_0 ، سنحصل دائما على $x_1 = 1.5$ وبالتالي $|f'(x_1)| = 0$ ، لماذا ؟

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-6x_n + 9}{-6} = \cancel{x_n} - \frac{\cancel{6}\cancel{x_n}}{\cancel{6}} + \frac{9}{6}$$